

POLITEXT

Sebastià Xambó Descamps

# Geometria

EDICIONS UPC

**POLITEXT 60**

# **Geometria**

POLITEXT

Sebastià Xambó Descamps

# Geometria

EDICIONS UPC

Aquesta obra fou guardonada en el quart concurs  
"Ajut a l'elaboració de material docent" convocat per la UPC.

Primera edició: febrer de 1997  
Segona edició: setembre de 2001

Aquest llibre s'ha publicat amb la col·laboració  
del Comissionat per a Universitats i Recerca  
i del Departament de Cultura de la Generalitat de Catalunya.

En col·laboració amb el Servei de Llengües i Terminologia de la UPC

Disseny de la coberta: Manuel Andreu

© Sebastià Xambó, 1997

© Edicions UPC, 1997  
Edicions de la Universitat Politècnica de Catalunya, SL  
Jordi Girona Salgado 31, 08034 Barcelona  
Tel.: 934 016 883 Fax: 934 015 885  
Edicions Virtuals: [www.edicionsupc.es](http://www.edicionsupc.es)  
A/e: [edicions-upc@upc.es](mailto:edicions-upc@upc.es)

Producció: CPDA  
Av. Diagonal 647, ETSEIB, 08028 Barcelona

Dipòsit legal: B-14.889-2001  
ISBN: 84-8301-511-0

Són rigorosament prohibides, sense l'autorització escrita dels titulars del copyright, sota les sancions establertes a la llei, la reproducció total o parcial d'aquesta obra per qualsevol procediment, inclosos la reprografia i el tractament informàtic, i la distribució d'exemplars mitjançant lloguer o préstec públics.



# Índex

|                                                     |            |
|-----------------------------------------------------|------------|
| <b>Pròleg a la segona edició</b>                    | <b>v</b>   |
| <b>Introducció</b>                                  | <b>vii</b> |
| <b>0 Geometria clàssica</b>                         | <b>1</b>   |
| 0.1 Triangles i circumferències . . . . .           | 2          |
| 0.2 Semblances . . . . .                            | 12         |
| 0.3 Problemes . . . . .                             | 27         |
| 0.4 Indicacions . . . . .                           | 36         |
| 0.5 La Raquel i en Pau resolen problemes . . . . .  | 41         |
| 0.6 Mostra de solucions . . . . .                   | 53         |
| <b>1 Geometria afi</b>                              | <b>57</b>  |
| 1.1 Espai afi . . . . .                             | 58         |
| 1.2 Varietats lineals . . . . .                     | 65         |
| 1.3 Referència afi . . . . .                        | 71         |
| 1.4 Aplicacions afins . . . . .                     | 80         |
| 1.5 Problemes . . . . .                             | 93         |
| <b>2 Geometria mètrica</b>                          | <b>97</b>  |
| 2.1 Espai euclidià . . . . .                        | 99         |
| 2.2 Perpendicularitat . . . . .                     | 108        |
| 2.3 Volums . . . . .                                | 118        |
| 2.4 Producte vectorial . . . . .                    | 126        |
| 2.5 Semblances i desplaçaments . . . . .            | 136        |
| 2.6 Problemes . . . . .                             | 153        |
| <b>3 Geometria projectiva</b>                       | <b>161</b> |
| 3.0 De la perspectiva a l'espai projectiu . . . . . | 162        |
| 3.1 Espai projectiu . . . . .                       | 168        |

---

|          |                                                            |            |
|----------|------------------------------------------------------------|------------|
| 3.2      | Configuracions de punts. Referències projectives . . . . . | 178        |
| 3.3      | Projectivitats . . . . .                                   | 189        |
| 3.4      | Raó doble . . . . .                                        | 200        |
| 3.5      | Dualitat . . . . .                                         | 210        |
| 3.6      | Problemes . . . . .                                        | 220        |
| <b>4</b> | <b>Còniques i quàdriques</b>                               | <b>225</b> |
| 4.0      | Seccions còniques . . . . .                                | 225        |
| 4.1      | Còniques del pla euclidià . . . . .                        | 239        |
| 4.2      | Invariants euclidians de les còniques . . . . .            | 252        |
| 4.3      | Quàdriques . . . . .                                       | 260        |
| 4.4      | Invariants de les quàdriques . . . . .                     | 276        |
| 4.5      | Aspectes projectius de les quàdriques . . . . .            | 283        |
| 4.6      | Problemes . . . . .                                        | 288        |
|          | <b>Bibliografia</b>                                        | <b>293</b> |
|          | <b>Índex alfabètic</b>                                     | <b>295</b> |

## Pròleg a la segona edició

En la segona edició de la versió catalana d'aquest llibre, s'han corregit totes les errades detectades des de la primera edició.

Estic agraït als estudiants de l'assignatura de Geometria de la Facultat de Matemàtiques i Estadística (FME) de la UPC que han tingut l'amabilitat de fer-me arribar les seves observacions, i que he tingut en compte en gairebé tots els casos. En aquest sentit, he de fer una menció especial de Jordi Solà i de Joan C. Mestres, que m'han fet arribar els resultats de la seva meticulositat exhaustiva en la lectura de diverses parts del text.

Com sempre, he tingut també en compte les llistes de correccions que m'han fet arribar els professors Francesc Prats i Ferran Hurtado, del Departament de Matemàtica Aplicada II de la UPC, als quals tinc el deure agradable d'agrair aquí la seva dedicació i generositat.

En tot cas, però, de les errades i mancances que indefectiblement s'aniran descobrint d'ara endavant només n'és responsable l'autor.

A més de correccions gramaticals i tipogràfiques, en unes poques ocasions s'han introduït lleugeres modificacions en la redacció. La més extensa ha estat en l'enunciat 1.12 (pàg. 64): s'ha suprimit la condició « $P + 0 = P$  per a tot  $P \in \mathbb{A}$ », ja que és innecesària, i s'han introduït les modificacions corresponents en la redacció de la prova.

També es pot esmentar que l'exercici E.1.20 (pàg. 71) s'ha posat al final de la secció 1.2, en lloc de just després de l'exercici E.1.9, ja que fa referència a conceptes que en aquest indret encara no s'han vist. A més, la seva redacció s'ha ampliat amb un parell de frases per tal que l'enunciat sigui més explícit i autocontingut.

S'ha afegit una referència a la bibliografia i, com a conseqüència, s'ha hagut de modificar la nota bibliogràfica continguda a la introducció de la primera edició. Altrament, aquesta introducció coincideix exactament amb la de la primera edició (llevat que s'ha actualitzat l'adreça electrònica de l'autor).

La darrera modificació que volem esmentar és que s'ha millorat considerablement l'índex alfabètic que figura al final del llibre, tant pel que fa a la formulació d'algunes entrades, com pel fet que se n'hi han afegit d'altres.

En la preparació d'aquesta edició també m'ha ajudat el professor Josep Grané, del Departament de Matemàtica Aplicada II de la UPC: alguns gràfics de la primera edició

no es visualitzaven correctament en l'entorn informàtic actual i li he d'agrair la gentilesa d'haver-los processat per tal que els pugui continuar utilitzant.

Finalment, gràcies de nou a la meva esposa Elionor, ja que sense el seu suport constant tasques com la que ens ocupa no serien realment possibles.

L'autor

L'Escala

Abril de 2001

## Introducció

En essència, la teoria exposada en aquest text coincideix amb la de l'assignatura troncal de la Facultat de Matemàtiques i Estadística de la Universitat Politècnica de Catalunya anomenada «Geometria», la qual ha estat impartida per l'autor en els tres darrers cursos.

Per a la determinació dels continguts, i de la seva presentació, hem considerat diversos factors. Diguem ja que una idea directriu, en el rerefons, ha estat la voluntat de tenir present la llarga i il·lustre història de la geometria, que des d'Euclides ha estat un model de coneixement que han seguit, refinat i ampliat, els esperits més clarividents, tant en tasques de fonamentació matemàtica com en les de modelització de la realitat.

Com que l'assignatura s'imparteix en el segon quadrimestre del primer curs, es dona la circumstància favorable que els estudiants ja coneixen les nocions bàsiques d'àlgebra lineal que són imprescindibles per a una exposició eficaç de la matèria.

Per altra banda, en un primer curs de geometria hi poden concórrer altres circumstàncies menys propícies. N'hi ha una que sembla força general: els coneixements amb què s'arriba avui a la universitat solen ser deficitaris en aspectes bàsics del llenguatge geomètric, amb la subsegüent minva del ventall de recursos per a la resolució de problemes. També es pot donar el cas que el curs del qual parlem sigui l'únic quadrimestre obligatori disponible per tractar, al costat de la geometria afí i euclidiana, les idees bàsiques de geometria projectiva i algunes nocions fonamentals sobre còniques i quàdriques.

Amb aquestes condicions de contorn, només es pot aspirar a tractar els conceptes més bàsics, i les seves interrelacions més fonamentals, i a incloure una mostra dels problemes que permeten resoldre. Aquest nucli de coneixements, important tot i que és més reduït del que potser seria desitjable, és el que recollim en el text i el que ha de permetre que aspectes més específics de la formació geomètrica es puguin considerar ulteriorment, si arriba el cas, segons el context de docència, de recerca o de treball en què es trobi cadascú. Així, pot esdevenir que en un curs sobre compactació d'imatges s'hagin de considerar prèviament algunes qüestions de geometria afí; que en un curs sobre geometria computacional s'hagi de fer esment de complements de geometria mètrica; o que en cursos sobre mètodes de factorització en criptografia, o sobre codificació, s'hagin

de tractar primer alguns punts de geometria projectiva necessaris per poder discutir aquests temes amb una preparació apropiada.

Per respondre als reptes que hem esmentat, i per contrast amb el mètode sintètic (o axiomàtic) de la geometria clàssica (vegeu, per exemple, la *Geometria mètrica* de Puig-Adam), tenim a favor que es pot fer una exposició sistemàtica i eficient de la geometria basant-se en l'àlgebra (mètode algebraic o analític). És el camí que seguim en aquest text, no tan sols per raons d'economia conceptual, sinó perquè la teoria és més general, com cal que ho sigui per poder-la utilitzar en cursos paral·lels o posteriors, i considerablement més potent pel que fa a les aplicacions. Sorgeix la paradoxa, endemés, que amb el mètode algebraic es pot aprofundir considerablement en la natura de la geometria, seguint les directrius donades per F. Klein fa més d'un segle en el seu Programa d'Erlangen, segons les quals l'essència d'una geometria és el seu *grup de transformacions*. De fet, és l'observança d'aquesta idea la que explica la manera com s'ha agrupat la matèria dels capítols 1-3 («Geometria afí», «Geometria mètrica» i «Geometria projectiva», respectivament) i també la manera d'estudiar les figures de segon grau al capítol 4 («Còniques i quàdriques»).

El mètode algebraic permet reconstruir, com un cas molt particular, la geometria clàssica (en el sentit que li hem donat abans) i, per tant, aquesta no és estrictament necessària, des d'un punt de vista purament lògic, per seguir el curs. Però la conclusió és molt diferent si ens ho mirem des d'un punt de vista pedagògic, ja que, per tal que el mètode algebraic d'exposar la geometria pugui arrelar amb força i donar els seus fruits, és imprescindible conèixer els conceptes i fets geomètrics més bàsics i saber-los usar per a la resolució de problemes. És per això que hem inclòs un capítol 0 sobre geometria clàssica que pugui usar-se tant per repassar (o estudiar) els esmentats conceptes i fets, com per familiaritzar-se amb la mena de problemes que permeten resoldre. No és un capítol lògicament autocontingut, ja que presuposem un coneixement intuïtiu de les nocions i els enunciats més elementals sobre punts, rectes, angles, circumferències, etc. Tal com hem dit anteriorment, però, la teoria dels capítols 1 i 2 ens permet donar una fonamentació matemàtica adequada d'aquests coneixements. Així ho farem en aquest text i, ensems, donarem referències precises, als llocs oportuns, per tal de guiar el lector sobre aquestes interrelacions.

Els exercicis intercalats en el text es distingeixen amb el símbol **E**, seguit del número de l'exercici dins del capítol, i, atès que formen part del contingut del curs, es recomana al lector que els resolgui tan bon punt cregui que ja ha entès la matèria precedent. El signe [◊] al final d'una afirmació significa que es considera que la prova d'aquesta és fàcil o rutinària, però potser no totalment immediata, i per tant es recomana que el lector la comprovi efectivament abans de prosseguir la lectura. El símbol □ indica el final d'una demostració o d'un enunciat la demostració del qual és clara pel context.

Al final de cada capítol hi ha una llista de problemes. Aquests problemes no són estrictament necessaris per entendre la teoria, però són importants per aprofundir en la comprensió dels temes tractats, i en la seva significació, raó per la qual es recomana

que el lector els intenti resoldre tan acuradament com li sigui possible. Per a ulteriors referències, però, els problemes es distingeixen amb el símbol **P**, seguit del número del problema dins del capítol.

Els enunciats (proposicions, teoremes, remarques, etc.) es numeren correlativament dins de cada capítol. Per exemple, una referència a la «proposició 2.5» ens remet al cinquè enunciat del capítol **2**, el qual reconeixem per la capçalera **2.5 Proposició**. Les fórmules numerades també es numeren correlativament dins de cada capítol, independentment de la numeració dels enunciats, i amb números disposats a la dreta de la pàgina. Per evitar confusions amb l'altra numeració, els números de les fórmules es posen entre claudàtors. Així, la «fórmula [2.5]» fa referència a la cinquena fórmula numerada del capítol **2**, la qual és, precisament, l'assenyalada pels símbols [2.5] escrits al final de la seva línia. Com que els *apartats* (títols dins d'una secció, distingits amb lletra cursiva negreta gran), *subapartats* (títols dins un apartat, distingits amb lletra negreta normal) i *epígrafs* (títols dins un subapartat, distingits amb lletra cursiva negreta petita i acabats amb punt i seguit) no porten numeració, ens hi referim donant el títol complet i la pàgina en la qual es troben.

### Nota bibliogràfica

Citem algunes referències que poden ser útils al lector per aprofundir en l'estudi de la geometria.

- Geometria clàssica: [1, 2, 3, 4].
- Referències generals: [5]; també [6], si exceptuem la geometria clàssica.
- Àlgebra lineal, geometria afí i geometria euclidiana: [7].
- Geometria projectiva: [8, 9, 10, 11, 12]; vegeu també [14]. Aquests textos també contenen materials relatius a còniques i quàdriques.
- Grups i geometria: [13]; vegeu també [15, 29].
- Textos clàssics: [14, 15].
- Fonaments de la geometria: [16, 17, 18].
- Textos complementaris: [19, 20, 21, 22, 23, 24, 25].
- Història: [26, 27, 28, 29].
- Referències auxiliars: [30] (per qüestions de L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X) i [31] (pels gràfics; les figures s'han dibuixat amb MATHEMATICA 2.2, fent servir el paquet de funcions GX.M, desenvolupat per Josep Grané i l'autor).

## Agraïments

El text ha estat compost amb  $\text{\LaTeX}2_{\epsilon}$ . L'ús d'aquest sistema m'ha estat facilitat per José Luis Ruiz i Gabriel Valiente. La disposició de les figures en el text s'ha fet sota el control de `DIB.STY`, un paquet de macros de  $\text{\TeX}$  desenvolupat per Joan Trias i J. L. Ruiz. La preparació dels gràfics de `MATHEMATICA` per tal de poder ésser usats convenientment per `DIB.STY` s'ha fet amb els programes `SCPS.EXE` i `HPGS13C.EXE`, desenvolupats per J. Grané, i `Ghostscript`, l'interpret de `Postscript` d'Aladdin Enterprises.

També vull agrair els comentaris que J. Grané, F. Hurtado i F. Prats m'han fet després de llegir diverses parts del text i que m'han permès de fer-hi millores i de corregir un bon nombre d'errades. Dels defectes, les insuficiències o els errors que hi puguin subsistir, però, només l'autor n'és responsable.

He d'agrair molt particularment a en Josep M. Mestres la seva enraonada paciència per ajudar-me a polir algunes errades i mancances pel que fa al català d'aquest text, i àdhuc de la seva presentació i estil.

És per a mi un agradable deure fer constar aquí que aquesta obra ha estat possible, en part, perquè la Universitat Politècnica de Catalunya va distingir el seu projecte amb un dels ajuts per a l'elaboració de material docent de la convocatòria del curs 1994-1995. Sense aquest impuls, m'hauria resultat molt més difícil, per no dir gairebé impossible, reunir forces per transformar els apunts, de l'assignatura de geometria del primer curs de la Facultat de Matemàtiques i Estadística de la Universitat Politècnica de Catalunya, en un llibre.

Encara és per a mi una satisfacció agrair molt especialment a la meva esposa, Elionor Sedó i Torres, per l'atmosfera serena i estable que sap suscitar al voltant de les nostres vides, i sense la qual difícilment hauria pogut persistir en l'empresa d'escriure aquesta obra.

Sebastià Xambó i Descamps  
email: `sebastia.xambo@upc.es`

Barcelona  
Gener de 1997



## 0 Geometria clàssica

Raons merament pedagògiques indueixen a creure que l'estudi d'una presentació rigorosa i general de la geometria serà més profitós als qui tinguin un cert coneixement dels conceptes i fets bàsics de la geometria euclidiana clàssica, i una certa iniciació en l'ús d'aquestes eines per a la resolució de problemes.

En consonància amb aquestes idees, aquest capítol conté un promptuari de conceptes bàsics de geometria elemental (seccions 0.1 i 0.2) i una col·lecció de problemes (secció 0.3).

Al lector més interessat en la resolució de problemes de geometria clàssica, li hem de recomanar que comenci a treballar directament la llista de problemes, i que retorni a la matèria del capítol (o a algun dels textos indicats a les referències) només quan ho consideri necessari.

En canvi, al lector més motivat per completar els seus coneixements geomètrics bàsics (una necessitat que, per altra banda, pot ser més general del que el nivell de la nostra exposició podria fer pensar, sobretot atenent al tractament de la geometria que es dona a primària i secundària), li hem de recomanar que estudiï primer les seccions 0.1 i 0.2, fins al punt d'omplir tots els detalls de les demostracions que s'ometen, o de les demostracions de les quals només es donen les pinzellades principals, i de resoldre satisfactòriament els exercicis intercalats.

Per contrast amb els capítols posteriors, en els quals els sistemes geomètrics més importants s'erigeixen sistemàticament a partir d'axiomes convenients, en l'exposició d'aquest es pressuposa un coneixement intuïtiu de les nocions i els enunciats més primitius de la geometria euclidiana plana, com ara els relatius a punts, rectes, angles i circumferències. Evitem així prolixes disquisicions, relatives a la construcció i anàlisi metòdica d'aquests conceptes i enunciats, que no aportarien gaire res als propòsits del capítol i que, en tot cas, es poden formular mitjançant les tècniques desenvolupades en el capítol 2.

## 0.1 Triangles i circumferències

El fet que moltes figures es puguin estudiar relacionant-les amb triangles, com ara quan admeten una triangulació, fa que el triangle s'hagi de considerar com una figura fonamental, i és per aquesta raó que se li dedica un espai considerable en els textos de geometria clàssica. Per altra banda, l'estudi del triangle ha estat inseparable del de la circumferència, bàsicament a causa del fet que tot triangle determina una única circumferència en la qual és inscrit (*circumferència circumscrita*). Com a objecte d'aquesta secció ens hem proposat, doncs, fer una revisió d'algunes de les propietats bàsiques del triangle i d'algunes de les relacions més remarcables entre triangles i circumferències.

### *Propietats bàsiques del triangle*

Si  $ABC$  és un triangle, posarem  $a, b, c$  per indicar els costats oposats a  $A, B, C$ , respectivament. Els angles corresponents als vèrtexs es denotaran  $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ , o  $\alpha, \beta, \gamma$ ; són els angles oposats als costats  $a, b, c$ , respectivament. L'altura corresponent al vèrtex  $A$  es denotarà  $h_A$  o  $h_a$  (i, anàlogament,  $h_B$  o  $h_b$  per al vèrtex  $B$ , i  $h_C$  o  $h_c$  per al vèrtex  $C$ ). Amb les notacions  $AB$  i  $[AB]$  indiquem, respectivament, la recta que uneix els punts  $A$  i  $B$  i el segment (tancat) d'extrems  $A$  i  $B$ . El corresponent segment obert serà denotat  $(AB)$ . La longitud del segment  $[AB]$  serà denotada  $AB$  si pel context no hi ha perill que es pugui confondre amb la recta que uneix  $A$  i  $B$ ; en cas contrari, la denotarem  $|AB|$  o  $\overline{AB}$ .

### **Igualtat de triangles**

Un *desplaçament* és una transformació dels punts del pla que conserva les distàncies (vegeu el subapartat «Desplaçaments», pàg. 13). Dos triangles  $ABC$  i  $A'B'C'$  es diuen *iguals*, o *congruents*, quan hi ha un desplaçament  $\varphi$  tal que  $\varphi(A) = A'$ ,  $\varphi(B) = B'$  i  $\varphi(C) = C'$ . Per als tres *criteris d'igualtat*, o *congruència*, que segueixen, vegeu la figura 0.1.

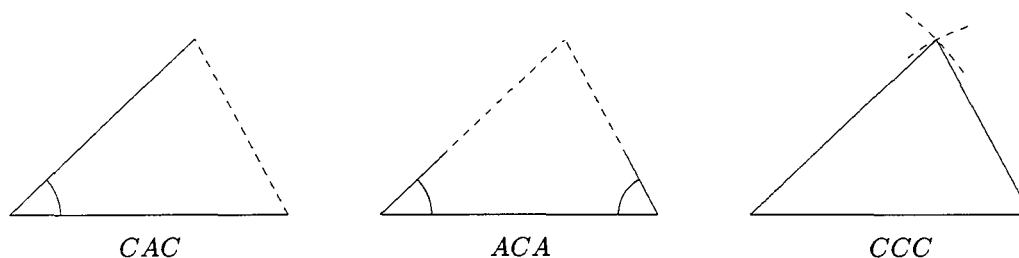


Figura 0.1: *Criteris d'igualtat de triangles*

**Criteri CAC.** Dos triangles són iguals si tenen iguals, respectivament, dos costats i l'angle que formen. En particular, dos triangles rectangles són iguals quan els corresponents catets són iguals.

**Criteri ACA.** Dos triangles són iguals si tenen iguals, respectivament, un costat i els seus dos angles contigus. En particular, dos triangles rectangles són iguals si tenen iguals un catet i el corresponent angle agut.

**Criteri CCC.** Dos triangles són iguals si tenen iguals, respectivament, els tres costats.

### Suma dels angles d'un triangle

La suma dels tres angles de qualsevol triangle és  $\pi$  (figura 0.2).

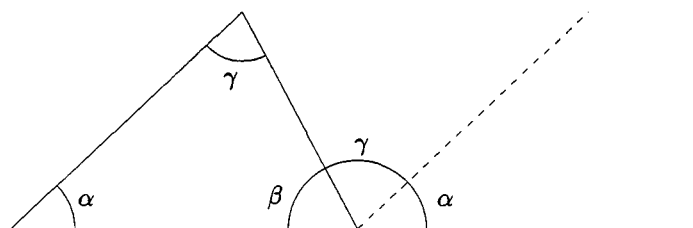


Figura 0.2: Suma dels angles d'un triangle

**E.0.1.** Proveu que l'altura sobre el major dels costats d'un triangle és interior al triangle i inferior a les altres dues altures.

**E.0.2.** Sigui  $P$  el punt a l'interior d'un quadrat  $ABCD$  tal que  $\widehat{PCD} = \widehat{PDC} = 15^\circ$ . Demostreu que el triangle  $ABP$  és equilàter (indicació: formeu un triangle  $BCP'$  congruent amb  $CDP$  i amb  $P'$  interior al quadrat).

### Desigualtat triangular

En un triangle cada costat és inferior a la suma dels altres dos.

**E.0.3.** Donat un punt  $P$  a l'interior d'un triangle  $ABC$ , demostreu que  $AP + BP < AC + BC$ .

### Àrea d'un triangle

S'obté com la meitat del producte d'un costat (base) per la corresponent altura (per exemple, àrea =  $\frac{1}{2}ah_A$ , on  $h_A$  denota l'altura corresponent al vèrtex  $A$ ). També és igual a la meitat del producte de dos costats pel sinus de l'angle que formen (per exemple,  $h_A = b \sin(\gamma)$  i, per tant, àrea =  $\frac{1}{2}ab \sin(\gamma)$ ). Observem que si movem un vèrtex sobre la paral·lela a la base oposada, els triangles resultants tenen tots la mateixa àrea.

**E.0.4.** Donat un quadrilàter convex  $ABCD$ , demostreu que la seva àrea és igual a  $\frac{1}{2}AC \cdot BD \cdot \sin(\alpha)$ , on  $\alpha$  és un qualsevol dels dos angles que formen les *diagonals*  $AC$  i  $BD$ .

**E.0.5** (Teorema de Ceva). Sigui  $ABC$  un triangle i  $X$ ,  $Y$  i  $Z$  punts dels segments oberts  $(BC)$ ,  $(CA)$  i  $(AB)$ , respectivament. Demostreu que les rectes  $AX$ ,  $BY$  i  $CZ$  són concurrents si i només si

$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = 1$$

(si  $AX$ ,  $BY$  i  $CZ$  són concurrents en el punt  $P$ , proveu que  $BX/XC$  és igual al quocient de les àrees dels triangles  $APB$  i  $APC$ ).

D'una recta que uneix un vèrtex  $A$  d'un triangle amb un punt del costat oposat  $[BC]$ , se'n diu una *ceviana* del triangle respecte del vèrtex  $A$ .

### Teorema de Pitàgores

En un triangle rectangle, el quadrat de la hipotenusa és la suma dels quadrats dels catets. Per a una demostració, vegeu l'exercici que segueix.

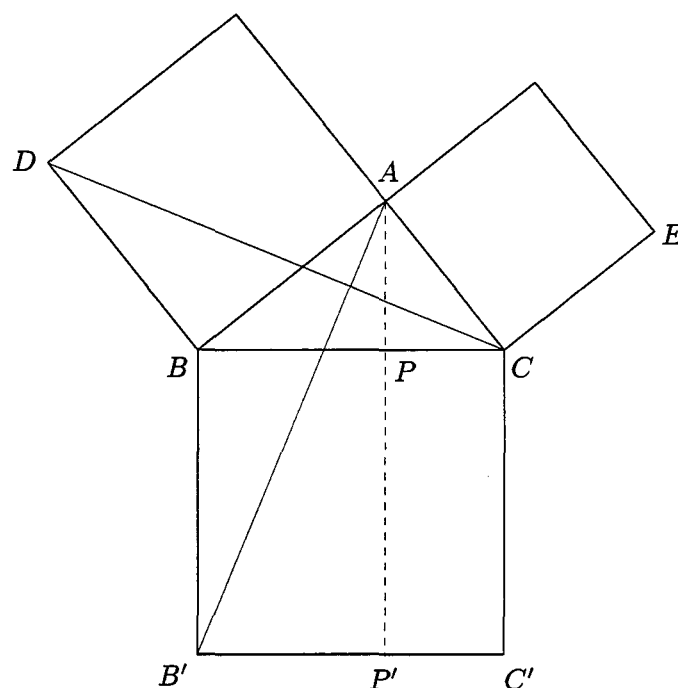


Figura 0.3: Teorema de Pitàgores

**E.0.6.** Amb les notacions de la figura 0.3, mostreu que si el triangle  $ABC$  és rectangle, amb  $A$  l'angle recte, i  $AP$  és l'altura corresponent al vèrtex  $A$ , llavors l'àrea del quadrat  $AD$  és igual

a l'àrea del rectangle  $BPP'B'$ . Deduïu-ne el teorema del catet (vegeu l'epígraf «Teorema del catet», pàg. 18) i el teorema de Pitàgores.

### Teorema del cosinus

En un triangle de costats  $a, b, c$ , es compleix que

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\alpha),$$

on  $\alpha$  és l'angle oposat al costat  $a$  (aquest enunciat es dedueix fàcilment a partir del teorema de Pitàgores aplicat als triangles  $APC$  i  $BPC$ , on  $P$  és el peu de l'altura de  $C$ ).

**E.0.7.** Si dos triangles tenen dos parells de costats respectivament iguals i els corresponents angles desiguals, llavors entre els costats oposats a aquests angles hi ha la mateixa relació de desigualtat.

### Teorema del sinus

En un triangle de costats  $a, b$  i  $c$ , i angles  $\alpha, \beta$  i  $\gamma$ , es compleix que

$$\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b} = \frac{\sin(\gamma)}{c}.$$

Aquesta propietat surt directament de les definicions: si  $h$  és l'altura del vèrtex  $C$  d'un triangle  $ABC$ , llavors  $h = a \sin(\beta) = b \sin(\alpha)$ , d'on resulta la primera de les igualtats. Aplicant el mateix raonament als costats  $b$  i  $c$ , s'obté la segona igualtat. El valor comú dels quocients  $a/\sin(\alpha)$ ,  $b/\sin(\beta)$  i  $c/\sin(\gamma)$  serà determinat al subapartat «Radi de la circumferència circumscrita», pàg. (23).

**E.0.8.** Sigui  $ABC$  un triangle i suposem que  $\beta'$  i  $\gamma'$  són angles tals que  $\alpha + \beta' + \gamma' = \pi$  i  $b/\sin(\beta') = c/\sin(\gamma')$ . Demostreu que  $\beta' = \beta$  i  $\gamma' = \gamma$ .

### Longitud de les mitjanes

Les *mitjanes* d'un triangle són les rectes que uneixen els seus vèrtexs amb els punts mitjans dels costats oposats corresponents.

Si  $M$  és el punt mitjà del costat  $AB$  i  $m = CM$ , on  $ABC$  és un triangle donat, aplicant el teorema del cosinus als triangles  $MAC$  i  $MBC$ , i sumant i restant les dues relacions que s'obtenen, s'arriba fàcilment a les dues relacions següents:

$$a^2 + b^2 = 2\left(\frac{c^2}{4} + m^2\right), \quad a^2 - b^2 = 2cd,$$

on  $d$  és la distància de  $M$  al peu  $P$  de l'altura del vèrtex  $C$  i on hem suposat  $a \geq b$ .

La primera de les relacions anteriors ens permet trobar la mitjana  $m$  en funció dels costats  $a, b, c$ :

$$m^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}.$$

**E.0.9.** Si en un triangle dues mitjanes són iguals, llavors el triangle és isòsceles.

**E.0.10.** Siguin  $A$  i  $B$  dos punts,  $M$  el seu punt mitjà,  $c = AB$  i  $k \geq c^2/2$  un nombre real. Proveu que la circumferència de centre  $M$  i radi  $\sqrt{k/2 - c^2/4}$  coincideix amb el lloc geomètric dels punts tals que la suma dels quadrats de les seves distàncies a  $A$  i a  $B$  és igual a  $k$ .

**E.0.11.** Siguin  $A$  i  $B$  dos punts,  $M$  el seu punt mitjà,  $c = AB$  i  $k \geq 0$  un nombre real. Proveu que el lloc geomètric dels punts tals que la diferència dels quadrats de les seves distàncies a  $B$  i a  $A$  és igual a  $k$ , coincideix amb la recta perpendicular a  $AB$  pel punt del segment  $[AM]$  que és a la distància  $k/(2c)$  de  $M$ .

### *Alguns punts associats a un triangle*

En cada triangle es poden considerar diversos punts que tenen, cada un d'ells, una relació geomètrica remarcable amb el triangle. En aquest apartat considerarem el circumcentre, l'ortocentre, l'incentre i els excentres. Més endavant n'estudiarem d'altres.

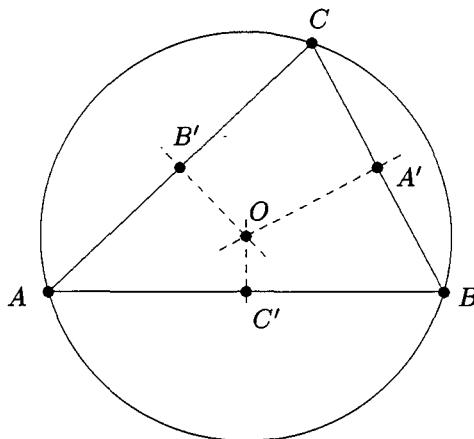


Figura 0.4: *Circumcentre*

### **Circumcentre**

Les mediatrises dels costats d'un triangle  $ABC$  es tallen en un punt,  $O$ , anomenat *circumcentre* del triangle (la *mediatriu* d'un segment és la recta perpendicular pel seu

punt mitjà; els seus punts són precisament els que equidisten dels extrems del segment). Així, doncs, el punt  $O$  equidista dels tres vèrtexs i és, per tant, el centre de l'única circumferència que passa per ells. Aquesta circumferència s'anomena *circumferència circumscrita* del triangle  $ABC$ . També ens hi referim dient que és «la circumferència  $ABC$ » (figura 0.4).

### Ortocentre i triangle òrtic

Les altures d'un triangle es tallen en un punt,  $H$ , anomenat *ortocentre* del triangle (figura 0.5).

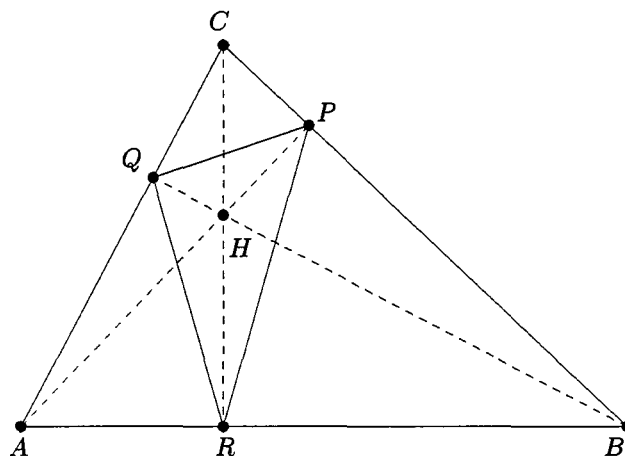


Figura 0.5: Ortocentre i triangle òrtic

Aquesta propietat és una senzilla conseqüència de l'exercici que segueix. El triangle  $PQR$  els vèrtexs del qual són els peus de les altures d'un triangle donat  $ABC$  s'anomena *triangle òrtic* de  $ABC$ .

**E.0.12.** Proveu que les altures d'un triangle són les mediatriss del triangle els costats del qual són les paral·leles pels vèrtexs del primer triangle als corresponents costats oposats (figura 0.6).

### Incentre

Les bisectrius dels angles d'un triangle es tallen en un punt,  $I$ , anomenat *incentre* del triangle (figura 0.7).

La *bisectriu* d'un angle és la recta que el divideix en dos angles iguals; els seus punts són precisament els que equidisten dels dos costats de l'angle. Així, doncs, el punt  $I$  equidista dels tres costats i és, per tant, el centre de la *circumferència inscrita* al triangle, és a dir, la circumferència que és tangent als tres costats.

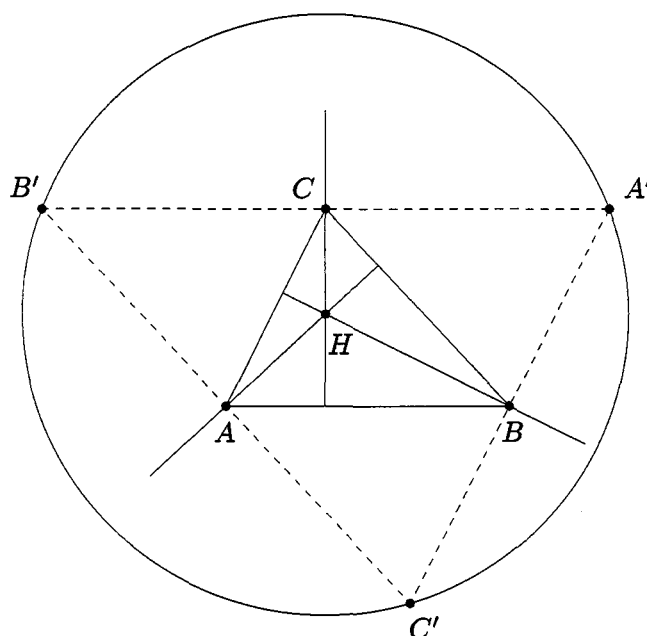


Figura 0.6: *Circumcentre  $A'B'C' = \text{ortocentre } ABC$*

### Excentres

Les bisectrius exteriors de dos angles  $B$  i  $C$  d'un triangle es tallen en un punt  $I_a$  que equidista de les perllongacions dels dos costats ( $c$  i  $b$ ) del tercer angle  $A$  i del costat  $a$  oposat a  $A$ . Per tant, la bisectriu de  $A$  també passa per  $I_a$ , i així  $I_a$  és el centre d'una circumferència que és tangent al costat  $a$  del triangle i a les perllongacions de  $b$  i  $c$  (vegeu la figura 0.7). Es diu que el punt  $I_a$  és l'*excentre* del triangle relatiu al costat  $a$ . Els excentres  $I_b$  i  $I_c$  es defineixen anàlogament. Del fet que la bisectriu i la bisectriu exterior d'un angle d'un triangle siguin perpendiculars  $[\perp]$ , se'n dedueix sense dificultat que les bisectrius d'un triangle són les altures del triangle  $I_a I_b I_c$ , de manera que l'ortocentre d'aquest triangle és  $I$ .

**E.0.13.** Donat un angle  $\widehat{APB}$  i un punt  $P' \neq P$  sobre la seva bisectriu exterior, demostreu que  $|AP| + |BP| < |AP'| + |BP'|$ .

### Circumferències i angles

La relació que hi ha entre un angle i una circumferència té propietats i aplicacions remarcables. Aquest apartat en conté una mostra.



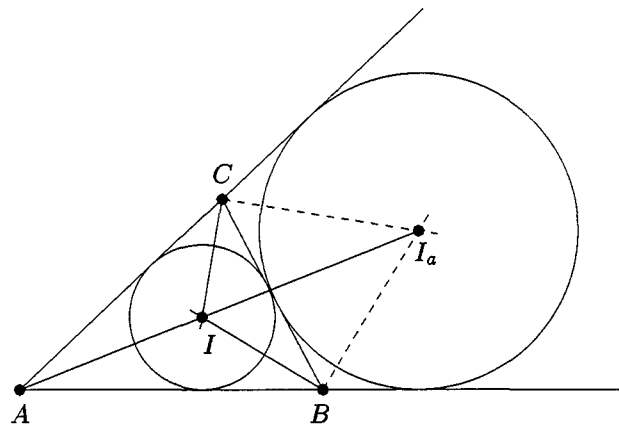


Figura 0.7: Incentre i excentre

### Angle inscrit en una circumferència

Un *angle inscrit* en una circumferència (és a dir, un angle el vèrtex del qual està sobre la circumferència) és la meitat de l'angle central corresponent a l'arc comprès per aquell. És clar, doncs, que el valor de l'angle només depèn de l'arc que comprèn i no de la posició del seu vèrtex sobre la circumferència (figura 0.8).

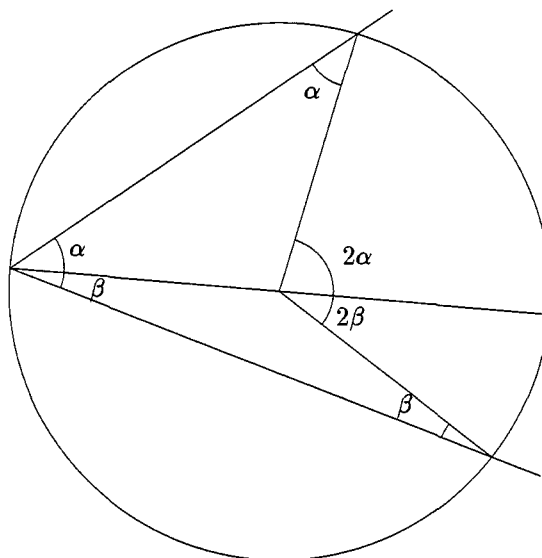


Figura 0.8: Angles inscrits en una circumferència

**E.0.14.** Dos triangles rectangles amb la mateixa hipotenusa tenen la mateixa circumferència circumscriu. A més, el centre d'aquesta circumferència és el punt mitjà de la hipotenusa compartida.

**E.0.15.** Donat un triangle  $ABC$ , siguin  $P, V \in [BC]$  el peu de l'altura de  $A$  i el punt d'intersecció de la bisectriu de  $\hat{A}$  amb  $BC$ . Siguin  $D$  i  $E$  els peus de les perpendiculars a  $AB$  i  $AC$  per  $V$ , respectivament. Demostreu que si  $\alpha = \hat{A}/2$ , llavors  $\widehat{DPB} = \widehat{EPC} = \alpha$ .

Un angle inscrit en una circumferència és recte quan l'arc que comprèn és una semicircumferència (vegeu la figura 0.9.a). Aquesta propietat es pot usar per trobar les tangents a una circumferència  $C$  des d'un punt  $P$  exterior: són (figura 0.9.b) les rectes que uneixen  $P$  amb els punts d'intersecció de  $C$  amb la circumferència que té per diàmetre el segment  $OP$ , on  $O$  és el centre de  $C$ .

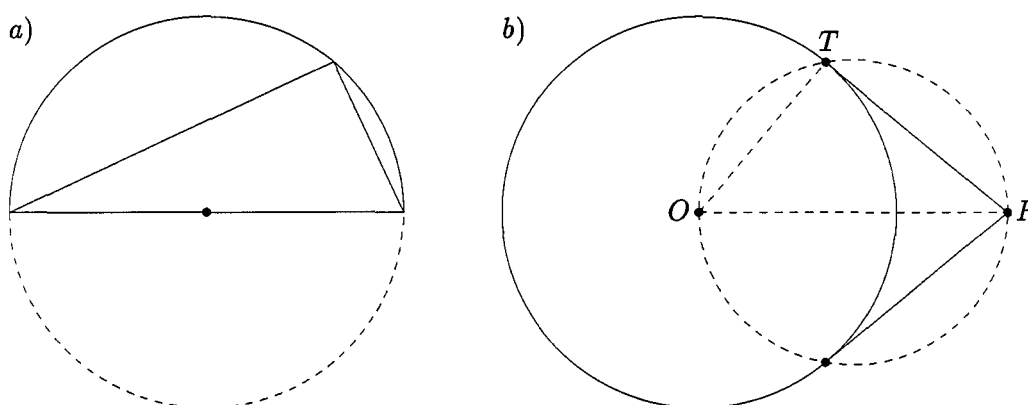


Figura 0.9: a) Angle recte inscrit. b) Tangents des d'un punt a una circumferència

### Angle interior i angle exterior

Un angle el vèrtex del qual és exterior a una circumferència i els dos costats del qual la tallen (s'admet també que un costat de l'angle, o els dos, siguin tangents), és la semidiferència dels dos angles centrals corresponents als dos arcs de la circumferència determinats per l'angle.

Aquesta propietat és una conseqüència immediata del fet que un angle interior  $x$  d'un triangle és, amb les notacions de la figura 0.10.a, la diferència dels angles  $\alpha$  i  $\beta$ .

Anàlogament, un angle, el vèrtex del qual és interior a una circumferència, és la semisuma dels angles centrals corresponents als dos arcs determinats per l'angle (figura 0.10.b).

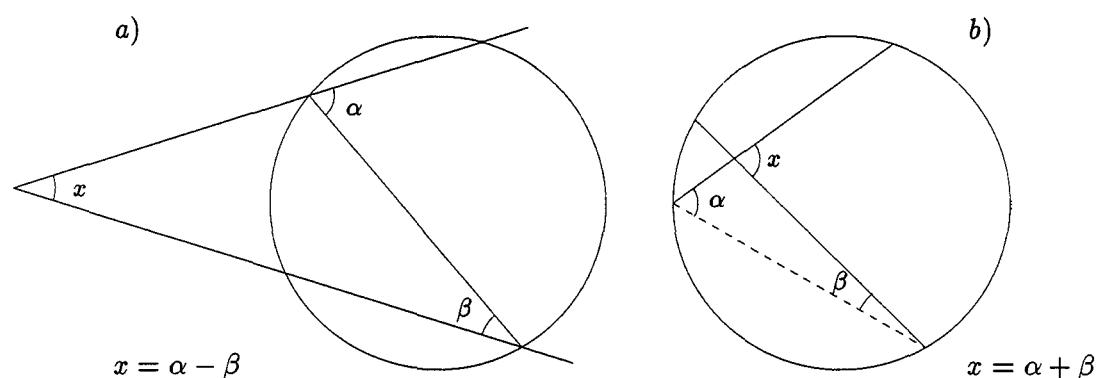


Figura 0.10: Angles exterior i interior a una circumferència

### Arc capaç

Donat un segment  $AB$  i un angle  $\alpha$ , el lloc geomètric dels punts  $P$  d'un dels semiplans definits per  $AB$  i tals que  $\angle APB = \alpha$ , és un arc de circumferència els extrems del qual són  $A$  i  $B$  (d'aquest arc, se'n diu que és l'*arc capaç* de l'angle  $\alpha$  respecte del segment  $AB$ ). Vegem com es pot construir.

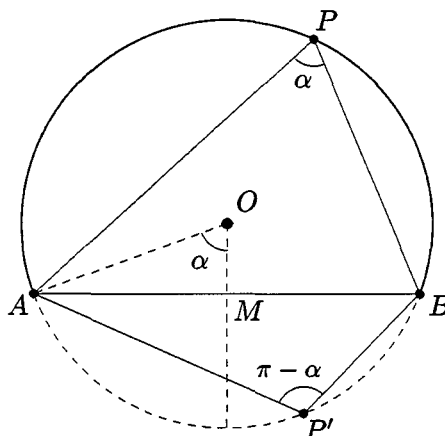


Figura 0.11: Arc capaç d'un angle respecte d'un segment

Suposem primer que  $\alpha \leq \frac{\pi}{2}$ . Sobre la mediatriu de  $AB$  (vegeu la figura 0.11), i en el semiplà en qüestió (a la figura 0.11 suposem que és el semiplà per sobre de  $AB$ ), considerem el punt  $O$  tal que  $\angle AOM = \alpha$ , on  $M$  és el punt mitjà de  $AB$ . Llavors, els

punts  $P$  de la circumferència de centre  $O$  i radi  $OA$  que pertanyen a l'esmentat semiplà són precisament els que compleixen  $\widehat{APB} = \alpha$  i formen, amb les notacions de la figura 0.11, l'arc  $APB$ . Si ara ens fixem que l'arc  $AP'B$  és el capaç de  $\pi - \alpha$  respecte de  $AB$  en el semiplà oposat, esdevé també clar com podem construir l'arc capaç d'un angle  $\beta \in (\pi, 2\pi]$ .

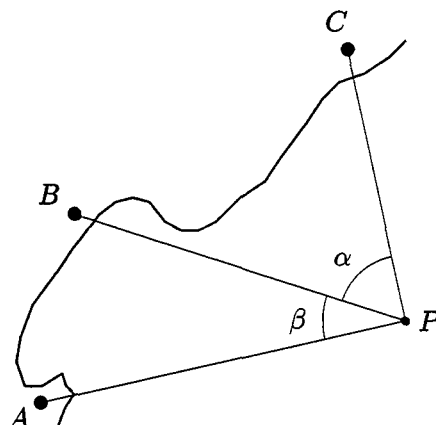


Figura 0.12: Un vaixell determina la seva posició

**E.0.16.** A la figura 0.12, un vaixell situat al punt  $P$  ignora les coordenades d'aquesta posició, però mitjançant un mapa pot obtenir les dels punts  $A$ ,  $B$  i  $C$  situats a la costa i mitjançant un goniòmetre pot determinar els angles  $\alpha$  i  $\beta$ . Podeu obtenir les coordenades de  $P$ , sabent que  $A = (6, 5)$ ,  $B = (10, 28)$ ,  $C = (43, 48)$ ,  $\alpha = 1,04754$  rad i  $\beta = 0,53791$  rad?

### Criteri CAA

Dos triangles són iguals si tenen iguals, respectivament, un costat, un angle contigu a aquest costat i l'angle oposat. En particular, dos triangles rectangles són iguals si tenen iguals les hipotenuses i un angle agut. Aquestes afirmacions es poden obtenir aplicant el subapartat anterior. En particular, la construcció d'un triangle, del qual coneixem un costat, un dels seus angles contigus i l'angle oposat, es pot fer fàcilment construint l'arc capaç de l'angle oposat.

## 0.2 Semblances

En la geometria clàssica, les idees relacionades amb la noció de semblança de figures hi tenen un paper important. Per les necessitats d'aquest capítol, els enunciats més útils són els següents *criteris de semblança de triangles*:

**Criteri CAC.** Dos triangles són semblants si tenen un angle igual i els corresponents costats proporcionals.

**Criteri AA.** Dos triangles són semblants si tenen iguals dos angles corresponents.

**Criteri CCC.** Dos triangles són semblants si els corresponents costats són proporcionals.

El lector que no tingui dubtes sobre el significat i fonament d'aquests criteris, pot ometre l'apartat que segueix i continuar la lectura a l'apartat «Semblances i geometria del triangle».

## Generalitats

En aquest apartat exposem breument els conceptes i enunciats més rellevants relatius a les semblances. Primer considerem els desplaçaments. Després el teorema de Tales, que és l'eina essencial per a l'estudi de les homotècies, i tot seguit les semblances en general. Finalment, revisem les relacions que hi ha entre el producte dels nombres complexos i les semblances.

## Desplaçaments

Un *desplaçament* del pla és una transformació que conserva les distàncies. Els desplaçaments conserven els angles. Un desplaçament es diu *directe* si conserva l'orientació del pla; altrament, es diu *invers*. Les translacions i els girs són exemples de desplaçaments directes. Donats dos punts  $P$  i  $P'$ , posarem  $t_{PP'}$  per denotar l'única translació que transforma  $P$  en  $P'$ . Donats un punt  $O$  i un angle  $\alpha$ , el gir de centre  $O$  i amplitud  $\alpha$  serà denotat  $g_{O,\alpha}$ .

Les simetries són exemples de desplaçaments inversos. La *simetria* respecte de la recta  $\ell$  serà denotada  $s_\ell$ : és la transformació  $P \mapsto P'$  tal que  $P'$  és el simètric de  $P$  respecte de  $\ell$ . La recta  $\ell$  s'anomena *eix* de la simetria.

Es pot veure (cf. capítol 2) que els punts fixos d'un desplaçament directe el classifiquen, en el sentit següent: si no té punts fixos, és una translació; si té exactament un punt fix, és un gir; si té més d'un punt fix és la identitat. Pel que fa als desplaçaments inversos, hi ha dos casos: si té punts fixos, es tracta d'una simetria; altrament, és la composició  $ts_\ell$  d'una simetria  $s_\ell$  amb una translació  $t$  en la direcció de l'eix  $\ell$  (es parla d'una *simetria amb lliscament*).

**E.0.17.** Sigui  $s$  i  $s'$  les simetries respecte de les rectes  $\ell$  i  $\ell'$ . Per estudiar quin desplaçament és la composició  $s's$ , sigui  $\alpha$  l'angle format per  $\ell$  i  $\ell'$  i posem  $O$  per denotar el punt d'intersecció de  $\ell$  i  $\ell'$  quan  $\alpha \neq 0$ , i  $d$  per denotar la distància entre  $\ell$  i  $\ell'$  quan  $\alpha = 0$  (rectes paral·leles). Demostreu que  $s's$  és el gir de centre  $O$  i amplitud  $2\alpha$  si  $\alpha \neq 0$ , i la translació de magnitud  $2d$  segons la direcció perpendicular de  $\ell$  a  $\ell'$  si  $\alpha = 0$ . Noteu que  $s's$  és la identitat si  $\ell = \ell'$ .

**E.0.18.** Sigui  $ABC$  un triangle i construïm quadrats  $ACDS$  i  $BCET$  com a la figura 0.13. Demostreu que el punt  $M$  d'intersecció de l'altura  $h_C$  amb  $DE$  és el punt mitjà del segment  $DE$ .

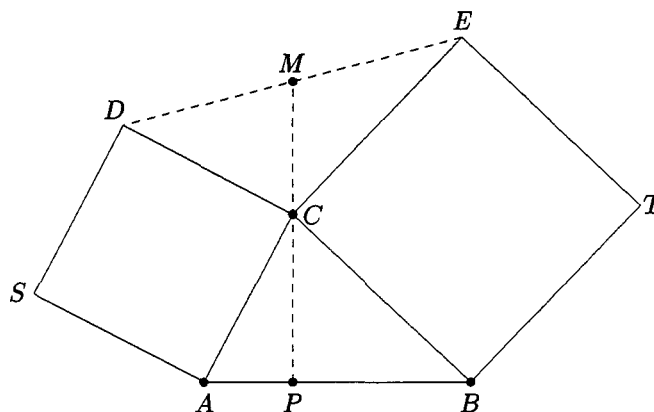


Figura 0.13: L'altura de  $C$  passa pel punt mitjà de  $DE$

### Teorema de Tales

Si dues rectes són tallades per un sistema de rectes paral·leles, els segments així obtinguts sobre una de les rectes són proporcionals als corresponents segments obtinguts sobre l'altra (figura 0.14).

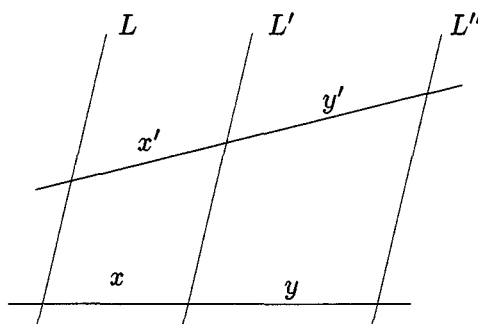


Figura 0.14: Teorema de Tales:  $\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \dots$

**E.0.19.** Si a la figura 0.14 les rectes  $L$  i  $L'$  són paral·leles i  $x/x' = y/y'$ , llavors  $L''$  també és paral·lela a  $L$ .

**E.0.20** (Teorema de Menelau). Sigui  $ABC$  un triangle i  $X$ ,  $Y$  i  $Z$  punts sobre les rectes  $BC$ ,  $CA$  i  $AB$ , respectivament. Demostreu que  $X$ ,  $Y$  i  $Z$  estan alineats si i només si

$$\frac{BX}{CX} \cdot \frac{CY}{AY} \cdot \frac{AZ}{BZ} = 1;$$

convenim que un quocient com ara  $BX/CX$  és positiu o negatiu segons que  $X$  sigui exterior o interior al segment  $[BC]$  (indicació: si  $X$ ,  $Y$  i  $Z$  estan sobre una recta  $L$  i  $d_A$ ,  $d_B$  i  $d_C$  indiquen les distàncies de  $A$ ,  $B$  i  $C$  a  $L$ , respectivament, amb la convenció que aquestes distàncies es compten com a positives a un costat de  $L$  i com a negatives a l'altre, llavors es compleix la relació  $BX/CX = d_B/d_C$ , i les anàlogues per  $Y$  i  $Z$ ).

### Homotècies

L'*homotècia de centre*  $O$  (un punt) i *mòdul* o *raó*  $k$  (un nombre real no nul) és la transformació  $A \mapsto A'$  tal que  $O' = O$  i, si  $A \neq O$ ,  $A'$  és el punt de la recta  $OA$  tal que  $OA'/OA = k$  (aquí fem la convenció que  $A'$  és de la semirecta  $OA$  si  $k > 0$  i de la semirecta oposada a  $OA$  si  $k < 0$ ). Els enuncisats que segueixen es proven fàcilment emprant el teorema de Tales i l'exercici E.0.19.

La transformació d'una recta per una homotècia és una recta paral·lela a la primera. Val un enunciat anàleg per segments. D'aquí en resulta que angles homòlegs per una homotècia són iguals.

Les rectes pel centre d'homotècia són fixes, i són les úniques rectes fixes si  $k \neq 1$  (si  $k = 1$ , l'homotècia és la identitat).

Segments homòlegs per una homotècia són proporcionals segons el valor absolut  $|k|$  de la raó d'homotècia. D'aquí resulta que la transformació de la circumferència de centre  $P$  i radi  $r$  per l'homotècia  $h$  de raó  $k$  és la circumferència de centre  $h(P)$  i radi  $|k|r$ .

**E.0.21.** Dos triangles no congruents són homotètics si els costats d'un són paral·lels als corresponents costats de l'altre.

**E.0.22.** Dues circumferències sempre són homotètiques i els seus centres estan alineats amb el centre de qualsevol homotècia que transformi l'una en l'altra.

### Figures semblants

Dues figures són semblants si una es pot obtenir de l'altra mitjançant la composició d'una homotècia i un desplaçament. Una semblança transforma rectes en rectes i segments en segments. Segments homòlegs són proporcionals i angles homòlegs són iguals. Una semblança es diu *directa* o *inversa* segons que conservi l'orientació del pla o la inverteixi.

**E.0.23.** Proveu els criteris de semblança de triangles enuncisats al principi d'aquesta secció.

**Raó àuria.** Donat un segment de longitud  $a > 0$ , el seu *segment auri* és el segment de longitud  $x > 0$  tal que  $a/x = x/(a - x)$ . Com que aquesta relació és equivalent a l'equació  $x^2 + ax - a^2 = 0$ , obtenim que  $x = \rho a$ , on

$$\rho = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

El nombre real  $\rho$  s'anomena la *raó àuria*. Com que  $\rho^2 + \rho - 1 = 0$ , resulta que

$$\rho^{-1} = 1 + \rho = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}.$$

Un *rectangle auri* és aquell pel qual la base menor és segment auri de la base major. Això equival a dir que el rectangle és semblant al que resulta de separar-ne el quadrat de costat la base menor (figura 0.15).

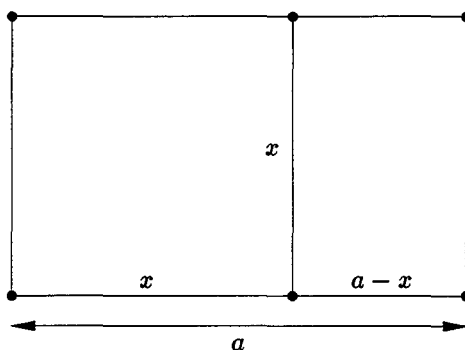


Figura 0.15: *Rectangle auri*

### Semblances i nombres complexos

Si representem els punts del pla per *nombres complexos*, i  $w = r_\alpha = r \cdot 1_\alpha$  és el nombre complex de mòdul  $r$  i argument  $\alpha$ , llavors la transformació  $z \mapsto wz$  és la composició del gir d'angle  $\alpha$  amb centre a l'origen seguit de l'homotècia de raó  $r$  amb el mateix centre. La raó d'això és que el mòdul i l'argument d'un producte de dos nombres complexos són el producte i la suma dels mòduls i arguments dels factors, respectivament ( $|wz| = |w||z|$  i  $\arg(wz) = \arg(w) + \arg(z)$ ).

**E.0.24.** Siguin  $ABC$  i  $A'B'C'$  dos triangles i interpretem  $B - A$ ,  $C - A$ ,  $B' - A'$  i  $C' - A'$  com a nombres complexos. Demostreu que  $ABC$  i  $A'B'C'$  són directament semblants si i només si  $(C' - A')/(B' - A') = (C - A)/(B - A)$ .

**E.0.25.** Siguin  $A_1A_2A_3$  i  $A'_1A'_2A'_3$  dos triangles directament semblants. Sigui  $t \in \mathbf{R}$  fix i definim  $A''_i = A_i + t(A'_i - A_i)$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Demostreu que els triangles  $A_1A_2A_3$  i  $A''_1A''_2A''_3$  són directament



semblants. Val la mateixa conclusió si tenim, en lloc de triangles, figures directament semblants  $A_1A_2\dots A_k$  i  $A'_1A'_2\dots A'_k$  i definim  $A''_i$  com abans per  $i = 1, 2, \dots, k$  (a la figura 0.16 il·lustrem el cas en què la figura és un pentàgon regular).

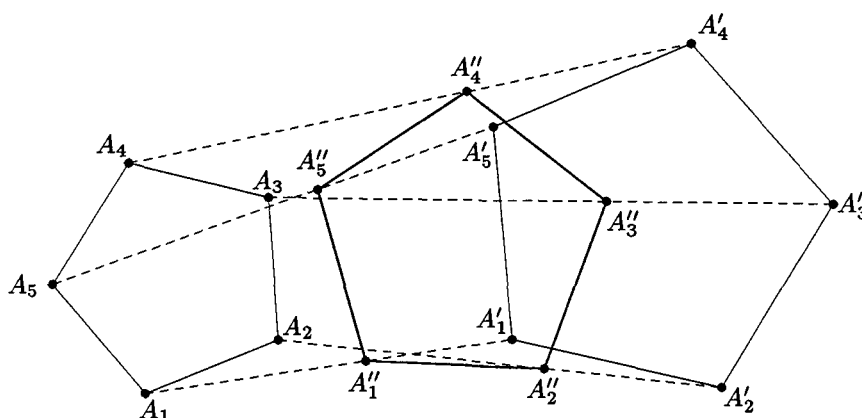


Figura 0.16:  $A''_i$  divideix  $A_iA'_{i+1}$  en la proporció  $3/5$

En la resta d'aquesta secció presentem, agrupades en dos apartats («Semblances i la geometria del triangle» i «Inversions»), un nombre de situacions geomètriques en les quals les semblances són l'element decisiu per provar els enunciats.

### *Semblances i la geometria del triangle*

Vegem tot seguit algunes de les aplicacions més bàsiques de les semblances a l'estudi de les propietats del triangle.

#### **Mitjanes i baricentre**

Les tres mitjanes es tallen en un punt,  $G$ , anomenat *baricentre* del triangle. Si  $A$  és un vèrtex qualsevol i  $A'$  el punt mitjà del costat oposat a  $A$ , llavors  $GA = 2GA'$  o, equivalentment,  $AA' = 3GA'$  (vegeu la figura 0.17 i noteu que els triangles  $ABG$  i  $A'B'G$  són semblants, pel criteri AAA de semblança, i que  $A'B' = \frac{1}{2}AB$ ).

#### **Teorema de l'altura**

L'altura sobre la hipotenusa d'un triangle rectangle és la mitjana proporcional entre els dos segments en què el peu de l'esmentada altura divideix la hipotenusa. En símbols,  $CP^2 = AP \cdot BP$ , on el triangle  $ABC$  se suposa rectangle en el vèrtex  $C$  i on  $P$  és el peu de l'altura del vèrtex  $C$  (vegeu la figura 0.18). En efecte, els triangles  $BPC$  i  $CPA$  són semblants, ja que tenen els tres angles iguals (recordem que dos angles són iguals si els

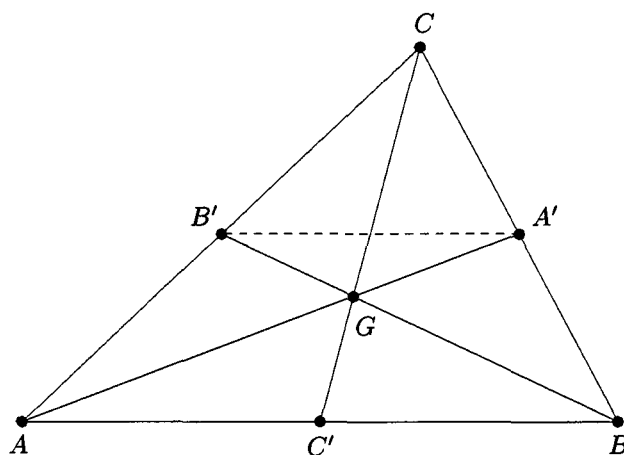


Figura 0.17: Baricentre d'un triangle

seus corresponents costats són perpendiculars). Així, doncs,  $x/h = h/(a - x)$ , igualtat que equival a la relació enunciada.

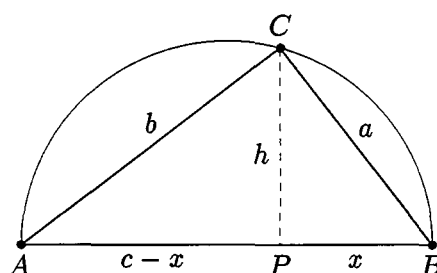


Figura 0.18: Teoremes de l'altura i del catet

### Teorema del catet

Amb les mateixes notacions de la figura 0.18, els triangles  $BPC$  i  $BCA$  són semblants, ja que són rectangles i tenen un angle comú. Per tant,  $x/a = a/c$ , la qual cosa ens diu que en un triangle rectangle la longitud d'un catet, per exemple  $a$ , és la mitjana proporcional entre la hipotenusa,  $c$ , i la projecció del catet,  $x$ , sobre aquella. Per a una altra demostració, i també una interpretació, vegeu l'exercici E.0.6.

Així, tenint en compte el subapartat anterior, tenim que els triangles rectangles  $ABC$ ,  $ACP$  i  $CBP$  són semblants. És clar, a més a més, que l'àrea de  $ABC$  és la suma de les àrees de  $ACP$  i  $CBP$ . Això ens proporciona una nova comprensió del teorema de Pitàgores: si el quocient de l'àrea del quadrat de costat  $AB$  per la del

triangle  $ABC$  és  $k$ , és a dir, si  $c^2 = k \cdot ABC$ , llavors  $a^2 = k \cdot CBP$  i  $b^2 = k \cdot ACP$ , d'on  $a^2 + b^2 = k(CBP + ACP) = k \cdot ABC = c^2$ . Notem que aquest argument prova que si apliquem una mateixa construcció sobre la hipotenusa i els catets d'un triangle rectangle (suposant que la construcció proporcioni una àrea a partir d'un segment), llavors l'àrea de la figura sobre la hipotenusa és la suma de les àrees de les figures sobre els catets.

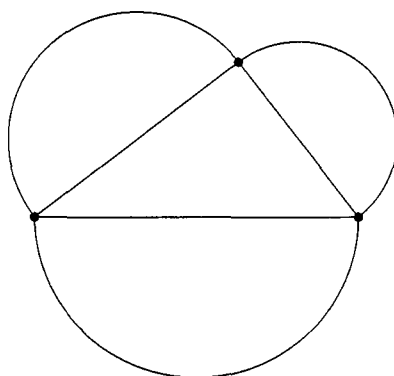


Figura 0.19: Teorema de Pitàgores per semicercles

Per exemple, si la construcció és la del polígon regular de  $n \geq 3$  costats sobre un segment donat, obtenim que l'àrea del  $n$ -gon regular de costat la hipotenusa d'un triangle rectangle és la suma de les àrees dels  $n$ -gons regulars els costats dels quals són els catets. Anàlogament, tenim que l'àrea del semicercle que té per diàmetre la hipotenusa és la suma de les àrees dels semicercles que tenen per diàmetre els catets (figura 0.19).

### Potència d'un punt respecte d'una circumferència

Sigui  $P$  un punt i  $C$  una circumferència que no passa per  $P$ . Considerem dues rectes per  $P$  que tallen  $C$  en els punts  $A$  i  $A'$ ,  $B$  i  $B'$ , respectivament (figura 0.20). Aleshores els triangles  $PAB'$  i  $PBA'$  són semblants, ja que tenen dos angles iguals, i per tant  $PA/PB = PB'/PA'$ , o bé  $PA \cdot PA' = PB \cdot PB'$ . Així doncs, el producte  $PA \cdot PA'$  és independent de la recta que prenguem per  $P$  (entre les que tallen  $C$ ) i el seu valor s'anomena *potència de  $P$  respecte de  $C$* . Prenent la recta que passa per  $P$  i pel centre de  $C$ , veiem que la potència és igual a  $(d - r)(d + r) = d^2 - r^2$ , on  $d$  és la distància de  $P$  al centre de  $C$  i  $r$  el radi de  $C$ .

**Punts concíclics.** Ara no hi ha dificultat a deduir que si  $A$  i  $A'$ ,  $B$  i  $B'$ , són dues parelles de punts distints i les rectes  $AA'$  i  $BB'$  es tallen en un punt  $P$ , aleshores els punts  $A$ ,  $A'$ ,  $B$  i  $B'$  són *concíclics* (això és, estan continguts en una mateixa circumferència).

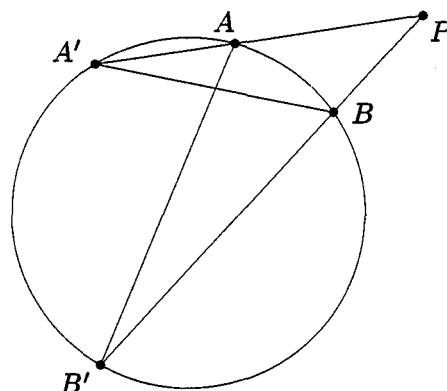


Figura 0.20: Potència d'un punt respecte d'una circumferència

si i només si  $PA \cdot PA' = PB \cdot PB'$ .

**Eix radical.** El lloc geomètric dels punts que tenen la mateixa potència respecte de dues circumferències no concèntriques és una recta perpendicular a la que uneix els seus centres  $O_1$  i  $O_2$ , i s'anomena *eix radical* de les dues circumferències. En efecte, siguin  $d_1$  i  $d_2$  les distàncies d'un punt  $P$  als centres de les dues circumferències, i siguin  $r_1$  i  $r_2$  els seus radis. La condició que la potència de  $P$  sigui la mateixa respecte de les dues circumferències és  $d_1^2 - r_1^2 = d_2^2 - r_2^2$ , o bé  $d_1^2 - d_2^2 = r_1^2 - r_2^2$ . Com que  $\delta = r_1^2 - r_2^2$  és constant, el lloc geomètric és el dels punts  $P$  tals que  $d_1^2 - d_2^2 = \delta$ , que sabem que és la recta perpendicular a  $O_1O_2$  pel punt que està a la distància  $\delta/(2c)$  del punt mitjà del segment  $[O_1, O_2]$ , de la part de  $O_1$  o  $O_2$  segons que  $r_1 > r_2$  o  $r_1 < r_2$ , on  $c$  és la distància entre  $O_1$  i  $O_2$  (vegeu l'exercici E.0.11). És a dir, la posició del punt d'intersecció de l'eix radical amb la recta  $O_1O_2$  és  $m + (r_1^2 - r_2^2)/(2c)$ .

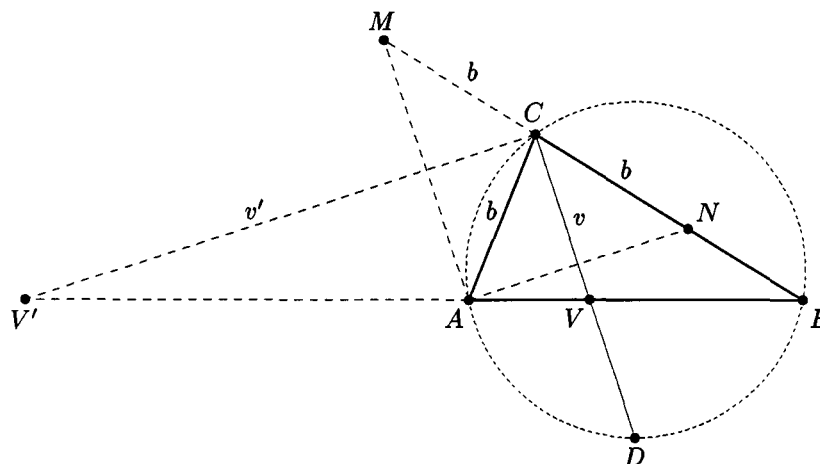
Si les dues circumferències es tallen, l'eix radical és la recta que uneix els dos punts d'intersecció (o la tangent comuna si són tangents). En efecte, els punts d'intersecció tenen la mateixa potència ( $= 0$ ) respecte de les dues circumferències.

**Centre radical.** El *centre radical* de tres circumferències que no tenen els centres alineats és l'únic punt que té la mateixa potència respecte de les tres circumferències. Aquest punt és la intersecció de dos qualssevol dels eixos radicals de les tres parelles de circumferències que podem formar.

### Propietats mètriques de les bisectrius

Considerem el triangle  $ABC$  de la figura 0.21.

Sigui  $M$  el punt sobre  $BC$ , a continuació de  $C$ , tal que  $\underline{CM} = b$ . Per construcció, el triangle  $ACM$  és isòceles. Per tant, la bisectriu  $v'$  de  $\widehat{ACM}$  és perpendicular a la base

Figura 0.21: *Determinació de les bisectrius*

$AM$ . Com que la bisectriu  $v$  és perpendicular a  $v'$ ,  $v$  és paral·lela a  $AM$ . Aplicant el teorema de Tales, obtenim que

$$\frac{BV}{a} = \frac{AV}{b} = \frac{c}{a+b}.$$

Considerant ara el punt  $N$  del segment  $BC$  tal que  $NC = b$ , resulta que  $AN$  és paral·lela a  $v'$  (per ser perpendicular a  $v$ ), i raonant de manera similar, obtenim que

$$\frac{BV'}{a} = \frac{AV'}{b} = \frac{c}{a-b}.$$

Per altra banda, no és difícil veure que si  $D$  és el punt d'intersecció de la semirecta  $CV$  amb el cercle  $ABC$ , llavors els triangles  $AVC$  i  $DBC$  són semblants (tenen dos angles iguals: un per definició de bisectriu, l'altre pel fet de ser angles inscrits que comprenen el mateix arc  $BC$  de la circumferència  $ABC$ ). En resulta que  $a/v = (v + VD)/b$ , o bé  $ab = v^2 + v \cdot VD$ . Però com que  $v \cdot VD = VA \cdot VB = abc^2/(a+b)^2$ , tenim que

$$v^2 = ab - \frac{abc^2}{(a+b)^2} = ab \frac{(a+b)^2 - c^2}{(a+b)^2} = 4ab \frac{p(p-c)}{(a+b)^2}$$

on hem posat  $p = (a+b+c)/2$  (el *semiperímetre* del triangle).

**E.0.26** (Steiner–Lehmus). Si en un triangle dues bisectrius són iguals, llavors el triangle és isòsceles.

### Radi de les circumferències inscrita i exinscrite

Considerem la figura 0.22. Si posem  $p = (a + b + c)/2$ , aleshores es compleix que  $AB' = AC' = p - a$ : la primera igualtat és clara i la segona resulta del fet que  $AB' + a = AB' + CA' + A'B = AB' + CA' + BC' = p$ . De la mateixa manera tenim que  $BA' = BC' = p - b$  i  $CA' = CB' = p - c$ . També tenim  $AB'' = AC''$  i com que  $AB'' = AC + CA''$  i  $AC'' = AB + BA''$ , veiem que  $AB'' = AC'' = p$  [◇]. Per tant  $BA'' = BC'' = p - c$  i  $CB'' = CA'' = p - b$ . Finalment,  $C'C'' = B'B'' = AB'' - AB' = p - (p - a) = a$  i  $A'A'' = |BA' - BA''| = |p - b - (p - c)| = |b - c|$ .

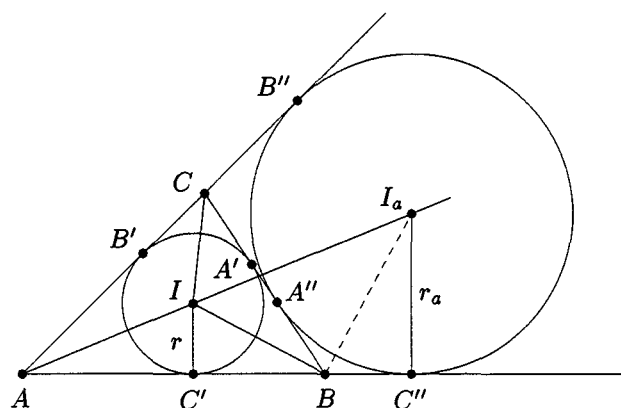


Figura 0.22: Radi de les circumferències inscrita i exinscrite

Atès que els triangles  $AIC'$  i  $AI_aC''$  són semblants, serà (1)  $r/r_a = (p - a)/p$ . I atès que els triangles  $BIC'$  i  $I_aBC''$  també són semblants,  $r/(p - b) = (p - c)/r_a$ , o bé (2)  $rr_a = (p - b)(p - c)$ . Ara de les equacions (1) i (2) es dedueix que

$$r = \sqrt{\frac{(p - a)(p - b)(p - c)}{p}}, \quad r_a = \sqrt{\frac{p(p - b)(p - c)}{p - a}}.$$

Els radis  $r_b$  i  $r_c$  de les altres dues circumferències exinscrites s'obtenen permutant cíclicament  $a, b$  i  $c$  en la segona de les fórmules anteriors.

### Expressió de les altures en funció dels costats

Considerem la figura 0.23, en la qual  $N$  i  $M$  es defineixen de manera que estiguin alineats amb  $A$  i  $B$ , respectivament, amb  $BM = BC$  i  $AN = AC$ . Així doncs,  $NM = a + b + c = 2p$ . Per les consideracions fetes al subapartat «Propietats mètriques de les bisectrius» (pàg. 20), sabem que  $CM$  (respectivament,  $CN$ ) és paral·lela a la bisectriu interior  $IB$  (respectivament,  $IA$ ), de manera que els triangles  $AIB$  i  $NCM$  són semblants. En resulta que  $h_c/r = 2p/c$ , d'on

$$h_c = 2pr/c = \frac{2}{c} \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}.$$

Canviant  $c$  per  $b$  i per  $a$  s'obtenen les fórmules que donen  $h_b$  i  $h_a$ .

D'aquestes expressions és clar que l'àrea  $S$  del triangle és donada per la fórmula d'Heron:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

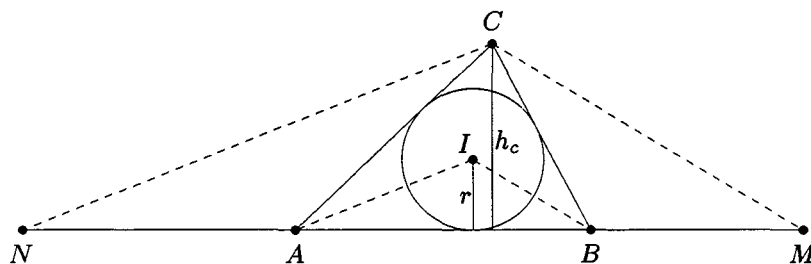


Figura 0.23: Altures en funció dels costats

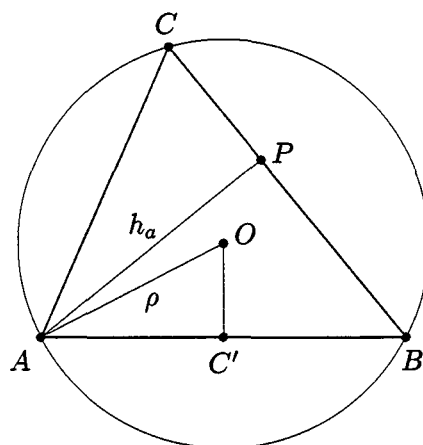


Figura 0.24: Radi de la circumferència circumscrita

### Radi de la circumferència circumscrita

Considerem la figura 0.24. Els triangles  $APC$  i  $AC'O$  són semblants: els dos són rectangles i  $\widehat{AOC'}$  és la meitat de l'arc central comprès per l'angle inscrit  $\widehat{ACB}$ . Així, doncs,  $AO/AC' = AC/AP$ , o bé  $\rho/(c/2) = b/h_a$ . Per tant,  $\rho = bc/2h_a$  i, introduint l'expressió de  $h_a$  en funció dels costats,

$$\rho = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}.$$

Notem també que si  $\gamma = \widehat{C}$  i  $c = AB$ , llavors  $c/\sin(\gamma) = 2AC'/\sin(\gamma) = 2\rho$ , ja que  $AC'/\rho = \sin(\gamma)$ . Això ens revela que el valor  $a/\sin(\alpha) = b/\sin(\beta) = c/\sin(\gamma)$  (teorema dels sinus) és  $2\rho$ , el diàmetre de la circumferència circumsrita.

### Inversions

Donat un punt  $O$  i un nombre real  $\rho \neq 0$ , la *inversió de centre  $O$  i potència  $\rho$* ,  $\text{inv}_{O,\rho}$ , és l'aplicació  $A \mapsto A'$  ( $A \neq O$ ), definida per la fórmula

$$A' - O = \frac{\rho}{|OA|^2}(A - O).$$

Així  $A'$  és el punt que està sobre la recta  $OA$ , a una distància  $|\rho|/|OA|$  de  $O$ , a la mateixa semirecta que  $A$  si  $\rho > 0$  i a la semirecta oposada si  $\rho < 0$ . Atès que  $|OA'| = |\rho|/|OA|$ , tenim  $A'' = A$  (ho expressarem dient que la  $\text{inv}_{O,\rho}$  és *involutiva*).

Si  $\rho > 0$  i posem  $r = \sqrt{\rho}$ , llavors els punts  $A$  que  $\text{inv}_{O,\rho}$  deixa fixos són els de la circumferència de centre  $O$  i radi  $r$ , ja que si  $|OA| = r$  llavors  $\rho/|OA|^2 = 1$ . En aquest cas es diu també que  $\text{inv}_{O,\rho}$  és la inversió respecte de la circumferència  $S = S(O, r)$  de centre  $O$  i radi  $r$ , i que  $A'$  és l'*invers* de  $A$  respecte de  $S$ . Pel que ja hem dit, també es té que  $A$  és l'invers de  $A'$  respecte de  $S$ .

**Construcció.** El punt  $A'$  invers de  $A$  respecte de  $S$  es pot construir de la següent manera. Suposem primer que  $|OA| > r$ . Si  $P$  i  $Q$  són els punts d'intersecció de la circumferència de centre  $A$  i radi  $|OA|$  amb  $S$ , llavors els punts d'intersecció de les circumferències de radi  $r$  amb centres a  $P$  i  $Q$  són  $O$  i  $A'$  (figura 0.25).

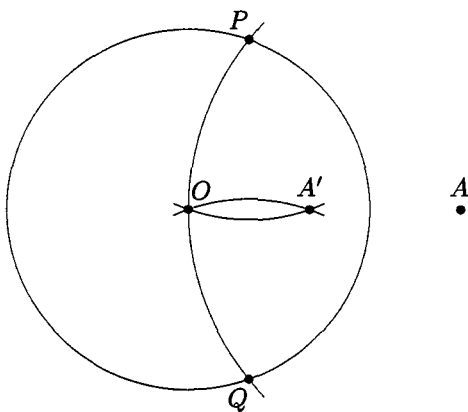


Figura 0.25: Construcció de l'invers de  $A$

En efecte, els triangles  $AOP$  i  $OPA'$  són semblants, ja que per construcció són isòceles i comparteixen l'angle del vèrtex  $O$ . Per tant,  $|OA|/|OP| = |OP|/|OA'|$ , que equival a



$|OA| \cdot |OA'| = r^2$ , on  $r = |OP|$ . Per construir l'invers d'un punt interior de  $S$  respecte de  $S$ , és suficient veure com podem reconstruir el punt exterior  $A$  a partir de  $A'$ . Ara bé, amb les notacions anteriors,  $PQ$  és la mediatriu de  $OA'$  i  $A$  és la intersecció de les tangents a  $S$  en els punts  $P$  i  $Q$ .

**Inversió de rectes i circumferències.** Una figura  $F'$  es diu inversa d'una figura  $F$  respecte de la circumferència  $S$  si quan  $A$  recorre els punts de  $F$  (diferents del centre  $O$  de  $S$ ), el punt  $A'$  invers de  $A$  respecte de  $S$  recorre els punts de  $F'$  (diferents de  $O$ ). Si  $F' = F$ , direm que la figura  $F$  és *doble* per la inversió. Per exemple, els punts dobles són els fixos per la inversió, és a dir, els punts de  $S$ ; per tant,  $S$  és una circumferència doble; de la definició d'inversió, en resulta immediatament que les rectes per  $O$  són dobles.

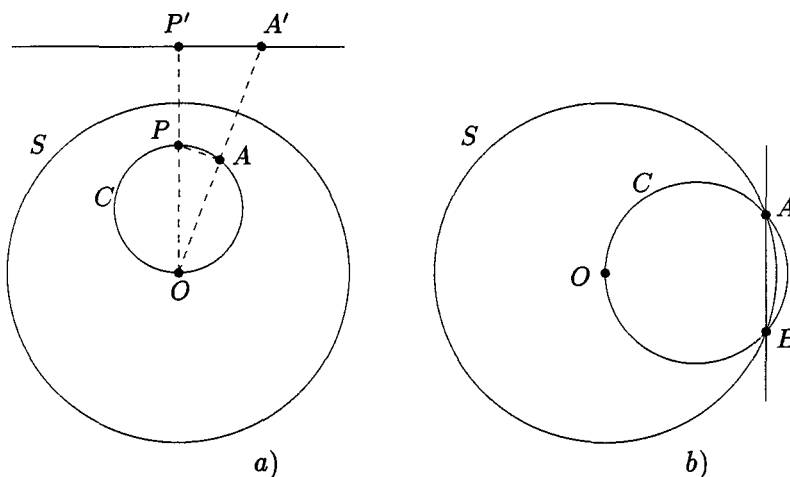


Figura 0.26: Inversa d'una circumferència pel centre d'inversió

Una circumferència  $C$  de diàmetre  $d$  pel centre d'inversió  $O$  (figura 0.26.a) i la recta perpendicular  $P'A'$  al diàmetre  $OP$  de  $C$  a una distància  $d' = r^2/d$  de  $O$ , són figures inverses (notem que  $OP$  és l'únic diàmetre de  $C$  que passa per  $O$ ). En efecte, els triangles  $OPA$  i  $OA'P'$  són semblants, ja que són rectangles (a  $A$  i  $P'$ , respectivament) i tenen un angle comú. Tenint en compte que  $|OP| = d$  i  $|OP'| = r^2/d$ , tenim que  $|OA|/d = r^2/d|OA'|$ , d'on  $|OA| \cdot |OA'| = r^2$ . Remarquem que si  $A, B \in S$  (figura 0.26.b), llavors la recta  $AB$  i la circumferència  $OAB$  són figures inverses respecte de  $S$ , ja que la inversa de la recta  $AB$  és una circumferència que passa per  $O$  i pels punts dobles  $A$  i  $B$ .

Anem a veure ara que la inversa  $C'$  d'una circumferència  $C$  que no passa pel centre d'inversió  $O$  és una circumferència. De fet, veurem que si  $P$  i  $Q$  són els extrems del diàmetre de  $C$  que passa per  $O$ , llavors  $C'$  és la circumferència de diàmetre  $P'Q'$  (figura 0.27), on  $P'$  i  $Q'$  són els inversos de  $P$  i  $Q$  respecte de  $S$ .

En efecte, sigui  $C'$  la circumferència que acabem de definir. De  $|OP| \cdot |OP'| = |OQ| \cdot |OQ'|$  obtenim  $|OP'|/|OQ| = |OQ'|/|OP|$ , valor que coincideix amb el mòdul  $k$  de

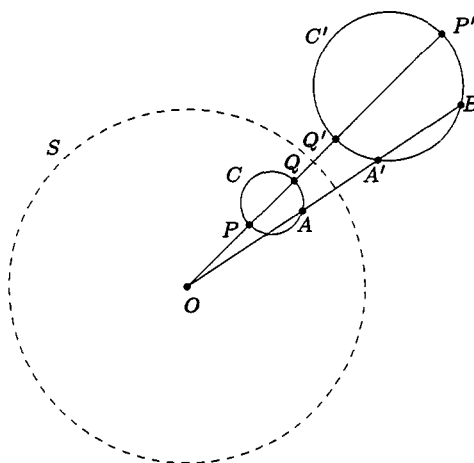


Figura 0.27: Inversa d'una circumferència  $C$  que no passa per  $O$

l'homotècia de centre  $O$  que transforma  $C$  en  $C'$ . Sigui ara  $A$  un punt de  $C$  i determinem  $B$  i  $A'$  sobre  $C'$  com a la figura 0.27. Llavors  $|OB| = k|OA|$  i  $|OA'| \cdot |OB| = |OQ'| \cdot |OP'|$  (potència de  $O$  respecte de  $C'$ ). Per tant,

$$|OA| \cdot |OA'| = \frac{1}{k}|OB| \cdot |OA'| = \frac{1}{k}|OQ'| \cdot |OP'| = |OP| \cdot |OP'| = r^2,$$

i això acaba la prova.

Notem que la raó,  $k$ , de l'homotècia de centre  $O$  que transforma  $C$  en  $C'$  és igual a  $r^2/p$ , on  $p$  és la potència de  $O$  respecte de  $C$ :

$$k = \frac{|OP'|}{|OQ|} = \frac{|OP| \cdot |OP'|}{|OP| \cdot |OQ|} = \frac{r^2}{p}.$$

**E.0.27.** Proveu que la recta  $PQ$  que uneix dos punts  $P$  i  $Q$  d'una circumferència  $C$  que no passa pel centre  $O$  d'una circumferència  $S$  i la recta  $P'Q'$  que uneix els inversos  $P'$  i  $Q'$  de  $P$  i  $Q$  respecte de  $S$ , o bé es tallen sobre l'eix radical de  $C$  i  $C'$ , o bé aquest eix és paral·lel a ambdues rectes (indicació: mostreu que els punts  $P, Q, P'$  i  $Q'$  estan sobre una circumferència  $K$ , amb la qual cosa el punt d'intersecció de  $PQ$  i  $P'Q'$  —si es tallen— és el centre radical de  $C, C'$  i  $K$ ).

**E.0.28.** Amb les notacions del problema anterior, mostreu que la recta tangent a  $C$  en un punt  $P$  i la recta tangent a  $C'$  en el punt  $P'$  formen angles iguals amb la recta  $PP'$ . A més a més, o bé es tallen sobre l'eix radical de  $C$  i  $C'$ , o bé aquest és paral·lel a ambdues.

**E.0.29.** Amb les notacions de la figura 0.26.a, mostreu que  $\widehat{OA'P'}$  és igual a l'angle agut que  $OA$  forma amb la tangent a  $C$  pel punt  $A$  (indicació: aquest darrer angle coincideix amb l'angle agut que forma la tangent a  $C$  en el punt  $O$  amb  $OA$ ).

**Conservació dels angles.** Els exercicis anteriors es poden usar per demostrar que les inversions conserven els angles. Per precisar més, un *arc* serà un segment (que pot ser una semirecta) o un arc de circumferència. Si dos arcs tenen el mateix origen, convindrem a mesurar l'angle que formen com el de les semirectes tangents als arcs en l'origen dels dos arcs. Com que les inversions transformen arcs en arcs, també transformen angles en angles i la propietat a què ens hem referit és que la mesura d'un angle coincideix amb la del seu transformat per una inversió. La demostració d'aquest fet es pot deixar com a exercici per al lector. Convé adonar-se, però, que el sentit del transformat d'un angle per una inversió és el contrari del de l'angle abans de transformar.

### 0.3 Problemes

Resoldre un problema, especialment un problema de geometria, és trobar un camí entre el que ens donen i el que ens demanen. Del que ens donen podem intentar *progressar* fent deduccions successives aplicant coneixements ja coneguts: és el procés de *síntesi* en el sentit dels antics grecs, i que en alguns diccionaris apareix reflectit com una de les accepcions del mot. Fixem-nos que els coneixements pertinents per avançar sovint esdevenen clars quan parem esment en les coses que ens donen.

A l'altra banda, allà on volem arribar, sovint és útil preguntar-se quina *mena de cosa* ens demanen, ja que les respostes a aquesta pregunta solen donar *claus* inequívokes sobre quins coneixements convé invocar per aconseguir-ho: és el procés d'*anàlisi* dels antics grecs.

Aquests principis, i d'altres, els podeu trobar il·lustrats a la mostra de solucions, presentades en forma dialogada, a la secció 0.5. Per altra banda, la secció 0.4 conté indicacions sobre com podem resoldre tots els problemes de la llista que segueix, però hem d'encoratjar el lector perquè només la consulti en el cas dels problemes que no li surtin després d'un esforç raonable. Convé tenir present que l'ordre en el qual donem els problemes no pressuposa cap graduació progressiva de la seva dificultat.

**P. 0.1.** Amb les notacions de la figura 0.28, calculeu l'àrea del quadrat interior en funció de  $t$ .

**P. 0.2.** Donada una corda  $a$  d'una circumferència  $C$  de radi 1 i centre  $O$ , considereu la circumferència  $C'$  determinada imposant que  $a$  en sigui un diàmetre. Si  $P$  és el punt de  $C'$  més allunyat de  $O$ , quin és el valor màxim de la distància  $PO$ ?

**P. 0.3.** L'angle  $\hat{A}$  d'un triangle isòsceles  $ABC$  és igual a  $2/5$  d'un angle recte i  $\hat{B} = \hat{C}$ . La bisectriu de l'angle  $\hat{C}$  talla el costat oposat en el punt  $D$ . Calculeu les valors dels

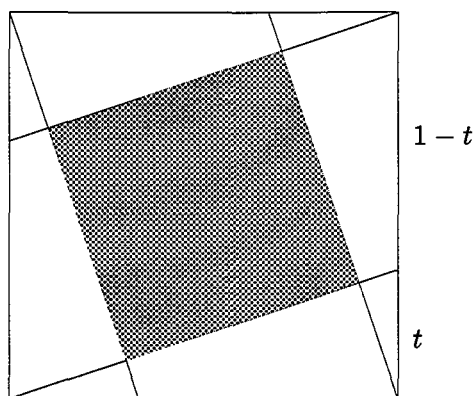


Figura 0.28: Es demana l'àrea del quadrat gris en funció de  $t$

angles del triangle  $BCD$ . Expresseu la longitud,  $a$ , del costat  $BC$  en funció de la longitud,  $b$ , del costat  $AC$ .

**P.0.4.** Sigui  $ABC$  un triangle isòsceles amb  $\hat{B} = \hat{C} = 80^\circ$ . Siguin  $D \in (A, B)$  i  $E \in (A, C)$  els punts tals que  $\widehat{BCD} = 50^\circ$  i  $\widehat{CBE} = 60^\circ$ . Quants graus té l'angle  $\widehat{BED}$ ?

**P.0.5** (Construcció de Descartes de segments auris). A la figura 0.29, la circumferència és tangent a  $AB$  al punt  $B$  i el seu diàmetre és igual a  $AB$ . Demostreu que  $AB$  és el segment auri de  $AD$  i que  $AC$  és el segment auri de  $AB$ .

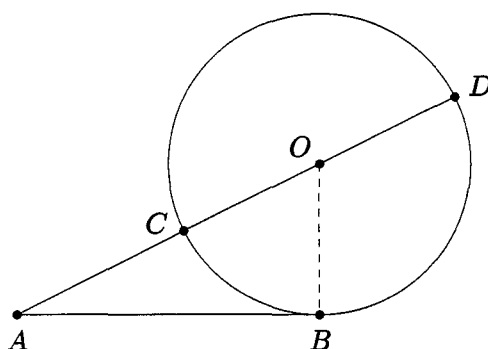


Figura 0.29: Una construcció geomètrica de segments auris

**P.0.6.** Proveu que en un pentàgon regular el costat és segment auri de la diagonal.

**P.0.7.** Donat un punt  $P$  interior a un triangle  $ABC$ , siguin  $X, Y$  i  $Z$  els peus de les perpendiculars des de  $P$  als costats  $BC, CA$  i  $AB$ , respectivament (es diu que  $XYZ$  és el *triangle pedal* del punt  $P$  relatiu al triangle  $ABC$ ). Proveu que

$$YZ = \frac{a}{2\rho}PA, \quad ZX = \frac{b}{2\rho}PB, \quad XY = \frac{c}{2\rho}PC,$$

on  $\rho$  és el radi de la circumferència circumscrita al triangle.

**P.0.8.** En un triangle acutangle  $ABC$ , la bisectriu interior de l'angle  $\hat{A}$  talla el costat  $BC$  en el punt  $K$  i el cercle circumscrit en el punt  $M$ . Siguin  $L$  i  $N$  els peus de les perpendiculars per  $K$  a  $AB$  i  $AC$ , respectivament. Demostreu que el quadrilàter  $ALMN$  i el triangle  $ABC$  tenen la mateixa àrea.

**P.0.9.** En cada un dels vèrtexs d'un quadrat, el costat del qual fa un quilòmetre, hi ha una casa, i les quatre cases volen fer camins amb els que es puguin comunicar les unes amb les altres. Què poden fer, si només disposen de materials per construir  $1 + \sqrt{3}$  km de camí?

**P.0.10.** Proveu que els tres angles d'un triangle  $ABC$  són aguts si i només si existeixen punts  $A', B'$  i  $C'$  de l'interior dels costats  $BC, AC$  i  $AB$ , respectivament, tals que els segments  $AA', BB'$  i  $CC'$  tenen la mateixa longitud.

**P.0.11.** Demostreu que qualsevol polígon convex d'àrea 1 està contingut en un rectangle d'àrea no superior a 2.

**P.0.12** (Teorema de Morley). Donat un triangle  $ABC$ , construïm el triangle  $PQR$  tal com indica la figura 0.30. Demostreu que

$$|QR| = 8\rho \sin(\alpha) \sin(\beta) \sin(\gamma),$$

on  $\rho$  és el radi de la circumferència circumscrita a  $ABC$ . Notem que la simetria de la relació obtinguda mostra que el triangle  $PQR$  és equilàter, fet que és conegut com a *teorema de Morley*.

**P.0.13.** Sigui  $ABC$  un triangle i  $P$  un punt tal que  $PA = 7$ ,  $PB = 5$  i  $PC = 3$ . Demostreu que si  $ABC$  té, amb aquestes condicions, perímetre màxim, llavors  $P$  és l'incentre de  $ABC$ .

**P.0.14.** Siguin  $P, Q, R$  i  $S$  els centres dels quadrats construïts externament sobre els quatre costats d'un rombe. Demostreu que  $PQRS$  és un quadrat. Si fixem el centre, el costat i l'orientació del rombe, i deixem que l'angle entre dos costats contigus variï, quin lloc geomètric descriu el punt  $P$ ?

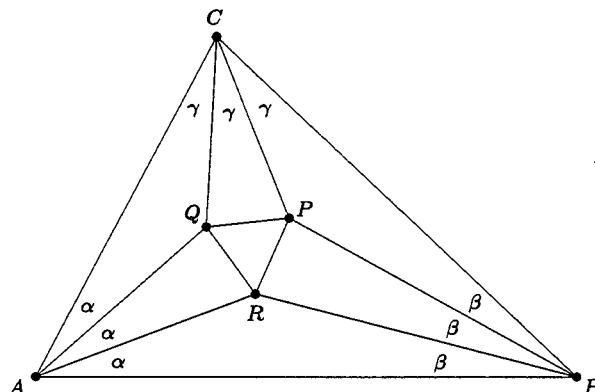


Figura 0.30: Teorema de Morley:  $PQR$  és equilàter

**P.0.15.** Proveu que un quadrilàter convex és circumscribable a una circumferència si i només si les sumes dels dos parells de costats oposats són iguals.

**P.0.16.** Demostreu que la suma de les distàncies d'un punt interior a un triangle als tres vèrtexs és superior a la meitat del perímetre i inferior al perímetre.

**P.0.17.** Sigui  $2p$  el perímetre d'un triangle i  $\mu$  la suma de les seves tres mitjanes. Demostreu que

$$\frac{3p}{2} < \mu < 2p.$$

**P.0.18.** Demostreu que un quadrilàter convex és inscribable en una circumferència (és a dir, que existeix una circumferència que passa pels seus vèrtexs) si i només si té dos angles oposats suplementaris.

**P.0.19.** Proveu que les altures d'un triangle són les bisectrius del seu triangle òrtic (vegeu la figura 0.5). Resulta, així, que l'ortocentre d'un triangle coincideix amb l'incentre del seu triangle òrtic.

**P.0.20** (Cercle d'Euler). Demostreu que els punts mitjans dels costats d'un triangle (figura 0.31) i els peus de les seves altures estan sobre un cercle.

**P.0.21.** El cercle d'Euler d'un triangle també passa pels punts mitjans dels segments que uneixen els vèrtexs d'un triangle amb l'ortocentre (per aquesta raó el cercle d'Euler s'anomena també *cercle dels nou punts* del triangle; figura 0.31).

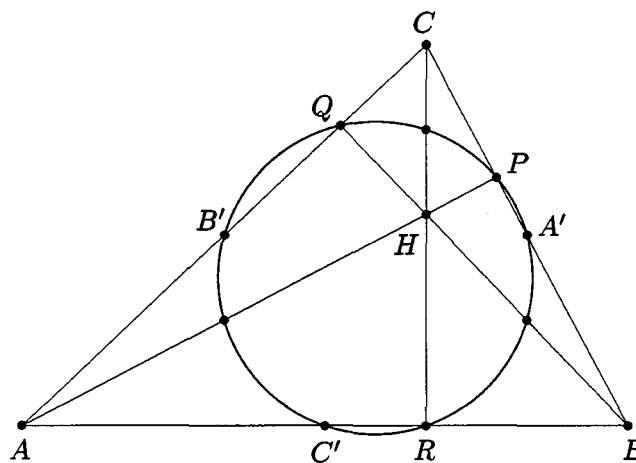


Figura 0.31: Cercle d'Euler, o dels nou punts

**P.0.22.** Sigui  $P$  un punt,  $ABC$  un triangle i  $X, Y, Z$  els peus de les perpendiculars per  $P$  als costats  $BC, CA$  i  $AB$ , respectivament. Demostreu que  $X, Y$  i  $Z$  estan alineats si i només si  $P$  està sobre la circumferència circumscrita de  $ABC$  (en aquest cas, la recta que conté els punts  $X, Y$  i  $Z$  s'anomena *recta de Simson* de  $P$  relativa al triangle  $ABC$ ; vegeu la figura 0.32).

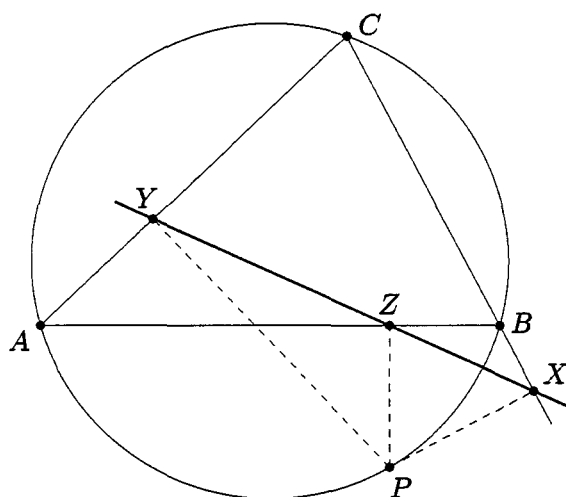


Figura 0.32: Recta de Simson

**P.0.23** (Problema de Fagnano). Demostreu que el mínim perímetre d'un triangle inscrit en un triangle acutangle donat és el del triangle òrtic (vegeu la figura 0.5).

**P.0.24.** Trobeu el punt interior d'un triangle acutangle tal que la suma de les seves distàncies als vèrtexs sigui mínima (*punt de Fermat* del triangle).

**P.0.25.** Demostreu que les circumferències circumscrites dels triangles equilàters construïts sobre els tres costats d'un triangle, al seu exterior, passen pel punt de Fermat. A més a més, els centres d'aquests tres triangles formen un altre triangle equilàter.

**P.0.26** (Teorema de Ptolemeu). En un quadrilàter convex la suma dels productes de les dues parelles de costats oposats és no inferior al producte de les dues diagonals, i la igualtat val si i només si el quadrilàter és inscriptible.

**P.0.27.** Sigui  $ABC$  un triangle isòsceles amb  $BC$  com a costat desigual. Sigui  $Q$  el peu de l'altura pel vèrtex  $B$  i  $P$  el peu de la perpendicular a  $BC$  per  $Q$ . Trobeu l'àrea del triangle en funció de  $x = BP$  i  $y = PC$ .

**P.0.28.** En un triangle  $ABC$  escollim punts  $X$ ,  $Y$  i  $Z$  sobre els costats  $BC$ ,  $CA$  i  $AB$ , respectivament. Considerem les rectes per  $X$ ,  $Y$  i  $Z$  que són perpendiculars a  $BC$ ,  $CA$  i  $AB$ , respectivament. Proveu que les tres rectes són concurrents si i només si  $AZ^2 + BX^2 + CY^2 = AY^2 + CX^2 + BZ^2$ .

**P.0.29.** Sigui  $O$  el centre d'una circumferència  $K$ ,  $AB$  un diàmetre,  $t$  la recta tangent a  $K$  en el punt  $B$ . Donat un punt  $P$  de  $K$  diferent de  $A$  i  $B$ , siguin  $C$  i  $D$  els punts d'intersecció amb  $t$  de la tangent a  $K$  pel punt  $P$  i de la recta  $AP$ . Proveu que  $BC = CD$ .

**P.0.30.** Trobeu l'àrea d'un octògon convex inscrit en una circumferència sabent que té quatre costats consecutius de longitud 2 i els altres quatre de longitud 3.

**P.0.31.** Siguin  $P$  i  $O$  punts fixos. Trobeu el lloc geomètric del simètric de  $P$  respecte d'una recta variable per  $O$ .

**P.0.32.** Sigui  $H$  l'ortocentre d'un triangle,  $P$  el peu d'una altura i  $Q$  el punt d'intersecció de la semirecta  $HP$  amb el cercle circumscrit. Demostreu que  $HP = PQ$ .

**P.0.33.** Proveu que el baricentre d'un triangle  $ABC$  és el punt  $G$  del segment  $HO$  tal que  $GO = \frac{1}{2}GH$  i que el punt mitjà de  $HO$  és el centre de la circumferència circumscrita en el triangle  $A'B'C'$  els vèrtexs del qual són els punts mitjans dels costats de  $ABC$  (la recta  $HO$  s'anomena *recta d'Euler* del triangle  $ABC$ ; vegeu la figura 0.33).



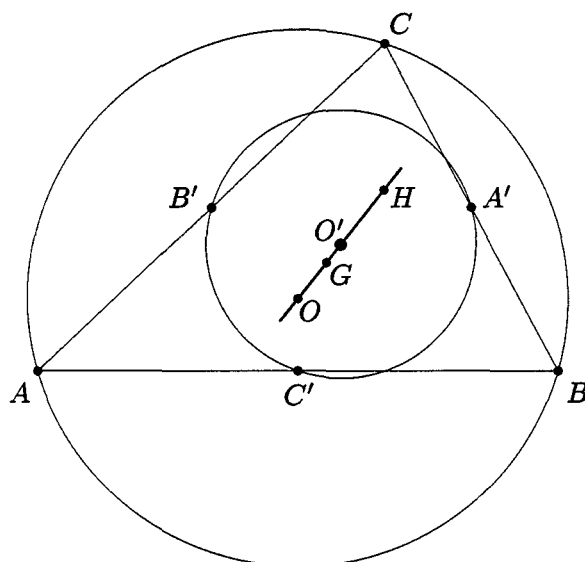


Figura 0.33: Recta d'Euler

**P.0.34.** Si la recta d'Euler d'un triangle passa per un dels vèrtexs, el triangle és rectangle o isòsceles.

**P.0.35.** Amb les notacions de la figura 0.31, sigui  $P'$  el punt de l'arc  $A'P$  del cercle d'Euler tal que  $\text{arc}(A'P') = \frac{1}{3}\text{arc}(A'P)$ . Definim  $Q'$  i  $R'$  de manera similar. Demostreu que llavors el triangle  $P'Q'R'$  és equilàter (figura 0.44).

**P.0.36.** Siguin  $A$  i  $B$  dos punts no diametralment oposats d'un cercle  $C$  donat i sigui  $XY$  un diàmetre variable de  $C$ . Determineu el lloc geomètric del punt d'intersecció de les rectes  $AX$  i  $BY$ .

**P.0.37** (Erdős–Mordell). Siguí  $E$  un punt a l'interior d'un triangle  $ABC$ ,  $s$  la suma de les distàncies de  $E$  als vèrtexs i  $t$  la suma de les distàncies de  $E$  als costats. Demostreu que  $s \geq 2t$ .

**P.0.38.** Siguí  $E$  un punt interior d'un triangle  $ABC$ . Siguin  $x, y$  i  $z$  les distàncies de  $E$  als vèrtexs  $A, B$  i  $C$ , respectivament, i  $p, q$  i  $r$  les distàncies de  $E$  als costats  $BC, CA$  i  $AB$ , respectivament. Llavors,

$$xyz \geq (p+q)(p+r)(q+r).$$

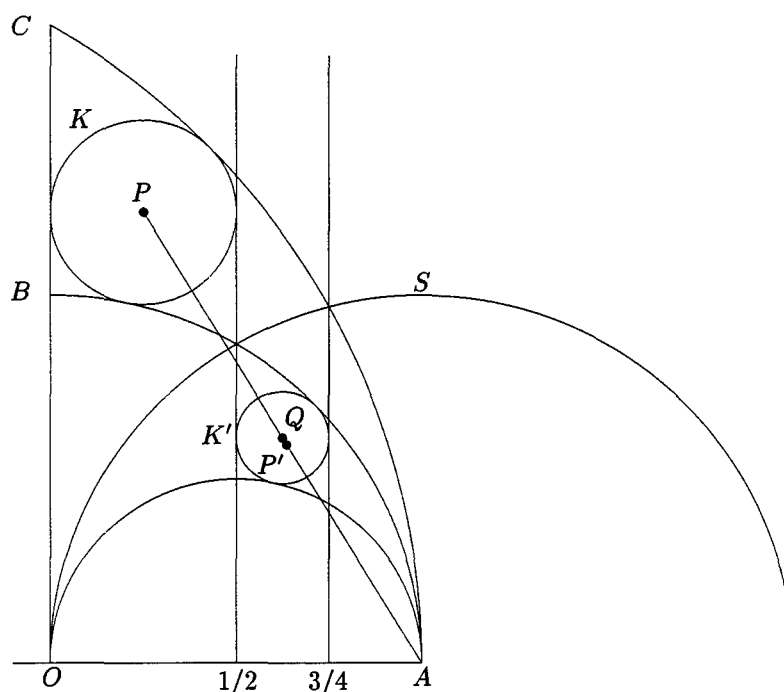


Figura 0.34: Una aplicació de les inversions

**P.0.39.** Siguin  $S$  i  $K$  circumferències diferents. Demostreu que  $K$  és doble per la inversió respecte de  $S$  si i només si  $K$  i  $S$  són ortogonals.

**P.0.40.** A la figura 0.34, l'arc  $AB$  és un quadrant de la circumferència de centre  $O$  i radi  $|OA| = 1$ , i  $AC$  és l'arc que correspon a la circumferència de radi 2 amb centre en el punt simètric de  $A$  respecte del punt  $O$ . Comproveu que  $K$  i  $K'$  són circumferències inverses respecte de la circumferència  $S$  de centre  $A$  i radi 1. Si  $P'$  és l'invers de  $A$  respecte de  $K'$ , proveu que  $P'$  i el centre  $P$  de  $K$  són inversos respecte de  $S$ . Trobeu també la posició del centre  $Q$  de  $K'$  (i noteu que  $Q$  i  $P'$  són diferents).

**P.0.41.** Siguin  $P$  i  $A$  dos punts diferents donats i  $O$  un punt variable en una semirecta  $\sigma$  d'origen  $A$  donada. Sigui  $S$  la circumferència de centre  $O$  i radi  $|OA|$  i  $P'$  l'invers de  $P$  respecte de  $S$ . Sigui  $L$  la recta perpendicular a  $\sigma$  pel punt  $A$ . Demostreu que el límit de  $P'$  quan  $O$  s'allunya indefinidament de  $A$  és el punt simètric de  $P$  respecte de la recta  $L$  (si mireu  $L$  com el límit de  $S$  quan  $O$  s'allunya indefinidament de  $A$ , veiem que podem considerar la simetria respecte de  $L$  com el límit de la inversió respecte de  $S$ ).

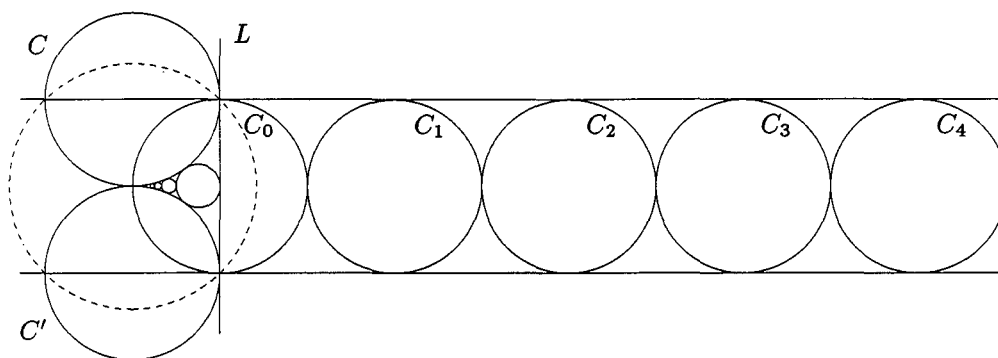


Figura 0.35: Càlcul del diàmetre de les circumferències entre  $L$ ,  $C$  i  $C'$

**P.0.42.** Sigui  $S$  una circumferència de centre  $O$ , i  $P$  i  $P'$  dos punts no pertanyents a  $S$  i diferents de  $O$ . Demostreu que les condicions següents són equivalents:

- 1)  $P$  i  $P'$  són inversos respecte de  $S$ .
- 2)  $P$  i  $P'$  estan alineats amb  $O$  i existeix una circumferència  $K$  ortogonal a  $S$  que passa per  $P$  i  $P'$ .
- 3) Existeixen dues circumferències distintes  $K$  i  $K'$  que passen per  $P$  i  $P'$  i són ortogonals a  $S$ .

**P.0.43.** Sigui  $S$  una circumferència de centre  $O$ ,  $L$  una recta que no passa per  $O$  i  $C = L'$  la circumferència inversa de  $L$  respecte de  $S$ . Demostreu que si  $P$  i  $Q$  són punts simètrics respecte de  $L$ , llavors els inversos  $P'$  i  $Q'$  de  $P$  i  $Q$  respecte de  $S$  són inversos respecte de  $C$  (és a dir, la simetria respecte de  $L$  i la inversió respecte de  $C$  es corresponen per la inversió respecte de  $S$ ).

**P.0.44.** Considerem la figura 0.35, en la qual  $C$  i  $C'$  són dues circumferències tangents del mateix radi  $R$ . La recta  $L$  és una tangent comuna a  $C$  i  $C'$  i les circumferències  $C'_n$  ( $n \geq 1$ ) es determinen de manera que estiguin contingudes a la regió entre  $L$ ,  $C$  i  $C'$  i que  $C'_n$  sigui tangent a  $C'_{n-1}$ ,  $C$  i  $C'$  (convenim que  $C'_0 = L$ ). Comproveu que  $C'_n$  és la inversa de  $C_n$  respecte de la circumferència puntejada i useu aquest fet per demostrar que el diàmetre de  $C'_n$  és igual a  $R/n(n+1)$  (la circumferència puntejada és la que passa pels punts de contacte de  $L$  amb  $C$  i  $C'$  i que té per centre el punt de contacte de  $C$  i  $C'$ ).

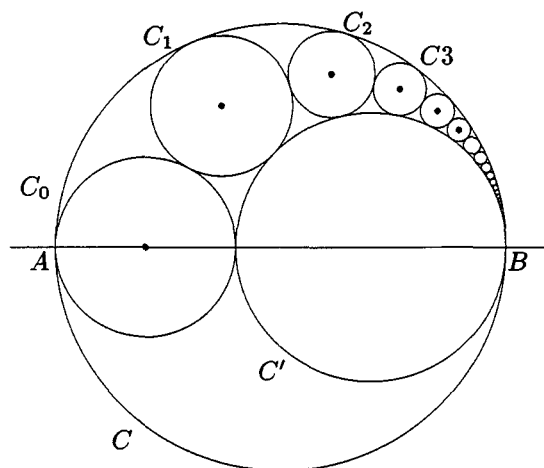


Figura 0.36: Quin diàmetre té  $C_n$ ?

**P.0.45.** A la figura 0.36, la circumferència  $C'$  és interior, i tangent en el punt  $B$ , a la circumferència  $C$  i les circumferències  $C_0, C_1, \dots$  es construeixen tal com indica la figura. Proveu que el diàmetre de  $C_n$  ( $n \geq 1$ ) és igual a  $y_n/n$ , on  $y_n$  és la distància del centre de  $C_n$  a la recta  $AB$  (indicació: trobeu les inverses de  $C_0, C_1, \dots, C_{n-1}, C_n$  respecte de la circumferència de centre  $B$  que és ortogonal a  $C_n$ ).

## 0.4 Indicacions

**I.0.1.** Repasseu el teorema de Pitàgores, el teorema de Tales i la semblança de triangles (especialment el cas de triangles rectangles).

**I.0.2** (XXIX Olimpíada Matemàtica, 1993, primera fase). Expressau  $PO$  com una funció  $f(\alpha)$  de l'angle  $\alpha$  format per  $PO$  i el radi d'un extrem de la corda, i trobeu el màxim de  $f$  en l'interval  $0 < \alpha < \pi/2$ .

**I.0.3** (XXX Olimpíada Matemàtica, 1994, segona fase). Apliqueu repetidament que la suma dels angles d'un triangle és  $\pi$  i la semblança de triangles.

**I.0.4.** Considereu el punt  $F$  d'intersecció amb  $AB$  de la paral·lela a  $BC$  per  $E$  i el punt  $G$  d'intersecció de  $FC$  amb  $BE$ . Llavors,  $BCG$  és equilàter i  $BDG$  és isòsceles.

**I.0.5.** Apliqueu el teorema de Pitàgores. Reviseu, si cal, la definició de segment auri.

**I.0.6.** Considereu el trapezi format per quatre vèrtexs del pentàgon i les diagonals d'aquest trapezi. Hi veureu dos triangles isòsceles semblants. (Per a una solució completa, en forma dialogada, vegeu la secció 0.5, pàg. 41, i per a una solució completa convencional, vegeu la secció 0.6, pàg. 53.)

**I.0.7.** Els triangles rectangles  $AYP$  i  $AZP$  comparteixen la hipotenusa  $AP$ . Apliqueu el teorema dels sinus al triangle  $AYZ$ , tenint en compte la seva relació amb el diàmetre de la circumferència.

**I.0.8.** Sigui  $P$  el peu de l'altura del vèrtex  $A$ . Proveu, usant l'exercici 0.15, que  $LP$  i  $NP$  són paral·leles a  $BM$  i  $CM$ , respectivament.

**I.0.9.** La suma de les diagonals del quadrat és  $2\sqrt{2}$ , que és una mica més gran que  $1 + \sqrt{3}$ . Intenteu d'obtenir un camí modificant el de les dues diagonals, connectant un petit segment paral·lel a dos costats, i amb punt mitjà al centre del quadrat, amb els quatre segments que uneixen cada vèrtex amb l'extrem més proper del segment. Expressau la longitud del camí així obtingut com una funció  $f(x)$  de la longitud  $x$  del petit segment i trobeu el seu mínim en l'interval  $0 < x < 1/2$ .

**I.0.10.** Suposem que el triangle és acutangle. Canviant l'ordre dels vèrtexs si cal, podem suposar que  $c \leq b \leq a$ . Considerem el cas  $c < b$ . Com que  $\hat{A}$  és agut, existeix  $C' \in (AB)$  tal que  $c < CC' < b$ . Si  $r = |CC'|$ , mostreu que existeixen  $B' \in (CA)$  i  $A' \in (AB)$  tals que  $BB' = AA' = r$ . En el cas  $c = b$ , existeix  $A' \in (BC)$  tal que  $|AA'|$  és igual a l'altura de  $B$  (que és igual a l'altura de  $C$ ). Pel que fa a l'enunciat recíproc, mostreu que per triangles amb  $\hat{A} \geq \pi/2$  es té  $|AA'| < b$  per a tot punt  $A' \in (BC)$  i  $|CC'| > b$  per a tot punt  $C' \in (AB)$ .

**I.0.11.** Considereu les cintes d'amplada mínima que contenen el polígon, una amb vores paral·leles a un diàmetre màxim del polígon i l'altra perpendicular a la primera.

**I.0.12.** Apliqueu el teorema del sinus als triangles  $ABC$  i  $ABR$ , i deduíu-ne que

$$|AR| = 2\rho \sin(\beta) \sin(3\alpha + 3\beta) / \sin(\alpha + \beta).$$

Com que  $\sin(3x)/\sin(x) = 4 \sin(\frac{\pi}{3} - x) \sin(\frac{2\pi}{3} - x)$ , en resulta que  $|AR|/\sin(\frac{\pi}{3} + \gamma) = 8\rho \sin(\beta) \sin(\gamma)$  i, anàlogament,  $|AQ|/\sin(\frac{\pi}{3} + \beta) = 8\rho \sin(\gamma) \sin(\beta)$ . Tenint en compte que  $\alpha + (\frac{\pi}{3} + \beta) + (\frac{\pi}{3} + \gamma) = \pi$ , en el triangle  $AQR$  es té que  $\hat{Q} = \frac{\pi}{3} + \gamma$  i  $\hat{R} = \frac{\pi}{3} + \beta$  (vegeu l'exercici 0.8). Per tant,  $8\rho \sin(\beta) \sin(\gamma) = |AR|/\sin(\frac{\pi}{3} + \gamma) = |QR|/\sin(\alpha)$ , que equival a la relació demanada.

**I.0.13.** Si  $P$  no és sobre una bisectriu, per exemple la de l'angle  $\hat{A}$ , llavors la circumferència de centre  $P$  i radi  $|PA|$  talla la bisectriu exterior de  $\hat{A}$  en el punt  $A$  i un altre punt diferent  $A'$ . Llavors  $PA' = PA$ , però el triangle  $A'BC$  té el perímetre més gran que el triangle  $ABC$ . Per veure aquesta darrera afirmació, useu l'exercici E.0.13.

**I.0.14.** Per trigonometria elemental es veu que si  $O$  és el centre del rombe i  $X$  i  $Y$  les projeccions del centre  $P$  d'un dels quadrats sobre les diagonals del rombe, llavors  $|OX| = |OY|$ .

**I.0.15.** Per a la part directa, noteu que les tangents a una circumferència des d'un punt exterior tenen la mateixa longitud. Per a la part recíproca, considereu la circumferència tangent a  $AB$ ,  $BC$  i  $CD$ , amb centre interior al quadrilàter, i proveu que  $AD$  és tangent a aquesta circumferència.

**I.0.16.** Per a la primera desigualtat, apliqueu la desigualtat triangular. Per a la segona, apliqueu l'exercici 0.3. (Per a una solució completa, en forma dialogada, vegeu la secció 0.5, pàg. 43, i per a una solució completa convencional, vegeu la secció 0.6, pàg. 53.)

**I.0.17.** Per a la primera (segona) desigualtat, apliqueu la desigualtat triangular als triangles del tipus  $BCG$  ( $AA'B'$ , on  $A'$  és el punt mitjà de  $[BC]$ , i  $B'$ , el punt mitjà de  $[CA]$ ). (Per a una solució completa, en forma dialogada, vegeu la secció 0.5, pàg. 45, i per a una solució completa convencional, vegeu la secció 0.6, pàg. 53.)

**I.0.18.** Repasseu, si cal, els angles inscrits en una circumferència. També els angles interiors i exteriors.

**I.0.19.** Usant les propietats dels angles inscrits en una circumferència, demostreu (amb les notacions de la figura 0.5) que  $\widehat{QRH} = \widehat{QAH} = \widehat{PBH} = \widehat{PRH}$ . Noteu, per exemple, que els triangles rectangles  $AQH$  i  $ARH$  comparteixen la hipotenusa  $AH$ .

**I.0.20.**  $|A'R| = a/2$ , ja que  $A'$  és el circumcentre de  $BCR$ , i també és clar que  $|B'C'| = a/2$ .

**I.0.21.** Si apliqueu el problema anterior al triangle  $ABH$ , trobareu que el cercle  $PQR$  passa pels punts mitjans dels segments  $AH$  i  $BH$ .

**I.0.22.** Si  $P$  és de la circumferència  $ABC$ , proveu que  $\widehat{AZY} = \widehat{BZX}$ .

**I.0.23.** Mantenint  $R \in [A, B]$  fix (figura 0.5), el triangle  $PQR$  amb mínim perímetre és el determinat imposant que  $P$  i  $Q$  estiguin alineats amb els punts simètrics  $R'$  i  $R''$  de  $R$  respecte de les rectes  $AC$  i  $BC$ , respectivament. Si aquesta condició es compleix, llavors  $R'R''$  és mínim (atès que el triangle  $R'CR''$  és isòsceles i l'angle  $\widehat{R'CR''} = 2\widehat{ACB}$  és constant) quan la longitud dels costats iguals  $R'C = R''C$  ( $=RC$ ) és mínima, és a dir, quan  $R$  és el peu de l'altura de  $C$ . (Per a una solució completa, en forma dialogada, vegeu la secció 0.5, pàg. 46, i per a una solució completa convencional, vegeu la secció 0.6, pàg. 54.)

**I.0.24.** Si  $P$  és un punt interior al triangle acutangle  $ABC$  i posem  $P'$  i  $B'$  per denotar els transformats dels punts  $P$  i  $C$  pel gir antihorari de centre  $A$  i amplitud  $60^\circ$ , llavors la suma  $PA + PB + PC$  (que és igual a  $PP' + PB + P'B'$ ) és mínima si i només si  $B$ ,  $P$ ,  $P'$  i  $B'$  estan alineats. Així  $P$  ha de ser el punt comú a les rectes  $BB'$ ,  $CC'$  i  $AA'$  ( $C'$  i  $A'$  es defineixen anàlogament a com s'ha definit  $B'$ ).

**I.0.25.** Amb les notacions del problema anterior, si  $P$  és el punt de Fermat del triangle  $ABC$ , llavors  $\widehat{APA'} = \pi/3$ . Pel que fa a la segona part, si  $O_a$  és el centre del triangle equilàter construït sobre  $BC$ , a l'exterior de  $ABC$ , i  $O_b$  es defineix anàlogament, llavors  $O_a O_b$  és ortogonal a  $PC$ .

**I.0.26.** Sigui  $ABCD$  un quadrilàter convex. Posem  $A'$ ,  $B'$  i  $C'$  per indicar els peus de les perpendiculars pel punt  $D$  a les rectes  $BC$ ,  $CA$  i  $AB$ , respectivament. Per la desigualtat, apliqueu el problema P.0.7 i la desigualtat triangular. La caracterització de la igualtat es pot obtenir mitjançant el problema P.0.22.

**I.0.27.** Si  $R$  és el peu de l'altura del vèrtex  $A$ ,  $ARC$  i  $QPC$  són semblants.

**I.0.28.** Apliqueu el teorema de Pitàgores als triangles  $PAY$  i  $PAZ$ , i a dues altres parelles similars.

**I.0.29.** Observeu que  $BC = PC$ . Només us cal veure, doncs, que  $\widehat{CPD} = \widehat{BDP}$ .

**I.0.30.** Dos sectors desiguals contigus formen un quart de l'octògon.

**I.0.31.** Considereu la circumferència de centre  $O$  i radi  $OP$ .

**I.0.32.** Considereu l'homotècia de centre  $H$  i raó  $1/2$ .

**I.0.33.** L'homotècia de centre  $G$  i raó  $-1/2$  transforma: 1) la circumferència  $ABC$  en la circumferència  $A'B'C'$ ; 2) l'ortocentre  $H$  en el circumcentre  $O$ , i 3) el circumcentre  $O$  en el circumcentre  $O'$  de  $A'B'C'$ .

**I.0.34.** Considereu primer el cas en què l'ortocentre coincideixi amb un vèrtex.

**I.0.35.** Tenint en compte la relació entre la circumferència circumscrita al triangle  $ABC$  i el cercle d'Euler, es dedueix que  $\widehat{B'C'} = 2\widehat{A}$ ,  $\widehat{C'A'} = 2\widehat{B}$ ,  $\widehat{A'B'} = 2\widehat{C}$ . Mirant els angles  $\widehat{A'C''H}$  i  $\widehat{A'B''H}$ , s'obté que  $\text{arc}(A'B'Q) = \text{arc}(A'C'R) = 2\widehat{A}$ , d'on resulta que  $\widehat{B'Q} = 2\widehat{A} - 2\widehat{C}$  i, anàlogament,  $\widehat{C'R} = 2\widehat{A} - 2\widehat{B}$ ,  $\widehat{A'P} = 2\widehat{B} - 2\widehat{C}$ . Amb això s'obté finalment que  $\widehat{P'Q'} = 2\pi/3$ , i anàlogament pels arcs  $Q'R'$  i  $R'P'$ . (Per a una solució completa, en forma dialogada, vegeu la secció 0.5, pàg. 49, i per a una solució completa convencional, vegeu la secció 0.6, pàg. 54.)

I.0.36. Si  $P$  és del lloc geomètric,  $\widehat{2APB}$  i  $\widehat{AOB}$  són suplementaris.

I.0.37. Posem  $x, y, z, p, q, r$  per denotar les distàncies de  $E$  als vèrtexs  $A, B, C$  i als costats  $BC, CA, AB$ , respectivament. Sigui  $P'$  el punt d'intersecció de la bisectriu de l'angle  $2\alpha = \widehat{BEC}$  amb el costat  $BC$  i  $p' = |EP'|$ . Definim  $q'$  i  $r'$  de manera similar relativament als angles  $2\beta = \widehat{CEA}$  i  $2\gamma = \widehat{AEB}$ . Llavors és suficient veure que  $x+y+z \geq 2(p' + q' + r')$ , ja que una bisectriu no és inferior a la corresponent altura. Tenint en compte que  $yz \sin(2\alpha) = p'y \sin(\alpha) + p'z \sin(\alpha)$ , mostreu que  $p' \leq \sqrt{yz} \cos(\alpha) = p''$ , i les desigualtats anàlogues per  $q'$  i  $r'$ . Vegeu, finalment, que  $x+y+z \geq 2(p'' + q'' + r'')$ , ja que la diferència de les dues expressions és

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y} \cos(\gamma) - \sqrt{z} \cos(\beta))^2 + (\sqrt{y} \sin(\gamma) - \sqrt{z} \sin(\beta)).$$

I.0.38. Amb les mateixes notacions que en la indicació anterior,  $ax \geq qb + rc$ , ja que  $a(x+p) \geq ah_a = pa + qb + rc$ . També tenim  $ax \geq rb + qc$  (apliqueu la desigualtat anterior al punt  $E'$  simètric de  $E$  respecte de la bisectriu de l'angle  $\widehat{ABC}$ ) i, per tant,  $2ax \geq (b+c)(q+r)$ . Com que  $b+c \geq 2\sqrt{bc}$ ,  $ax \geq \sqrt{bc}(q+r)$ . Multiplicant ordenadament aquesta desigualtat i les desigualtats anàlogues per  $y$  i  $z$ , s'obté la conclusió.

I.0.39. Si  $K$  és ortogonal a  $S$ , i  $A$  i  $B$  són els punts d'intersecció de  $K$  i  $S$ , vegeu que si  $P$  és un punt de  $K$ , i  $P'$ , el punt de tall de  $OP$  amb  $K$  (altre que  $P$ ), llavors el triangle  $OAP'$  és semblant al triangle  $OPA$ .

I.0.40. Useu el problema anterior per veure que si  $P$  i  $P'$  són inversos respecte de  $S$ , llavors totes les circumferències per  $P$  i  $P'$  són ortogonals a  $S$ .

I.0.41. Preneu coordenades de manera que  $A$  sigui l'origen i  $\sigma$  la semirecta de les abscisses positives. Si  $O = (r, 0)$ ,  $r > 0$ , i  $P = (a, b)$ , calculeu  $P'$  (l'invers de  $P$  respecte de la circumferència de centre  $O$  i radi  $OA$ ) en funció de  $r$ ,  $a$  i  $b$ .

I.0.42. Useu el fet que les inverses de dues figures tangents són tangents. Per a la segona part, useu el problema anterior.

I.0.43. Considereu les inverses de les circumferències que passen per  $P$  i  $Q$  respecte de  $S$ .

I.0.44. Els inversos dels extrems del diàmetre horitzontal de  $C_n$  són extrems del diàmetre horitzontal de  $C'_n$ .

I.0.45. Estudieu les inverses de les circumferències  $C_1, \dots, C_n$  respecte de la circumferència de centre  $B$  ortogonal a la circumferència  $C_n$ .



## 0.5 La Raquel i en Pau resolen problemes

En aquesta secció donem les solucions, en forma dialogada, de cinc problemes de la llista (P.0.6, P.0.16, P.0.17, P.0.23 i P.0.35). Ens hem decidit a emprar aquest mitjà perquè ens ha semblat adient per intentar explicar, a més a més de la solució, algunes idees i processos que ens semblen rellevants per a la resolució de problemes de geometria. Les solucions convencionals dels mateixos problemes, que són les que, en definitiva, s'exigeixen en els exàmens, les podeu trobar a la secció 0.6.

Als diàlegs, en Pau i la Raquel són estudiants dedicats a la tasca d'aprendre a resoldre problemes de geometria. A l'aula de ciència-ficció on treballen, l'Ariadna, una terminal de darreríssima generació, segueix atentament els seus passos. Ocasionalment, quan ho creu oportú, fa que l'Euclides, un dels seus mòduls més avançats, ajudi els estudiants a retrobar el fil de les seves disquisicions. Per a aprofitar de manera òptima les cavil·lacions de l'Euclides, convé remarcar que té dos modes de funcionament. Un, que podem qualificar de *declaratiu*, imita el procés de «síntesi» dels antics grecs, és a dir, enuncia conclusions que s'obtenen directament de les proposicions generades fins al moment mitjançant coneixements establerts (i generalment coneguts). L'altre, que podem qualificar d'*interrogatiu*, imita el procés d'«anàlisi» en el sentit dels antics, és a dir, fa *preguntes clau* amb les quals usualment es redueixen a un curt nombre els coneixements que cal posar en joc per intentar aconseguir l'objectiu del problema. Com veurem, els estudiants aprenen ràpidament les tècniques de resolució de problemes, i progressivament l'ajut que necessiten de l'Euclides es fa més esporàdic i considerablement més sofisticat.

### Problema 0.6

*Després de llegir l'enunciat, en Pau i la Raquel dibuixen la figura 0.37. Recorden molt bé que a l'inici de les classes el professor els va dir que, quan es tracta de resoldre problemes de geometria, un dibuix pot ésser decisiu. Amb tot això, però, és el primer problema, estan una mica cohibits i no saben ben bé com començar. Veient la situació, l'Ariadna sol·licita a l'Euclides que els ajudi.*

EUCLIDES: El quadrilàter  $PQUT$  és un paral·lelogram.

RAQUEL: Té raó, la diagonal  $QS$  és paral·lela al costat  $PT$  i la diagonal  $TR$  és paral·lela al costat  $PQ$ .

EUCLIDES: El quadrilàter  $PQUT$  és un rombe.

PAU: És clar,  $PT = PQ$  perquè el pentàgon és regular.

EUCLIDES: Així  $QU = PT$ .

RAQUEL: Obvi.

EUCLIDES: Per tant,  $QS - PT = QS - QU = US$ .

P. I R.: Evident.

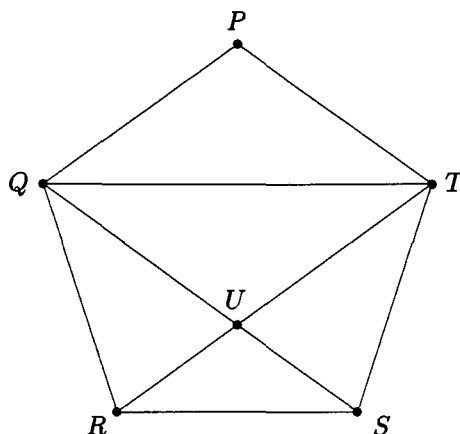


Figura 0.37: El pentàgon i la raó àuria

EUCLIDES: Els triangles  $QTU$  i  $RUS$  són semblants.

RAQUEL: Ja ho veig, podem aplicar el criteri AA de semblança.

PAU: El que diu que dos triangles són semblants quan tenen els tres angles iguals?

RAQUEL: Sí, si no ho recordo malament.

*L'Euclides ha aprofitat aquests instants per acabar la seva tasca i descarrega dues línies de símbols:*

EUCLIDES: Per tant  $\frac{QU}{US} = \frac{QT}{RS} = \frac{QS}{PT}$ . I com que  $\frac{QU}{US} = \frac{PT}{QS-PT}$ , pel que ja hem vist, obtenim que  $\frac{QS}{PT} = \frac{PT}{QS-PT}$ .

*Passen els moments i L'Euclides ja no diu res més.*

R. i P.: I...?

EUCLIDES: Què volíeu demostrar?

PAU: Que el costat del pentàgon regular és segment auri de la diagonal.

EUCLIDES: I això què vol dir?

RAQUEL: Segons la definició, que si  $a$  és la diagonal i  $x$  el costat, llavors  $a/x = x/(a-x)$ .

EUCLIDES: I fins on hem arribat en mode directe?

*L'Euclides diu «mode directe» al que nosaltres n'hem dit «declaratiu», i diu «mode invers» al que n'hem dit «interrogatiu», això és, el que ha emprat després de «I...?»*

PAU: Fins a la relació  $\frac{QS}{PT} = \frac{PT}{QS-PT}$ .

R. i P.: Ah, ja ho veiem! Efectivament s'ha establert que el costat  $PT$  és segment auri de la diagonal  $QS$ , i això acaba la prova!

### Problema 0.16

*Ariadna també sol·licita l'ajuda de l'Euclides, que comença en mode interrogatiu.*

EUCLIDES: Quina mena de coses us demanen?

PAU: No entenc què vol dir.

RAQUEL: Jo crec que ho sé: hem de demostrar que es compleixen unes certes desigualtats.

EUCLIDES: Magnífic. Desigualtats..., entre què?

PAU: Entre distàncies.

EUCLIDES: Excel·lent. I de què disposeu per demostrar desigualtats entre distàncies?

PAU: Jo només conec la desigualtat triangular.

EUCLIDES: Pots enunciar-la?

PAU: Sí: en un triangle, tot costat és inferior a la suma dels altres dos.

EUCLIDES: I com podríem intentar aplicar-la a les desigualtats que ens demanen?

*En Pau i la Raquel pensen un moment. No saben ben bé què dir. L'Euclides hi intervé, en mode declaratiu, per facilitar-los la tasca.*

EUCLIDES: El problema demana dues desigualtats; en realitat estem en presència de dos problemes.

RAQUEL: Hauríem de fer un dibuix.

*Amb un no res dibuixen la figura 0.38.a.*

RAQUEL: Si posem  $2p$  per denotar el perímetre de  $ABC$ , hem de veure, d'una banda, que  $p < x + y + z$ , i, de l'altra, que  $x + y + z < 2p$ .

EUCLIDES: Us faré una pregunta més explícita que l'anterior: com podeu usar la desigualtat triangular per establir  $p < x + y + z$ ?

PAU: Hauríem de cercar triangles, a la figura 0.38.a, en els que un costat estés relacionat amb el perímetre i els altres dos amb els segments  $x$ ,  $y$  i  $z$ .

RAQUEL: Els triangles  $PAB$ ,  $PBC$  i  $PCA$ , per exemple?

PAU: Sí, per exemple. La desigualtat triangular, aplicada a  $PAB$ , ens dona  $c < x + y$ .

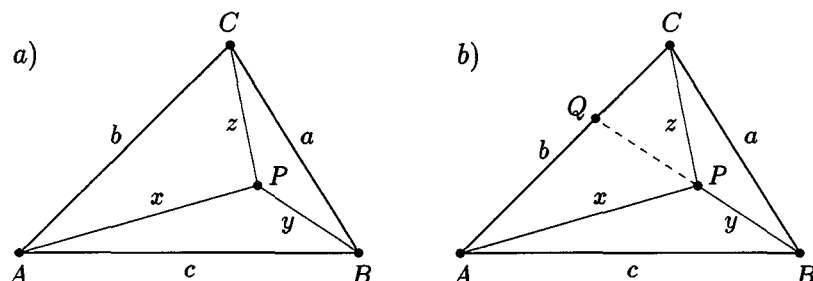


Figura 0.38: Figures usades per resoldre el problema P.0.16

RAQUEL: I aplicada als altres dos ens dona, anàlogament,  $a < y + z$  i  $b < z + x$ .

PAU: Sumant les tres desigualtats tenim  $a + b + c < 2x + 2y + 2z$ .

RAQUEL: I com que  $a + b + c = 2p$ , en resulta que  $p < x + y + z$ , com volíem demostrar.

EUCLIDES: Heu demostrat una part del problema P.0.16.

PAU: L'altra part era la desigualtat  $x + y + z < 2p$ .

RAQUEL: Si intentem de prosseguir l'anàlisi de l'Euclides, ara ens hauríem de preguntar com podem usar la desigualtat triangular per establir  $x + y + z < 2p$ .

PAU: Com en el cas anterior, hauríem de cercar triangles en els quals, a la inversa d'abans, un costat estigui relacionat amb els segments  $x$ ,  $y$  i  $z$ , i els altres dos, amb el perímetre.

*Miren la figura 0.38.a i no aconsegueixen veure cap triangle que compleixi el que volen. Per un moment no saben què fer. Tot d'una, però, la Raquel té un idea; li sembla bona i això l'empeny a explicar les seves conseqüències sense pausa:*

RAQUEL: No ens cal la desigualtat triangular: és evident que  $x + y < b + a$ ; anàlogament,  $y + z < c + b$  i  $z + x < a + c$ ; sumant,  $2x + 2y + 2z < 2a + 2b + 2c$ , és a dir,  $x + y + z < 2p$ . I ja està, hem acabat!

PAU: Això ha estat brillant, Raquel. Però... com veus que  $x + y < a + b$ ?

RAQUEL: Hum!

PAU: Com que és una desigualtat entre distàncies, potser el que hem d'intentar és provar-la aplicant de nou la desigualtat triangular.

RAQUEL: Tens raó; ja ens hem convençut que és l'única eina que coneixem per intentar resoldre aquesta mena de qüestions.

*En Pau completa la figura 0.38.a fins a obtenir la figura 0.38.b.*

PAU: Crec que ja ho tenim. Fixa-t'hi:  $x < AQ + QP$ , per la desigualtat triangular; per tant  $x + y < AQ + QP + y = AQ + QB$ ; ara  $QB < QC + CB$ , altra cop per la desigualtat triangular, d'on  $AQ + QB < AQ + QC + CB = AC + CB = b + a$ . Per tant,  $x + y < b + a$ .

RAQUEL: Efectivament. I així sí que la demostració és completa!

### Problema 0.17

Abans de passar a intentar resoldre el problema P.0.17, en Pau i la Raquel llegeixen el seu enunciat amb molta cura i dibuixen la figura 0.39.a.

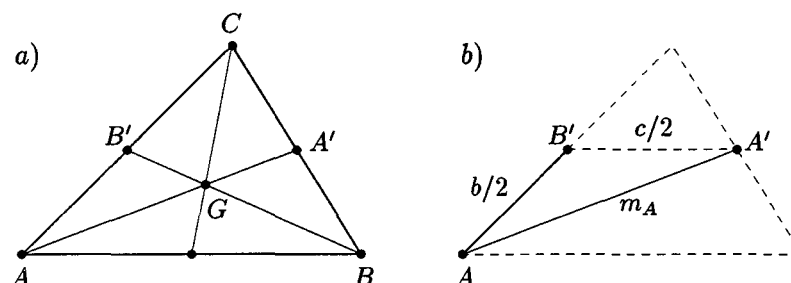


Figura 0.39: Figures usades per resoldre el problema P.0.17

PAU: Em pregunto si el problema anterior, aplicat al baricentre  $G$ , ens donaria alguna cosa.

RAQUEL: Podem provar-ho. Només ens caldria saber el valor de  $x + y + z$  [amb les notacions del problema anterior i amb  $P = G$ ] en termes de  $\mu$  [la suma de les tres mitjanes].

PAU: Això és fàcil. Sabem que  $AG = \frac{2}{3}AA'$ , on  $A'$  és el punt mitjà de  $BC$ . En altres paraules,  $x = \frac{2}{3}m_A$ , on  $m_A$  és la mitjana corresponent al vèrtex  $A$ . Per tant  $x + y + z = \frac{2}{3}\mu$ .

RAQUEL: I com que  $p < x + y + z$  (pel problema P.0.16), resulta que  $p < \frac{2}{3}\mu$ .

PAU: Que és equivalent a  $\frac{3}{2}p < \mu$ , la primera de les relacions que volem demostrar. Què passarà amb la segona?

RAQUEL: Si apliquem la segona desigualtat del problema anterior, obtenim  $\frac{2}{3}\mu < 2p$ .

PAU: Però el que volem és  $\mu < 2p$ . I  $\mu < 2p$  és més forta que  $\frac{2}{3}\mu < 2p$ .

RAQUEL: Perquè  $\frac{2}{3}\mu < \mu$ , oi? Què hi farem! Haurem d'investigar una altra via.

PAU: Podem intentar aplicar la desigualtat triangular una altra vegada.

RAQUEL: Bona idea! Pel que hem après fins ara, ens cal trobar triangles amb un costat relacionat amb  $\mu$ , i els altres dos, amb el perímetre.

*Pensen una mica. Al final dibuixen la figura 0.39.b.*

PAU: Com que  $A'B' = c/2$ , el triangle  $AA'B'$  té un costat,  $AA'$ , que és la mitjana  $m_A$ , mentre que els altres dos costats són iguals a  $c/2$  i  $b/2$ .

RAQUEL: *Ergo*,  $m_A < c/2 + b/2$ . Anàlogament tenim  $m_B < a/2 + c/2$  i  $m_C < b/2 + a/2$ .

PAU: I sumant,  $\mu < 2(a/2 + b/2 + c/2) = 2p$ .

*La Raquel i en Pau es disposen a celebrar l'èxit. Encara no han tingut temps de començar, quan l'Euclides pregunta:*

EUCLIDES: Creieu que les desigualtats obtingudes son òptimes?

*L'interès amb què reben aquesta qüestió no els priva de prendre's un descans.*

Consignem aquí només que quan van tornar a la qüestió es van adonar de les coses següents. Al problema P.0.16, si fem  $P = C$ , llavors  $x + y + z = a + b + 0$ . Per tant, si fem que  $c$  sigui cada vegada més petit, llavors  $2p = a + b + c$  tendeix a  $a + b = x + y + z$ , i per tant la desigualtat  $x + y + z < 2p$  no es pot millorar. Per altra banda, si fem  $P = A$  i fem tendir  $c$  a 0, llavors  $x + y + z = 0 + a + c$  tendeix a  $a$  i  $p = (a + b + c)/2$  tendeix a  $(2a)/2 = a$ , amb la qual cosa es veu que la desigualtat  $p < x + y + z$  tampoc no es pot millorar. Pel que fa al problema P.0.17, es van adonar, considerant un triangle amb  $c$  cada vegada més petit, que la desigualtat  $\mu < 2p$  no es pot millorar, i considerant un triangle en el que  $C$  tendeix al punt mitjà de  $AB$ , que tampoc no es pot millorar la desigualtat  $\frac{3}{2}p < \mu$ .

### Problema 0.23

EUCLIDES: Què ens demanen?

RAQUEL: Demostrar que el triangle òrtic d'un triangle donat és el que té el perímetre més petit entre tots els triangles inscrits al primer.

PAU: És a dir, es tracta de veure que una certa longitud és mínima entre les que satisfan unes certes condicions.

EUCLIDES: Quins enunciats coneixeu que permetin concloure que una longitud és mínima?

RAQUEL: Jo només conec que entre totes les corbes que uneixen dos punts, la recta és la que té longitud menor.

EUCLIDES: Podríem usar aquest coneixement per determinar si un triangle inscrit té perímetre mínim?

PAU: No ho veig pas fàcil, ja que el triangle és una línia tancada.

*Fan una pausa per dibuixar la figura 0.40.a.*

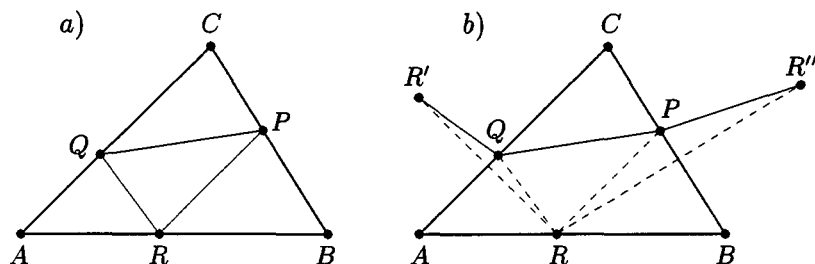


Figura 0.40: Resolució del problema de Fagnano

RAQUEL: Potser podríem obrir-lo [el triangle  $PQR$ ]; obrir-lo d'alguna manera que ens fos útil.

PAU: Genial! Potser una manera d'aconseguir-ho sigui canviar els costats  $QR$  i  $PR$  pels seus simètrics  $QR'$  i  $QR''$  respecte dels costats  $AC$  i  $BC$ .

RAQUEL: Vegem quin aspecte tindria fent una figura.

*Dibuixen la figura 0.40.b.*

RAQUEL: La línia  $R'QPR''$  té, doncs, la mateixa longitud que el perímetre del triangle inscrit  $PQR$ .

PAU: Sí, és clar; per les propietats de les simetries sabem que  $R'Q = RQ$  i  $R''P = RP$ .

RAQUEL: A més a més,  $R'$  i  $R''$  no depenen en absolut de  $P$  i  $Q$ ; només depenen de la posició de  $R$ .

PAU: Ja veig com usar la propietat de la línia recta!

*En Pau dibuixa la figura 0.41.a, mentre explica:*

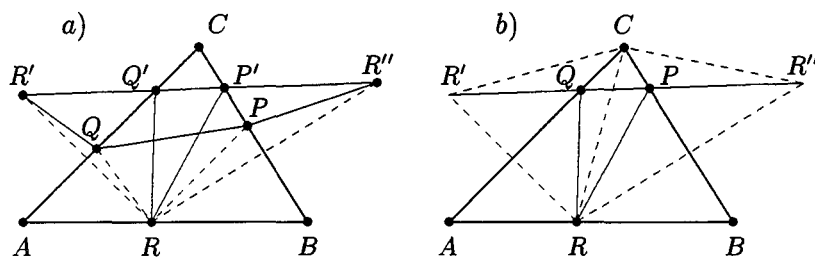


Figura 0.41: Resolució del problema de Fagnano (continuació)

PAU: Si considerem el segment  $R'R''$ , i aquest talla els segments  $AC$  i  $BC$  en els punts  $Q'$  i  $P'$ , llavors  $R'R''$  és el perímetre del triangle  $P'Q'R$ . I com que  $R'R''$  és més curt que  $R'QPR''$  (o igual, si per casualitat fos  $Q' = Q$  i  $P' = P$ ), el triangle  $P'Q'R$  té el perímetre més petit (o igual) que  $PQR$ . De fet, és el de perímetre més petit sempre que mantinguem  $R$  fix.

RAQUEL: Ara hauríem de veure, doncs, per quin punt  $R$  el segment  $R'R''$  té longitud mínima, ja que llavors el triangle  $P'Q'R$  serà la solució del problema.

*En Pau i la Raquel romanen en silenci. No veuen què poden fer. Han arribat fins aquí ajudats per l'Euclides en mode invers. Perquè puguin seguir, l'Euclides canvia súbitament a mode directe.*

EUCLIDES: El triangle  $CR'R''$  és isòsceles.

RAQUEL: Per què?

EUCLIDES:  $CR' = CR = CR''$  per les propietats de la simetries.

*Per poder seguir, dibuixen la figura 0.41.b. Decideixen oblidar-se dels punts  $P$  i  $Q$  del triangle inscrit inicial i usar les lletres  $P$  i  $Q$  per designar els punts que abans eren  $P'$  i  $Q'$ .*

PAU: De fet, doncs,  $CR'R$  i  $CRR''$  també són isòsceles.

RAQUEL: A més,  $CA$  i  $CB$  són les altures dels dos darrers triangles respecte del vèrtex  $C$ .

PAU: En resulta que l'angle  $\widehat{R'CR''}$  és el doble de l'angle  $\widehat{ACB}$ . Com que aquest darrer és fix,  $\widehat{R'CR''}$  també és fix; vull dir que no depèn de  $R$ .

RAQUEL: Tenim un triangle isòsceles,  $R'CR''$ , volem minimitzar la seva base  $R'R''$ , i sabem que l'angle oposat a la base és constant.

PAU: Sota aquestes condicions, la base serà mínima quan els costats (que són iguals) siguin mínims.

RAQUEL: Com que els costats són iguals a  $CR$ , la base  $R'R''$  serà mínima quan el segment  $CR$  ho sigui.

PAU: Fantàstic!  $CR$  és mínim quan  $R$  és el peu de l'altura respecte del vèrtex  $C$ !

RAQUEL: Per tant, el triangle inscrit de perímetre mínim és tal que  $R$  és el peu de l'altura i  $P$  i  $Q$  es construeixen com ja s'ha indicat.

PAU: Com que el paper de  $R$  en les consideracions anteriors el podrien haver fet  $P$  o  $Q$ , realment  $P$  i  $Q$  també són els peus de les corresponents altures.

RAQUEL: De fet, hem demostrat, doncs, que el triangle inscrit de perímetre mínim és el triangle òrtic, i que els simètrics d'un vèrtex del triangle òrtic respecte dels dos costats que no el contenen estan alineats amb els altres dos vèrtexs (del triangle òrtic).



PAU: És ben curiós!

*Mentre celebren alegrement aquestes excel·lents conclusions...*

EUCLIDES: On heu usat la hipòtesi que el triangle és acutangle? És, aquesta hipòtesi, indispensable? Podríeu usar la vostra conclusió per resoldre el problema P.0.19?

### Problema 0.35

*La Raquel i en Pau recorden que el cercle dels nou punts és el cercle  $A'B'C'$ , on  $A', B', C'$  són els punts mitjans dels costats, i que aquest cercle, també anomenat «d'Euler», passa pels peus  $P, Q, R$  de les altures i pels punts mitjans  $A'', B'', C''$  dels segments  $HA, HB, HC$ . També recorden, pel que han vist en problemes anteriors, que l'homotècia de centre  $G$ , el baricentre, transforma el cercle circumscrit  $ABC$  en  $A'B'C'$ . Abans de decidir què fer, dibuixen la figura 0.42 (s'ho arrangeu de manera que  $\hat{A} \geq \hat{B} \geq \hat{C}$ ). D'acord amb l'enunciat, el punt  $P'$  de l'arc  $A'P$  es defineix de manera que l'arc  $A'P' = \frac{1}{3}A'P$ ; i els punts  $Q'$  i  $R'$  es defineixen de manera similar.*

RAQUEL: Volem veure que  $P'Q'R'$  és un triangle equilàter.

PAU: Segur que aquí l'Euclides preguntaria: Com podem veure que un triangle és equilàter?

RAQUEL: Una manera de fer-ho és aplicar la definició: un triangle és equilàter quan els seus tres costats són iguals. També n'hi ha prou veient que els seus tres angles són iguals (necessàriament d'amplitud  $\pi/3$ ). El que encara no veig és com aplicar algun d'aquests criteris al problema.

PAU: Atès que  $P'Q'R'$  estan sobre el cercle d'Euler, potser el segon criteri aniria millor.

RAQUEL: A mi també m'ho sembla. Hauríem de veure que, en el triangle  $P'Q'R'$ , els angles  $\widehat{P'}$ ,  $\widehat{Q'}$  i  $\widehat{R'}$  tenen amplitud  $\pi/3$ .

PAU: Com que aquests angles estan inscrits al cercle d'Euler, això és equivalent a dir que els arcs  $P'Q'$ ,  $Q'R'$  i  $R'P'$  sobre el cercle d'Euler tenen una amplitud de  $2\pi/3$  radians.

RAQUEL: Potser no serà tan difícil com podia semblar. Sobre el cercle d'Euler hi tenim ara 12 punts i potser ens aniria bé, abans de seguir, de deduir les amplituds d'alguns dels arcs entre aquests punts.

PAU: Em sembla bé. Els arcs  $A'B'$ ,  $B'C'$  i  $C'A'$ , per exemple, són fàcils: les seves amplituds són les mateixes que les dels arcs  $AB$ ,  $BC$  i  $CA$  sobre el cercle circumscrit  $ABC$ , és a dir, iguals a  $2\hat{C}$ ,  $2\hat{A}$  i  $2\hat{B}$ .

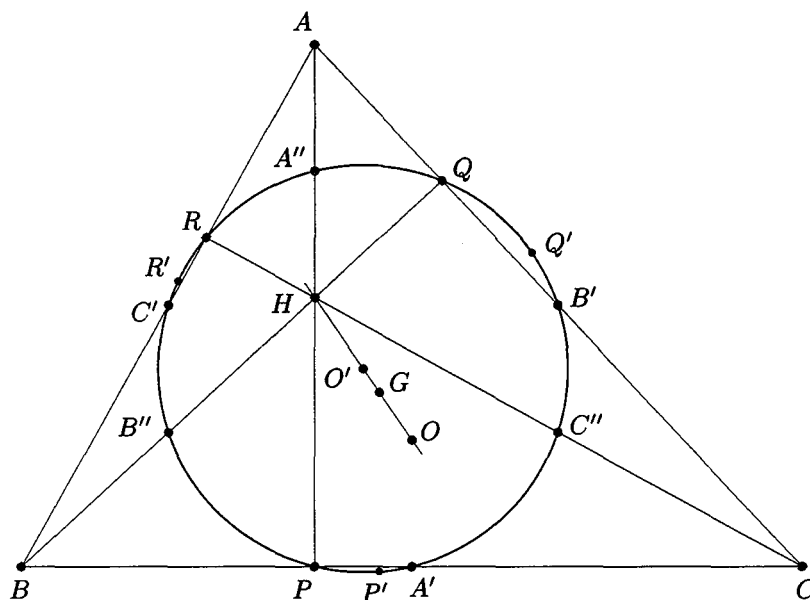


Figura 0.42: Punts  $P'$ ,  $Q'$ ,  $R'$  del cercle d'Euler

RAQUEL: Suposo que la primera afirmació que fas prové de l'homotècia que transforma  $ABC$  en  $A'B'C'$ , i que la segona surt directament del que sabem d'angles inscrits.

PAU: Efectivament.

$$\widehat{A'B'} = 2\widehat{C}, \quad \widehat{B'C'} = 2\widehat{A}, \quad \widehat{C'A'} = 2\widehat{B}.$$

Ara ja no en veig cap més.

RAQUEL: Jo veig una relació que potser ens pot donar quelcom més. Fixa-t'hi [mentre ho diu, dibuxa la figura 0.43]: Com que  $A'$  és el punt mitjà de  $BC$  i  $C''$  el punt mitjà de  $CH$ , resulta que  $A'C''$  és paral·lela a l'altura  $BH$ .

PAU: Anàlogament  $A'B''$  és paral·lela a l'altura  $CH$ .

RAQUEL: I així  $A'C''HB''$  és un paral·lelogram.

PAU: I tot això què té a veure amb els angles?

*La Raquel posa la lletra  $\alpha$  a l'angle  $\widehat{A'C''H}$  i a l'angle  $\widehat{HB''A'}$ .*

RAQUEL: Són iguals perquè són angles oposats en un paral·lelogram.

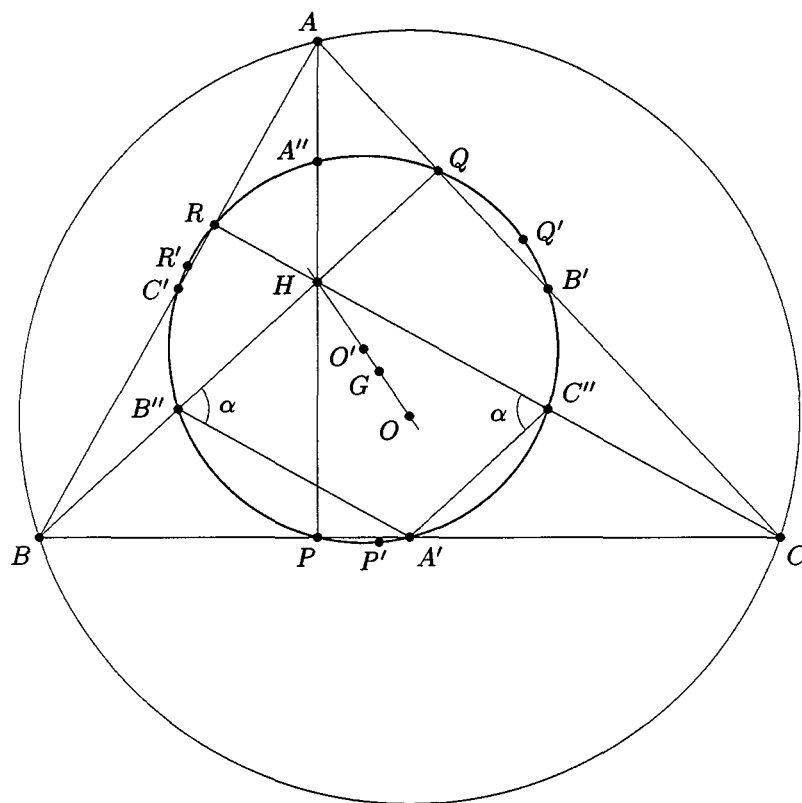


Figura 0.43: Determinació d'angles centrals sobre el cercle d'Euler

PAU: Ja ho veig. Per angles inscrits altra vegada,  $2\alpha$  és igual a l'arc  $A'C'R$  i també a l'arc  $A'B'Q$ .

RAQUEL: Els costats  $C''A'$  i  $C''H$  de l'angle  $\widehat{A'C''H}$  són perpendiculars, respectivament, als costats  $AC$  i  $AB$ . Per tant, de fet,  $\alpha = \hat{A}$ .

PAU: Un gran pas: ara ja tenim que l'amplitud dels arcs  $A'B'Q$  i  $A'C'R$  és igual a  $2\hat{A}$ .

RAQUEL: I per diferència [ $\widehat{B'Q} = \widehat{A'Q} - \widehat{A'B'}$  i  $\widehat{C'R} = \widehat{A'R} - \widehat{A'C'}$ ] obtenim que  $\widehat{B'Q} = 2\hat{A} - 2\hat{C}$  i  $\widehat{C'R} = 2\hat{A} - 2\hat{B}$ . Anàlogament, serà  $\widehat{A'P} = 2\hat{B} - 2\hat{C}$ . És a dir,

$$\widehat{B'Q} = 2\hat{A} - 2\hat{C}, \quad \widehat{C'R} = 2\hat{A} - 2\hat{B}, \quad \widehat{A'P} = 2\hat{B} - 2\hat{C}.$$

PAU: Ara ja podem calcular l'arc  $P'Q'$ :

$$\begin{aligned}\widehat{P'Q'} &= \frac{1}{3}\widehat{A'P} + \widehat{A'B'} + \frac{1}{3}\widehat{B'Q} \\ &= \frac{2}{3}(\widehat{B} - \widehat{C}) + 2\widehat{C} + \frac{2}{3}(\widehat{A} - \widehat{C}) \\ &= \frac{2}{3}(\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C}) \\ &= \frac{2\pi}{3}\end{aligned}$$

Que  $\widehat{Q'R'} = \frac{2\pi}{3}$  i  $\widehat{R'P'} = \frac{2\pi}{3}$ , es veu de manera anàloga.

En Pau i la Raquel dibuixen la figura 0.44, simplement per gaudir de veure amb imatges el que han vist abans amb els ulls de la geometria. Abans de tenir temps de tancar la terminal i els quaderns, l'Euclides té temps de generar una pregunta.

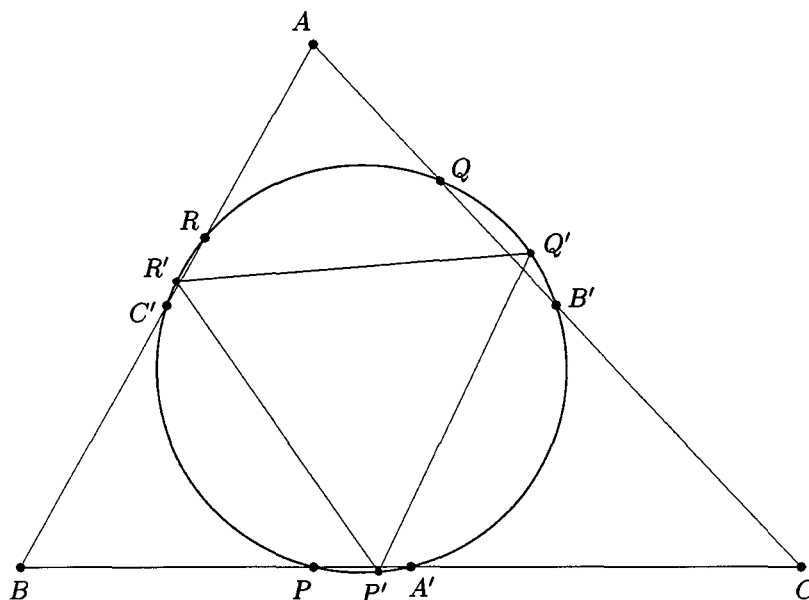


Figura 0.44: El triangle equilàter  $P'Q'R'$

EUCLIDES: Què en podeu dir de les tres parelles d'arcs  $A'C''$  i  $B'C''$ ,  $PB''$  i  $C'B''$ ,  $QA''$  i  $RA''$ ?

Podem transcriure breument que la Raquel i en Pau van veure ràpidament, usant que les altures són bisectrius del triangle òrtic, que  $RA'' = QA''$  i, usant el treball fet en el darrer problema, que  $RA'' = QA'' = \pi - 2\widehat{A}$ . Anàlogament  $PB'' = RB'' = \pi - 2\widehat{B}$  i  $PC'' = QC'' = \pi - 2\widehat{C}$ . Això, i de nou amb els resultats del primer problema, els permet veure que  $B'C'' = C'B'' = \pi - 2\widehat{A}$  i  $A'C'' = PB'' = \pi - 2\widehat{B}$ .

## 0.6 Mostra de solucions

En aquesta secció s'inclouen solucions convencionals dels problemes P.0.6, P.0.16, P.0.17, P.0.23 i P.0.35. Aquestes mateixes solucions les podeu trobar exposades en forma dialogada a la secció 0.5, la qual cosa pot tenir interès pels lectors que vulguin reflexionar amb més deteniment sobre el procés de resolució de problemes.

### Problema 0.6

Considerem la figura 0.37 (pàg. 41). El quadrilàter  $PQUT$  és un rombe, ja que la diagonal  $QS$  és paral·lela al costat  $PT$ , la diagonal  $TR$  és paral·lela al costat  $PQ$  i  $PT = PQ$  (perquè el pentàgon és regular). Així  $QU = PT$ , d'on resulta que  $QS - PT = QS - QU = US$ .

Per altra banda, els triangles  $QTU$  i  $RUS$  són semblants (criteri AA de semblança). Per tant  $\frac{QU}{US} = \frac{QT}{RS} = \frac{QS}{PT}$ . I com que  $\frac{QU}{US} = \frac{PT}{QS - PT}$ , pel que ja hem vist, obtenim que  $\frac{QS}{PT} = \frac{PT}{QS - PT}$ . Per tant, el costat  $PT$  és segment auri de la diagonal  $QS$ , per la definició de segment auri.

### Problema 0.16

Com que ens demanen que demostrem dues desigualtats entre distàncies, intentarem aplicar la desigualtat triangular. Amb les notacions de la figura 0.38.a, si posem  $2p$  per denotar el perímetre de  $ABC$ , hem de veure, d'una banda, que  $p < x + y + z$ , i, de l'altra, que  $x + y + z < 2p$ .

Per establir que  $p < x + y + z$ , fixem-nos en els triangles  $PAB$ ,  $PBC$  i  $PCA$ . La desigualtat triangular, aplicada a  $PAB$ , ens dona  $c < x + y$ . Anàlogament,  $a < y + z$  i  $b < z + x$ . Sumant les tres desigualtats tenim  $a + b + c < 2x + 2y + 2z$ . Com que  $a + b + c = 2p$ , en resulta que  $p < x + y + z$ .

Manca veure la desigualtat  $x + y + z < 2p$ . Considerem la figura 0.38.b. Aplicant la desigualtat triangular obtenim:  $x + y < AQ + QP + y = AQ + QB < AQ + QC + CB = AC + CB = b + a$ . Anàlogament,  $y + z < c + b$  i  $z + x < a + c$ ; sumant,  $2x + 2y + 2z < 2a + 2b + 2c$ , és a dir,  $x + y + z < 2p$ .

### Problema 0.17

El problema P.0.16, aplicat al baricentre  $G$ , ens dona la primera desigualtat. En efecte, amb les notacions de la figura 0.39.a, sabem que  $AG = \frac{2}{3}AA'$ , on  $A'$  és el punt mitjà de  $BC$ . En altres paraules,  $x = \frac{2}{3}m_A$ , on  $m_A$  és la mitjana corresponent al vèrtex  $A$ . Per tant  $x + y + z = \frac{2}{3}\mu$ . Com que  $p < x + y + z$  (pel problema P.0.16), resulta que  $p < \frac{2}{3}\mu$ , que és equivalent a  $\frac{3}{2}p < \mu$ . Val a remarcar que si apliquem la segona desigualtat del problema P.0.16, obtenim  $\frac{2}{3}\mu < 2p$ , que és una desigualtat més feble que la desigualtat  $\mu < 2p$  que volem demostrar.

Per veure que  $\mu < 2p$ , considerem la figura 0.39.b. Com que  $A'B' = c/2$ , el triangle  $AA'B'$  té un costat,  $AA'$ , que és la mitjana  $m_A$ , mentre que els altres dos costats són iguals a  $c/2$  i  $b/2$ . Per tant,  $m_A < c/2 + b/2$ . Anàlogament, tenim  $m_B < a/2 + c/2$  i

$m_C < b/2 + a/2$ . Si ara sumem aquestes tres desigualtats, obtenim  $\mu < 2(a/2 + b/2 + c/2) = 2p$ .

### Problema 0.23

Considerem la figura 0.40.a. Volem veure que  $PQR$  té perímetre mínim si i només si  $PQR$  és el triangle òrtic de  $ABC$ . Siguin  $R'$  i  $R''$  els simètrics del punt  $R$  respecte dels costats  $AC$  i  $BC$ , respectivament (figura 0.40.b). La línia  $R'QPR''$  té la mateixa longitud que el perímetre del triangle inscrit  $PQR$ . Si considerem els punts d'intersecció,  $Q'$  i  $P'$ , de  $R'R''$  amb els costats  $AC$  i  $BC$ , respectivament (figura 0.41.a), llavors el perímetre de  $P'Q'R$  és igual a  $R'R''$ . Com que la longitud de  $R'R''$  és inferior (o igual) a la longitud de la línia  $R'QPR''$ , veiem que el triangle  $P'Q'R$  és el de perímetre més petit entre tots els triangles inscrits  $PQR$  (amb  $R$  fix). Ara ens cal veure per quin punt  $R$  del costat  $AB$  té el segment  $R'R''$  longitud mínima, ja que llavors el triangle  $P'Q'R$  serà la solució del problema.

Remarquem que el triangle  $CR'R''$  és isòsceles ( $CR' = CR = CR''$  per les propietats de la simetries; vegeu la figura 0.41.b). De fet,  $CR'R$  i  $CRR''$  també són isòsceles i  $CA$  i  $CB$  són són perpendiculars a  $RR'$  i  $RR''$ . En resulta que l'angle  $\widehat{R'CR''}$  és el doble de l'angle  $\widehat{ACB}$ . Com que aquest darrer és fix,  $\widehat{R'CR''}$  també és fix (és a dir, no depèn de  $R$ ). Per tant la base  $R'R''$  del triangle isòsceles  $CR'R''$  té longitud mínima si i només si els seus costats tenen longitud mínima. Però com que els costats són iguals a  $CR$ , la base  $R'R''$  serà mínima quan el segment  $CR$  ho sigui, és a dir, si i només si  $R$  és el peu de l'altura del vèrtex  $C$ . Anàlogament, es veuria que  $P$  i  $Q$  han de ser els peus de les altures de  $A$  i  $B$ , respectivament.

### Problema 0.35

Recordem que el cercle dels nou punts és el cercle  $A'B'C'$ , on  $A', B', C'$  són els punts mitjans dels costats, i que aquest cercle, també anomenat *d'Euler*, passa pels peus  $P, Q, R$  de les altures i pels punts mitjans  $A'', B'', C''$  dels segments  $HA, HB, HC$ . Recordem també, pel que hem vist en problemes anteriors, que l'homotècia de centre  $G$  (el baricentre), transforma el cercle circumscrit  $ABC$  en  $A'B'C'$ .

Considerem la figura 0.42 (suposarem que  $\widehat{A} \geq \widehat{B} \geq \widehat{C}$ ). D'acord amb l'enunciat, el punt  $P'$  de l'arc  $A'P$  es defineix de manera que  $\widehat{A'P'} = \frac{1}{3} \widehat{A'P}$ ; i els punts  $Q'$  i  $R'$  es defineixen de manera similar. Volem veure que  $P'Q'R'$  és un triangle equilàter, per la qual cosa és suficient veure que els angles  $\widehat{P'Q'R'}$  i  $\widehat{P'}$  (del triangle  $P'Q'R'$ ) tenen amplitud  $\pi/3$ . Com que aquests angles estan inscrits al cercle d'Euler, això és equivalent a dir que els arcs  $P'Q', Q'R'$  i  $R'P'$  sobre el cercle d'Euler tenen una amplitud de  $2\pi/3$  radians.

Les amplituds dels arcs  $A'B', B'C'$  i  $C'A'$  coincideixen amb les dels arcs  $AB, BC$  i  $CA$  sobre el cercle circumscrit  $ABC$ , és a dir, són iguals a  $2\widehat{C}, 2\widehat{A}$  i  $2\widehat{B}$  (per l'homotècia que transforma  $ABC$  en  $A'B'C'$  i per les propietats dels angles inscrits al cercle  $ABC$ ). Per tant,

$$\widehat{A'B'} = 2\widehat{C}, \quad \widehat{B'C'} = 2\widehat{A}, \quad \widehat{C'A'} = 2\widehat{B}.$$

Considerem ara la figura 0.43. Com que  $A'$  és el punt mitjà de  $BC$  i  $C''$  el punt mitjà de  $BH$ , resulta que  $A'C''$  és paral·lela a l'altura  $BH$ . Anàlogament,  $B'A''$  és paral·lela a l'altura  $CH$  i  $C'B''$  és paral·lela a l'altura  $AH$ . Per tant,  $A'C''HB'$  és un paral·lelogram. Així obtenim que els angles  $\widehat{A'C''H}$  i  $\widehat{HB'A'}$  són iguals. Però, per angles inscrits altra vegada,  $2\alpha$  és igual a l'arc  $A'C'R$  i també a l'arc  $A'B'Q$ . A més a més, els costats  $C''A'$  i  $C''H$  de l'angle  $\widehat{A'C''H}$  són perpendiculars, respectivament, als costats  $AC$  i  $AB$ . Per tant,  $\alpha = \hat{A}$ . Tenim, doncs, que l'amplitud dels arcs  $A'B'Q$  i  $A'C'R$  és igual a  $2\hat{A}$ . Per diferència [ $B'Q = A'Q - A'B'$  i  $C'R = A'R - A'C'$ ] obtenim que  $\widehat{B'Q} = 2\hat{A} - 2\hat{C}$  i  $\widehat{C'R} = 2\hat{A} - 2\hat{B}$ . Anàlogament serà  $\widehat{A'P} = 2\hat{B} - 2\hat{C}$ . És a dir,

$$\widehat{B'Q} = 2\hat{A} - 2\hat{C}, \quad \widehat{C'R} = 2\hat{A} - 2\hat{B}, \quad \widehat{A'P} = 2\hat{B} - 2\hat{C}.$$

Ara ja podem calcular l'arc  $P'Q'$ :

$$\begin{aligned} \widehat{P'Q'} &= \frac{1}{3} \widehat{A'P} + \widehat{A'B'} + \frac{1}{3} \widehat{B'Q} \\ &= \frac{2}{3}(\hat{B} - \hat{C}) + 2\hat{C} + \frac{2}{3}(\hat{A} - \hat{C}) \\ &= \frac{2}{3}(\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}) \\ &= \frac{2\pi}{3} \end{aligned}$$

Que  $\widehat{Q'R'} = \frac{2\pi}{3}$  i  $\widehat{R'P'} = \frac{2\pi}{3}$ , es veuen de manera anàloga.

## 1 Geometria afí

En aquest capítol introduïm primer l'espai afí, mitjançant axiomes basats en l'àlgebra lineal i suggerits per les propietats del càlcul vectorial associat a un espai geomètric ordinari. Tot seguit considerem les varietats lineals d'un espai afí (en particular, els punts, les rectes i els plans), les quals es poden definir, en un sentit natural, com els subespais afins de l'esmentat espai.

Per tal de manipular efectivament les figures d'un espai afí, per exemple les varietats lineals, s'introdueixen els sistemes de referència afins. Fixada una referència afí, cada punt té unes coordenades unívocament definides i així les relacions entre punts es tradueixen en relacions entre les corresponents coordenades. Per exemple, els punts les coordenades dels quals satisfan un sistema donat d'equacions lineals, formen una varietat lineal, i recíprocament, tota varietat lineal es pot descriure d'aquesta manera.

Les aplicacions entre espais afins que són compatibles amb les estructures d'espai afí, s'anomenen aplicacions afins. Les aplicacions afins bijectives d'un espai afí en ell mateix s'anomenen afinitats i constitueixen un grup amb el producte de composició (el grup afí de l'espai en qüestió). Mitjançant referències afins, les afinitats es poden representar algebraicament i aquesta representació (equacions de les afinitats) ens permet manipular-les de manera efectiva.

Convé dir aquí que la geometria afí és l'estudi dels conceptes i propietats que romanen inalterats per les afinitats. Aquests conceptes i propietats es diu que són afins. Per exemple, el concepte de varietat lineal i la relació de paral·lelisme de varietats lineals són afins, però el concepte d'angle o la relació de perpendicularitat no ho són (en el capítol 2 veurem que són de natura mètrica). El concepte afí més senzill és la raó simple d'una terna de punts alineats i amb ell es poden definir conceptes i relacions afins més complexos. De fet, és el concepte afí fonamental, ja que una aplicació d'un espai afí en ell mateix és una afinitat si i només si transforma punts alineats en punts alineats i conserva el valor de les raons simples.



## 1.1 Espai afí

L'estructura d'espai afí és una abstracció de les propietats del càlcul amb vectors lliures de l'espai geomètric ordinari que no depenen del concepte de distància (cf. l'exemple 1.3). Va ser introduïda formalment, la noció d'espai afí, per H. Weyl en el seu llibre *Space, time, matter* (Dover, 1952), però de fet els seus trets principals es van començar a entreveure amb l'obra de Descartes i s'han anat perfilant lentament en el decurs del temps. La noció d'espai afí, a més de la seva importància en geometria, és a la base de la mecànica de Newton i de la relativitat especial d'Einstein.

### Definicions i notacions bàsiques

Sigui  $K$  un cos. Un *espai afí sobre  $K$*  és una terna  $(\mathbb{A}, V, \delta)$  formada per un conjunt no buit  $\mathbb{A}$ , els elements del qual anomenarem *punts*, un  $K$ -espai vectorial  $V$ , els elements del qual anomenarem *vectors*, i una aplicació

$$\delta: \mathbb{A} \times \mathbb{A} \rightarrow V,$$

que denotarem  $(P, Q) \mapsto \overrightarrow{PQ}$  i anomenarem *aplicació estructural*, que verifiquen els dos axiomes següents:

**1.1 Axioma** (Homogeneïtat). *Per a tot punt  $P$  i tot vector  $v$  existeix un únic punt  $Q$  tal que  $\overrightarrow{PQ} = v$ .*

**1.2 Axioma** (Llei d'addició).  $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$ , qualssevol que siguin  $P, Q, R \in \mathbb{A}$ .

L'axioma d'homogeneïtat es pot expressar també dient que per a tot punt  $P$ , l'aplicació

$$\delta_P: \mathbb{A} \rightarrow V \text{ tal que } Q \mapsto \overrightarrow{PQ}$$

és una bijectió. La injectivitat de  $\delta_P$  significa que de  $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PR}$  podem inferir  $Q = R$ . Per altra banda, la llei d'addició també es pot escriure amb la forma

$$\delta_P(R) = \delta_Q(R) + \overrightarrow{PQ}. \quad [1.1]$$

o, abreujadament,  $\delta_P = \delta_Q + \overrightarrow{PQ}$  (vegeu la figura 1.1).

Fent un abús de notació i de llenguatge, sovint escriurem  $\mathbb{A}$  en lloc de  $(\mathbb{A}, V, \delta)$ , i ens referirem a  $\mathbb{A}$  dient que és un espai afí i a  $V$  dient que és l'*espai vectorial associat* a l'espai afí. Per exemple, direm que  $\mathbb{A}$  té *dimensió  $n$* , i escriurem  $\dim(\mathbb{A}) = n$ , o simplement  $\mathbb{A}^n$ , si  $V$  té dimensió  $n$  sobre  $K$ . Aquests abusos, en general, són inofensius atès que pel context sempre és clar a quin espai afí ens estem referim.

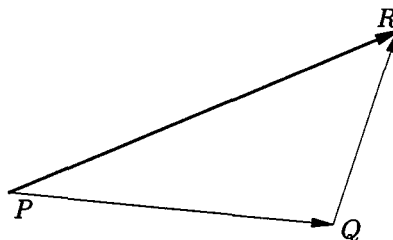


Figura 1.1: Llei d'addició

**E.1.1.** Comproveu que un espai afí de dimensió 0 conté un únic punt.

Tot i que els espais afins de dimensió infinita tenen importància en diversos contextos, en aquest curs només considerarem espais afins de dimensió finita, condició que suposarem d'ara endavant. Els espais afins de dimensió 1 (respectivament, 2) s'anomenen *rectes afins* (respectivament, *plans afins*). Les locucions *espai afí real* i *espai afí complex* s'usaran com a sinònims d'espai afí sobre  $\mathbb{R}$  i d'espai afí sobre  $\mathbb{C}$ , respectivament.

**1.3 Exemple** (Espai afí ordinari). En la presentació que en fem en aquest text, en el capítol 2, la noció d'espai euclidià es defineix a partir de la noció d'espai afí real. Històricament, però, el procés va anar just al revés: la noció d'espai afí es va originar en l'estudi de l'espai euclidià. Aleshores les notacions i la nomenclatura relatives als espais afins s'expliquen, en bona mesura, per aquest origen. Així, doncs, una explicació d'aquest procés, encara que només sigui d'una manera molt esquemàtica i informal, pot ajudar a comprendre la natura dels ingredients i dels axiomes d'espai afí que hem introduït.

L'espai afí que s'associa a l'espai euclidià  $\mathcal{E}$  està format pel conjunt  $\mathbb{A}$  dels punts de  $\mathcal{E}$ , per l'espai vectorial real  $V$  de les translacions de  $\mathcal{E}$  i per l'aplicació  $\delta: \mathbb{A} \times \mathbb{A} \rightarrow V$  tal que  $\delta(P, Q)$  és la translació  $t_{PQ}$  tal que  $t_{PQ}(P) = Q$ . La llei d'addició és conseqüència del fet que la composició de les translacions  $t_{PQ}$  i  $t_{QR}$  és la translació  $t_{PR}$  i l'axioma d'homogeneïtat es compleix per tal com una translació queda unívocament determinada per la imatge d'un punt. Tot seguit expliquem amb un cert detall com es defineixen la translació  $t_{PQ}$  i l'estructura d'espai vectorial real en el conjunt  $V$  de les translacions.

Primer ens cal introduir algunes notacions. Donats dos punts diferents  $P, Q \in \mathbb{A}$ , la recta  $PQ$  es unió de dues semirectes d'origen  $P$ . D'aquestes semirectes, la que conté  $Q$  serà denotada  $|PQ\rangle$  i la que no conté  $Q$ ,  $\langle PQ|$ . També posarem  $\overline{PQ}$  per denotar la distància entre  $P$  i  $Q$ . Si  $\lambda \in \mathbb{R}$ , l'expressió  $M_\lambda(P, Q)$  denotarà, quan  $\lambda \geq 0$ , el punt  $M$  de la semirecta  $|PQ\rangle$  tal que  $\overline{PM} = \lambda \overline{PQ}$  i, quan  $\lambda < 0$ , el punt  $M$  de la semirecta  $\langle PQ|$  tal que  $\overline{PM} = -\lambda \overline{PQ}$  (aquest punt coincideix amb  $M_{1-\lambda}(Q, P)$ ). L'aplicació  $\lambda \mapsto M_\lambda(P, Q)$ , de  $\mathbb{R}$  en la recta  $PQ$ , és bijectiva. Convindrem que  $M_\lambda(P, P) = P$  per

a tot punt  $P \in \mathbb{A}$  i tot  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Per definir la translació  $t_{PQ}$  hem d'especificar com transforma un punt  $R$  qualsevol. Si  $R \notin PQ$ ,  $t_{PQ}(R)$  és el punt d'intersecció de la recta per  $R$  que és paral·lela a la recta  $PQ$  amb la recta per  $Q$  que és paral·lela a la recta  $PR$  (vegeu la figura 1.3, en la qual  $S = t_{PQ}(R)$ ). Si  $R \in PQ$ , llavors escollim un punt  $S$  exterior a la recta  $PQ$  (vegeu la figura 1.2), formem el punt  $T$  d'intersecció de la recta per  $S$  paral·lela a  $PQ$  amb la recta per  $Q$  paral·lela a  $PS$  i definim  $t_{PQ}(R)$  com la intersecció de la recta per  $T$  paral·lela a  $SR$  amb la recta  $PQ$ . Aquesta definició té sentit perquè es pot comprovar que no depèn del punt  $S$  escollit. També es pot definir,  $t_{PQ}(R)$  quan  $R \in PQ$ , per la fórmula  $t_{PQ}(R) = M_{\lambda+d}(P, Q)$ , on  $d = \overline{PQ}$  i on  $\lambda \in \mathbb{R}$  és tal que  $R = M_{\lambda}(P, Q)$ .

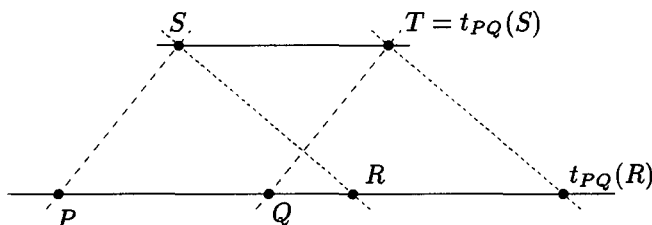


Figura 1.2: Definició de  $t_{PQ}(R)$  quan  $R \in PQ$

La suma de translacions es defineix com l'operació de composició. El conjunt  $V$  de translacions, amb aquesta suma, resulta ser un grup abelià. Per altra banda, el producte  $\lambda t_{PQ}$  del nombre real  $\lambda$  per la translació  $t_{PQ}$  es defineix com la translació  $t_{PM}$ , on  $M = M_{\lambda}(P, Q)$ . Aquest producte està ben definit, atès que es pot comprovar que si  $t_{PQ} = t_{RS}$ ,  $M = M_{\lambda}(P, Q)$  i  $N = M_{\lambda}(R, S)$ , llavors  $t_{PM} = t_{RN}$ . Finalment es comprova que  $V$ , amb el producte  $\mathbb{R} \times V \rightarrow V$  que acabem de descriure, és un espai vectorial real.

Vegem, per acabar, una altra manera d'entendre l'espai vectorial  $V$ . Un *segment orientat* de  $\mathbb{A}$  és un parell ordenat  $(P, Q)$  de punts de  $\mathbb{A}$ : es diu que  $P$  és l'*origen* i  $Q$  l'*extrem* del segment. Dos segments orientats  $(P, Q)$  i  $(P', Q')$  es diuen *equipollents* si i només si  $t_{PQ}(P') = Q'$ , o, equivalentment, si  $t_{PQ} = t_{P'Q'}$ . En resulta que la relació així definida en el conjunt de segment orientats (relació d'*equipollència*) és d'equivalència. Sigui  $\overrightarrow{PQ}$  la classe corresponent al segment  $(P, Q)$ , i que anomenarem *vector lliure* associat al segment orientat  $(P, Q)$ . Amb això tenim que existeix una bijecció, entre el conjunt de vectors lliures i  $V$ , tal que  $\overrightarrow{PQ} \mapsto t_{PQ}$ , amb la qual cosa podem identificar cada vector lliure amb la corresponent translació.

**1.4 Exemple** (La recta afi del temps). Un espai afi real de dimensió 1,  $(\mathbb{A}, V, \delta)$ , es pot usar per modelitzar el temps: els punts de  $\mathbb{A}$  s'interpreten com els «instants», els vectors de  $V$  com a «quantitats de temps» i  $\delta(P, Q) \in V$ , si  $P$  i  $Q$  són instants, com la quantitat de temps transcorregut entre l'instant  $P$  i l'instant  $Q$ .

Com que en un espai afí no hi ha cap punt distingit, en aquest model del temps no hi ha cap instant distingit. Tampoc no hi ha cap unitat de temps distingida, ja que entre els vectors no nuls de  $V$  no n'hi cap de distingit. El model ens permet interpretar fàcilment la «mesura» d'una quantitat de temps  $v$  respecte d'una quantitat no nul·la de temps  $v_0$  que prenem arbitràriament com a «unitat»: és l'únic  $t \in \mathbb{R}$  tal que  $v = tv_0$ . Si amb la unitat de mesura  $v_0$  identifiquem els elements de  $V$  amb nombres reals (fent correspondre  $tv_0$  amb  $t$ ), llavors  $\delta(P, Q) \in \mathbb{R}$  indica la mesura del temps transcorregut entre els instants  $P$  i  $Q$ .

En la teoria de Newton, la recta del temps és independent de qualsevol observador, i per això es diu que el temps newtonià té caràcter absolut. En la física d'Einstein (vegeu 1.6) hi ha una recta del temps per a cada observador inercial, i per això es diu que en aquest sistema el temps és relatiu.

Físicament, el temps entre dos instants es mesura mitjançant un rellotge, és a dir, per qualsevol mecanisme que permeti comptar el nombre de vegades que un determinat fenomen cíclic ha ocorregut entre el primer i el segon instant. Que la relació que lliga el temps donat per dos rellotges sigui lineal (com ho demana el model matemàtic) és un enunciat físic no trivial, però que es compleix amb molta aproximació pels millors rellotges i sota una gran varietat de circumstàncies. El caràcter absolut del temps en el sistema newtonià implica que la relació entre dos rellotges ha de ser independent del seu estat de moviment respecte d'un observador, mentre que la teoria d'Einstein prediu una dependència precisa que ha estat confirmada experimentalment.

**1.5 Exemple** (Espai associat a un espai vectorial). A tot espai vectorial  $E$  sobre un cos  $K$  se li pot associar un espai afí sobre  $K$  fent  $A = E$ ,  $V = E$  i  $\delta(v, w) = w - v$ . L'axioma d'homogeneïtat es compleix: donat  $v \in V$ , l'aplicació  $\delta_v : V \rightarrow V$  tal que  $w \mapsto w - v$  és bijectiva (l'aplicació inversa és la donada per  $w' \mapsto w' + v$ ) i la llei d'addició es compleix perquè tenim  $(w - v) + (x - w) = x - v$ , qualssevol que siguin  $v, w, x \in V$ .

D'aquest espai afí en direm que és l'*espai afí associat* a l'espai vectorial  $E$ . En contraposició a un espai afí arbitrari, té la particularitat de tenir un punt distingit (el  $0 \in E$ ).

L'*espai afí numèric de dimensió  $n$* ,  $A_K^n$ , es defineix com l'espai afí associat a l'espai vectorial  $K^n$ .

**1.6 Exemple** (Espai-temps). En la teoria de la relativitat especial (o restringida), introduïda el 1905 per Einstein, un concepte fonamental és l'*esdeveniment*. Un esdeveniment, com ara l'emissió d'un fotó per un àtom, es pot caracteritzar pel punt on ocorre i l'instant en què es produeix. Aquesta noció té un sentit absolut en el marc newtonià, a causa del caràcter absolut del temps (cf. 1.4), però el significat en relativitat és més subtil a causa de la famosa anàlisi d'Einstein segons la qual la simultaneïtat és un concepte relatiu (és a dir, esdeveniments simultanis per a un observador poden no ser simultanis per a un altre). En tot cas, un descobriment fonamental d'Einstein,

formulat posteriorment per Minkowski, fou que el conjunt d'esdeveniments, analitzats tenint en compte la relativitat del temps, té estructura d'espai afi real de dimensió 4: és l'espai-temps d'Einstein (vegeu, per exemple, A. Das, *The Special Theory of Relativity: A Mathematical Approach*, Springer-Verlag, 1996).

Per a altres exemples d'espais afins, vegeu els problemes P.1.3 i P.1.4.

### Vector de posició

Fixat un punt  $O \in \mathbb{A}$ , el vector  $\overrightarrow{OP}$  s'anomena *vector de posició de P respecte de O*. Quan  $O$  es pot sobreentendre pel context, a vegades s'escriu, fent abús de la notació,  $\overrightarrow{P}$  en lloc de  $\overrightarrow{OP}$ . Com que  $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$ , amb aquest abús de notació podem escriure  $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{Q} - \overrightarrow{P}$ . De fet és costum denotar aquesta diferència amb l'expressió  $Q - P$ , de manera que  $Q - P$  és simplement una expressió alternativa per designar  $\overrightarrow{PQ}$ , i en aquest text farem servir les dues indistintament. La llei d'addició s'escriu, amb aquesta notació,  $(Q - P) + (R - Q) = R - P$ . L'operació  $Q - P = \overrightarrow{PQ} = \delta_P(Q)$  (*diferència de punts*) és una operació binària externa del conjunt  $\mathbb{A}$ , a valors en l'espai vectorial  $V$ . Cal tenir cura, però, que en general no existeix cap operació natural de «suma de punts», sinó només de suma de vectors i, com veurem després, de suma d'un punt i un vector.

**1.7 Proposició.** *Donats els punts  $P, Q, R, S$ ,*

- 1)  $\overrightarrow{PQ} = 0$  si i només si  $Q = P$ .
- 2)  $\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP}$ .
- 3) Si  $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS}$ , aleshores  $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{QS}$  (figura 1.3).

**Prova:** De  $\overrightarrow{PP} + \overrightarrow{PP} = \overrightarrow{PP}$ , que val per la llei d'addició 1.2, n'inferim que  $\overrightarrow{PP} = 0$ . Per altra banda, si  $\overrightarrow{PQ} = 0$ , llavors  $\overrightarrow{PQ} = 0 = \overrightarrow{PP}$ , d'on  $Q = P$  per l'axioma 1.1. Això prova 1.

L'enunciat 2 és una conseqüència directa de la llei d'addició i de la primera part:  $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{PP} = 0$ .

Finalment, tenim  $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}$ , per la llei d'addició. Ara  $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{QR} + \overrightarrow{RS}$ , per la hipòtesi  $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS}$  i la commutativitat de la suma, i  $\overrightarrow{QR} + \overrightarrow{RS} = \overrightarrow{QS}$ , altra vegada per la llei d'addició, d'on  $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{QS}$ .  $\square$

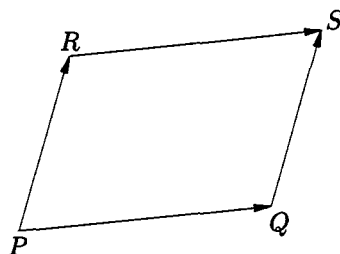


Figura 1.3: Si  $Q - P = S - R$ , llavors  $R - P = S - Q$

### Translacions

Sigui  $(\mathbb{A}, V, \delta)$  un espai afí. Donats  $P \in \mathbb{A}$  i  $v \in V$ , l'axioma 1.1 ens diu que existeix un únic punt  $Q \in \mathbb{A}$  tal que  $v = \overrightarrow{PQ}$ . Aquest punt  $Q$  només depèn de  $P$  i  $v$ , i direm que és el *traslladat de  $P$  segons  $v$* . Per denotar-lo, farem servir l'expressió  $P + v$ , de manera que la relació  $Q = P + v$  és equivalent, per definició, a la relació  $v = \overrightarrow{PQ}$ , o  $v = Q - P$ . En particular, tenim que  $P + \overrightarrow{PQ} = Q$ , o  $P + (Q - P) = Q$ .

**E.1.2.** Proveu que  $P + 0 = P$  per a tot punt  $P$ .

**E.1.3.** Proveu que en l'espai afí associat a un espai vectorial  $E$  (exemple 1.5) la suma  $w + v$  de vectors coincideix amb la suma, interpretant  $w$  com un punt i  $v$  com un vector.

Si fixem  $v \in V$ , podem considerar l'aplicació  $t_v: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$  tal que  $t_v(P) = P + v$ . Direm que  $t_v$  és la *translació de vector  $v$* . Notem que, donats  $P, Q \in \mathbb{A}$ ,  $v = \overrightarrow{PQ}$  és l'únic vector tal que  $t_v(P) = Q$  [♦]. Per altra banda, tenim, segons l'exercici E.1.2, que  $t_0 = Id$  (l'aplicació identitat).

La propietat fonamental de les translacions és la següent:

**1.8 Proposició.** Si  $v, w \in V$ ,  $t_w \circ t_v = t_{v+w}$ .

**Prova:** En efecte, la igualtat equival a dir que  $(P + v) + w = P + (v + w)$  per a tot punt  $P$ . Ara bé, aquesta darrera relació és conseqüència de la llei d'addició, car si posem  $P + v = Q$ ,  $Q + w = R$  i  $P + (v + w) = R'$ , llavors  $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = v + w = \overrightarrow{PR'}$ , i per tant  $R = R'$ .  $\square$

**1.9 Corol·lari.** Per a tot  $v \in V$ ,  $t_v$  és bijectiva i  $t_v^{-1} = t_{-v}$ .

**Prova:** En efecte,  $t_v \circ t_{-v} = t_0 = Id$ .  $\square$

**1.10 Corollari.** Donat  $v \in V$ , les condicions següents són equivalents: 1)  $v = 0$ ; 2)  $t_v = Id$ ; 3)  $t_v$  té punts fixos.

**Prova:** Només queda per veure que 3 implica 1. Si  $P$  fos un punt fix de  $t_v$ , tindriem  $P + v = P = P + 0$ , d'on  $v = 0$ .  $\square$

**E.1.4.** Verifiqueu que la relació  $P + v = Q + w$  (on  $P, Q \in \mathbb{A}$ ,  $v, w \in V$ ) equival a la relació  $v = \overrightarrow{PQ} + w$ , o a la relació  $v - w = \overrightarrow{PQ}$  (que també podem escriure  $v - w = Q - P$ ).

Posarem  $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\mathbb{A})$  per denotar el conjunt  $\{t_v \mid v \in V\}$  de les translacions de  $\mathbb{A}$ . Aquest conjunt és tancat per l'operació de composició (per la proposició 1.8),  $t_0 = Id$  és element neutre d'aquesta operació i, pel corollari 1.9, tot element  $t_v \in \mathcal{T}$  té invers (l'element  $t_{-v}$ ). Com que, a més,  $t_v = Id$  si i només si  $v = 0$  (per 1.10) i  $t_v \circ t_w = t_w \circ t_v$  (per 1.8 i el fet que la suma de vectors és commutativa), podem sumaritzar aquestes consideracions com segueix:

**1.11 Proposició.** El conjunt  $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\mathbb{A})$  de les translacions de  $\mathbb{A}$  és un grup commutatiu i l'aplicació  $(V, +) \rightarrow (\mathcal{T}, \circ)$  tal que  $v \mapsto t_v$  és un isomorfisme de grups.  $\square$

### Definició alternativa d'espai afí

**1.12** Si  $(\mathbb{A}, V)$  és un espai afí, l'aplicació  $\mathbb{A} \times V \rightarrow \mathbb{A}$  tal que  $(P, v) \mapsto P + v$  té, segons hem vist, les propietats següents:

- 1) Donats  $P, Q \in \mathbb{A}$ , existeix un únic  $v \in V$  tal que  $Q = P + v$ .
- 2)  $(P + v) + w = P + (v + w)$ , qualssevol que siguin  $P \in \mathbb{A}$  i  $v, w \in V$ .

Tot seguit mostrem que, recíprocament, aquestes propietats són suficients per determinar, en un sentit que precisarem, una estructura d'espai afí.

**1.13 Proposició.** Sigui  $\mathbb{A}$  un conjunt no buit,  $V$  un  $K$ -espai vectorial i  $\mathbb{A} \times V \rightarrow \mathbb{A}$  una aplicació, que denotarem  $(P, v) \mapsto P \dot{+} v$ , que satisfà les propietats 1.12.1 i 1.12.2. Donats  $P, Q \in V$ , posem  $\delta(P, Q)$  per denotar l'únic vector donat per la propietat 1.12.1. Llavors  $(\mathbb{A}, V, \delta)$  és un espai afí tal que  $P + v = P \dot{+} v$  qualssevol que siguin  $P \in \mathbb{A}$  i  $v \in V$ .

**Prova:** En efecte, primer hem de veure, per un punt  $P$  fixat qualsevol, que l'aplicació  $Q \mapsto \overrightarrow{PQ}$  és bijectiva, on  $\overrightarrow{PQ} = \delta(P, Q)$ . Atès que de la mateixa definició de  $\overrightarrow{PQ}$  es desprèn que  $Q = P + \overrightarrow{PQ}$ , qualssevol que siguin els punts  $P$  i  $Q$ , si  $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PR}$ , aleshores

$Q = P \dot{+} \overrightarrow{PQ} = P \dot{+} \overrightarrow{PR} = R$ , i això mostra que l'aplicació és injectiva. I si  $v \in V$ , llavors el punt  $Q = P \dot{+} v$  compleix que  $\overrightarrow{PQ} = v$ , de manera que l'aplicació és exhaustiva.

També hem de comprovar la propietat 1.2. Però com que

$$\begin{aligned}
 P \dot{+} (\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}) &= (P \dot{+} \overrightarrow{PQ}) \dot{+} \overrightarrow{QR} && \text{per 1.12.2} \\
 &= Q \dot{+} \overrightarrow{QR} && \text{per definició de } \overrightarrow{PQ} \\
 &= R && \text{per definició de } \overrightarrow{QR} \\
 &= P \dot{+} \overrightarrow{PR} && \text{per definició de } \overrightarrow{PR}
 \end{aligned}$$

d'1.12.1 obtenim que  $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$ .

Ens falta veure que  $P + v = P \dot{+} v$ . Per definició, el punt  $Q = P + v$  és l'únic punt tal que  $\overrightarrow{PQ} = v$ . Per tant,  $P \dot{+} v = P \dot{+} \overrightarrow{PQ} = Q = P + v$ .  $\square$

## 1.2 Varietats lineals

Els subconjunts més senzills d'un espai afí, definits per abstracció dels conceptes de recta i pla de l'espai ordinari, són les varietats lineals. Com veurem, una varietat lineal no és més que un «subespai afí». L'adjectiu *lineal* prové del fet que un subconjunt és una varietat lineal si i només si conté la recta («línia») que uneix dos punts qualssevol del mateix (vegeu el problema P.1.2).

### Definició de varietat lineal. Espai director

Sigui  $(\mathbb{A}, V, \delta)$  un espai afí. D'un subconjunt  $L$  no buit de  $\mathbb{A}$ , se'n diu que és una *varietat lineal* si, per a tot  $P \in L$ , el conjunt  $\delta_P(L)$  de vectors de la forma  $\overrightarrow{PQ}$ ,  $Q \in L$ , formen un subespai vectorial de  $V$ . Notem que  $L = P + \delta_P(L)$  (el conjunt de punts de la forma  $P + v$ ,  $v \in \delta_P(L)$ ) i que  $\delta_P: L \rightarrow \delta_P(L)$  és bijectiva.

**1.14 Proposició.** Si  $L$  és una varietat lineal i  $P, Q \in L$ , llavors  $\delta_P(L) = \delta_Q(L)$ .

**Prova:** En efecte,  $\delta_Q(L) = \delta_P(L) - \overrightarrow{PQ}$ , per la fórmula [1.1], i  $\delta_P(L) - \overrightarrow{PQ} = \delta_P(L)$ , ja que  $\delta_P(L)$  és un subespai vectorial i  $\overrightarrow{PQ} \in \delta_P(L)$ .  $\square$

Així, doncs, si  $L$  és una varietat lineal, el subespai  $\delta_P(L)$  és independent de  $P \in L$ . Posarem  $W = W(L)$  per denotar-lo i direm que és la *direcció*, o el *subespai director*, de  $L$ . Es té que  $L = P + W(L)$  per a tot  $P \in L$ .



**1.15 Proposició.** *Recíprocament, si  $W$  és un subespai vectorial de  $V$  i  $P \in \mathbb{A}$ , llavors  $L = P + W$  és una varietat lineal,  $P \in L$ , i  $W = W(L)$ . En particular, es compleix que  $L = Q + W$  per a tot  $Q \in L$  i que  $(Q + W) \cap (P + W) = \emptyset$  si  $Q \notin L$ .*

**Prova:** És immediata i es deixa al lector. □

Direm que  $P + W$  és la *varietat lineal que passa pel punt  $P$  amb direcció  $W$* .

**E.1.5.** Si  $L$  és un subconjunt d'un espai afí  $\mathbb{A}$  tal que  $\delta_P(L)$  és un subespai vectorial de  $V$  per algun punt  $P \in L$ , llavors  $L$  és una varietat lineal.

**E.1.6.** Donat un subespai  $W$  de  $V$ , proveu que la relació

$$P \sim Q \Leftrightarrow \overrightarrow{PQ} \in W$$

és d'equivalència i que les classes respecte d'ella són les varietats lineals que tenen subespai director  $W$ .

L'exercici que segueix dona contingut a l'afirmació que una subvarietat lineal és un «subespai afí».

**E.1.7.** Sigui  $L$  una varietat lineal i  $W = W(L)$ . Proveu que  $(L, W, \delta|_L)$  és un espai afí, on  $\delta|_L$  denota la restricció de  $\delta$  a  $L$ .

## Dimensió

Si  $L$  és una varietat lineal, té sentit, doncs, parlar de la seva dimensió com a espai afí,  $\dim(L)$ , la qual és igual, segons la definició general (pàg. 58), a  $\dim_K(W)$ , on  $W$  és l'espai director de  $L$ .

**E.1.8.** Si  $L$  i  $L'$  són varietats lineals i  $L \subseteq L'$ , demostreu que  $\dim(L) \leq \dim(L')$  i que val la igualtat si i només si  $L = L'$ . Verifiqueu també que, per a un enter  $d$  donat, hi ha una varietat lineal  $L$  de  $\mathbb{A}^n$  tal que  $\dim(L) = d$  si i només si  $0 \leq d \leq n$ .

Les varietats lineals de dimensió 0 es poden identificar amb els *punts* de  $\mathbb{A}$ , ja que  $P + \{0\} = \{P\}$ . Les varietats lineals de dimensió 1 s'anomenen *rectes* i les de dimensió 2, *plans*. Les varietats lineals de dimensió  $n - 1$  de  $\mathbb{A}^n$  s'anomenen *hiperplans*. Notem, doncs, que els hiperplans de  $\mathbb{A}^1$  són els punts, que els de  $\mathbb{A}^2$  són les rectes i que els de  $\mathbb{A}^3$  són els plans.

### Varietats paral·leles

Siguin  $L$  i  $L'$  dues varietats lineals. Direm que  $L$  i  $L'$  són *paral·leles*, i posarem  $L \parallel L'$  per denotar-ho, si  $W(L) \subseteq W(L') \vee W(L') \subseteq W(L)$ . Notem que si  $\dim(L) = \dim(L')$ , llavors  $L \parallel L'$  si i només si  $W(L) = W(L')$ . En resulta que la relació  $\parallel$  és d'equivalència en el conjunt de les varietats lineals d'una dimensió donada.

**E.1.9.** Sigui  $L$  una varietat lineal de dimensió  $r$ , i  $Q$ , un punt. Demostreu que  $L' = Q + W(L)$  és l'única varietat lineal de dimensió  $r$  que passa per  $Q$  i és paral·lela a  $L$ . Direm que  $L'$  és la *varietat paral·lela a  $L$  pel punt  $Q$* .

### Equació paramètrica vectorial

Sigui  $L$  una varietat lineal i  $W = W(L)$  el seu espai director. Sigui  $r = \dim(L) = \dim(W)$ . Direm que  $w_1, \dots, w_r \in W$  és un *sistema de vectors directors de  $L$*  si  $w_1, \dots, w_r$  formen una base de  $W$ .

Si  $w_1, \dots, w_r \in W$  és un sistema de vectors directors de  $L$ , l'aplicació  $K^r \rightarrow W$  tal que  $(\lambda_1, \dots, \lambda_r) \mapsto \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_r w_r$  és bijectiva. Si ara escollim un punt  $P \in L$ , tenim  $L = P + W$ , i si posem

$$X = P + \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_r w_r, \quad \lambda_1, \dots, \lambda_r \in K, \quad [1.2]$$

llavors l'aplicació  $K^r \rightarrow L$  tal que  $(\lambda_1, \dots, \lambda_r) \mapsto X$  és bijectiva. De la relació [1.2], se'n diu que és una *equació paramètrica vectorial* de  $L$ . Aquesta equació ens dona un punt de  $L$  per a cada valor particular assignat als «paràmetres»  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  i tot punt de  $L$  es pot obtenir d'aquesta manera per a un únic valor dels paràmetres.

**E.1.10.** Donats dos punts diferents hi ha una única recta que els conté.

Tres punts es diuen *no alineats* si no hi ha cap recta que els conté. Per tal que hi hagi tres punts no alineats és necessari (i suficient) que  $\dim(\mathbb{A}) \geq 2$ .

**E.1.11.** Donats tres punts no alineats hi ha un únic pla que els conté.

### Punts independents

Les nocions «dos punts diferents» o «tres punts no alineats» són un cas particular de la noció de «punts independents». Donats punts  $P_0, \dots, P_r \in \mathbb{A}$ , direm que són *independents* si els vectors  $P_1 - P_0, \dots, P_r - P_0$  són linealment independents.

**E.1.12.** Fixem un punt  $O \in \mathbb{A}$ . Demostreu que els punts  $P_0, \dots, P_r \in \mathbb{A}$  són independents si i només si les relacions

$$\lambda_0(P_0 - O) + \dots + \lambda_r(P_r - O) = 0 \quad \text{i} \quad \lambda_0 + \dots + \lambda_r = 0$$

impliquen  $\lambda_0 = \dots = \lambda_r = 0$ . Com que aquestes relacions romanen invariants si permutem els punts, veiem que si  $P_0, \dots, P_r \in \mathbb{A}$  són independents, llavors  $P_{i_0}, \dots, P_{i_r}$  són independents per a qualsevol permutació  $i_0, \dots, i_r$  dels índexs  $0, \dots, r$ .

**1.16 Proposició.** *Si  $P_0, \dots, P_r$  són punts independents, llavors hi ha una única varietat lineal de dimensió  $r$  que els conté.*

**Prova:** Posem  $e_i = P_i - P_0$ ,  $i = 1, \dots, r$ . Com que els punts  $P_0, \dots, P_r$  són independents,  $e_1, \dots, e_r$  són linealment independents i, per tant, la varietat lineal  $L = P_0 + \langle e_1, \dots, e_r \rangle$  té dimensió  $r$ . Això prova l'existència d'una varietat lineal de dimensió  $r$  que conté els punts, ja que òbviament  $P_0 \in L$  i, per  $i = 1, \dots, r$ ,  $P_i = P_0 + e_i \in L$ . Per veure la unicitat, sigui  $L'$  una varietat lineal de dimensió  $r$  que conté els punts  $P_0, \dots, P_r$ . Llavors tenim, per  $i = 1, \dots, r$ ,  $e_i = P_i - P_0 \in W(L')$ , d'on  $\langle e_1, \dots, e_r \rangle \subseteq W(L')$ . Com que  $W(L')$  té dimensió  $r$  per hipòtesi, serà  $\langle e_1, \dots, e_r \rangle = W(L')$ . Finalment, com que  $P_0 \in L'$ ,  $L' = P_0 + W(L') = P_0 + \langle e_1, \dots, e_r \rangle = L$ , i això acaba la prova.  $\square$

La varietat lineal de la proposició anterior s'anomena *varietat determinada pels punts*  $P_0, \dots, P_r$ . La denotarem  $P_0P_1 \dots P_r$ . Així, doncs, si  $P$  i  $Q$  són dos punts diferents,  $PQ$  designa la única recta que els conté, i si  $P, Q, R$  són tres punts no alineats,  $PQR$  designa l'únic pla que passa per ells.

**E.1.13.** Siguí  $L$  una varietat lineal i  $P_0, \dots, P_r$  punts independents de  $L$ . Verifiquen que  $P_0P_1 \dots P_r \subseteq L$ , i que val la igualtat si i només si  $\dim(L) = r$ .

### Intersecció i suma de varietats lineals

En aquest apartat  $L$  i  $L'$  són dues varietats lineals i  $W$  i  $W'$  els seus espais directores. Posem  $P$  per denotar un punt de  $L$ , i  $P'$  per denotar un punt de  $L'$ . Així tenim  $L = P + W$  i  $L' = P' + W'$ .

Si  $L \cap L' \neq \emptyset$ , llavors podem escollir  $P' = P$  i, per tant,  $L = P + W$  i  $L' = P + W'$ . D'aquí resulta que  $L \cap L' = P + (W \cap W')$ . Com que  $W \cap W'$  és un subespai vectorial de  $V$ , tenim:

**1.17 Proposició.** *Si  $L \cap L' \neq \emptyset$ , llavors  $L \cap L'$  és una varietat lineal i  $W(L \cap L') = W(L) \cap W(L')$ .*  $\square$

**E.1.14.** Siguin  $L_1, \dots, L_k$  varietats lineals. Si la intersecció  $L_1 \cap \dots \cap L_k$  és no buida, proveu que és una varietat lineal i que el seu espai director és  $W(L_1) \cap \dots \cap W(L_k)$ .

Anem a veure ara quina és la condició que han de complir  $P, P', W$  i  $W'$  per tal que la intersecció  $L \cap L'$  sigui no buida. Si  $L$  i  $L'$  tenen un punt en comú, llavors existeixen  $w \in W$  i  $w' \in W'$  tals que  $P + w = P' + w'$ , d'on resulta que  $P' - P = w - w'$ . Com que  $-w' \in W'$ , veiem que  $P' - P \in W + W'$ . Recíprocament, si  $P' - P \in W + W'$ ,

llavors existeixen  $u \in W$  i  $u' \in W'$  tals que  $P' - P = u + u'$ , d'on resulta que el punt  $P + u = P' - u'$  pertany a  $P + W = L$  i a  $P' + W' = L'$ . Remarquem que d'aquestes consideracions es desprèn que si  $P' - P \in W + W'$  per un cert  $P \in L$  i un cert  $P' \in L'$ , llavors  $P' - P \in W + W'$  per a tot  $P \in L$  i tot  $P' \in L'$ , afirmació que es pot demostrar també directament sense cap dificultat. Així, doncs, hem demostrat:

**1.18 Proposició.** *La condició necessària i suficient per tal que les varietats lineals  $L$  i  $L'$  es tallin és que  $P' - P \in W + W'$ , per un cert  $P \in L$  i un cert  $P' \in L'$ . A més, en el cas que es tallin,  $P' - P \in W + W'$  qualssevol que siguin  $P \in L$  i  $P' \in L'$ .  $\square$*

**1.19 Corol·lari.** *La condició  $W + W' = V$  és suficient per tal que  $L \cap L' \neq \emptyset$ .  $\square$*

A fi de manejar la propietat de la proposició 1.18 d'una manera més còmoda, observem primer que l'espai

$$W(L, L') = \langle P' - P \rangle + W + W'$$

només depèn de  $L$  i  $L'$ , i no dels punts  $P$  i  $P'$  que hàgim escollit. De fet, si  $Q \in L$  i  $Q' \in L'$ , diguem  $Q = P + w$  i  $Q' = P' + w'$  ( $w \in W$ ,  $w' \in W'$ ), llavors

$$Q' - Q = (P' - P) + w - w' \in \langle P' - P \rangle + W + W'.$$

Així, doncs,  $\langle Q' - Q \rangle + W + W' \subseteq \langle P' - P \rangle + W + W'$  i l'afirmació es desprèn immediatament, ja que per la inclusió contrària només cal observar que podem intercanviar els punts  $P$  i  $P'$  amb els punts  $Q$  i  $Q'$ , respectivament.

**E.1.15.** Verifiquem que  $P + W(L, L') = P' + W(L, L')$  i que aquesta varietat només depèn de  $L$  i  $L'$ , i no de  $P \in L$  o  $P' \in L'$ . Si posem  $L \vee L'$  per denotar aquesta varietat lineal, comproveu que  $L, L' \subseteq L \vee L'$  i que si  $M$  és una varietat lineal tal que  $L, L' \subseteq M$ , llavors  $L \vee L' \subseteq M$ .

### Fórmula de les dimensions

Segons l'exercici anterior,  $L \vee L'$  és la varietat lineal més petita que conté  $L$  i  $L'$ . Direm que  $L \vee L'$  és la *varietat lineal generada per  $L$  i  $L'$* , o que és la *suma* de  $L$  i  $L'$ .

**1.20 Proposició.** *La dimensió de  $L \vee L'$  es calcula per la fórmula següent:*

$$\dim(L \vee L') = \begin{cases} \dim(L) + \dim(L') - \dim(L \cap L') & \text{si } L \cap L' \neq \emptyset \\ 1 + \dim(L) + \dim(L') - \dim(W \cap W') & \text{si } L \cap L' = \emptyset \end{cases} \quad [1.3]$$

**Prova:** Per la definició de  $L \vee L'$ , la seva dimensió coincideix amb la dimensió de  $W(L, L')$  com a subespai vectorial de  $V$ . Com que  $W(L, L') = \langle P' - P \rangle + W + W'$ , tenim que

$$\dim(L \vee L') = \dim_K(\langle P' - P \rangle + W + W') = \begin{cases} \dim_K(W + W') & \text{si } P' - P \in W + W', \\ 1 + \dim_K(W + W') & \text{si } P' - P \notin W + W'. \end{cases}$$

Però per àlgebra lineal sabem que

$$\dim_K(W + W') = \dim_K(W) + \dim_K(W') - \dim_K(W \cap W'),$$

i és clar que  $\dim_K(W) = \dim(L)$  i  $\dim_K(W') = \dim(L')$ . Com que  $P' - P \in W + W'$  equival al fet que  $L \cap L' \neq \emptyset$ , i que en aquest cas  $\dim_K(W \cap W') = \dim(L \cap L')$ , la prova és completa.  $\square$

Ens referirem a la relació [1.3] com la *fórmula de les dimensions* (per varietats lineals de l'espai afi; en el capítol 3 estudiarem la fórmula de les dimensions per varietats lineals de l'espai projectiu). En la resta d'aquesta secció la il·lustrarem amb alguns exemples.

**1.21 Exemple.** Suposem que  $\dim(L) = \dim(L') = d$  i que  $L$  i  $L'$  són paral·leles, és a dir, que  $W = W'$ . Si  $L \cap L' \neq \emptyset$ , llavors  $L = L'$ ,  $L \cap L' = L$  i la fórmula de les dimensions ens dóna  $\dim(L \vee L') = d$ , la qual cosa concorda amb el fet que en aquest cas  $L \vee L' = L$ . Si  $L \cap L' = \emptyset$ , que sota les hipòtesis equival a  $L \neq L'$ , llavors la fórmula de les dimensions ens dóna

$$\dim(L \vee L') = 1 + \dim(L),$$

ja que  $W \cap W' = W$  té dimensió  $d$ .

**1.22 Exemple.** Suposem que  $L$  i  $L'$  són rectes. Llavors hi ha dues possibilitats: o bé  $W \cap W' = \{0\}$  (les rectes no són paral·leles), o bé  $W = W'$  (les rectes són paral·leles). Si es dóna la primera possibilitat, la fórmula de les dimensions ens diu que  $L \vee L'$  és un pla si  $L$  i  $L'$  es tallen, i que té dimensió 3 si  $L$  i  $L'$  no es tallen (naturalment aquesta darrera situació només pot passar en un  $\mathbb{A}^n$  tal que  $n \geq 3$ ). Si es dóna la segona possibilitat, l'exemple precedent ens diu que  $L = L' = L \vee L'$  si  $L$  i  $L'$  es tallen i que  $L \vee L'$  és un pla si  $L$  i  $L'$  no es tallen. Notem que, com a conseqüència d'aquesta discussió, obtenim que dues rectes no paral·leles d'un pla  $\mathbb{A}^2$  es tallen en exactament un punt.

**1.23 Exemple.** Suposem ara que  $L$  és un pla i  $L'$  una recta de  $\mathbb{A}^3$  no paral·lela a  $L$ . Llavors és clar que  $L \vee L' = \mathbb{A}^3$  (ja que la dimensió de  $L \vee L'$  és superior a 2) i que  $W \cap W' = \{0\}$ . La fórmula de les dimensions ens dóna que  $L$  i  $L'$  necessàriament es tallen (ja que altrament  $L \vee L'$  tindria dimensió 4) i que la seva intersecció és un punt.

**E.1.16.** Sigui  $L$  una varietat lineal de dimensió  $d$  i  $P$  un punt tal que  $P \notin L$ . Verifiqueu que  $L \vee P$  té dimensió  $d + 1$ .

**E.1.17.** Comproveu que la intersecció de dos plans no paral·lels de  $\mathbb{A}^3$  és un recta.

**E.1.18.** Demostreu que la suma de dos plans no paral·lels de  $\mathbb{A}^4$  només pot ser  $\mathbb{A}^4$  o una varietat lineal de dimensió 3, i que en el primer cas la seva intersecció és un punt i en el segon una recta. Veiem, doncs, que dos plans no paral·lels de  $\mathbb{A}^4$  sempre es tallen almenys en un punt.

**E.1.19.** Sigui  $H$  un hiperplà de  $\mathbb{A}^n$ . Si  $L$  és una varietat lineal no paral·lela a  $H$ , proveu que

- 1)  $H \vee L = \mathbb{A}^n$ .
- 2)  $H \cap L \neq \emptyset$  (si  $H \cap L = \emptyset$ , la fórmula de les dimensions ens donaria  $\dim(H \vee L) > n$ , que és impossible).
- 3)  $\dim(H \cap L) = \dim(L) - 1$ .

Com a casos particulars, obtingueu els resultats de l'exemple 1.23 i de l'exercici E.1.17.

**E.1.20.** Un tetràedre de  $\mathbb{A}^3$  és, per definició, un conjunt de quatre punts independents. Aquests punts s'anomenen *vèrtexs*, les sis rectes determinades per un parell de vèrtexs, *arestes*, i els quatre plans determinats per tres vèrtexs, *cares*. Donat un tetràedre de l'espai afí i un punt  $P$  no incident amb cap aresta d'aquest, trobeu els plans per  $P$  que tallen les cares del tetràedre en quatre rectes que formen un paral·lelogram.

## 1.3 Referència afí

Una referència d'un espai afí  $\mathbb{A}^n$  ens permet representar un punt d'aquest espai per un vector de  $K^n$ , les components del qual són les coordenades del punt respecte de la referència. D'aquesta manera s'incorpora l'esperit de les idees de Descartes sobre la geometria, en el sentit que les relacions entre objectes de  $\mathbb{A}^n$  es poden traduir a relacions entre coordenades, i viceversa. Per exemple, que un punt estigui sobre una varietat lineal donada es tradueix en el fet que les coordenades del punt satisfan un sistema d'equacions lineals i, inversament, les solucions d'un sistema d'equacions lineals són les coordenades dels punts d'una varietat lineal. En tot cas, la representació dels punts per entitats de natura algebraica és la base per manipular efectivament els objectes geomètrics.

En el primer apartat, donem les definicions bàsiques i, com a exemple, introduïm la raó simple de tres punts alineats. Al final de l'apartat, provem que la raó simple es conserva per projeccions paral·leles (teorema de Tales). En el segon apartat, s'estudien les equacions de les varietats lineals (paramètriques i cartesianes) i es consideren diversos exemples.

### *Sistema de referència i coordenades*

Sigui  $\mathbb{A}$  un espai afí i  $V$  el seu espai vectorial associat. Una *referència afí* de  $\mathbb{A}$ , o simplement una *referència* de  $\mathbb{A}$ , és una parella  $\mathcal{R} = [O, \mathbf{e}]$  formada per un punt  $O \in \mathbb{A}$  i una base  $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$  de  $V$ . Direm que el punt  $O$  és l'*origen* i el vector  $e_k$  el *k-èsim eix* de la referència  $\mathcal{R}$ .

Donat un punt  $X$  i una referència  $\mathcal{R} = [O, \mathbf{e}]$ , les *coordenades de  $X$  respecte de  $\mathcal{R}$* , o  *$\mathcal{R}$ -coordenades de  $X$* , són les components  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  del vector  $X - O$  respecte

de la base  $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$ , és a dir, els  $x_1, \dots, x_n \in K$  tals que

$$X - O = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n = \mathbf{e} \mathbf{x}^T \quad (\text{notació matricial}) \quad [1.4]$$

o, equivalentment,

$$X = O + x_1 e_1 + \dots + x_n e_n = O + \mathbf{e} \mathbf{x}^T. \quad [1.4']$$

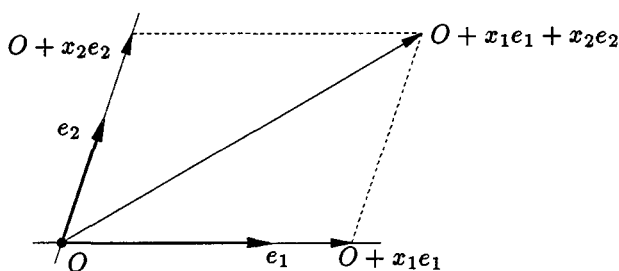


Figura 1.4: Referència afí i coordenades

En el cas del pla o de l'espai, les coordenades es denoten sovint per símbols com ara  $(x, y)$  o  $(x, y, z)$ , respectivament. En lloc de «sigui  $\mathcal{R}$  una referència de  $\mathbb{A}^3$  i posem  $(x, y, z)$  per denotar les coordenades», sovint es diu «siguin  $x, y, z$  [un sistema de] coordenades afins de  $\mathbb{A}^3$ », o expressions similars.

**E.1.21.** Fixada la referència afí  $\mathcal{R} = [O, \mathbf{e}]$ , comproveu que l'aplicació  $K^n \xrightarrow{X_{\mathcal{R}}} \mathbb{A}$ , tal que  $\mathbf{x} \mapsto O + \mathbf{e} \mathbf{x}^T$ , és bijectiva. Remarqueu que la relació  $X = O + \mathbf{e} \mathbf{x}^T$ ,  $\mathbf{x} \in K^n$ , no és més que una equació paramètrica vectorial de  $\mathbb{A}^n$  (vegeu [1.2]). L'aplicació inversa  $\mathbb{A} \xrightarrow{\mathbf{x}_{\mathcal{R}}} K^n$  és la que transforma cada punt  $X$  en les seves  $\mathcal{R}$ -coordenades  $\mathbf{x}$ .

Si  $\mathcal{R} = [O, \mathbf{e}]$  és una referència, i si posem  $P_0 = O$  i  $P_k = O + e_k$  ( $1 \leq k \leq n$ ), llavors  $P_0, \dots, P_n$  són punts independents de  $\mathbb{A}$ . Recíprocament, si  $P_0, \dots, P_n$  són punts independents, i posem  $O = P_0$  i  $e_k = P_k - P_0$  ( $1 \leq k \leq n$ ), llavors  $[O, e_1, \dots, e_n]$  és una referència de  $\mathbb{A}$ . D'aquesta manera tenim una correspondència bijectiva entre les referències de  $\mathbb{A}$  i les successions  $P_0, \dots, P_n$  de  $n+1$  punts independents. Per designar la referència  $[P_0, P_1 - P_0, \dots, P_n - P_0]$  corresponent a  $P_0, \dots, P_n$ , també posarem  $[P_0, P_1, \dots, P_n]$ . Així, la referència  $[O, e_1, \dots, e_n]$  també es pot denotar  $[O, O + e_1, \dots, O + e_n]$ .

**E.1.22.** Si  $P_0, \dots, P_r$  són punts independents, llavors  $\mathcal{S} = [P_0, P_1, \dots, P_r]$  és una referència afí de la varietat lineal  $P_0 P_1 \dots P_r$  determinada pels punts  $P_0, \dots, P_r$ . L'aplicació bijectiva  $K^r \xrightarrow{X_{\mathcal{S}}} L$  (vegeu E.1.21) és la donada per l'equació paramètrica vectorial

$$X = P_0 + \sum_{i=1}^r \lambda_i (P_i - P_0), \quad \lambda_i \in K.$$

### Canvi de coordenades

Siguin  $\mathcal{R} = [O, \mathbf{e}]$  i  $\mathcal{R}' = [O', \mathbf{e}']$  dues referències afins de  $\mathbb{A}$ . Per descriure  $\mathcal{R}'$  mitjançant  $\mathcal{R}$ , posem  $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$  per denotar les coordenades de  $O'$  respecte de  $\mathcal{R}$ , amb la qual cosa

$$O' = O + \mathbf{e}\mathbf{p}^T, \quad [1.5]$$

i  $A = (a_{ij})$  per denotar la matriu de la base  $\mathbf{e}'$  respecte de la base  $\mathbf{e}$ . Per definició, les columnes de la matriu  $A$  són les components dels vectors  $\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n$  respecte de la base  $\mathbf{e}$ , la qual cosa equival a la relació matricial

$$\mathbf{e}' = \mathbf{e}A. \quad [1.6]$$

Sigui ara  $X$  un punt i posem  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  i  $\mathbf{x}' = (x'_1, \dots, x'_n)$  per denotar les coordenades de  $X$  respecte de les referències  $\mathcal{R}$  i  $\mathcal{R}'$ , respectivament. Volem trobar com es relacionen  $\mathbf{x}$  i  $\mathbf{x}'$ . A tal fi, tenim  $X - O = \mathbf{e}\mathbf{x}^T$ , per definició de  $\mathbf{x}$ , i  $X - O' = \mathbf{e}'\mathbf{x}'^T$ , per definició de  $\mathbf{x}'$ , d'on resulta, tenint en compte [1.6], que  $X - O' = \mathbf{e}A\mathbf{x}'^T$ . Com que també es compleix  $X - O = (O' - O) + (X - O')$ , prenent components dels vectors d'aquesta igualtat respecte de la base  $\mathbf{e}$  obtenim:

$$\mathbf{x}^T = \mathbf{p}^T + A\mathbf{x}'^T, \quad [1.7]$$

que és la relació que cercàvem. En forma explícita:

$$x_k = p_k + a_{k1}x'_1 + \dots + a_{kn}x'_n \quad (1 \leq k \leq n). \quad [1.7']$$

**E.1.23.** La relació [1.7] es pot entendre com l'aplicació  $f_{A,\mathbf{p}} : K^n \rightarrow K^n$  tal que  $\mathbf{x}' \mapsto \mathbf{x}$ . Demostreu que  $\{f_{A,\mathbf{p}} \mid A \in GL_n(K), \mathbf{p} \in K^n\}$  és un grup amb la composició d'aplicacions (és el grup dels canvis de coordenades afins). Aquí  $GL_n(K)$ , el grup lineal, és el grup de matrius  $A \in M_n(K)$  tals que  $\det(A) \neq 0$ .

### Exemple: raó simple

Donats tres punts alineats  $P, Q, X$  tals que  $P \neq Q$ , considerem la referència  $\mathcal{R} = [P, Q]$  de la recta  $L = PQ$ . La coordenada de  $X$  respecte de  $\mathcal{R}$  és l'escalar  $\sigma$  tal que

$$X = P + \sigma(Q - P).$$

Direm que  $\sigma$  és la *raó simple* de la terna  $P, Q, X$  i posarem  $\sigma(P, Q, X)$  per designarla. És clar que  $\sigma(P, Q, P) = 0$  i  $\sigma(P, Q, Q) = 1$ , i per tant  $\sigma(P, Q, X) \neq 0, 1$  si els punts  $P, Q$  i  $X$  són diferents. Adonem-nos que si  $P = Q$ , o si  $P \neq Q$  i  $X \notin PQ$ , llavors  $\sigma(P, Q, X)$  no està definida.

Siguin  $P$  i  $Q$  punts diferents i posem  $L = PQ$ . Sigui  $X \in L$ . Donada una referència afí  $[O, v]$  de  $L$  ( $v \in V$ ), siguin  $p, q$  i  $x$  les coordenades de  $P, Q$  i  $X$  respecte de la mateixa, és a dir, que  $P = O + pv$ ,  $Q = O + qv$  i  $X = O + xv$ . Llavors  $Q - P = (q - p)v$ ,  $X - P = (x - p)v$ , i

$$\sigma(P, Q, X) = \frac{x - p}{q - p}. \quad [1.8]$$



**E.1.24.** Siguin  $P, Q$  i  $R$  tres punts alineats i diferents. Posem  $\sigma = \sigma(P, Q, R)$ . Apliqueu la fórmula [1.8] per mostrar que la terna resultant de transposar  $P$  i  $Q$ ,  $(Q, P, R)$ , i la resultant de permutar  $P, Q$  i  $R$  cíclicament,  $(Q, R, P)$ , tenen la següent raó simple:

$$\sigma(Q, P, R) = 1 - \sigma, \quad \sigma(Q, R, P) = \frac{1}{1 - \sigma} = 1/\sigma(Q, P, R).$$

Si ara tornem a transposar els dos primers elements de la terna  $(Q, R, P)$ , d'una banda, i a permutar-la cíclicament, de l'altra, obtenim:

$$\begin{aligned} \sigma(R, Q, P) &= 1 - \sigma(Q, R, P) = 1 - \frac{1}{1 - \sigma} = \frac{\sigma}{\sigma - 1} \\ \sigma(R, P, Q) &= 1/\sigma(R, Q, P) = \frac{\sigma - 1}{\sigma}. \end{aligned}$$

Tornant a repetir el mateix amb la terna  $(R, P, Q)$  obtenim

$$\begin{aligned} \sigma(P, R, Q) &= 1 - \sigma(R, P, Q) = \frac{1}{\sigma} \\ \sigma(P, Q, R) &= 1/\sigma(P, R, Q) = \sigma, \end{aligned}$$

on la darrera igualtat ens retorna, és clar, al valor  $\sigma = \sigma(P, Q, R)$ .

L'exercici anterior mostra que la definició de raó simple que hem adoptat no és més que una entre sis possibles. Com que no hi ha un criteri generalment acceptat, nosaltres hem escollit la que ens resulta més còmoda. En tot cas, de les fórmules anteriors es pot deduir fàcilment com passar d'una definició a una altra.

**1.24 Teorema (de Tales).** Siguin  $H_1, H_2$  i  $H_3$  tres hiperplans paral·lels tals que  $H_1 \neq H_2$ . Sigui  $L$  una recta no paral·lela als hiperplans i posem  $X_i = L \cap H_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Llavors  $\sigma = \sigma(X_1, X_2, X_3)$  només depèn dels hiperplans  $H_1, H_2$  i  $H_3$  i és, per tant, independent de  $L$ .

**Prova:** Sigui  $W \subset V$  el subespai director dels hiperplans  $H_i$  (per hipòtesi, és el mateix per a tots tres). Sigui  $\omega \in V^*$  tal que  $\ker(\omega) = W$ . Com que  $W$  té codimensió 1,  $W$  determina  $\omega$  llevat un factor escalar no nul. Si prenem punts  $P_i \in H_i$ , llavors  $X \in H_i$  si i només si  $\omega(X - P_i) = 0$ . Per trobar els punts  $X_i$ , siguin  $P$  i  $v$  un punt i un vector director de  $L$ , de manera que  $X = P + \lambda v$  és una equació paramètrica vectorial de  $L$ . A més, la condició que  $L$  no sigui paral·lela als hiperplans significa que  $v \notin W$ , és a dir, que  $\omega(v) \neq 0$ . Dit això, és clar que  $X_i = P + \lambda_i v$ , on  $\lambda_i \in K$  ha de complir  $\omega((P + \lambda_i v) - P_i) = 0$ . Si posem  $u_i = P_i - P$ , obtenim  $\lambda_i = \omega(u_i)/\omega(v)$ . Ara la fórmula [1.8] per la raó simple ens dona que  $\sigma = (\lambda_3 - \lambda_1)/(\lambda_2 - \lambda_1)$ , és a dir,

$$\sigma = \frac{\omega(u_3) - \omega(u_1)}{\omega(u_2) - \omega(u_1)} = \frac{\omega(P_3 - P_1)}{\omega(P_2 - P_1)},$$

valor que només depèn dels hiperplans  $H_i$ . Noteu que  $\omega(u_i) - \omega(u_j) = \omega(u_i - u_j)$  i  $u_i - u_j = P_i - P_j$ .  $\square$

**E.1.25.** Donats dos punts  $P$  i  $Q$ , i suposant que en el cos  $K$  tenim  $2 \neq 0$ , posarem  $M(P, Q) = P + \frac{1}{2}(Q - P)$  i direm que és el *punt mitjà* del parell  $\{P, Q\}$  (adoneu-vos que  $M(P, Q) = M(Q, P)$ ).

Dit això, siguin  $A, B, C, D$  quatre punts no coplanaris de l'espai afí i posem  $M = M(A, C)$  i  $N = M(B, D)$ , respectivament. Si la recta  $MN$  talla en un punt  $P$  a una recta  $XY$  tal que  $X \in AD$  i  $Y \in BC$ , proveu que  $P = M(X, Y)$ .

### Equacions de les varietats lineals

Sigui  $L$  una varietat lineal. Si  $P \in L$  i  $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_r)$  és un sistema de vectors directores de  $L$  (o sigui, una base de  $W = W(L)$ ), llavors tenim l'equació paramètrica vectorial  $X = P + \mathbf{w}s^T$ ,  $s \in K^r$ , dels punts  $X$  de  $L$ . Ara volem veure quina forma adopta aquesta equació vectorial quan disposem d'una referència  $\mathcal{R} = [O, \mathbf{e}]$  de l'espai afí  $\mathbb{A}$ . Aquest problema ja l'hem resolt quan  $L = \mathbb{A}$ , cas en el qual la solució no és més que les equacions del canvi de coordenades (vegeu les fórmules [1.7] i [1.7']).

La situació més general que ara ens ocupa es resol de manera similar. Sigui  $B$  la matriu de  $\mathbf{w}$  respecte de  $\mathbf{e}$ , de manera que  $B$  és la matriu  $n \times r$  tal que  $\mathbf{w} = \mathbf{e}B$ . A més,  $X = P + \mathbf{e}Bs^T$ . Siguin  $\mathbf{x}$  i  $\mathbf{p}$  les  $\mathcal{R}$ -coordenades de  $X$  i  $P$ , respectivament, de manera que  $X = O + \mathbf{e}\mathbf{x}^T$  i  $P = O + \mathbf{e}\mathbf{p}^T$ . Llavors de la igualtat vectorial  $X - O = (X - P) + (P - O)$  obtenim la igualtat  $\mathbf{e}\mathbf{x}^T = \mathbf{e}Bs^T + \mathbf{e}\mathbf{p}^T$  i, després de prendre components respecte de  $\mathbf{e}$ , la igualtat

$$\mathbf{x}^T = \mathbf{p}^T + Bs^T \quad (s \in K^r). \quad [1.9]$$

Si escrivim [1.9] separant components, obtenim les equacions

$$x_k = p_k + b_{k1}s_1 + \dots + b_{kr}s_r, \quad s_1, \dots, s_r \in K \quad (1 \leq k \leq n). \quad [1.9']$$

De la relació matricial [1.9], o de les equacions equivalents [1.9'], en podem dir que és un *sistema d'equacions paramètriques* de  $L$ : podem mirar-la com l'aplicació (bijectiva)  $s \mapsto \mathbf{x}$  entre  $K^r$  i el subconjunt de  $K^n$  format per les coordenades dels punts de  $L$  [ $\diamond$ ].

**E.1.26.** Mostreu que si teniu equacions de la forma [1.9'], amb  $b_{k1}, \dots, b_{kr} \in K$ , i una referència  $\mathcal{R}$ , llavors els punts de  $\mathbb{A}$  que tenen coordenades  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ , quan  $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_r)$  recorre  $K^r$ , omplen una varietat lineal de dimensió  $\text{rang}(B)$ , on posem  $B$  per denotar la matriu  $(b_{kj})_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq j \leq r}}$ . Aquesta varietat passa pel punt de coordenades  $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$  i els vectors les components dels quals són les columnes de  $B$  formen un sistema de vectors directores. L'aplicació  $s \mapsto \mathbf{x}$  és injectiva si i només si  $\text{rang}(B) = r$ .

**E.1.27.** Comproveu que la relació [1.9] equival a la relació

$$\tilde{\mathbf{x}}^T = \tilde{B}\tilde{\mathbf{s}}^T$$

on  $\tilde{\mathbf{x}} = (1, x_1, \dots, x_n)$ ,  $\tilde{\mathbf{s}} = (1, s_1, \dots, s_r)$ , i  $\tilde{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mathbf{p}^T & B \end{pmatrix}$ . Com que [1.9] generalitza [1.7], el grup dels canvis de coordenades afins (exercici E.1.23) és isomorf al grup de matrius de la

forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mathbf{p}^T & A \end{pmatrix},$$

on  $A \in GL_n(K)$  i  $\mathbf{p} \in K^n$ .

### Intersecció de dues varietats lineals en paramètriques

Per obtenir la intersecció de dues varietats lineals  $L$  i  $L'$ , donades, en una certa referència, per equacions paramètriques  $\mathbf{x}^T = \mathbf{p}^T + B\mathbf{s}^T$  ( $\mathbf{s} \in K^r$ ),  $\mathbf{x}'^T = \mathbf{p}'^T + B'\mathbf{s}'^T$  ( $\mathbf{s}' \in K^{r'}$ ), n'hi ha prou amb resoldre el sistema d'equacions lineals

$$\mathbf{p}^T + B\mathbf{s}^T = \mathbf{p}'^T + B'\mathbf{s}'^T, \quad [1.10]$$

considerant  $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_r)$  i  $\mathbf{s}' = (s'_1, \dots, s'_{r'})$  com a incògnites, i amb substituir les solucions  $\mathbf{s}$  obtingudes en la relació  $\mathbf{x}^T = \mathbf{p}^T + B\mathbf{s}^T$ . Si el sistema [1.10] és compatible, el resultat és un sistema d'equacions paramètriques de  $L \cap L'$ . Si substituïssim els valors  $\mathbf{s}'$  a la relació  $\mathbf{x}'^T = \mathbf{p}'^T + B'\mathbf{s}'^T$ , obtindríem un altre sistema d'equacions paramètriques de la mateixa varietat  $L \cap L'$ . Pel primer camí, les equacions paramètriques descriuen  $L \cap L'$  com a subconjunt de  $L$ , i pel segon, com a subconjunt de  $L'$ .

### Equacions cartesianes d'una varietat lineal

Sigui  $L$  una varietat lineal de dimensió  $r$ ,  $P$  un punt de  $L$  i  $W = W(L)$ . Escollim una base  $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_r)$  de  $W$  (un sistema de vectors directores de  $W$ ). Com que la condició necessària i suficient per tal que un punt  $X$  sigui de  $L$  és que

$$X - P \in W = \langle w_1, \dots, w_r \rangle,$$

veiem que els punts de  $L$  són precisament els que compleixen la condició

$$\dim \langle X - P, w_1, \dots, w_r \rangle \leq r \quad [1.11]$$

(atès que  $w_1, \dots, w_r$  son linealment independents, la relació [1.11] equival a la igualtat  $\dim \langle X - P, w_1, \dots, w_r \rangle = r$ ). Vegem com es tradueix [1.11] respecte d'una referència afi  $\mathcal{R} = [O, \mathbf{e}]$ . Si posem  $\mathbf{x}$  i  $\mathbf{p}$  per denotar les  $\mathcal{R}$ -coordenades de  $X$  i  $P$ , respectivament, i  $B$  per denotar la matriu de  $\mathbf{w}$  respecte de  $\mathbf{e}$ , llavors és clar que [1.11] equival a

$$\text{rang}(\mathbf{x}^T - \mathbf{p}^T | B) \leq r. \quad [1.11a]$$

Aquesta darrera condició és equivalent, com és sabut d'àlgebra lineal (vegeu, si cal, el problema P.1.6), a l'anul·lació del sistema de  $n - r$  menors d'ordre  $r + 1$  de la matriu  $(\mathbf{x}^T - \mathbf{p}^T | B)$  que contenen un qualsevol dels menors no nuls d'ordre  $r$  de  $B$  (n'hi ha almenys un, atès que  $B$  té rang  $r$ ). Ara bé, l'anul·lació dels  $n - r$  menors esmentats ens dona un sistema d'equacions de la forma

$$a_{k1}(x_1 - p_1) + \dots + a_{kn}(x_n - p_n) = 0 \quad (1 \leq k \leq n - r), \quad [1.11b]$$

per certs  $a_{k1}, \dots, a_{kn} \in K$  que es poden calcular explícitament a partir de  $B$  i  $\mathbf{p}$ . Si posem  $a_{k0} = -(a_{k1}p_1 + \dots + a_{kn}p_n)$ , llavors les equacions anteriors adopten la forma

$$a_{k0} + a_{k1}x_1 + \dots + a_{kn}x_n = 0 \quad (1 \leq k \leq n-r). \quad [1.11c]$$

Per tot el que duem dit, les coordenades  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  dels punts  $X$  de  $L$  són precisament les solucions del sistema de  $n-r$  equacions lineals [1.11c]. Atès que les diferències  $\mathbf{x} - \mathbf{p}$  són les components dels vectors de  $W$  respecte de la base  $\mathbf{w}$ , per [1.11b] veiem que les components dels vectors de  $W$  són precisament les solucions del sistema homogeni associat al sistema [1.11c]. Com que la dimensió de  $W$  és  $r$ , en resulta que el rang de la matriu del sistema 1.11c és  $n-r$  [◊].

Inversament, sigui

$$a_{k0} + a_{k1}x_1 + \dots + a_{kn}x_n = 0 \quad (1 \leq k \leq m) \quad [1.12]$$

un sistema de  $m$  equacions lineals en les variables  $x_1, \dots, x_n$ . Sigui  $s \leq \min(n, m)$  el seu rang. Si el sistema és compatible, i  $\mathbf{p}$  és una solució particular, per àlgebra lineal sabem (teorema de Rouché-Frobenius) que les solucions  $\mathbf{x}$  de [1.12] són de la forma

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + t_1 \mathbf{w}_1 + \dots + t_{n-s} \mathbf{w}_{n-s}, \quad [1.13]$$

on  $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{n-s}$  és una base de les solucions del sistema homogeni associat a [1.12]. Ara bé, [1.13] són les equacions paramètriques de la varietat lineal que passa pel punt de coordenades  $\mathbf{p}$  i l'espai director de la qual és el generat pels vectors  $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{n-s}$ , les components dels quals són  $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{n-s}$  (vegeu E.1.26). En particular, aquesta varietat té dimensió  $n-s$ .

Per a ulteriors referències, resumim les consideracions d'aquest subapartat en l'enunciat que segueix.

**1.25 Teorema.** *Donada una referència afí de  $\mathbb{A}^n$ , les solucions d'un sistema compatible d'equacions lineals [1.12], en les incògnites  $x_1, \dots, x_n$  i amb coeficients de  $K$ , són les coordenades dels punts d'una varietat lineal  $L$  de dimensió  $r = n-s$ , on  $s$  és el rang de la matriu del sistema (direm que  $L$  és la varietat determinada pel sistema [1.12]). A més a més, els vectors de l'espai director de  $L$  són els vectors les components dels quals són solució del sistema homogeni associat a [1.12].*

*Recíprocament, tota varietat lineal  $L$  de dimensió  $r$  és la varietat determinada per un sistema d'equacions [1.12] de rang  $n-r$  (d'un tal sistema, que manifestament no és únic, en direm que és un sistema d'equacions cartesianes de  $L$ ).* ◻

## Exemples

Les relacions

$$x_i = a_i + \lambda(b_i - a_i), \quad \lambda \in K, \quad [1.14]$$

són equacions paramètriques de la recta que passa pels punts (que cal suposar diferents, és clar) de coordenades  $a = (a_1, \dots, a_n)$  i  $b = (b_1, \dots, b_n)$ . Eliminant  $\lambda$ , s'obté el sistema d'equacions cartesianes

$$\frac{x_1 - a_1}{b_1 - a_1} = \dots = \frac{x_n - a_n}{b_n - a_n}, \quad [1.15]$$

del qual se'n sol dir que són *equacions cartesianes de la recta en forma contínua*, o, per abús de llenguatge, una *equació contínua de la recta*. Convé observar que si  $a_i = b_i$  per algun  $i$ , llavors  $x_i = a_i$  per a tot punt de la recta (per [1.14]), de manera que si un dels denominadors de l'equació contínua és 0, això s'ha d'interpretar com l'anul·lació del corresponent numerador.

**E.1.28.** Suposem donada una referència de  $\mathbb{A}^n$ . Comproveu que la varietat lineal determinada per una equació lineal

$$a_0 + a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0 \quad (a_0, a_1, \dots, a_n \in K)$$

és un hiperplà  $H$  (suposant que algun  $a_k$  és no nul). Mostreu també que si  $H'$  és l'hiperplà determinat per una altra equació lineal

$$b_0 + b_1x_1 + \dots + b_nx_n = 0$$

(suposant que algun  $b_j$  és no nul), llavors  $H$  i  $H'$  són paral·lels si i només si

$$\text{rang} \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \\ b_1 & \dots & b_n \end{pmatrix} = 1.$$

Adonem-nos que aquesta condició es pot escriure amb la forma

$$\frac{a_1}{b_1} = \dots = \frac{a_n}{b_n},$$

sempre que interpretem que  $a_k = 0$  quan  $b_k = 0$ . Per altra banda, és immediat comprovar que  $H = H'$  si i només si

$$\frac{a_0}{b_0} = \frac{a_1}{b_1} = \dots = \frac{a_n}{b_n}.$$

**E.1.29.** Siguin  $a_1, \dots, a_n$  escalars no nuls. Proveu que l'hiperplà que té per equació

$$\frac{x_1}{a_1} + \dots + \frac{x_n}{a_n} = 1$$

coincideix amb el que passa pels punts  $(a_1, 0, \dots, 0)$ , ...,  $(0, \dots, 0, a_n)$ .

**E.1.30.** Comproveu que la relació

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

és una condició necessària i suficient per tal que les tres rectes d'equacions

$$a_ix + b_iy + c_i = 0, \quad (a_i, b_i) \neq (0, 0) \quad (i = 1, 2, 3)$$

siguin concurrents (és a dir, que tinguin un punt en comú).

**E.1.31.** Si

$$ax + by + cz + d = 0 \text{ i } a'x + b'y + c'z + d' = 0$$

són equacions de dos plans  $\pi$  i  $\pi'$  no paral·lels de  $\mathbb{A}^3$ , respecte d'un sistema de coordenades afins  $x, y, z$ , mostreu que

$$\left( \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} c & a \\ c' & a' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \right)$$

són les components d'un vector director de la recta  $L = \pi \cap \pi'$  intersecció dels dos plans.

**E.1.32.** Amb les notacions de l'exercici anterior, demostreu també que, per a tot  $\lambda \in K$ , el pla  $\pi_\lambda$  d'equació

$$(a' + \lambda a)x + (b' + \lambda b)y + (c' + \lambda c)z + (d' + \lambda d) = 0$$

conté  $L$  i que l'aplicació  $\lambda \mapsto H_\lambda$  és una bijecció entre  $K$  i el conjunt de plans diferents de  $\pi$  que contenen  $L$ .

**E.1.33.** Comproveu que l'equació del pla de  $\mathbb{A}^3$  que passa pels punts de coordenades  $(a_1, a_2, a_3)$ ,  $(b_1, b_2, b_3)$  i  $(c_1, c_2, c_3)$  és

$$\begin{vmatrix} x_1 - a_1 & x_2 - a_2 & x_3 - a_3 \\ b_1 - a_1 & b_2 - a_2 & b_3 - a_3 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 & c_3 - a_3 \end{vmatrix} = 0.$$

**E.1.34.** Sigui  $\mathbb{A}$  un espai afí real de dimensió  $n$ ,  $H$  un hiperplà de  $\mathbb{A}$  i  $X = \mathbb{A} - H$ . Sigui  $P$  un punt qualsevol de  $H$  i, si  $V$  és l'espai vectorial associat de  $\mathbb{A}$ , sigui  $w$  una forma lineal de  $V$  tal que  $W = \ker(w)$  és l'espai director de  $H$ . Considerem la relació binària  $\sim$  definida entre punts de  $X$  de manera que  $Q \sim R$  si i només si

$$w(Q - P)w(R - P) > 0.$$

Proveu que:

- 1) La relació  $\sim$  no depèn ni de  $P$  ni de  $w$  (remarqueu que si  $w'$  és una altra forma lineal tal que  $\ker(w') = W$ , llavors existeix un nombre real no nul  $\lambda$  tal que  $w' = \lambda w$ ). Per tant,  $\sim$  només depèn de l'hiperplà  $H$ .
- 2) La relació  $\sim$  és d'equivalència.
- 3) La relació  $\sim$  defineix exactament dues classes d'equivalència: els conjunts  $X_w^+ = \{Q \in X \mid w(Q - P) > 0\}$  i  $X_w^- = \{Q \in X \mid w(Q - P) < 0\}$ . En particular, la partició  $X = X_w^+ \sqcup X_w^-$  de  $X$  no depèn ni de  $P$  ni de  $w$ , però observeu, per exemple, que  $X_{-w}^+ = X_w^-$  i  $X_{-w}^- = X_w^+$ .
- 4) La relació  $\sim$  compleix que  $Q \sim R$  si i només si el segment  $[Q, R]$  no conté punts de  $H$ .

Les classes d'equivalència  $X_w^+$  i  $X_w^-$  s'anomenen *semiespais oberts* definits per  $H$ . Els *semiespais tancats* definits per  $H$  són els conjunts  $X_w^+ \cup H$  i  $X_w^- \cup H$ . Per  $n = 1$ , els semiespais s'anomenen *semirectes* i per  $n = 2$ , *sempiplans*. Observem, finalment, que si  $a_1x_1 + \dots + a_nx_n + a_0 = 0$  és l'equació d'un hiperplà en una referència, llavors els semiespais oberts (tancats) definits per aquest hiperplà queden determinats per les condicions  $a_1x_1 + \dots + a_nx_n + a_0 > 0$  i  $a_1x_1 + \dots + a_nx_n + a_0 < 0$  ( $a_1x_1 + \dots + a_nx_n + a_0 \geq 0$  i  $a_1x_1 + \dots + a_nx_n + a_0 \leq 0$ ).

## 1.4 Aplicacions afins

La noció d'aplicació afí entre dos espais afins de què partirem és la que ens sembla més natural quan es té en compte la definició d'espai afí donada en la secció 1.1. Entre d'altres avantatges, ens permet establir-ne fàcilment les propietats més destacades i la manera de manejar-les en coordenades, les quals coses constitueixen allò que és indispensable a la resta del curs. En la darrera part mostrem que les aplicacions que conserven la raó simple són afins (teorema 1.41). També enunciem l'anomenat teorema fonamental de la geometria afí (teorema 1.42) i comentem breument el tema de l'axiomatització de la geometria.

### Definició d'aplicació afí i d'aplicació associada

Considerem primer dos espais afins  $\mathbb{A}$  i  $\mathbb{A}'$  i  $\alpha: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}'$  una aplicació. Sigui ara  $P \in \mathbb{A}$  i posem  $P' = \alpha(P)$ . Si  $V$  i  $V'$  són els espais vectorials associats a  $\mathbb{A}$  i  $\mathbb{A}'$ , llavors tenim aplicacions bijectives  $\delta_P: \mathbb{A} \rightarrow V$  i  $\delta_{P'}: \mathbb{A}' \rightarrow V'$  (vegeu 1.2). Posem  $\alpha_P: V \rightarrow V'$  per denotar l'aplicació  $\delta_{P'} \circ \alpha \circ \delta_P^{-1}$ . Com que  $\delta_P$  i  $\delta_{P'}$  són bijectives,  $\alpha_P: V \rightarrow V'$  és l'única aplicació tal que  $\delta_{P'} \circ \alpha = \alpha_P \circ \delta_P$ , és a dir, tal que

$$\alpha(X) - \alpha(P) = \alpha_P(X - P) \quad [1.16]$$

### Aplicació afí

Direm que una aplicació  $\alpha: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}'$  és una *aplicació afí* si  $\alpha_P$  és lineal per algun punt  $P$ . L'enunciat que segueix mostra que en tals circumstàncies l'aplicació  $\alpha_Q$  és la mateixa (per tant, igual a  $\alpha_P$ ) per a tot punt  $Q \in \mathbb{A}$ .

**1.26 Lema.** *Sigui  $\alpha: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}'$  una aplicació i suposem que, per un cert punt  $P \in \mathbb{A}$ , l'aplicació  $\alpha_P: V \rightarrow V'$  és un homomorfisme additiu (això és, un homomorfisme de  $(V, +)$  en  $(V', +)$ ). Llavors  $\alpha_Q = \alpha_P$  per a tot  $Q \in \mathbb{A}$ .*

**Prova:** En efecte,

$$\begin{aligned} (\alpha(X) - \alpha(Q)) + \alpha_P(Q - P) &= (\alpha(X) - \alpha(Q)) + (\alpha(Q) - \alpha(P)) && \text{per [1.16]} \\ &= \alpha(X) - \alpha(P) && \text{llei d'addició} \\ &= \alpha_P(X - P) && \text{per [1.16]} \\ &= \alpha_P((X - Q) + (Q - P)) && \text{llei d'addició} \\ &= \alpha_P(X - Q) + \alpha_P(Q - P) && \text{hipòtesi.} \end{aligned}$$

Per tant,  $\alpha(X) - \alpha(Q) = \alpha_P(X - Q)$ . Ara, per la definició de  $\alpha_Q$ , tenim  $\alpha(X) - \alpha(Q) = \alpha_Q(X - Q)$  i això ens permet concloure que  $\alpha_Q(X - Q) = \alpha_P(X - Q)$ . Com que el vector  $X - Q$  pot ser qualsevol vector de  $V$ , efectivament tenim que  $\alpha_Q = \alpha_P$  per a tot punt  $Q$ .  $\square$

### Aplicació lineal associada

Donada una aplicació afi  $\alpha: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}'$ , posarem  $\tilde{\alpha}$  per denotar l'aplicació lineal  $V \rightarrow V'$  tal que  $\tilde{\alpha} = \alpha_P$  per a qualsevol punt  $P$  (pel lema anterior sabem que  $\alpha_P$  és independent de  $P$ ), i direm que  $\tilde{\alpha}$  és l'*aplicació lineal associada* a l'aplicació afi  $\alpha$ . La fórmula [1.16] es pot reescriure, és clar, en termes de  $\tilde{\alpha}$ : Si  $\alpha: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}'$  és una aplicació afi, llavors

$$\alpha(X) - \alpha(P) = \tilde{\alpha}(X - P), \quad [1.17]$$

qualssevol que siguin  $P, X \in \mathbb{A}$ .

**E.1.35.** Proveu que una aplicació afi  $\alpha$  és injectiva (exhaustiva, bijectiva) si i només si la seva transformació associada  $\tilde{\alpha}$  és injectiva (exhaustiva, bijectiva).

D'una aplicació afi bijectiva, en direm que és una *transformació afi*. Les transformacions afins d'un espai  $\mathbb{A}$  en ell mateix seran anomenades *afinitats* de  $\mathbb{A}$ . Aprofitem per dir que la geometria afi és, en essència, l'estudi dels conceptes i propietats que romanen invariants per transformacions afins.

### Expressió en coordenades

Siguin  $\mathcal{R} = [O, e_1, \dots, e_n]$  i  $\mathcal{R}' = [O', e'_1, \dots, e'_{n'}]$  referències dels espais afins  $\mathbb{A}$  i  $\mathbb{A}'$ , respectivament. Sigui  $\alpha: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}'$  una aplicació afi de  $\mathbb{A}$  en  $\mathbb{A}'$ . Posem  $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_{n'})$  per denotar les  $\mathcal{R}'$ -coordenades de  $\alpha(O)$  i  $A$  per denotar la matriu de  $\tilde{\alpha}$  respecte de les bases  $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$  i  $\mathbf{e}' = (e'_1, \dots, e'_{n'})$ . Per definició, la  $i$ -èsima columna de  $A$  conté les components de  $\tilde{\alpha}(e_i)$  respecte de la base  $e'_1, \dots, e'_{n'}$ , la qual cosa es resumeix en la relació matricial  $\tilde{\alpha}(\mathbf{e}) = \mathbf{e}'A$ . Direm que  $A$  és la *matriu de  $\alpha$  en les referències  $\mathcal{R}$  i  $\mathcal{R}'$* .

**1.27 Proposició.** *Siguin  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  les  $\mathcal{R}$ -coordenades d'un punt  $X \in \mathbb{A}$ . Llavors les  $\mathcal{R}'$ -coordenades  $\mathbf{x}' = (x'_1, \dots, x'_{n'})$  del punt  $X' = \alpha(X)$  s'obtenen per la fórmula*

$$\mathbf{x}'^T = \mathbf{p}^T + A\mathbf{x}^T. \quad [1.18]$$

**Prova:** En efecte, d'una banda tenim

$$\begin{aligned} \alpha(X) &= \alpha(O) + \tilde{\alpha}(X - O) && \alpha \text{ és afi} \\ &= O' + \mathbf{e}'\mathbf{p}^T + \tilde{\alpha}(\mathbf{e}\mathbf{x}^T) && \text{definició de } \mathbf{p} \text{ i } \mathbf{x} \\ &= O' + \mathbf{e}'\mathbf{p}^T + \tilde{\alpha}(\mathbf{e})\mathbf{x}^T && \text{linealitat de } \tilde{\alpha} \\ &= O' + \mathbf{e}'\mathbf{p}^T + \mathbf{e}'A\mathbf{x}^T && \text{definició de } A \\ &= O' + \mathbf{e}'(\mathbf{p}^T + A\mathbf{x}^T), \end{aligned}$$

i de l'altra,  $\alpha(X) = O' + \mathbf{e}'\mathbf{x}'^T$ , per definició de  $\mathbf{x}'$ . La fórmula [1.18] resulta llavors de comparar aquestes dues expressions de  $\alpha(X)$ .  $\square$



Subratllem que [1.18] generalitza la fórmula del canvi de coordenades [1.7], ja que si  $\mathbb{A}' = \mathbb{A}$  i  $\alpha = \text{Id}_{\mathbb{A}}$ , llavors [1.18] és la fórmula del canvi de  $\mathcal{R}$ -coordenades a  $\mathcal{R}'$ -coordenades. Tenint en compte l'exercici E.1.23, és natural mirar [1.18] com l'aplicació  $f_{A,p}: K^n \rightarrow K^{n'}$  tal que  $x \mapsto x'$ , on  $x'^T = p^T + Ax^T$ .

**El cas de les afinitats.** En el cas de les aplicacions afins  $\alpha$  d'un espai afi  $\mathbb{A}$  en ell mateix, podem escollir  $\mathcal{R}' = \mathcal{R}$ . Si aquest és el cas, la matriu  $A$  de  $\alpha$  respecte de  $\mathcal{R}$  és la matriu de  $\tilde{\alpha}$  respecte de la base  $e$ , és a dir, la matriu tal que  $\tilde{\alpha}(e) = eA$ , i la fórmula [1.18] expressa les  $\mathcal{R}$ -coordenades de  $\alpha(X)$  en termes  $A$  i de les  $\mathcal{R}$ -coordenades de  $X$  i  $\alpha(O)$ .

La condició per tal que  $\alpha$  sigui una afinitat és que  $\det(A) \neq 0$ .

### Exemples

La fórmula [1.17] ens mostra com podem obtenir totes les aplicacions afins de  $\mathbb{A}$  en  $\mathbb{A}'$ . De fet, donada una aplicació lineal  $f: V \rightarrow V'$  i punts  $P \in \mathbb{A}$ ,  $P' \in \mathbb{A}'$ , si definim  $f_{P,P'}: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}'$  per la fórmula

$$f_{P,P'}(X) = P' + f(X - P), \quad [1.19]$$

llavors  $\alpha = f_{P,P'}$  és una aplicació afi de  $\mathbb{A}$  en  $\mathbb{A}'$  tal que  $\alpha(P) = P'$  i  $\tilde{\alpha} = f$ . A més, per [1.17] tota aplicació afi de  $\mathbb{A}$  en  $\mathbb{A}'$  és d'aquesta forma. Si  $\mathbb{A}' = \mathbb{A}$  i  $P' = P$ , en lloc de  $f_{P,P}$  escriurem simplement  $f_P$ . Així, doncs,  $f_P: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$  es defineix per la fórmula

$$f_P(X) = P + f(X - P). \quad [1.19']$$

**E.1.36.** Si  $f$  i  $g$  són aplicacions lineals de  $V$  en  $V'$ ,  $P, Q \in \mathbb{A}$  i  $P', Q' \in \mathbb{A}'$ , proveu que  $f_{P,P'} = g_{Q,Q'}$  si i només si  $g = f$  i  $Q' = P' + f(Q - P)$ .

**E.1.37.** Les translacions són afinitats. Si  $f = \text{Id}_V$  (la identitat de  $V$ ),  $P \in \mathbb{A}$  i  $v \in V$ , comproveu que  $f_{P,P+v}(X) = X + v$  per a tot  $X \in \mathbb{A}$ . Així  $f_{P,P+v} = t_v$ , amb la qual cosa veiem que les translacions de  $\mathbb{A}$  són les afinitats  $\tau: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$  tals que  $\tilde{\tau} = \text{Id}_V$ .

### Homotècies

En un espai afi  $\mathbb{A}$ , l'*homotècia de centre*  $O \in \mathbb{A}$  i raó  $\lambda \in K^*$ , que denotarem  $h_{O,\lambda}$ , és l'aplicació  $\mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$  definida per la fórmula

$$h_{O,\lambda}(X) = O + \lambda(X - O). \quad [1.20]$$

Com que  $h_{O,\lambda}(O) = O$  i l'aplicació  $h_\lambda: V \rightarrow V$  tal que  $v \mapsto \lambda v$  és lineal,  $h_{O,\lambda}$  és una aplicació afi: amb les notacions de [1.19'],  $h_{O,\lambda}$  coincideix amb  $(h_\lambda)_O$ ; en particular,  $\tilde{h}_{O,\lambda} = h_\lambda$ . Com que  $h_\lambda$  és un automorfisme de  $V$ , les homotècies són afinitats de  $\mathbb{A}$ . Notem que  $h_{O,1} = \text{Id}$ .

Ara és immediat comprovar, si  $\lambda, \mu \in K^*$ , que

$$h_{O,\lambda} \circ h_{O,\mu} = h_{O,\lambda\mu}, \quad [1.20']$$

amb la qual cosa veiem que el conjunt

$$\mathcal{H}_O = \{h_{O,\lambda} \mid \lambda \in K^*\}$$

de les homotècies de centre  $O$  és tancat per l'operació de composició. A més,

$$h_{O,\lambda}^{-1} = h_{O,\lambda^{-1}}, \quad [1.20'']$$

per a tot  $\lambda \in K^*$ , ja que

$$h_{O,\lambda^{-1}} \circ h_{O,\lambda} = h_{O,\lambda^{-1}\lambda} = h_{O,1} = Id.$$

Les consideracions precedents proven l'enunciat que segueix:

**1.28 Proposició.** *El conjunt  $\mathcal{H}_O(\mathbb{A})$  de les homotècies de  $\mathbb{A}$  amb centre  $O \in \mathbb{A}$  formen un grup amb l'operació de composició.*  $\square$

**E.1.38.** L'aplicació  $K^* \rightarrow \mathcal{H}_O$  tal que  $\lambda \mapsto h_{O,\lambda}$  és un isomorfisme de grups.

### Equacions paramètriques

Sigui  $\mathbb{A}$  un espai afí,  $V$  el seu espai estructural,  $O \in \mathbb{A}$  i  $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_r)$  vectors de  $V$ . Llavors l'aplicació

$$\alpha_{O,\mathbf{e}}: K^r \rightarrow \mathbb{A} \quad \text{tal que} \quad \alpha(\lambda_1, \dots, \lambda_r) = O + \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_r e_r$$

és una aplicació afí. En efecte, l'aplicació

$$f_{\mathbf{e}}: K^r \rightarrow V \quad \text{tal que} \quad \lambda_1, \dots, \lambda_r \mapsto \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_r e_r$$

és lineal i, amb les notacions de [1.19],  $\alpha_{O,\mathbf{e}} = (f_{\mathbf{e}})_{0,O}$ . Remarquem que  $\alpha_{O,\mathbf{e}}$  és injectiva si i només si els vectors  $e_1, \dots, e_r$  són linealment independents. D'aquestes aplicacions n'hem vist casos especials abans:

- 1) L'aplicació  $X_{\mathcal{R}}$  de l'exercici E.1.21, en la qual  $r = n$  (la dimensió de  $\mathbb{A}$ ) i on  $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$  és una base de  $V$ .
- 2) Més en general, l'aplicació  $X_{\mathcal{S}}$  de l'exercici E.1.22, en la qual  $e_i = P_i - P_0$  i  $O = P_0$ , on  $P_0, P_1, \dots, P_r$  són punts independents d'una varietat lineal  $L$  de dimensió  $r$ .
- 3) En l'exemple de l'exercici E.1.26,  $\mathbb{A} = \mathbb{A}^n$  és l'espai afí numèric de dimensió  $n$ ,  $e_1, \dots, e_r$  són els elements de  $\mathbb{A}^n$  corresponents a les columnes de la matriu  $B$  i  $O$  és el punt  $(p_1, \dots, p_n)$ .
- 4) Notem que les aplicacions  $f_{A,\mathbf{p}}$  de canvis de coordenades afins introduïdes a l'exercici E.1.23 són casos particulars de les aplicacions descrites al punt 3.

### Teorema fonamental de les aplicacions afins

El teorema següent ens mostra com podem construir les aplicacions afins en termes geomètrics, i també com podem reconèixer quan són injectives, exhaustives o bijectives. Per exemple, hi ha una transformació afí entre dos espais afins  $\mathbb{A}$  i  $\mathbb{A}'$  si i només si tenen la mateixa dimensió, i en aquest cas hi ha una única tal transformació de  $\mathbb{A}$  en  $\mathbb{A}'$  que transforma una referència donada de  $\mathbb{A}$  en una referència donada de  $\mathbb{A}'$ .

Per a una il·lustració gràfica, vegeu la figura 1.5: per construir la figura de la dreta,  $F'$ , que és «afí» de la de l'esquerra,  $F$ , hem trobat l'afinitat  $\varphi$  que transforma tres punts de  $F$  en tres punts que hem escollit prèviament i després hem calculat la imatge de  $F$  per  $\varphi$ . El mateix mètode s'ha seguit per a generar la il·lustració al final del capítol.

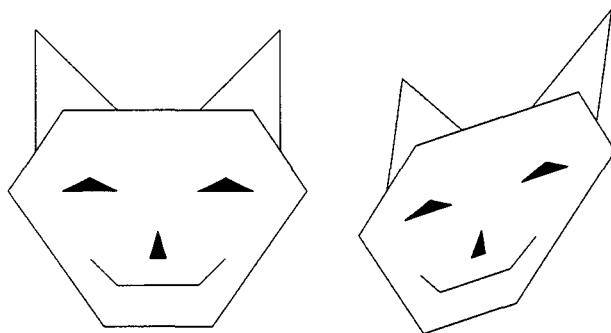


Figura 1.5: Una afinitat

**1.29 Teorema.** Si  $\mathcal{R} = [P_0, P_1, \dots, P_n]$  és una referència de l'espai afí  $\mathbb{A}$  i  $P'_0, P'_1, \dots, P'_n$  són punts arbitraris d'un espai afí  $\mathbb{A}'$ , existeix una única aplicació afí  $\alpha: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}'$  tal que  $\alpha(P_i) = P'_i$  ( $0 \leq i \leq n$ ). Aquesta aplicació és injectiva (exhaustiva) si i només si els punts  $P'_0, P'_1, \dots, P'_n$  són independents (generen  $\mathbb{A}'$ ) i és una transformació afí si i només si  $[P'_0, P'_1, \dots, P'_n]$  és una referència de  $\mathbb{A}'$ .

**Prova:** Per  $1 \leq i \leq n$ , posem  $e_i = P_i - P_0 \in V$  i  $e'_i = P'_i - P'_0 \in V'$ , on  $V$  i  $V'$  denoten els espais vectorials associats a  $\mathbb{A}$  i  $\mathbb{A}'$ , respectivament. Si existeix una aplicació afí  $\alpha$  que satisfà l'enunciat, llavors  $\alpha(P_0) = P'_0$  i  $\tilde{\alpha}(e_i) = e'_i$ . Com que  $\mathcal{R}$  és una referència,  $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$  és una base de  $V$  i per tant existeix una única aplicació lineal  $f: V \rightarrow V'$  tal que  $f(e_i) = e'_i$ , la qual cosa mostra que si existeix  $\alpha$ , llavors  $\tilde{\alpha} = f$ . Ara bé, aquesta igualtat i la condició  $\alpha(P_0) = P'_0$  impliquen que  $\alpha = f_{P_0, P'_0}$  (vegeu la fórmula [1.19]), la qual cosa estableix la unicitat.

Per veure l'existència, posem  $\alpha = f_{P_0, P'_0}$ , de manera que  $\alpha$  és l'aplicació afí de  $\mathbb{A}$  en  $\mathbb{A}'$  tal que  $\alpha(P_0) = P'_0$  i  $\tilde{\alpha} = f$ . Llavors

$$\alpha(P_i) = \alpha(P_0) + \tilde{\alpha}(P_i - P_0) = P'_0 + f(e_i) = P'_0 + e'_i = P'_i.$$

Per acabar la demostració, només cal observar que  $f$  és injectiva (exhaustiva) si i només si  $e'_1, \dots, e'_n$  són linealment independents (generen  $V'$ ) i que és bijectiva si i només si  $e'_1, \dots, e'_n$  formen una base de  $V'$ .  $\square$

### Composició d'aplicacions afins. Grup d'afinitats

**1.30 Proposició.** *La composició  $\beta \circ \alpha$  d'aplicacions afins  $\alpha: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}'$  i  $\beta: \mathbb{A}' \rightarrow \mathbb{A}''$  és una aplicació afí i  $\widetilde{\beta \circ \alpha} = \widetilde{\beta} \circ \widetilde{\alpha}$ .*

**Prova:** En efecte, si  $P, Q \in \mathbb{A}$ , llavors

$$\begin{aligned} (\beta \circ \alpha)(Q) &= \beta(\alpha(Q)) \\ &= \beta(\alpha(P) + \widetilde{\alpha}(Q - P)) \\ &= \beta(\alpha(P)) + \widetilde{\beta}(\widetilde{\alpha}(Q - P)) \\ &= (\beta \circ \alpha)(P) + (\widetilde{\beta} \circ \widetilde{\alpha})(Q - P), \end{aligned}$$

i la conclusió s'obté pel fet que  $\widetilde{\beta} \circ \widetilde{\alpha}$  és lineal.  $\square$

**1.31 Proposició.** *Si  $\alpha: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}'$  és una transformació afí, llavors  $\alpha^{-1}: \mathbb{A}' \rightarrow \mathbb{A}$  és una transformació afí i  $\widetilde{\alpha^{-1}} = \widetilde{\alpha}^{-1}$ .*

**Prova:** Siguin  $P'$  i  $Q'$  punts arbitraris de  $\mathbb{A}'$ . Com que  $\alpha$  és bijectiva, podem considerar els punts  $P$  i  $Q$  de  $\mathbb{A}$  tals que  $\alpha(P) = P'$  i  $\alpha(Q) = Q'$ , és a dir,  $\alpha^{-1}(P') = P$  i  $\alpha^{-1}(Q') = Q$ . Atès que  $\alpha$  és una aplicació afí, tenim la relació  $\alpha(Q) - \alpha(P) = \widetilde{\alpha}(Q - P)$  i, per tant, la relació  $Q' - P' = \widetilde{\alpha}(\alpha^{-1}(Q') - \alpha^{-1}(P'))$ . Ara bé, com  $\alpha$  és bijectiva,  $\widetilde{\alpha}$  és bijectiva (E.1.35) i la darrera relació és equivalent a  $\widetilde{\alpha}^{-1}(Q' - P') = \alpha^{-1}(Q') - \alpha^{-1}(P')$ . Com  $P'$  i  $Q'$  són arbitraris i  $\widetilde{\alpha}^{-1}$  és lineal, la demostració és completa.  $\square$

**1.32 Proposició.** *Les afinitats d'un espai afí  $\mathbb{A}$  formen un grup amb el producte de composició.*

**Prova:** Que la composició de dues afinitats és una afinitat, és una conseqüència directa de la proposició 1.30 i del fet que la composició de dues bijeccions és una bijecció. D'altra banda, la identitat de  $\mathbb{A}$  és una afinitat i clarament és neutre per l'operació de composició. Finalment, la proposició 1.31 ens diu que la inversa d'una afinitat és una afinitat.  $\square$

Posarem  $GA(\mathbb{A})$  per denotar el grup de les afinitats de  $\mathbb{A}$ . També direm que és el grup afí de  $\mathbb{A}$ . Pel que hem vist a la proposició 1.11, el grup  $\mathcal{T}(\mathbb{A})$  de les translacions de  $\mathbb{A}$  és un subgrup de  $GA(\mathbb{A})$ . Anàlogament, per la proposició 1.28 tenim que el grup  $\mathcal{H}_O(\mathbb{A})$  de les homotècies de  $\mathbb{A}$  amb centre  $O$  és un subgrup de  $GA(\mathbb{A})$ .

**E.1.39.** Sigui  $\mathbb{A}$  un espai afi i  $V$  el seu espai vectorial associat. Sigui  $v \in V$  i  $\alpha \in GA(\mathbb{A})$ . Llavors, per a tot  $P \in \mathbb{A}$ ,

$$(\alpha \circ t_v)(P) = \alpha(P + v) = \alpha(P) + \tilde{\alpha}(v) = t_{\tilde{\alpha}(v)}(\alpha(P)) = (t_{\tilde{\alpha}(v)} \circ \alpha)(P),$$

la qual cosa mostra que

$$\alpha \circ t_v \circ \alpha^{-1} = t_{\tilde{\alpha}(v)}.$$

És a dir,  $\mathcal{T}(\mathbb{A})$  és un subgrup normal de  $GA(\mathbb{A})$  (un subgrup  $T$  d'un grup  $G$  és dit *normal*, o *invariant*, si  $gtg^{-1} \in T$  qualssevol que siguin  $g \in G$  i  $t \in T$ ).

**E.1.40.** Les afinitats d'un espai afi  $\mathbb{A}$  que deixen fix un punt  $O \in \mathbb{A}$  formen un subgrup  $GA_O(\mathbb{A})$  de  $GA(\mathbb{A})$ . Si  $V$  és l'espai vectorial associat de  $\mathbb{A}$ , llavors l'aplicació

$$GL(V) \rightarrow GA_O(\mathbb{A}) \quad \text{tal que} \quad f \mapsto f_O$$

és un isomorfisme (recordem que, segons la definició 1.19',  $f_O(X) = O + f(X - O)$  per a tot  $X \in \mathbb{A}$ ). L'isomorfisme invers és l'aplicació  $\alpha \mapsto \tilde{\alpha}$ .

**E.1.41.** Amb les notacions de l'exercici anterior, proveu que l'aplicació

$$V \times GL(V) \rightarrow GA(\mathbb{A}) \quad \text{tal que} \quad (v, f) \mapsto t_v \circ f_O$$

és bijectiva i que la bijecció inversa és l'aplicació  $\alpha \mapsto (\alpha(O) - O, \tilde{\alpha})$  (en altres paraules, tota afinitat  $\alpha$  de  $\mathbb{A}$  es descompon de manera única com a producte  $\tau \circ \beta$  d'una translació  $\tau$  i una afinitat  $\beta$  que deixa  $O$  fix). Comproveu també, usant E.1.39, que l'operació de  $V \times GL(V)$  corresponent al producte de composició de  $GA(\mathbb{A})$  segons la bijecció anterior (també la denotem  $\circ$ ) és la donada per l'expressió

$$(v', f') \circ (v, f) = (v' + f'(v), f' \circ f).$$

## Punts fixos

Per a l'estudi d'una afinitat és important el coneixement del seu conjunt de *punts fixos*, això és, els punts  $X$  tals que  $\alpha(X) = X$ . En aquest apartat, primer explicarem com trobar aquest conjunt i, en particular, com decidir si és buit o no. Després demostrarem, en el cas que sigui no buit, que és una varietat lineal i ensems donarem la fórmula per calcular la seva dimensió. També incloem un criteri que dona una condició suficient per tal que una afinitat tingui un únic punt fix.

Si  $\alpha$  és una afinitat, per estudiar el conjunt

$$F_\alpha = \{X \in \mathbb{A} \mid \alpha(X) = X\}$$

de *punts fixos* per  $\alpha$  es pot procedir com segueix. Posem  $f = \tilde{\alpha}$  i  $v = \alpha(O) - O$ , on  $O$  és un punt fixat arbitràriament. Llavors, el transformat  $\alpha(X)$  d'un punt  $X = O + x$

$(x \in V)$  és el punt  $\alpha(O) + f(X - O) = O + v + f(x)$ . Per tant,  $O + x$  és fix per  $\alpha$  si i només si  $x = v + f(x)$ , és a dir, si i només si

$$(Id - f)(x) = v. \quad [1.21]$$

D'aquesta relació en direm que és l'*equació dels punts fixos* de  $\alpha$ . Si  $\mathcal{R} = [O, \mathbf{e}]$  és una referència, i posem  $f(\mathbf{e}) = \mathbf{e}A$ ,  $v = \mathbf{e}p^T$  i  $x = \mathbf{e}x^T$  (per tant,  $A$ ,  $p$  i  $x$  són la matriu de  $f$ , les components de  $v$  i les components de  $x$  respecte de la base  $\mathbf{e}$  de  $V$ , respectivament), llavors l'equació [1.21] s'escriu

$$(I_n - A)x^T = p^T. \quad [1.21']$$

D'aquesta equació, en direm *equació dels punts fixos de  $\alpha$  en la referència  $\mathcal{R}$* . Equival a un sistema d'equacions lineals en les incògnites  $x_1, \dots, x_n$ . El conjunt  $F_\alpha$  és buit (és a dir,  $\alpha$  no té punts fixos) si i només si aquest sistema és incompatible, això és, si i només si  $\text{rang}(I_n - A) < \text{rang}(I_n - A|p^T)$ . En el cas que  $F_\alpha$  sigui no buit, llavors la seva estructura queda determinada per la proposició que segueix.

**1.33 Proposició.** *Si  $\alpha$  és una afinitat i  $F_\alpha \neq \emptyset$ , llavors  $F_\alpha$  és una varietat lineal i  $W(F_\alpha) = \ker(Id - \tilde{\alpha})$ . En particular,  $\dim(F_\alpha) = n - r$ , on  $r = \text{rang}(Id - \tilde{\alpha}) = \text{rang}(I_n - A)$ .*

**Prova:** Posem  $f = \tilde{\alpha}$ ,  $h = Id - f$  i  $v = \alpha(O) - O$  ( $O$  un punt fixat arbitràriament). Llavors les solucions  $x$  de [1.21] formen el conjunt  $h^{-1}(v)$ . Si suposem que  $F_\alpha \neq \emptyset$ , podem escollir  $\bar{x} \in h^{-1}(v)$  i aleshores tenim  $h^{-1}(v) = \bar{x} + \ker(h)$ . Per tant,  $F_\alpha = O + \bar{x} + \ker(h)$ , la qual cosa mostra que  $F_\alpha$  és la varietat lineal que passa pel punt  $O + \bar{x}$  amb espai director  $\ker(h)$ .  $\square$

**1.34 Corol·lari.** *Si  $\tilde{\alpha}$  no té el valor propi +1, llavors  $\alpha$  té un únic punt fix.*

**Prova:** Si  $f = \tilde{\alpha}$ , per definició del polinomi característic  $Q_f$  de  $f$  tenim que

$$\det(Id - f) = Q_f(1).$$

Com que les arrels de  $Q_f$  són els valors propis de  $f$ , per hipòtesi tenim  $Q_f(1) \neq 0$ . Així  $Id - f$  és un isomorfisme i l'equació de punts fixos  $(Id - f)(x) = v$  té com a única solució el vector  $(Id - f)^{-1}(v)$ . Per tant  $X = O + (Id - f)^{-1}(v)$  és l'únic punt fix de  $\alpha$ .  $\square$

**1.35 Exemple** (Afinitats d'una recta afi). Sigui  $\varphi$  una afinitat de  $\mathbb{A}^1$ . Llavors  $\tilde{\varphi} = h_\lambda$ , per algun  $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ , ja que tot automorfisme lineal d'un espai vectorial de dimensió 1 és d'aquesta forma. Si  $\lambda = 1$ ,  $\varphi$  és una translació. Si  $\lambda \neq 1$ ,  $\varphi$  té un únic punt fix (corol·lari 1.34). Si posem  $O$  per denotar aquest únic punt fix, llavors  $\varphi(X) = O + \lambda(X - O)$  i per tant  $\varphi = h_{O,\lambda}$ , l'homotècia de centre  $O$  i raó  $\lambda$ . Hem trobat, doncs, que una afinitat de  $\mathbb{A}^1$  és una homotècia quan té un únic punt fix i una translació quan no té punts fixos.

### Algunes propietats de les aplicacions afins

Donats dos punts  $P$  i  $Q$  d'un espai afí  $\mathbb{A}$ , i un escalar  $\lambda \in K$ , posarem

$$M_\lambda(P, Q) = P + \lambda(Q - P).$$

Fixem-nos que  $M_\lambda(P, P) = P$  per a tot  $\lambda \in K$ , i que si  $P \neq Q$ , llavors  $\lambda \mapsto M_\lambda(P, Q)$  és una bijecció entre  $K$  i la recta  $PQ$   $[\diamond]$ . A més a més,  $\sigma(P, Q, M_\lambda(P, Q)) = \lambda$ .

Si  $2 \neq 0$  en el cos  $K$ , en lloc de  $M_{1/2}(P, Q)$  escriurem  $M(P, Q)$ , i direm que  $M(P, Q)$  és el *punt mitjà* del parell  $\{P, Q\}$ . L'exercici que segueix mostra que efectivament  $M(P, Q)$  només depèn del parell no ordenat  $\{P, Q\}$ .

**E.1.42.** Comproveu que  $M(P, Q) = M(Q, P)$ , qualssevol que siguin els punts  $P$  i  $Q$  (aquesta relació també s'obté fent  $Q = P$  a l'exercici E.1.43).

D'ara endavant suposarem tàcitament, sempre que considerem una expressió de la forma  $M(P, Q)$ , que  $2 \neq 0$  en el cos  $K$ .

**E.1.43.** Si  $P$  i  $Q$  són punts i  $v$  és un vector, llavors  $M(P, Q + v) = M(P + v, Q)$ .

**1.36 Proposició.** Si  $\alpha: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}'$  és una aplicació afí, llavors

$$\alpha(M_\lambda(P, Q)) = M_\lambda(\alpha(P), \alpha(Q)),$$

qualssevol que siguin  $P, Q \in \mathbb{A}$ .

**Prova:** Sigui  $M = M_\lambda(P, Q)$  i  $M' = M_\lambda(\alpha(P), \alpha(Q))$ . Per definició, tenim  $M - P = \lambda(Q - P)$ . Ara si  $\tilde{\alpha}$  és l'aplicació associada a  $\alpha$ , llavors  $\alpha(M) = \alpha(P) + \tilde{\alpha}(M - P)$ . Com que  $\tilde{\alpha}$  és lineal,  $\tilde{\alpha}(M - P) = \lambda\tilde{\alpha}(Q - P)$ , i aquesta darrera expressió és igual a  $\lambda(\alpha(Q) - \alpha(P))$ . Així  $\alpha(M) = \alpha(P) + \lambda(\alpha(Q) - \alpha(P)) = M'$ .  $\square$

**1.37 Corol·lari.** Si  $\alpha$  és una aplicació afí,  $\alpha(M(P, Q)) = M(\alpha(P), \alpha(Q))$  qualssevol que siguin els punts  $P$  i  $Q$ .  $\square$

**1.38 Corol·lari.** Sigui  $L$  una recta de  $\mathbb{A}$ . Si  $\alpha|_L$  no és injectiva, llavors  $\alpha|_L$  és constant. Si  $\alpha|_L$  és injectiva, llavors  $L' = \alpha(L)$  és una recta i

$$\sigma(P, Q, M) = \sigma(\alpha(P), \alpha(Q), \alpha(M))$$

qualssevol que siguin  $P, Q, M \in L$ ,  $P \neq Q$ .

**Prova:** Si  $\alpha|_L$  no és injectiva, existeixen punts  $P, Q \in L$  tals que  $P \neq Q$  i  $\alpha(P) = \alpha(Q)$ . Si ara  $M \in L$  i  $\lambda = \sigma(P, Q, M)$ , llavors  $M = M_\lambda(P, Q)$  i  $\alpha(M) = M_\lambda(\alpha(P), \alpha(Q)) = \alpha(P)$ . Això prova la primera afirmació.

Per veure la segona, suposem que  $\alpha|_L$  és injectiva i siguin  $P, Q, M \in L$ ,  $P \neq Q$ . Com que  $\alpha|_L$  és injectiva, tenim  $\alpha(P) \neq \alpha(Q)$ . Si posem  $\lambda = \sigma(P, Q, M)$ , llavors  $M =$

$M_\lambda(P, Q)$  i per la proposició 1.36 serà  $\alpha(M) = M_\lambda(\alpha(P), \alpha(Q))$ . Ara bé, aquesta relació ens mostra que la imatge de  $L = PQ$  és la recta  $\alpha(P)\alpha(Q)$  i que  $\sigma(\alpha(P), \alpha(Q), \alpha(M)) = \lambda = \sigma(P, Q, M)$ .  $\square$

D'acord amb el corollari 1.38, d'una aplicació  $\alpha: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}'$  entre espais afins que compleixi la relació de la proposició 1.36, en direm que *conserva les raons simples*. Anàlogament, d'una aplicació que compleixi la relació del corollari 1.37, en direm que *conserva els punts mitjans*. Les aplicacions afins, doncs, conserven les raons simples i, en particular, els punts mitjans. Al final d'aquesta secció demostrarem que l'enunciat recíproc també és cert (si 2 és no nul a  $K$ , és clar): una aplicació que conserva les raons simples és una afinitat.

Al corollari 1.38 hem vist que la imatge d'una recta per una aplicació afí és una recta o un punt. Aquesta propietat és un cas molt particular del resultat que segueix.

**1.39 Proposició.** *Sigui  $\alpha: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}'$  una aplicació afí,  $L$  una varietat lineal de  $\mathbb{A}$  i  $L'$  una varietat lineal de  $\mathbb{A}'$ . Posem  $W = W(L)$  i  $W' = W(L')$ . Llavors  $\alpha(L)$  és una varietat lineal de  $\mathbb{A}'$  i el seu espai director és  $\tilde{\alpha}(W)$ . En particular,  $\dim(\alpha(L)) \leq \dim(L)$ , amb igualtat si i només si  $\tilde{\alpha}|_W$  és injectiva. Similarmment,  $\alpha^{-1}(L')$  és o  $\emptyset$  o una varietat lineal de  $\mathbb{A}$ , i en aquest darrer cas el seu espai director és  $\tilde{\alpha}^{-1}(W')$ .*

**Prova:** Si  $P \in L$ , llavors els punts de  $L$  són de la forma  $P + w$ ,  $w \in W$ . Per tant, els punts de  $\alpha(L)$  són de la forma  $\alpha(P + w) = \alpha(P) + \tilde{\alpha}(w)$ , la qual cosa mostra que  $\alpha(L) = \alpha(P) + \tilde{\alpha}(W)$ . Això prova la primera afirmació, ja que la linealitat de  $\tilde{\alpha}$  implica que  $\tilde{\alpha}(W)$  és un subespai vectorial de  $V'$ .

Anàlogament, si  $\alpha^{-1}(L') \neq \emptyset$ , existeix  $P \in \mathbb{A}$  tal que  $\alpha(P) \in L'$ , amb la qual cosa  $L' = \alpha(P) + W'$  i un punt  $Q = P + v$  ( $v \in V$ ) compleix  $\alpha(Q) \in L'$  si i només si  $\alpha(P) + \tilde{\alpha}(v) \in \alpha(P) + W'$ , això és, si i només si  $\tilde{\alpha}(v) \in W'$ . Per tant,  $\alpha^{-1}(L') = P + \tilde{\alpha}^{-1}(W')$ .  $\square$

**1.40 Corollari.** *Si  $L$  i  $M$  són varietats paral·leles de  $\mathbb{A}$ , i  $\alpha: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}'$  és una aplicació afí, llavors  $\alpha(L)$  i  $\alpha(M)$  són varietats paral·leles de  $\mathbb{A}'$ .*

**Prova:** És immediata usant la primera part de la proposició 1.39.  $\square$

**E.1.44.** Una afinitat  $\alpha$  de  $\mathbb{A}$  transforma una varietat lineal en una varietat lineal de la mateixa dimensió (proposició 1.39). Si posem  $\mathcal{L}(\mathbb{A})$  per indicar el conjunt de varietats lineals de  $\mathbb{A}$ , demostreu que l'aplicació  $\mathcal{L}(\mathbb{A}) \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{A})$  tal que  $L \mapsto \alpha(L)$  és bijectiva i que compleix  $\alpha(L \cap L') = \alpha(L) \cap \alpha(L')$ ,  $\alpha(L \vee L') = \alpha(L) \vee \alpha(L')$ .



### Caracteritzacions de les afinitats

El primer resultat d'aquest apartat, junt amb la proposició 1.36 i el corollari 1.38, mostra que les aplicacions afins coincideixen precisament amb les que conserven les raons simples, suposant que la característica de  $K$  és diferent de 2

**1.41 Teorema.** *Siguin  $A$  i  $A'$  espais afins sobre un cos  $K$  de característica diferent de 2. Si  $\alpha: A \rightarrow A'$  una aplicació que conserva les raons simples, llavors  $\alpha$  és una aplicació afí.*

**Prova:** Si  $V$  i  $V'$  són els espais vectorials associats de  $A$  i  $A'$ , cal veure que l'aplicació  $\alpha_P: V \rightarrow V'$  definida per la relació  $\alpha_P(v) = \alpha(P + v) - \alpha(P)$  és lineal per algun punt  $P \in A$ .

A tal fi primer veurem que  $\alpha_P = \alpha_Q$  per qualssevol parelles de punts  $P$  i  $Q$ , és a dir, que

$$\alpha(P + v) - \alpha(P) = \alpha(Q + v) - \alpha(Q)$$

per a tot  $v \in V$ , i  $P$  i  $Q$  arbitraris. Per veure aquesta relació, usarem la igualtat  $M(P, Q + v) = M(P + v, Q)$ , establerta a E.1.43. Com que  $\alpha$  conserva les raons simples, en particular conserva els punts mitjans i, per tant, tindrem

$$M(\alpha(P), \alpha(Q + v)) = M(\alpha(P + v), \alpha(Q)).$$

Si ara fem les substitucions  $\alpha(P + v) = \alpha(P) + \alpha_P(v)$  i  $\alpha(Q + v) = \alpha(Q) + \alpha_Q(v)$ , obtenim

$$M(\alpha(P), \alpha(Q) + \alpha_Q(v)) = M(\alpha(P) + \alpha_P(v), \alpha(Q)).$$

Per la definició de punt mitjà, aquesta darrera relació és equivalent a

$$\alpha(P) + \frac{1}{2}(\alpha(Q) + \alpha_Q(v)) = \alpha(P) + \alpha_P(v) + \frac{1}{2}(\alpha(Q) + \alpha_Q(v)),$$

on hem posat  $w = \alpha(Q) - \alpha(P)$ . I ara és immediat veure que aquesta darrera igualtat equival a  $\alpha_P(v) = \alpha_Q(v)$ .

Com que  $\alpha_P$  és independent del punt  $P$ , podem posar  $f = \alpha_P$ ,  $P$  un punt qualsevol. Això vol dir que  $f(v) = \alpha(P + v) - \alpha(P)$ ,  $P$  arbitrari. Ens manca veure que  $f$  és lineal. Vegem primer que és additiva, això és, que  $f(u + v) = f(u) + f(v)$  qualssevol que siguin els vectors  $u$  i  $v$ : si  $O$  és un punt, aleshores

$$\begin{aligned} f(u + v) &= \alpha(O + u + v) - \alpha(O) \\ &= (\alpha(O + u + v) - \alpha(O + v)) + (\alpha(O + v) - \alpha(O)) \\ &= f(u) + f(v). \end{aligned}$$

Remarquem que fins aquí només hem usat que  $\alpha$  conserva els punts mitjans.

Provem, per acabar, que  $f(\lambda v) = \lambda f(v)$  ( $\lambda \in K$ ,  $v \in V$ ). Si  $O$  és un punt arbitrari, llavors  $O + \lambda v = M_\lambda(O, O + v)$  i, per tant,

$$\begin{aligned} f(\lambda v) &= \alpha(O + \lambda v) - \alpha(O) \\ &= \alpha(M_\lambda(O, O + v)) - \alpha(O) \\ &= M_\lambda(\alpha(O), \alpha(O + v)) - \alpha(O) \\ &= M_\lambda(\alpha(O), \alpha(O) + f(v)) - \alpha(O) \\ &= (\alpha(O) + \lambda f(v)) - \alpha(O) \\ &= \lambda f(v), \end{aligned}$$

com volíem demostrar.  $\square$

### ***Aplicacions semiafins i col·lineacions***

Sabem que la imatge d'una recta per una transformació afí és una recta. L'afirmació recíproca no és certa: una aplicació bijectiva arbitrària entre dues rectes afins n'és un contraexemple. Per un contraexemple en qualsevol dimensió, considerem l'aplicació (bijectiva)  $\beta : \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^n \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^n$  tal que  $z = (z_1, \dots, z_n) \mapsto (\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n) = \bar{z}$  (aplicació de conjugació). Llavors és clar que la imatge de la recta  $z + \langle v \rangle$  és la recta  $\bar{z} + \langle \bar{v} \rangle$ , però en canvi  $\beta$  no és una afinitat. Remarquem que  $\beta(z + z') = \beta(z) + \beta(z')$  (diem que  $\beta$  és *additiva*) i  $\beta(\lambda z) = \bar{\lambda}\beta(z)$  (diem que  $\beta$  és *antilineal*).

De fet, l'exemple de la conjugació es pot formular d'una manera general. Suposem que tenim una aplicació bijectiva  $K \rightarrow K$ ,  $\lambda \mapsto \lambda^*$ , tal que  $(\lambda + \mu)^* = \lambda^* + \mu^*$  i  $(\lambda\mu)^* = \lambda^*\mu^*$  qualssevol que siguin  $\lambda, \mu \in K$  (direm que  $\lambda \mapsto \lambda^*$  és un *automorfisme* de  $K$ ; la identitat de  $K$  i la conjugació de  $\mathbb{C}$  en són exemples).

Ara direm que una aplicació  $f: V \rightarrow V'$  entre  $K$ -espais vectorials  $V$  i  $V'$  és *\*-lineal* si és additiva i  $f(\lambda v) = \lambda^* f(v)$  per a tot  $v \in V$  i tot  $\lambda \in K$ . I una aplicació  $\alpha: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}'$  entre espais afins direm que és *\*-afí* si existeix un punt  $P \in \mathbb{A}$  tal que l'aplicació  $\alpha_P: V \rightarrow V'$  definida per [1.16] és \*-lineal (on  $V$  i  $V'$  són els espais vectorials associats a  $\mathbb{A}$  i  $\mathbb{A}'$ , respectivament). Pel lema 1.26,  $\alpha_P$  és independent de  $P$ , i si posem  $\tilde{\alpha} = \alpha_P$  per un  $P$  arbitrari, llavors tindrem [1.17], ara amb  $\tilde{\alpha}$  una aplicació \*-lineal.

A les aplicacions  $V \rightarrow V'$  ( $\mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}'$ ) que són \*-lineals (\*-afins) per algun automorfisme  $*$  de  $K$  les anomenarem *semilineals* (*semiafins*). Les *transformacions semiafins* (*semiafinitats*) són les aplicacions semiafins bijectives (transformacions semiafins d'un espai afí en ell mateix).

Ara si  $\alpha: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}'$  és \*-lineal, llavors tenim, resseguint la demostració de la proposició 1.36, que

$$\alpha(M_\lambda(P, Q)) = M_{\lambda^*}(\alpha(P), \alpha(Q)).$$

El corollari 1.37 és vàlid sense canvis  $[\diamond]$  i, resseguint la demostració del corollari 1.38, veiem que aquest corollari és vàlid amb la fórmula

$$\sigma(P, Q, M)^* = \sigma(\alpha(P), \alpha(Q), \alpha(M)).$$

En particular, doncs, *tota aplicació semiafí injectiva transforma rectes en rectes*.

El cas  $K = \mathbb{Z}_2$  també ens dóna contraexemples: com que una recta només conté dos punts, és clar que qualsevol aplicació injectiva entre espais afins sobre  $\mathbb{Z}_2$  transforma rectes en rectes.

Les consideracions anteriors plantegen el problema de saber quines són les aplicacions bijectives més generals entre espais afins de dimensió  $n \geq 2$  que transformen punts alineats en punts alineats (d'aquestes aplicacions en direm *col·lineacions*). La resposta, l'anomenat *teorema fonamental de la geometria afí*, ens diu que els contraexemples que hem examinat són essencialment els únics.

**1.42 Teorema** (fonamental de la geometria afí). *Sigui  $\alpha: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}'$  una col·lineació entre espais afins  $\mathbb{A}$  i  $\mathbb{A}'$  de dimensió  $n \geq 2$  sobre un cos  $K \neq \mathbb{Z}_2$ . Llavors  $\alpha$  és  $*$ -afí per un automorfisme  $\lambda \mapsto \lambda^*$  de  $K$  unívocament determinat per  $\alpha$ .*

**Prova:** Malgrat l'interès conceptual d'aquest teorema, no en donem una demostració aquí. Si bé les idees bàsiques de la demostració són naturals i senzilles, omplir tots els detalls és una mica laboriós i, tot plegat, excedeix l'objecte d'aquest curs. El lector interessat pot confegir-ne una, de demostració, resolent els problemes P.1.8-P.1.12.  $\square$

**1.43 Corollari.** *Si  $\alpha: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}'$  una col·lineació entre espais afins reals de dimensió  $n \geq 2$ , llavors  $\alpha$  és una transformació afí.*

**Prova:** Posat que pel teorema sabem que  $\alpha$  és  $*$ -afí per un cert automorfisme  $\lambda \mapsto \lambda^*$  de  $\mathbb{R}$ , és suficient veure que l'únic automorfisme de  $\mathbb{R}$  és la identitat. Que aquest és el cas es pot argumentar com segueix.

En primer lloc, tenim  $1^* = 1$  (és immediat veure que tot automorfisme compleix aquesta condició). D'aquí es pot deduir fàcilment que  $n^* = n$  per a tot  $n \in \mathbb{Z}$ , i després que  $r^* = r$  per a tot  $r \in \mathbb{Q}$ . Ara observem que si  $x > 0$ , llavors  $x^* > 0$  (si  $x > 0$  i  $y = +\sqrt{x}$ , llavors  $x = y^2$  i  $x^* = (y^*)^2 > 0$ ). Amb això obtenim que si  $a < b$ , llavors  $a^* < b^*$  (ja que a  $\mathbb{R}$  la relació  $a < b$  equival a  $b - a > 0$ ). Sigui ara  $x \in \mathbb{R}$  arbitrari i escollim successions  $\{a_n \in \mathbb{Q}\}_{n \geq 1}$  i  $\{b_n \in \mathbb{Q}\}_{n \geq 1}$  tals que  $a_n < x < b_n$  i  $b_n - a_n < 10^{-n}$  per a tot  $n$ . Llavors

$$a_n = a_n^* < x^* < b_n^* = b_n,$$

i aquestes relacions impliquen  $x^* = x$ .  $\square$

### *Sobre l'axiomatització de la geometria*

El teorema fonamental de la geometria afí suggereix que les propietats purament geomètriques de les rectes d'un espai afí haurien de ser suficients per determinar l'estructura d'espai afí: el cos  $K$ , l'espai vectorial associat  $V$  i l'aplicació estructural  $\delta: \mathbb{A} \rightarrow V$ .

La determinació de propietats bàsiques de les rectes i les seves interrelacions a partir de les quals sigui possible inferir tota l'estructura afí és el tema de l'*axiomatització de la*

*geometria*, afí en el cas que ens ocupa. Les recerques sobre aquest tema van començar amb els *Elements* d'Euclides, han continuat al llarg dels segles, i han determinat en gran mesura la concepció actual de les matemàtiques. Tradicionalment, a les presentacions axiomàtiques de la geometria se les agrupa sota l'expressió de *geometria sintètica*, en contraposició a les presentacions (començant amb la de Descartes) modelades en estructures algebraiques i que es coneixen com *geometria analítica*. En el cas de la geometria afí, direm que una construcció és *sintètica* si només hi intervenen les nocions de punt i recta, la relació de paral·lelisme entre rectes, o nocions i relacions derivades d'aquestes a partir dels axiomes admesos, com ara que per dos punts diferents hi passa una única recta o que per un punt donat hi passa una única recta paral·lela a una recta donada.

Per dimensió  $n \geq 3$ , les axiomàtiques raonables condueixen efectivament al model (analític) de geometria afí que hem adoptat en aquest curs (axiomes 1.1 i 1.2). En canvi, el cas  $n = 2$  és excepcional, ja que hi ha moltes geometries que són raonables des del punt de vista sintètic i que no són afins en el sentit d'aquest text (les raons d'aquesta situació les discutirem en el capítol 3). De fet, els plans afins (i projectius) axiomàtics segueixen essent l'objecte de nombroses recerques, tant pures com aplicades. Com a mostra, podeu consultar el llibre *Designs and their codes*, de B. Bollobas, P. Sarnak i C. T. C. Wall (Cambridge tracts in mathematics, Cambridge University Press, 1992), i fixar-vos en les nombroses referències que donen tant sobre resultats de geometria pura com sobre les seves aplicacions, particularment a la teoria de codis autocorrectors per a la transmissió d'informació a través de canals de comunicació amb «soroll».

Per a algunes claus sobre com es pot procedir per a la construcció del cos  $K$  i de l'espai vectorial associat  $V$  a partir d'una presentació sintètica de la geometria afí, vegeu els problemes P.1.13 i P.1.14 i el comentari que els segueix.

## 1.5 Problemes

**P.1.1.** Si  $L$  és un subconjunt d'un espai afí  $A$  i el conjunt

$$\delta(L \times L) = \{\overrightarrow{PQ} \mid P, Q \in L\}$$

és un subespai vectorial de  $V$ , és  $L$  necessàriament una varietat lineal?

**P.1.2.** Sigui  $L$  una varietat lineal. A l'exercici E.1.13 hem vist, en particular, que si  $P$  i  $Q$  són dos punts diferents de  $L$ , llavors  $PQ \subseteq L$ . Recíprocament, si  $K \neq \mathbb{Z}_2$  i  $L$  és un subconjunt no buit d'un espai afí  $A$  tal que  $PQ \subseteq L$  per qualsevol parell de punts diferents  $P, Q \in L$ , llavors  $L$  és una varietat lineal. Per altra banda, noteu que si  $K = \mathbb{Z}_2$ , llavors les rectes tenen exactament dos punts i per tant qualsevol subconjunt de  $A$  compleix la propietat de contenir la recta que uneix dos punts diferents qualssevol d'aquest.

**P.1.3.** Sigui  $K$  un cos,  $E$  un  $K$ -espai vectorial de dimensió  $n$  i  $F \subseteq E$  un subespai de dimensió  $k$ . Proveu que  $(\mathbb{A}, V, \delta)$ , amb les definicions que donem tot seguit de  $\mathbb{A}$ ,  $V$  i  $\delta$ , és un espai afi de dimensió  $k(n-k)$ . Digueu també quina interpretació té la suma  $P+v$ , per  $P \in \mathbb{A}$  i  $v \in V$ .

Definim  $\mathbb{A}$  com el conjunt de subespais  $P \subseteq E$  tals que  $P \oplus F = E$ . Si  $P \in \mathbb{A}$ , posarem  $f_P: E \rightarrow F$  per denotar l'única aplicació lineal tal que  $f_P(x) = 0$  si  $x \in P$  i  $f_P(x) = x$  si  $x \in F$ .

Definim  $V = \text{Hom}(E/F, F)$ , això és, l'espai d'aplicacions  $K$ -lineals de  $E/F$  en  $F$ , que es pot identificar a l'espai de les aplicacions  $K$ -lineals  $v: E \rightarrow F$  tals que  $v(x) = 0$  per a tot  $x \in F$ .

Finalment posem, si  $P, Q \in \mathbb{A}$ ,  $\delta(P, Q) \in V$  per denotar l'aplicació lineal  $E \rightarrow F$  definida per la següent fórmula:  $\delta(P, Q) = f_Q - f_P$ . Com que  $f_Q$  i  $f_P$  són la identitat sobre  $F$ ,  $\delta(P, Q)$  és nul·la sobre  $F$  i, efectivament,  $\delta(P, Q) \in V$ .

Remarqueu que si  $P \in \mathbb{A}$  i  $v \in V$ , llavors  $f_P + v$  és la identitat sobre  $F$  i té imatge  $F$ , amb la qual cosa  $Q = \ker(f_P + v) \in \mathbb{A}$  i  $f_Q = f_P + v$ .

**P.1.4.** Amb les notacions del problema anterior, suposem que  $k = n - 1$ , amb la qual cosa els elements de  $\mathbb{A}$  són els subespais vectorials de dimensió 1 de  $E$  no continguts a  $F$ . Fixem un  $u \in E - F$  i posem  $H = u + F$ , considerat com un hiperplà de l'espai afi associat a  $E$  (en particular  $H$  té estructura d'espai afi de dimensió  $n - 1$ ). Si  $x \in H$ , és clar que  $x \notin F$  i per tant  $\langle x \rangle \in \mathbb{A}$ . Demostreu que l'aplicació  $H \rightarrow \mathbb{A}$  tal que  $x \mapsto \langle x \rangle$  és una transformació afi.

**P.1.5.** Amb les notacions de l'exercici E.1.24 i suposant que  $K$  no és de característica 2 (és a dir, que  $2 \neq 0$  en el cos  $K$ ), demostreu que les sis raons simples

$$\sigma, \quad \frac{1}{\sigma}, \quad 1 - \sigma, \quad \frac{1}{1 - \sigma}, \quad \frac{\sigma}{\sigma - 1}, \quad \frac{\sigma - 1}{\sigma}$$

són diferents si i només si  $\sigma \notin \{-1, 2, \frac{1}{2}\}$  i  $\sigma^2 - \sigma + 1 \neq 0$ . Comproveu, a més, que si  $\sigma \in \{-1, \frac{1}{2}, 2\}$ , llavors la llista de les sis raons simples conté dues vegades cada un dels valors  $-1, 2, \frac{1}{2}$ , i que si  $\sigma^2 - \sigma + 1 = 0$ ,  $\sigma \neq -1$ , llavors la llista conté tres vegades  $\sigma$  i tres vegades  $\sigma^2$ . Observem que els tres valors  $-1, 2$  i  $\frac{1}{2}$  coincideixen si (i només si)  $K$  té característica 3. Per altra banda, que les condicions  $\sigma^2 - \sigma + 1 = 0$  i  $\sigma \neq -1$  es compleixin depèn del cos  $K$ : per exemple, no es compleixen si  $K = \mathbb{R}$ , mentre que si  $K = \mathbb{C}$ , llavors  $\omega = (1 + \sqrt{3}i)/2$  i  $\omega^2 = (-1 + \sqrt{3}i)/2$  les satisfan.

**P.1.6.** (El resultat d'aquest problema s'ha usat per establir [1.11c] a partir de [1.11a]). Sigui  $B = (b_{ij})$  una matriu  $n \times r$  amb coeficients  $b_{ij} \in K$ . Suposem que  $r < n$  i que  $B$  té rang  $r$ . Fixem índexs  $I = i_1, \dots, i_r$  tals que  $1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n$  de manera que  $\det(B_I) \neq 0$ , on  $B_I$  és la matriu  $r \times r$  formada amb les files de  $B$  indicades pels índexs de  $I$ . Sigui ara  $x$  una vector columna de dimensió  $n$ , també amb coeficients de  $K$ , i per cada  $j \in \{1, \dots, n\} - I$  considerem el determinant

$$D_j = \det(x_{I \cup \{j\}} | B_{I \cup \{j\}}).$$

Per tal que  $x$  sigui combinació lineal de les columnes de  $B$  és clar que s'han de complir les  $n - r$  condicions  $D_j = 0$ . Aquestes condicions són també suficients. Fixem-nos primer que  $x_I$  és combinació lineal (de manera única) de les columnes de  $B_I$ , després observem que  $D_j = 0$  implica que  $x_{I \cup \{j\}}$  és combinació lineal (també de manera única) de les columnes de  $B_{I \cup \{j\}}$ , i finalment invoquem la unicitat per concloure que  $x$  és combinació lineal de les columnes de  $B$ .

**P.1.7.** Amb les notacions dels exercicis E.1.40 i E.1.41, siguin  $O$  i  $O'$  punts, i  $\alpha$  una aplicació afi de  $\mathbb{A}$  en ell mateix. Llavors podem escriure  $\alpha = t_v \circ f_O = t_{v'} \circ g_{O'}$ , on  $v$  i  $v'$  són vectors,  $f$  i  $g$  endomorfismes de  $V$ . Demostreu que

$$g = f \text{ i } v = v' + (Id - f)(O' - O) .$$

Amb els problemes P.1.8-P.1.12 podeu obtenir una demostració del teorema fonamental de la geometria afi.

**P.1.8.** Sigui  $\alpha: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}'$  col·lineació entre els espais afins  $\mathbb{A}$  i  $\mathbb{A}'$  de dimensió  $n \geq 2$  sobre un cos  $K \neq \mathbb{Z}_2$ . Si  $P_0, P_1, \dots, P_r$  són punts de  $\mathbb{A}$ , demostreu que

$$\alpha(P_0 P_1 \cdots P_r) \subseteq \alpha(P_0) \alpha(P_1) \cdots \alpha(P_r) .$$

Demostreu també que si  $P_0, P_1, \dots, P_r$  són punts independents, llavors els punts

$$\alpha(P_0), \alpha(P_1), \dots, \alpha(P_r)$$

de  $\mathbb{A}'$  són punts independents. Indicació: per la primera part useu el problema P.1.2 i inducció sobre  $r$ , i per la segona raoneu per reducció a l'absurd.

**P.1.9.** Amb les hipòtesis del problema anterior, demostreu que si  $L$  és una recta de  $\mathbb{A}$ , llavors  $\alpha(L)$  és una recta de  $\mathbb{A}'$ , i que si  $L'$  és una recta paral·lela a  $L$ , llavors  $\alpha(L')$  és paral·lela a  $\alpha(L)$ . Indicació: useu que dues rectes d'un pla són paral·leles si i només si la seva intersecció és buida.

**P.1.10.** Amb les hipòtesis del problema P.1.8, sigui  $\alpha_P: V \rightarrow V'$  l'aplicació tal que  $\alpha_P(v) = \alpha(P + v) - \alpha(P)$ . Demostreu que  $\alpha_P$  és additiva. Remarqueu que així podem aplicar 1.26 per concloure que  $\alpha_P$  és independent de  $P$ . Indicació: useu una construcció sintètica de la llei d'addició.

**P.1.11.** Amb les hipòtesis del problema P.1.8, siguin  $P$  i  $Q$  dos punts diferents de  $\mathbb{A}$  i sigui  $\lambda \mapsto \lambda^*$  l'aplicació de  $K$  en  $K$  tal que

$$\lambda^* = \sigma(\alpha(P), \alpha(Q), \alpha(M_\lambda(P, Q))) .$$

Demostreu que aquesta aplicació és un automorfisme de  $K$  i que és independent dels punts  $P$  i  $Q$ . Indicació: si  $\lambda, \mu \in K$ , trobeu construccions sintètiques de la suma  $\lambda + \mu$  i el producte  $\lambda\mu$ .

**P.1.12.** Amb les hipòtesis del problema P.1.8 i notacions del problema P.1.11, demostreu que  $\alpha$  és una aplicació  $*$ -afi (teorema fonamental de la geometria afi).

**P.1.13.** Demostreu que una semiafinatat  $\alpha$  diferent de la identitat és una translació si i només si no té punts fixos i  $\alpha(L) \parallel L$  per a tota recta  $L$ .

Pel teorema fonamental de la geometria afi, una autocol·lineació diferent de la identitat d'un espai afi  $\mathbb{A}$  de dimensió  $n \geq 2$ , sobre un cos  $K \neq \mathbb{Z}_2$ , és una translació si i només si no té punts fixos i  $\alpha(L) \parallel L$  per a tota recta  $L$ .

**P.1.14.** Demostreu que una semiafinatat  $\alpha$  d'un espai afi  $\mathbb{A}$  és una homotècia de centre  $O \in \mathbb{A}$  si i només si deixa  $O$  fix i  $\alpha(L) \parallel L$  per a tota recta  $L$ . Demostreu també que si  $O' \in \mathbb{A}$  i  $v = O' - O$ , llavors l'aplicació  $\mathcal{H}_O(\mathbb{A}) \rightarrow \mathcal{H}_{O'}(\mathbb{A})$  tal que  $h \mapsto t_v \circ h \circ t_{-v}$  és un isomorfisme de grups.

Pel teorema fonamental de la geometria afi, junt amb la primera part d'aquest problema, una autocol·lineació  $\alpha$  diferent de la identitat d'un espai afi  $\mathbb{A}$  de dimensió  $n \geq 2$ , sobre un cos  $K \neq \mathbb{Z}_2$ , és una homotècia de centre  $O$  si i només si  $O$  és fix per  $\alpha$  i  $\alpha(L) \parallel L$  per a tota recta  $L$ .

Remarquem que el problema P.1.14 ens dóna una clau sobre com podem construir sintèticament el cos  $K$ . Per altra banda, P.1.13 ens dóna una clau sobre com podem construir el grup de translacions  $\mathcal{T}$  i, per tant, el grup additiu de  $V$ , en termes similars. Notem, finalment, que l'exercici E.1.39 ens mostra com podem definir sintèticament el producte d'un escalar  $\lambda$  i un vector  $v$ : considerant  $\lambda$  com l'homotècia de centre  $O$  i  $v$  com una translació, llavors la translació  $\lambda v$  és  $\lambda \circ v \circ \lambda^{-1}$  (ja que, per E.1.39, i tenint en compte que  $\tilde{h}_{O,\lambda} = h_\lambda$ ,  $h_{O,\lambda} \circ t_v \circ h_{O,\lambda}^{-1} = t_{\lambda v}$ ).

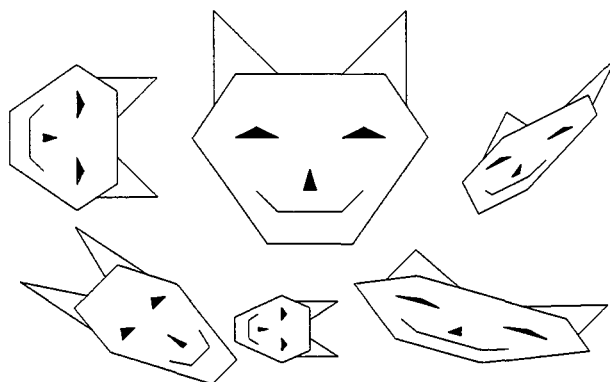


Figura 1.6: Figures afins

## 2 Geometria mètrica

A l'espai ordinari, hi trobem, a més de l'estructura d'espai afí, nocions i relacions mètriques, com ara distàncies, perpendicularitat o, més generalment, angles.

En aquest capítol estudiarem una nova estructura, l'espai euclidià, en la qual nocions i relacions com ara les esmentades es poden definir d'una manera natural.

Formalment, un espai euclidià es defineix com un espai afí real dotat d'una mètrica, és a dir, d'una aplicació bilineal simètrica  $g: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $g(v, v) > 0$  per a tot vector  $v \neq 0$ .

Abans d'iniciar-nos, però, en l'estudi sistemàtic de l'espai euclidià, a partir de la secció 2.1, en el que resta d'aquesta introducció intentarem dilucidar quin és l'origen i la significació d'aquest concepte. Tanmateix, les nostres consideracions només poden tenir valor heurístic, ja que pressuposen un cert coneixement d'algunes nocions geomètriques elementals de l'espai ordinari  $\mathbb{A}$ , com ara els de distància, projecció ortogonal, angle i producte escalar.

### *Distància i norma*

Donats dos punts  $P, Q \in \mathbb{A}$ , posem  $d(P, Q)$  per designar la *distància* entre els punts  $P$  i  $Q$ . La distància és *invariant per translacions*, això és, per a tot vector  $v \in V$  es compleix

$$d(P + v, Q + v) = d(P, Q).$$

Si ara  $v$  és un vector i  $P$  i  $Q$  són punts,

$$d(Q, Q + v) = d(P + \overrightarrow{PQ}, P + \overrightarrow{PQ} + v) = d(P, P + v),$$

i això ens mostra que  $d(P, P + v)$  és, per un vector  $v$  donat, independent del punt  $P$ . Direm que  $d(P, P + v)$  és la *longitud* (o la *norma*) de  $v$  i posarem  $|v|$  per denotar-la.



### Projecció ortogonal

Considerem ara la *projecció ortogonal*  $\pi_L : \mathbb{A} \rightarrow L$  sobre una recta  $L$  (la projecció ortogonal sobre un pla es defineix de manera similar): donat un punt  $P$ ,  $P' = \pi_L(P)$  és, per definició, el peu de la recta per  $P$  perpendicular a  $L$  (vegeu la figura 2.1). Del fet que els plans perpendiculars a  $L$  siguin paral·lels en resulta, pel teorema de Tales, que la projecció ortogonal sobre  $L$  conserva les raons simples (vegeu la figura 2.2). Per tant,  $\pi_L$  és una aplicació afí (teorema 1.41). Així doncs, existeix una (única) aplicació lineal  $\pi_W : V \rightarrow W$  ( $V$  l'espai vectorial associat a  $\mathbb{A}$  i  $W$  l'espai director de  $L$ ) tal que

$$\pi_W(Q - P) = \pi_L(Q) - \pi_L(P).$$

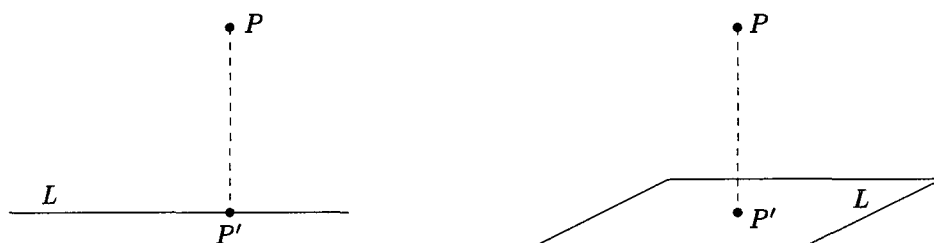


Figura 2.1: Projecció ortogonal

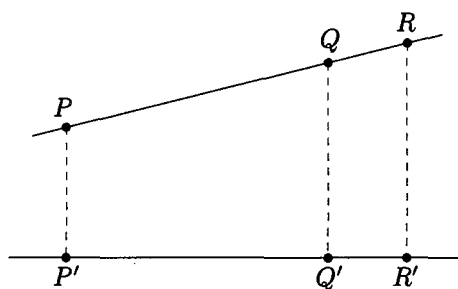


Figura 2.2: La projecció ortogonal és una aplicació afí

### Angles i producte escalar

Donat un vector  $v \in V$  i un vector no nul  $w \in W$ , podem escriure, si  $v' = \pi_W(v)$ ,

$$v' = g(v, w) \frac{w}{|w|^2},$$

on  $g(v, w) \in \mathbb{R}$  només depèn de  $v$  i  $w$ . Del fet que  $v'$  depengui linealment de  $v$  en deduïm que  $g(v, w)$  és lineal en  $v$ , per a cada  $w$  fixat. Com que, per altra banda,  $|v'| = |v| \cos(\alpha)$ , on  $\alpha$  és l'angle format pels vectors  $v$  i  $w$ , resulta que

$$g(v, w) = |v||w| \cos(\alpha),$$

la qual cosa ens mostra que  $g(v, w) = v \cdot w$ , el *producte escalar* de  $v$  i  $w$ . Per tant, el producte escalar  $v \cdot w$  és una funció lineal de  $v$ , per a cada  $w$  donat (notem que això és també cert per  $w = 0$ ). Com que el producte escalar és commutatiu, i tot vector no nul  $w$  és el vector director d'alguna recta  $L$ ,  $v \cdot w$  també és lineal en  $w$  per a cada  $v$ . És a dir,  $v \cdot w = g(v, w)$  és una funció *bilineal simètrica*. A més, com que  $v \cdot v = |v|^2$ , veiem que  $v \cdot v > 0$  si  $v \neq 0$ , propietat que s'enuncia dient que el producte escalar és *definit positiu*. Remarquem que  $v$  i  $w$  són perpendiculars si i només si  $g(v, w) = 0$ .

Les consideracions anteriors suggereixen la possibilitat —que per altra banda és la que seguirem en aquest text— de definir un espai euclidià com un espai afi real  $(\mathbb{A}, V)$  dotat d'una aplicació bilineal simètrica  $g: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $g(v, v) > 0$  per a tot vector  $v \neq 0$ . L'objectiu és, aleshores, reconstruir les nocions i propietats habituals de la geometria mètrica a partir de  $g$ . Per exemple, en un tal espai la longitud  $|v|$  d'un vector  $v$  es pot definir per la fórmula

$$|v| = \sqrt{g(v, v)},$$

la relació de perpendicularitat entre dos vectors  $v$  i  $w$  es pot definir mitjançant la relació  $g(v, w) = 0$ , o, més generalment, l'angle  $\alpha$  entre dos vectors  $v$  i  $w$  es pot definir per la fórmula

$$\cos(\alpha) = \frac{g(v, w)}{|v| |w|}.$$

## 2.1 Espai euclidià

Definim, doncs, un *espai euclidià* com un espai afi real  $(\mathbb{A}, V)$  dotat d'una aplicació bilineal simètrica  $g: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $g(v, v) > 0$  per a tot vector  $v \neq 0$ . Direm que  $g$  és el *producte escalar*, o la *mètrica*, de l'espai euclidià, i també posarem  $v \cdot w$ , o  $\langle v, w \rangle$ , en lloc de  $g(v, w)$ . A la propietat  $g(v, v) > 0$  si  $v \neq 0$  ens hi referirem dient que el producte escalar és *definit positiu*. Remarquem que, per a tot vector  $v$ ,  $g(v, v) \geq 0$ , i que la igualtat val si i només si  $v = 0$ .

**E.2.1.** Comproveu que

$$g((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$$

és un producte escalar definit positiu de  $\mathbb{R}^n$  (aquesta mètrica, la sobreentendrem d'ara endavant quan ens referim a  $\mathbb{R}^n$ ).

Definim la *longitud*, o *norma*, d'un vector  $v$ , i posarem  $|v|$  per denotar-la, per la fórmula

$$|v| = \sqrt{g(v, v)}. \quad [2.1]$$

Per exemple, la norma del vector  $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$  és  $|a| = \sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}$ .

**E.2.2.** Es compleix que  $|v| \geq 0$ , i que la igualtat val si i només si  $v = 0$ .

**E.2.3.** Demostreu que

$$|\lambda v| = |\lambda| |v|,$$

qualssevol que siguin  $\lambda \in \mathbb{R}$  i  $v \in V$ . En particular,  $|-v| = |v|$ .

**E.2.4.** Un vector  $u$  es diu *unitari* si  $|u| = 1$ . Mostreu que per a tot vector  $v \neq 0$  hi ha exactament dos vectors unitaris proporcionals a  $v$ , i que aquests són  $\pm v/|v|$ .

La *distància entre dos punts*  $P$  i  $Q$ , que denotarem  $d(P, Q)$ , es defineix per la fórmula

$$d(P, Q) = |Q - P| = |\overrightarrow{PQ}|.$$

Per exemple, la distància entre els punts  $(a_1, \dots, a_n)$  i  $(b_1, \dots, b_n)$  de  $\mathbb{R}^n$  és

$$\sqrt{(a_1 - b_1)^2 + \dots + (a_n - b_n)^2}.$$

**E.2.5.** De les propietats de la norma que ja hem vist (E.2.2), tenim que  $d(P, Q) \geq 0$  i que  $d(P, Q) = 0$  si i només si  $P = Q$ . També tenim (per E.2.3) que  $d(P, Q) = d(Q, P)$ .

**2.1 Teorema** (Desigualtat de Schwarz). *Donats dos vectors  $v$  i  $w$  qualssevol, es compleix la desigualtat*

$$|v \cdot w| \leq |v| |w|.$$

*La igualtat  $|v \cdot w| = |v| |w|$  es compleix si i només si  $v$  i  $w$  són linealment dependents.*

**Prova:** Si  $w = 0$ , la desigualtat que volem establir és una igualtat (els dos membres valen 0) i és clar que  $v$  i  $w$  són linealment dependents. Podem, doncs, suposar que  $w$  és no nul.

Atès que  $g$  és definida positiva, per a tot  $t \in \mathbb{R}$  tenim la desigualtat

$$g(v + tw, v + tw) \geq 0.$$

Tenint en compte que  $g$  és bilineal i simètrica, aquesta desigualtat és equivalent a la desigualtat

$$|v|^2 + 2(v \cdot w)t + |w|^2 t^2 \geq 0.$$

Com que  $t \in \mathbb{R}$  és arbitrari, resulta que

$$(v \cdot w)^2 - |v|^2 |w|^2 \leq 0, \quad [*]$$

car si l'expressió de l'esquerra fos positiva, llavors el polinomi real

$$|v|^2 + 2(v \cdot w)T + |w|^2 T^2$$

tindria *dues* arrels reals distintes (recordem que  $|w| \neq 0$ ), i per tant prendria valors positius i valors negatius. Això prova la desigualtat  $|v \cdot w| \leq |v||w|$ , ja que aquesta i  $[*]$  són clarament equivalents.

Ara, si es compleix la igualtat  $|v \cdot w| = |v||w|$ , llavors existeix un  $t \in \mathbb{R}$  tal que  $|v|^2 + 2(v \cdot w)t + |w|^2 t^2 = 0$ , és a dir, tal que  $g(v + tw, v + tw) = 0$  i, per tant, tal que  $v + tw = 0$ , amb la qual cosa  $v$  i  $w$  són linealment dependents. Recíprocament, si  $v$  i  $w$  són linealment dependents, llavors existeix  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que  $v = \lambda w$  (recordem que  $w \neq 0$ ) i és immediat verificar que  $|v \cdot w| = |v||w|$ .  $\square$

Remarquem que si els vectors  $v$  i  $w$  són no nuls, la desigualtat de Schwarz equival a les desigualtats

$$-1 \leq \frac{v \cdot w}{|v||w|} \leq 1. \quad [2.2]$$

**E.2.6.** Comproveu que la primera (segona) de les desigualtats [2.2] és una igualtat si i només si  $w = \lambda v$ , per a un cert  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda < 0$  ( $\lambda > 0$ ).

**2.2 Corol·lari** (Desigualtat triangular de la norma). *Siguin  $v$  i  $w$  vectors arbitraris. Llavors*

$$|v + w| \leq |v| + |w|.$$

*La igualtat  $|v + w| = |v| + |w|$  és vàlida si i només si, o bé un dels dos vectors és nul, o bé existeix un nombre real  $\lambda > 0$  tal que  $w = \lambda v$ .*

**Prova:** En efecte,

$$\begin{aligned} |v + w|^2 &= (v + w) \cdot (v + w) \\ &= |v|^2 + |w|^2 + 2v \cdot w \\ &\leq |v|^2 + |w|^2 + 2|v||w| \quad [\text{per 2.1}] \\ &= (|v| + |w|)^2, \end{aligned}$$

d'on la desigualtat enunciada en resulta immediatament.

Per tal que valgui la igualtat  $|v + w| = |v| + |w|$ , és clar, per la deducció precedent, que és necessari i suficient que  $v \cdot w = |v||w|$ . Ara bé, aquesta condició es compleix si i només si o bé un dels dos vectors és nul o bé, segons l'exercici E.2.6, si  $v$  i  $w$  són no nuls i proporcionals segons un factor positiu.  $\square$

**2.3 Remarca.** Els dos primers passos de la prova anterior mostren que si  $v, w \in V$ , llavors

$$v \cdot w = \frac{1}{2}(|v + w|^2 - |v|^2 - |w|^2). \quad [2.3]$$

**2.4 Corollari** (Teorema de Pitàgores). *Si  $v$  i  $w$  són vectors, llavors*

$$|v + w|^2 = |v|^2 + |w|^2$$

*si i només si  $v \cdot w = 0$ .*

**Prova:** Si  $v, w \in V$ , llavors

$$|v + w|^2 = |v|^2 + |w|^2 + 2v \cdot w$$

(vegeu la demostració del corollari 2.2) i d'aquí l'enunciat en resulta immediatament. (Quan  $v \cdot w = 0$ , diem que els vectors  $v$  i  $w$  són *ortogonals* o *perpendiculars*).  $\square$

**E.2.7.** Siguin  $v_1, \dots, v_r$  vectors tals que  $v_i \cdot v_j = 0$  per a tot  $i \neq j$ . Demostreu que

$$|v_1 + \dots + v_r|^2 = |v_1|^2 + \dots + |v_r|^2.$$

**2.5 Corollari** (Desigualtat triangular de la distància). *Qualsevol que siguin els punts  $P, Q$  i  $R$  de l'espai euclidià  $\mathbb{A}$ , es compleix la desigualtat*

$$d(P, Q) + d(Q, R) \geq d(P, R). \quad [2.4]$$

**Prova:** En efecte,

|           |                          |                                    |
|-----------|--------------------------|------------------------------------|
| $d(P, R)$ | $=  R - P $              | definició de distància             |
|           | $=  (R - Q) + (Q - P) $  | lleis d'addició                    |
|           | $\leq  R - Q  +  Q - P $ | desigualtat triangular de la norma |
|           | $= d(P, Q) + d(Q, R),$   | definició de distància             |

i això prova l'enunciat.  $\square$

**E.2.8.** Proveu que la desigualtat triangular de la distància implica (i, per tant, és equivalent a) la desigualtat triangular de la norma.

**E.2.9.** En la desigualtat triangular de la distància val la igualtat si i només si  $P = Q$ , o  $Q = R$ , o  $P, Q$  i  $R$  són tres punts alineats diferents tals que  $\sigma(P, Q, R) > 1$ .

**E.2.10.** Si  $P, Q$  i  $R$  són punts qualssevol,

$$d(P, Q) \geq |d(P, R) - d(Q, R)|.$$

A l'exercici que segueix,  $[P, Q]$  denota el *segment d'extrems*  $P$  i  $Q$ , això és, el conjunt de punts de la forma  $P + \lambda(Q - P)$ , on  $\lambda \in [0, 1]$ .

**E.2.11.** Si  $P$  i  $Q$  són punts, proveu que  $X \in [P, Q]$  si i només si  $d(P, X) + d(X, Q) = d(P, Q)$ .

**E.2.12.** Suposem, amb les notacions de l'exercici anterior, que  $P \neq Q$ . Mostreu que si  $R$  és un punt alineat amb  $P$  i  $Q$ , llavors

$$\sigma(P, Q, R) = \begin{cases} d(P, R)/d(P, Q) & \text{si } P \notin [Q, R] \\ -d(P, R)/d(P, Q) & \text{si } P \in [Q, R]. \end{cases}$$

**2.6 Remarca.** Si  $E$  és un espai vectorial real, una aplicació  $e \mapsto |e|$  de  $E$  a  $\mathbb{R}$  es diu que és una norma si:

- 1)  $|e| \geq 0$  per a tot  $e \in E$ ;
- 2)  $|e| = 0$  si i només si  $e = 0$ ;
- 3)  $|\lambda e| = |\lambda| |e|$  per a tot  $\lambda \in \mathbb{R}$  i tot  $e \in E$ ; i
- 4)  $|e_1 + e_2| \leq |e_1| + |e_2|$ .

Així, doncs, a l'espai vectorial  $V$  associat a un espai euclidià, la longitud és una norma (vegeu E.2.2, E.2.3 i el corollari 2.2).

Per altra banda, una distància  $d$  en un conjunt  $X$  és una aplicació  $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  que compleix, qualssevol que siguin  $x, x', x'' \in X$ :

- 1)  $d(x, x') = d(x', x)$ ;
- 2)  $d(x, x') \geq 0$ ;
- 3)  $d(x, x') = 0$  si i només si  $x = x'$ ; i
- 4)  $d(x, x'') \leq d(x, x') + d(x', x'')$ .

Així, doncs, la distància entre punts d'un espai euclidià és una distància (vegeu E.2.5 i el corollari 2.5).

### Càlculs en coordenades

Si  $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$  és una base de  $V$ , posarem

$$g_{ij} = g(e_i, e_j) = e_i \cdot e_j \quad [2.5]$$

i direm que  $G = (g_{ij})$  és la matriu de la mètrica  $g$  respecte de la base  $\mathbf{e}$ . Notem que en notació matricial podem escriure

$$G = \mathbf{e}^T \cdot \mathbf{e} \quad [2.5']$$

Siguin ara  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  i  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$  les components dels vectors  $x$  i  $y$  respecte de  $\mathbf{e}$ , de forma que  $x = \mathbf{e}\mathbf{x}^T$  i  $y = \mathbf{e}\mathbf{y}^T$ . Llavors, fixant-nos que també podem escriure  $x = \mathbf{x}\mathbf{e}^T$ , tenim  $x \cdot y = (\mathbf{x}\mathbf{e}^T) \cdot (\mathbf{e}\mathbf{y}^T)$  i, per la bilinealitat del producte escalar,

$$x \cdot y = \mathbf{x}G\mathbf{y}^T. \quad [2.6]$$

En particular,

$$|x|^2 = xGx^T. \quad [2.6']$$

Sigui  $\mathbf{e}'$  una altra base de  $V$  i  $G'$  la matriu de la mètrica respecte de  $\mathbf{e}'$ . Si  $A$  és la matriu de  $\mathbf{e}'$  respecte de  $\mathbf{e}$ , llavors  $\mathbf{e}' = \mathbf{e}A$  i, per tant,

$$G' = \mathbf{e}'^T \cdot \mathbf{e}' = (A^T \mathbf{e}^T) \cdot (\mathbf{e}A) = A^T G A,$$

on en la darrera igualtat hem usat la bilinealitat del producte escalar. Així, doncs, l'expressió de  $G'$  en termes de  $G$  i  $A$  és

$$G' = A^T G A \quad [2.7]$$

**2.7 Remarca.** Sigui  $V$  un  $K$ -espai vectorial i  $g: V \times V \rightarrow K$  una aplicació bilineal arbitrària (el cos  $K$  també arbitrari). Si definim la matriu  $G = (g_{ij})$  de  $g$  respecte d'una base  $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$  de manera que  $g_{ij} = g(e_i, e_j)$  (compareu amb [2.5]), les fórmules [2.6] i [2.7], així com les seves demostracions, són també vàlides.

**E.2.13.** (Seguim amb les notacions de la remarca anterior) Fixada una base  $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$  de  $V$ , proveu que  $g \mapsto G = (g_{ij})$ ,  $g_{ij} = g(e_i, e_j)$ , estableix un isomorfisme entre l'espai vectorial d'aplicacions bilineals  $g: V \times V \rightarrow K$  i l'espai vectorial  $\mathcal{M}_n(K)$  de les matrius quadrades  $G$  d'ordre  $n$  amb coeficients de  $K$ . Mostreu també que  $g$  és simètrica si i només si  $G$  és una matriu simètrica.

### Bases ortonormals i matrius ortogonals

Direm que la base  $\mathbf{e}$  és *ortonormal* quan  $G = I_n$ , és a dir, quan els vectors  $e_i$  són unitaris i dos a dos ortogonals:

$$e_i \cdot e_j = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j. \end{cases}$$

Per exemple, els vectors  $\epsilon_1 = (1, 0, \dots, 0)$ ,  $\epsilon_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$ , ...,  $\epsilon_n = (0, 0, \dots, 1)$  són una base ortonormal de  $\mathbb{R}^n$ . Més endavant (proposició 2.12) estudiarem un procediment per obtenir una base ortonormal a partir d'una base qualsevol de  $V$ .

En el cas que  $u_1, \dots, u_n$  sigui una base ortonormal de  $V$ , la fórmula [2.6] s'especialitza en la relació

$$(x_1 u_1 + \dots + x_n u_n) \cdot (y_1 u_1 + \dots + y_n u_n) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n. \quad [2.8]$$

Suposem que  $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$  i  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$  són bases de  $V$ . Sigui  $A$  la matriu de  $\mathbf{u}$  respecte de  $\mathbf{e}$ , és a dir,  $\mathbf{u} = \mathbf{e}A$ , i sigui  $G$  la matriu de la mètrica respecte de  $\mathbf{e}$ . Llavors sabem que  $A^T G A$  és la matriu de la mètrica respecte de la base  $\mathbf{u}$  (vegeu [2.7]). Obtenim així que  $\mathbf{u}$  és una base ortonormal de  $V$  si i només si

$$A^T G A = I_n. \quad [2.9]$$

En particular resulta que si  $\mathbf{e}$  és una base ortonormal, llavors  $\mathbf{u}$  és ortonormal si i només si

$$A^T A = I_n, \quad [2.9']$$

és a dir, si i només si  $A$  és invertible i  $A^{-1} = A^T$ . Les matrius que compleixen aquesta propietat s'anomenen *matrius ortogonals*. Si  $A$  és una matriu ortogonal, llavors  $\det(A)^2 = 1$ . Per tant  $\det(A) = \pm 1$ . Posarem  $O_n$  per denotar el conjunt de matrius ortogonals d'ordre  $n$  i  $SO_n$  per denotar el subconjunt de  $O_n$  format per les matrius ortogonals que tenen determinant 1. Remarquem que  $SO_1 = \{1\}$  i  $O_1 = \{\pm 1\}$ .

Si  $A$  i  $B$  són matrius ortogonals, llavors  $AB$  també ho és, ja que

$$(AB)^T(AB) = B^T A^T AB = B^T B = I_n.$$

Per altra banda, si  $A$  és ortogonal, llavors  $A^{-1}$  també ho és, ja que

$$(A^{-1})^T A^{-1} = (A^T)^{-1} A^{-1} = (A^{-1})^{-1} A^{-1} = AA^{-1} = I_n.$$

Atès que  $I_n$  és clarament ortogonal, tenim que  $O_n$  és un grup amb el producte de matrius. Direm que  $O_n$  és el *grup ortogonal* d'ordre  $n$ .

De les propietats dels determinants es dedueix fàcilment que  $SO_n$  és un subgrup de  $O_n$ : és clar que  $I_n \in SO_n$ , i si  $A, B \in SO_n$ , llavors  $\det(AB) = \det(A)\det(B) = 1$  i  $\det(A^{-1}) = 1/\det(A) = 1$ , d'on resulta que  $A^{-1}, AB \in SO_n$ . Direm que  $SO_n$  és el *grup ortogonal especial* d'ordre  $n$ .

La matriu  $J_n = \text{diag}(1, \dots, 1, -1)$  és ortogonal i  $\det(J_n) = -1$ . En resulta que  $J_n \cdot SO_n = \{J_n A \mid A \in SO_n\}$  és el subconjunt de  $O_n$  format per les matrius ortogonals el determinant de les quals és  $-1$ . Així doncs  $O_n$  és la unió disjunta de  $SO_n$  i  $J_n \cdot SO_n$ . Remarquem que  $\{I_n, J_n\}$  és un subgrup de  $O_n$ , ja que  $J_n^2 = I_n$ .

**E.2.14.** Demostreu que  $SO_n$  és un subgrup normal de  $O_n$  i que el grup quocient  $O_n/SO_n$  és isomorf al grup  $\{I_n, J_n\}$ .

**E.2.15.** El grup  $O_2$ . Una matriu  $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$  és ortogonal si i només si  $a^2 + b^2 = 1$ ,  $ac + bd = 0$  i  $c^2 + d^2 = 1$ . Les solucions de l'equació  $a^2 + b^2 = 1$  estan en correspondència bijectiva amb els  $\alpha \in [0, 2\pi)$ , segons les relacions  $a = \cos(\alpha)$ ,  $b = \sin(\alpha)$ . L'equació  $ac + bd = 0$  ens dóna  $c = -\lambda b$  i  $d = \lambda a$ , on  $\lambda \in \mathbb{R}$ , i amb l'equació  $c^2 + d^2 = 1$  obtenim  $\lambda^2 = 1$ . Si prenem  $\lambda = 1$ , obtenim  $A = \rho(\alpha) \in SO_2$ , on

$$\rho(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix},$$

mentre que si prenem  $\lambda = -1$ , obtenim  $A = \rho(\alpha)J \in SO_2 \cdot J$ , on  $J = J_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ . Això determina l'estructura de  $O_2$ , atès que  $\rho(\alpha)\rho(\beta) = \rho(\alpha + \beta)$ , on la suma  $\alpha + \beta$  s'ha d'efectuar mòdul  $2\pi$ , i que  $J\rho(\alpha) = \rho(\bar{\alpha})J$ , on posem  $\bar{\alpha} = 2\pi - \alpha$  si  $\alpha > 0$  i  $\bar{0} = 0$ . En particular, resulta que  $SO_2$  és un grup commutatiu.



### Angles

Com que  $\cos(x)$  és un funció estrictament decreixent en l'interval  $[0, \pi]$ , amb valor màxim  $1 = \cos(0)$  i valor mínim  $-1 = \cos(\pi)$ , les desigualtats [2.2] ens mostren que si  $v$  i  $w$  són dos vectors no nuls, llavors existeix un únic nombre real  $\alpha \in [0, \pi]$  tal que

$$\cos(\alpha) = \frac{v \cdot w}{|v||w|}. \quad [2.10]$$

Direm que  $\alpha$  és l'*angle* (expressat en radians) determinat pels vectors  $v$  i  $w$ , i posarem  $\alpha(v, w)$ , o  $\widehat{vw}$ , per denotar-lo. Per exemple, l'angle  $\alpha$  entre els vectors  $(a_1, \dots, a_n)$  i  $(b_1, \dots, b_n)$  de  $\mathbb{R}^n$  és donat per la fórmula

$$\cos(\alpha) = \frac{a_1 b_1 + \dots + a_n b_n}{\sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2} \sqrt{b_1^2 + \dots + b_n^2}}.$$

L'expressió d'un angle en graus sexagesimals es farà amb la convenció habitual que  $180^\circ = \pi$  rad. Així, si  $\alpha$  és l'angle entre els vectors  $(1, 1, -2)$  i  $(2, -1, 1)$  de  $\mathbb{R}^3$ , llavors  $\cos \alpha = -1/6$  i, per tant,  $\alpha = 1,7382444$  rad  $= 99^\circ 35' 38,64''$ .

Fixem-nos que

$$\alpha(v, w) = \alpha(w, v), \quad [2.11]$$

per la simetria del producte escalar. També és immediat que si  $\lambda > 0$ , llavors

$$\alpha(\lambda v, w) = \alpha(v, w). \quad [2.12]$$

**E.2.16.** Siguin  $u$  i  $v$  vectors linealment independents i suposem que  $|u| = |v|$ . Demostreu que

$$\alpha(u, u+v) = \alpha(u+v, v) \text{ i } \alpha(u, u-v) = \alpha(v-u, v).$$

**E.2.17.** Donats vectors  $v$  i  $w$  no nuls, demostreu que  $\alpha(-v, w) = \pi - \alpha(v, w)$  (direm que els angles  $\alpha(-v, w)$  i  $\alpha(v, w)$  són *suplementaris*).

**E.2.18.** Donats vectors  $v$  i  $w$  no nuls, demostreu que  $\alpha(v, w) = 0$  (respectivament  $\alpha(v, w) = \pi$ ) si i només si existeix un nombre real  $\lambda > 0$  ( $\lambda < 0$ ) tal que  $w = \lambda v$ . Comproveu també que  $\alpha(v, w) = \pi/2$  si i només si  $v \cdot w = 0$  (és a dir, si i només si  $v$  i  $w$  són perpendiculars).

**2.8 Proposició** (Additivitat dels angles). *Siguin  $u, v \in V$  vectors linealment independents,  $s$  i  $t$  nombres reals positius, i  $w = su + tv$ . Siguin  $\alpha = \alpha(u, w)$ ,  $\beta = \alpha(w, v)$  i  $\gamma = \alpha(u, v)$ . Llavors  $\gamma = \alpha + \beta$  (figura 2.3).*

**Prova:** Com que  $u$  i  $w$  d'una banda, i  $v$  i  $w$  de l'altra, són linealment independents, tenim  $\alpha, \beta, \gamma \in (0, \pi)$  i, en particular,  $0 < \alpha + \beta < 2\pi$ . D'això en segueix que per demostrar la igualtat  $\gamma = \alpha + \beta$  és suficient comprovar que  $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\gamma)$  i  $\sin(\alpha + \beta) = \sin(\gamma)$ .

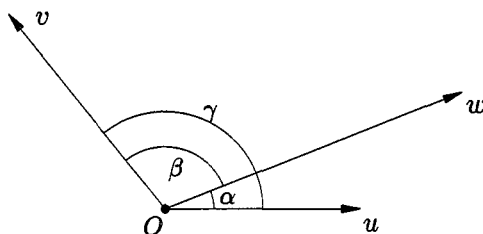


Figura 2.3: Additivitat dels angles

Per demostrar aquestes igualtats, notem que podem suposar que  $u$  i  $v$  són unitaris  $[\diamond]$ , amb la qual cosa tenim, posant  $\ell = |w|$ ,

$$u \cdot v = \cos(\gamma), \quad \ell \cos(\alpha) = s + t \cos(\gamma), \quad \ell \cos(\beta) = s \cos(\gamma) + t, \quad \text{i} \\ \ell^2 = s^2 + t^2 + 2st \cos(\gamma).$$

D'aquestes igualtats se n'extreu, tenint en compte que  $\sin(x) = +\sqrt{1 - \cos^2(x)}$  per a tot nombre real  $x \in [0, \pi]$ , que

$$\ell \sin(\alpha) = t \sin(\gamma), \quad \ell \sin(\beta) = s \sin(\gamma).$$

Ara la fórmula  $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) - \sin(\alpha) \sin(\beta)$  i les relacions anteriors ens donen sense dificultats que

$$\ell^2 \cos(\alpha + \beta) = (s + t \cos(\gamma))(s \cos(\gamma) + t) - st \sin^2(\gamma) \\ = \ell^2 \cos(\gamma),$$

d'on  $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\gamma)$ . Que  $\sin(\alpha + \beta) = \sin(\gamma)$  s'obté per un càlcul similar, usant la fórmula  $\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) + \cos(\alpha) \sin(\beta)$   $[\diamond]$ .  $\square$

**E.2.19.** La conclusió de la proposició 2.8 és també vàlida quan  $u$  i  $v$  són linealment dependents. Comproveu, mitjançant l'exercici E.2.18, que  $\gamma = 0$  implica  $\alpha = \beta = 0$  i, mitjançant E.2.18, E.2.17 i les fórmules [2.12] i [2.11], que  $\gamma = \pi$  implica  $\alpha + \beta = \pi$ . Notem que en aquest darrer cas cal suposar, a més, que  $w \neq 0$ , ja que totes les hipòtesis són insuficients per garantir aquesta condició.

Si  $P, Q$  i  $R$  són punts,  $Q, R \neq P$ , posarem  $\widehat{QPR}$  per denotar l'angle  $\alpha(Q - P, R - P)$  determinat pels vectors  $Q - P$  i  $R - P$ . Per [2.11] tenim que  $\widehat{QPR} = \widehat{RPQ}$ .

**E.2.20.** Siguin  $A, B$  i  $C$  tres punts diferents i posem  $\alpha = \widehat{BAC}$ ,  $\beta = \widehat{ABC}$  i  $\gamma = \widehat{BCA}$ . Demostreu, usant la propietat d'additivitat dels angles, que  $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ .

El resultat de l'exercici anterior l'enunciarem dient que la suma dels angles de tot triangle és  $\pi$ . El punt de vista aquí és que una terna  $\{A, B, C\}$  no ordenada de punts diferents determina un *triangle*, que el denotarem  $T = \triangle ABC$ , o simplement  $ABC$  si no hi ha perill de confondre'l amb la varietat lineal determinada pels punts  $A$ ,  $B$  i  $C$ . Els *vèrtexs* de  $T$  són els punts  $A$ ,  $B$  i  $C$ ; els *costats* de  $T$  són els segments  $[BC]$ ,  $[AC]$  i  $[BA]$ , dels quals direm que són *oposats* als vèrtexs  $A$ ,  $B$  i  $C$ , respectivament; els *angles* de  $T$  són els angles  $\alpha$ ,  $\beta$  i  $\gamma$  definits com a l'exercici anterior i sovint posarem  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$  i  $\hat{C}$  per denotar-los; les *longituds* dels costats de  $T$  són els nombres  $a = d(B, C)$ ,  $b = d(A, C)$  i  $c = d(A, B)$ .

Un triangle  $ABC$  es diu que és *rectangle* si té un angle igual a  $\pi/2$  (*angle recte*). Si suposem que l'angle recte és  $\hat{A}$ , llavors  $\hat{B} + \hat{C} = \pi/2$  (direm que  $\hat{B}$  i  $\hat{C}$  són *complementaris*), la qual cosa en particular ens diu que els angles  $\hat{B}$  i  $\hat{C}$  són *aguts* (és a dir, inferiors a  $\pi/2$ ). Direm que  $a = d(B, C)$  és la *hipotenusa* del triangle rectangle i que  $b = d(A, C)$  i  $c = d(A, B)$  són els *catets*. Llavors, el corollari 2.4 ens diu que  $a^2 = b^2 + c^2$ , que és la forma més familiar del *teorema de Pitàgores* (vegeu E.0.6).

**E.2.21.** Comproveu que el punt mitjà de la hipotenusa d'un triangle rectangle equidista dels vèrtexs. Recíprocament, si en un triangle el punt mitjà d'un costat equidista dels tres vèrtexs, l'angle oposat a l'esmentat costat és recte. Remarqueu que si  $u$  i  $v$  són vectors, llavors  $(u + v) \cdot (v - u) = 0$  si i només si  $|u|^2 = |v|^2$ .

**E.2.22.** (Hiperplà *bisector* de dos vectors) Donats dos vectors linealment independents  $u$  i  $v$ , demostreu que els vectors  $x \neq 0$  tals que  $\alpha(x, u) = \alpha(x, v)$ , conjuntament amb  $x = 0$ , formen un hiperplà de  $V$ .

## 2.2 Perpendicularitat

Sigui  $A$  un espai euclidià,  $V$  el seu espai vectorial associat i  $g$  la seva mètrica. D'acord amb el que ja hem avançat a l'exercici E.2.18, direm que dos vectors  $v$  i  $w$  són *perpendiculars* o *ortogonals* si  $v \cdot w = 0$ . La relació de perpendicularitat és, doncs, simètrica, atès que el producte escalar és simètric. Remarquem també que  $0$  és perpendicular a qualsevol vector i que dos vectors no nuls són perpendiculars si i només si l'angle que determinen és  $\pi/2$ .

**E.2.23.** Siguin  $v_1, \dots, v_r$  vectors no nuls tals que  $v_i \cdot v_j = 0$  quan  $i \neq j$ . Demostreu que  $v_1, \dots, v_r$  són linealment independents.

Segons la fórmula [2.6], dos vectors  $x$  i  $y$  són ortogonals si i només si

$$xGy^T = 0, \quad [2.13]$$

on  $G$ ,  $x$  i  $y$  són, respectivament, la matriu de la mètrica  $g$  i els vectors de coordenades de  $x$  i  $y$  respecte d'una base donada de  $V$ .

Si  $X$  i  $Y$  són dos subconjunts de  $V$ , direm que són *ortogonals* si  $x \cdot y = 0$  qualssevol que siguin  $x \in X$  i  $y \in Y$ , és a dir, si i només si tot vector de  $X$  és perpendicular a tot vector de  $Y$ .

**E.2.24.** Donats  $v_1, \dots, v_r, w_1, \dots, w_s \in V$ , comproveu que  $\langle v_1, \dots, v_r \rangle$  i  $\langle w_1, \dots, w_s \rangle$  són ortogonals si i només si  $v_i \cdot w_j = g(v_i, w_j) = 0$  per  $1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq s$ .

**E.2.25.** Si  $X, Y \subseteq V$  són ortogonals, també ho són els subespais vectorials  $\langle X \rangle$  i  $\langle Y \rangle$  generats per  $X$  i  $Y$  (donat  $X \subseteq V$ , posem  $\langle X \rangle$  per denotar el mínim subespai vectorial que conté  $X$ , és a dir, el conjunt de totes les combinacions lineals finites d'elements de  $X$ ).

### Ortogonal d'un subespai

Donat  $U \subseteq V$ , posarem  $U^\perp$  per denotar el conjunt de vectors  $x \in V$  ortogonals a  $U$ , és a dir,

$$U^\perp = \{x \in V \mid u \cdot x = 0 \text{ per a tot } u \in U\}.$$

**E.2.26.** Demostreu que  $U^\perp$  és un subespai vectorial de  $V$ , qualsevol que sigui  $U \subseteq V$ , i que  $U^\perp = \langle U^\perp \rangle$ .

**E.2.27.** Sigui  $W$  un subespai vectorial de  $V$  i  $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_r)$  un sistema de generadors de  $W$ . Sigui  $B$  la matriu de  $\mathbf{w}$  respecte d'una base  $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$  de  $V$  (per tant,  $\mathbf{w} = \mathbf{e}B$ , o  $\mathbf{w}^T = B^T \mathbf{e}^T$ ). Com que la relació  $\mathbf{w}^T \cdot x = 0$  expressa que el vector  $x$  és ortogonal a  $W$ , ja que equival a  $w_i \cdot x = 0$  ( $1 \leq i \leq r$ ),  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  és el vector de components d'un vector  $x \in W^\perp$  si i només si satisfà el sistema de  $r$  equacions lineals homogènies

$$B^T G \mathbf{x}^T = 0,$$

on  $G$  és la matriu de la mètrica respecte de  $\mathbf{e}$ . Fixem-nos que  $\mathbf{w}^T x = (B^T \mathbf{e}^T) \cdot (\mathbf{e} x^T) = B^T G \mathbf{x}^T$ .

**2.9 Teorema.** Per a tot subespai vectorial  $W$  de  $V$  es compleix que  $V = W \oplus W^\perp$ . En particular,  $\dim(W^\perp) = n - \dim(W)$ .

**Prova:** Sigui  $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_r)$  una base de  $W$ . Considerem l'aplicació  $f: V \rightarrow \mathbb{R}^r$  tal que  $x \mapsto (w_1 \cdot x, \dots, w_r \cdot x)$ . L'aplicació  $f$  és lineal, pel fet que el producte escalar és bilineal, i és clar que  $\ker(f) = W^\perp$ . Així, tenim que  $\dim(W^\perp) = \dim(\ker(f)) = \dim(V) - \dim(\text{Im}(f)) \geq n - r$ , atès que  $\dim(\text{Im}(f)) \leq \dim(\mathbb{R}^r) = r$ . Per altra banda, tenim  $W \cap W^\perp = \{0\}$  (una conseqüència immediata del fet que producte escalar és definit positiu  $[\diamond]$ ) i, per tant,  $\dim(W + W^\perp) = \dim(W) + \dim(W^\perp) \geq r + (n - r) = n$ . Això prova que  $W + W^\perp = V$ , la qual cosa, junt amb la relació  $W \cap W^\perp = \{0\}$ , estableix el que volíem.  $\square$

**E.2.28.** Demostreu que  $W^{\perp\perp} = W$  per a tot subespai  $W$  de  $V$ . Demostreu també que si  $W_1$  i  $W_2$  són subespais de  $V$ , llavors  $W_1 \subseteq W_2$  si i només si  $W_2^\perp \subseteq W_1^\perp$ .

### Varietats lineals ortogonals

Si  $L$  és una varietat lineal i  $Q$  és un punt, posarem

$$L_Q^\perp = Q + W(L)^\perp \quad [2.14]$$

i direm que  $L_Q^\perp$  és la *varietat perpendicular a  $L$  per  $Q$* . Així, tenim que  $W(L_Q^\perp) = W(L)^\perp$  i  $\dim(L_Q^\perp) = n - \dim(L)$ . Observem que quan  $L$  és fixa i  $Q$  variable, les varietats perpendiculars  $L_Q^\perp$  són paral·leles entre elles.

**E.2.29.** Proveu que  $L$  és la varietat perpendicular a  $L_Q^\perp$  per un punt qualsevol de  $L$ .

Siguin  $L$  i  $L'$  dues varietats lineals de l'espai euclidià i posem  $W = W(L)$  i  $W' = W(L')$ . Direm que  $L'$  és *perpendicular* o *ortogonal* a  $L$  si  $W^\perp \subseteq W'$  o  $W^\perp \supseteq W'$ . Si  $P' \in L'$ , la condició  $W^\perp \subseteq W'$  equival a  $L_{P'}^\perp \subseteq L'$  i la condició  $W^\perp \supseteq W'$  equival a  $L_{P'}^\perp \supseteq L'$ . Així, doncs, una varietat  $L'$  és perpendicular a  $L$  si conté o està continguda en la varietat  $L_{P'}^\perp$  per a un cert punt  $P' \in L'$ .

**E.2.30.** Useu E.2.28 per demostrar que la perpendicularitat de varietats lineals és simètrica, és a dir, que  $L'$  és perpendicular a  $L$  si i només si  $L$  és perpendicular a  $L'$ .

### Projecció ortogonal

Donat un subespai vectorial  $W$  de  $V$ , pel teorema 2.9 hi ha una única aplicació lineal  $\pi_W: V \rightarrow W$  tal que  $\pi_W(x) = x$  si  $x \in W$  i  $\pi_W(x) = 0$  si  $x \in W^\perp$ . Si  $x = x' + x''$ , amb  $x' \in W$  i  $x'' \in W^\perp$ , llavors  $\pi_W(x) = x'$ . Direm que  $\pi_W$  és la *projecció ortogonal* de  $V$  sobre  $W$ .

**E.2.31.** Proveu que  $\pi_W(x)$  és l'únic vector  $x' \in W$  tal que  $x - x' \in W^\perp$ .

**E.2.32.** Useu el teorema de Pitàgores (corol·lari 2.4) per concloure que  $|\pi_W(x)| = |x|$  si i només si  $x \in W$ .

### Càlcul efectiu en base ortonormal

El càlcul de la projecció ortogonal és especialment simple quan es coneix una *base ortonormal* de  $W$ .

**2.10 Proposició.** Si  $(u_1, \dots, u_r)$  és una base ortonormal de  $W$ , llavors

$$\pi_W(x) = (x \cdot u_1)u_1 + \dots + (x \cdot u_r)u_r \quad [2.15]$$

per a tot vector  $x \in V$ .

**Prova:** En efecte, posem  $\pi(x) \in W$  per denotar l'expressió de la dreta. Llavors és clar, per definició de base ortonormal, que  $u_j \cdot \pi(x) = u_j \cdot x$  per a tot  $x \in V$ . Per tant,  $u_j \cdot (x - \pi(x)) = 0$  ( $1 \leq j \leq r$ ). Ara bé, això ens diu que  $x - \pi(x) \in W^\perp$  i, per tant (E.2.31), que  $\pi(x) = \pi_W(x)$ .  $\square$

**Exemple.** Fem  $W = V$  en la fórmula [2.15] i sigui  $(u_1, \dots, u_n)$  una base ortonormal de  $V$ . Com que  $\pi_V = Id$ , per a tot  $x \in V$  tenim

$$x = \sum_{i=1}^n (x \cdot u_i) u_i \quad [2.15']$$

**Exemple.** Apliquem ara la fórmula [2.15] a un subespai vectorial  $W$  de dimensió 1. Si  $w$  és un vector no nul de  $W$  i posem  $u = w/|w|$  (de manera que  $u$  és una base ortonormal de  $W$ ), aleshores

$$\pi_w(x) = (x \cdot u)u = (x \cdot w) \frac{w}{|w|^2} \quad \text{i} \quad |\pi_w(x)| = \frac{|x \cdot w|}{|w|}, \quad [2.15'']$$

on hem posat  $\pi_w = \pi_{\langle w \rangle}$ . El lector pot trobar instructiu comparar aquestes fórmules amb les que hem discutit heurísticament a la secció «Angles i producte escalar» de la introducció a aquest capítol.

### Càlcul efectiu en base no ortonormal

Vegem ara com podem calcular la projecció ortogonal sobre un subespai vectorial  $W$  de  $V$  del qual coneixem una base  $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_r)$ , no necessàriament ortonormal. Sigui  $x$  un vector i  $x' = \pi_W(x)$ . Posem  $x' = t_1 e_1 + \dots + t_r e_r = \mathbf{t} \mathbf{e}^T$  (on  $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_r) \in \mathbb{R}^r$ ). Es tracta de determinar  $\mathbf{t}$  amb la condició que  $x - x' \in W^\perp$ , és a dir, que  $(x - x') \cdot \mathbf{e} = 0$ . Aquesta relació és equivalent a  $x \cdot \mathbf{e} = x' \cdot \mathbf{e} = \mathbf{t} (\mathbf{e}^T \cdot \mathbf{e})$ . Com que  $x \cdot \mathbf{e} = \mathbf{t} (\mathbf{e}^T \cdot \mathbf{e})$  equival a un sistema de  $r$  equacions lineals en  $t_1, \dots, t_r$  que té exactament una solució (és a dir, és un sistema de Cramer compatible i determinat), veiem que  $\det(\mathbf{e}^T \cdot \mathbf{e}) \neq 0$  i així

$$\mathbf{t} = (x \cdot \mathbf{e})(\mathbf{e}^T \cdot \mathbf{e})^{-1}. \quad [2.16]$$

Si  $\mathbf{e}$  és ortonormal,  $\mathbf{e}^T \cdot \mathbf{e} = I_r$  i el resultat ens dona la fórmula [2.15] de nou. Per altra banda, la fórmula coincideix amb [2.15''] quan  $r = 1$ .

Si  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$  és una base arbitrària de  $V$ ,  $G = \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{u}$  la matriu de la mètrica i  $M$  la matriu de  $\mathbf{e}$  respecte de la base  $\mathbf{u}$ , llavors  $\mathbf{e}^T \cdot \mathbf{e} = M^T G M$  i  $x \cdot \mathbf{e} = \mathbf{x} G M$ , on  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  són les components de  $x$  respecte de la base  $\mathbf{u}$  (per tant,  $x = \mathbf{x} \mathbf{u}^T$ ). En resulta que

$$\mathbf{t} = (\mathbf{x} G M)(M^T G M)^{-1}. \quad [2.16']$$

Parem esment en que  $M$  és una matriu  $r \times n$  i que, per tant, no té sentit considerar  $M^{-1}$  quan  $r < n$ . Si  $r = n$ , llavors  $M$  és invertible i la fórmula es pot simplificar fins obtenir  $\mathbf{t} = \mathbf{x}(M^T)^{-1}$ , o bé  $\mathbf{t}^T = M^{-1} \mathbf{x}^T$ , o bé  $\mathbf{x}^T = M \mathbf{t}^T$ , que no és més que la relació de canvi de components de la base  $\mathbf{e}$  a la base  $\mathbf{u}$ .

**2.11 Remarca.** Hem vist que si  $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_r)$  són vectors linealment independents de  $V$ , llavors  $\det(\mathbf{e}^T \cdot \mathbf{e}) \neq 0$ . A la secció 2.3 veurem que de fet  $\det(\mathbf{e}^T \cdot \mathbf{e}) > 0$ .

### Projecció ortogonal sobre una varietat lineal

Sigui  $L$  una varietat lineal i  $Q$  un punt. Posem  $W = W(L)$  i fixem un punt arbitrari  $P \in L$ . Els punts d'intersecció  $X$  de  $L_Q^\perp$  amb  $L$  són els que compleixen  $X = Q + w' = P + w$ , amb  $w \in W$ ,  $w' \in W^\perp$ . Com que l'única solució és  $w = \pi_W(Q - P)$  i  $w' = w - (Q - P)$ , resulta que existeix un únic punt d'intersecció i que aquest punt és  $Q' = P + \pi_W(Q - P)$ . Fixem-nos que, en particular,  $P + \pi_W(Q - P)$  és independent del punt  $P \in L$ . Direm que  $Q'$  és la *projecció ortogonal de  $Q$  sobre  $L$*  i posarem  $\pi_L(Q)$  per denotar-lo. Per definició, doncs, tenim

$$\pi_L(Q) = P + \pi_W(Q - P) \quad [2.17]$$

per a qualsevol punt  $P$  de  $L$ . Com que  $\pi_W$  és lineal,  $\pi_L: \mathbb{A} \rightarrow L$  és una aplicació afí.

**E.2.33.** Proveu que  $\pi_L(X) = \pi_L(Q)$  equival a  $X \in L_Q^\perp$ .

### Ortonormalització de Gram-Schmidt

La demostració de la proposició que segueix ens proporciona un mètode constructiu (*mètode de Gram-Schmidt*) per construir una base ortonormal d'un espai a partir d'una base qualsevol.

**2.12 Proposició.** Si  $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$  és una base de  $V$ , existeix una única base ortonormal  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$  de  $V$  tal que

$$u_i \in \langle e_1, \dots, e_i \rangle \text{ i } e_i \cdot u_i > 0, \text{ per a } i = 1, \dots, n. \quad [2.18]$$

**Prova:** Com que els únics vectors unitaris de  $\langle e_1 \rangle$  són  $\pm e_1/|e_1|$ , és clar que hem de prendre  $u_1 = e_1/|e_1|$ .

Suposem, doncs, que hem construït recursivament, per algun  $j \geq 1$ ,  $u_1, \dots, u_j$  que compleixen [2.18] per  $i = 1, \dots, j$ , i que hem provat que són els únics que la compleixen. Com que no ens resta res a demostrar si  $j = n$ , podem suposar que  $j < n$ . Notem que la primera part de [2.18] implica que  $\langle u_1, \dots, u_j \rangle = \langle e_1, \dots, e_j \rangle$ .

Intentem veure quines possibilitats tenim per escollir  $u_{j+1}$ . En primer lloc, ha de ser  $u_{j+1} = \lambda e_{j+1} + x$ , amb  $\lambda \neq 0$  i  $x \in \langle e_1, \dots, e_j \rangle$ . Si posem  $\pi_j$  per denotar la projecció ortogonal sobre  $\langle e_1, \dots, e_j \rangle = \langle u_1, \dots, u_j \rangle$ , llavors  $\pi_j(u_{j+1}) = 0$  i  $\pi_j(x) = x$ , de manera que, necessàriament,  $x = -\lambda \pi_j(e_{j+1})$ . Per tant,  $u_{j+1} = \lambda v_{j+1}$ , on  $v_{j+1} = e_{j+1} - \pi_j(e_{j+1})$ . Com que  $u_{j+1}$  ha de ser unitari, necessàriament hem de prendre  $\lambda = \pm |v_{j+1}|^{-1}$ . Notem que això és possible, ja que  $e_{j+1} \notin \langle e_1, \dots, e_j \rangle$  i, com a conseqüència,  $v_{j+1} \neq 0$ . Finalment, és clar que la condició  $u_{j+1} \cdot e_{j+1} > 0$  implica que l'única possibilitat és  $u_{j+1} = v_{j+1}/|v_{j+1}|$ . Així, doncs, hi ha un únic vector  $u_{j+1}$  tal que  $u_1, \dots, u_j, u_{j+1}$  compleixen [2.18] per  $i = 1, \dots, j, j+1$ . Com que aquest procés es pot iterar, la prova queda completa per inducció.  $\square$

**Remarca.** Sigui  $\mathbf{u}$  una base ortonormal de  $V$  i considerem l'isomorfisme  $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow V$  tal que  $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{u}\mathbf{x}^T$ . Tenint en compte l'expressió del producte escalar de  $V$  en una base ortonormal (fórmula [2.8]) i el producte escalar de  $\mathbb{R}^n$  (E.2.1), veiem que es compleix la relació

$$\varphi(\mathbf{x}) \cdot \varphi(\mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y},$$

qualssevol que siguin  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ . Més generalment, la fórmula [2.8] implica que si  $g$  i  $g'$  són mètriques de dos espais reals  $V$  i  $V'$  de la mateixa dimensió, llavors existeix un isomorfisme  $\varphi: V \rightarrow V'$  tal que

$$g'(\varphi(x), \varphi(y)) = g(x, y) \quad [2.19]$$

qualssevol que siguin  $x, y \in V$ : és suficient prendre com  $\varphi$  l'aplicació lineal que transforma una base ortonormal de  $V$  respecte de  $g$  en una base ortonormal de  $V'$  respecte de  $g'$ . Aquest fet, l'enunciarem dient que  $\varphi$  és una *isometria* entre  $(V, g)$  i  $(V', g')$ . Per a cada dimensió  $n$  hi ha, doncs, una única mètrica llevat d'isometries.

### Producte escalar i equacions cartesianes

El producte escalar està estretament relacionat amb les equacions cartesianes d'una varietat lineal d'un espai euclidià. En aquest apartat, destinat a l'exploració d'aquestes relacions, exposarem primer el cas d'un hiperplà i després el cas general.

#### Equació d'un hiperplà

Sigui  $H$  un hiperplà. Com que  $W(H)^\perp$  és un espai vectorial de dimensió 1,  $W(H)^\perp = \langle a \rangle$ , on  $a$  és qualsevol vector no nul de  $W(H)^\perp$ . Si  $P \in H$ , la condició per tal que  $X \in H$  és que  $X - P \in W(H)$ , és a dir, que

$$a \cdot (X - P) = 0. \quad [*]$$

En una referència  $\mathcal{R} = [O, \mathbf{u}]$ , aquesta condició adopta la forma

$$\mathbf{a}G\mathbf{x}^T = \mathbf{a}G\mathbf{p}^T, \quad [2.20]$$

on  $\mathbf{a}$  són les components de  $a$  respecte de  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{x}$  les  $\mathcal{R}$ -coordenades de  $X$  i  $\mathbf{p}$  les  $\mathcal{R}$ -coordenades de  $P$ . Si ara posem  $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)$ , on  $\mathbf{b} = \mathbf{a}G$ , i  $\beta = b_1p_1 + \dots + b_np_n$ , la darrera equació adopta la forma

$$b_1x_1 + \dots + b_nx_n = \beta. \quad [2.20']$$

Hem obtingut així, a partir del vector  $a$  perpendicular a  $H$  i mitjançant el producte escalar, una equació cartesiana de  $H$  en la referència  $\mathcal{R}$ . Notem que si  $\mathcal{R}$  és *rectangular*,



és a dir, si  $\mathbf{u}$  és ortonormal, llavors  $G = I_n$  i  $\mathbf{b} = \mathbf{a}$ , amb la qual cosa l'equació de l'hiperplà s'escriu

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = \alpha, \quad [2.20'']$$

on  $\alpha = a_1p_1 + \cdots + a_np_n$ .

**E.2.34.** Suposem que  $b_1x_1 + \cdots + b_nx_n = \beta$  és l'equació d'un hiperplà  $H$  en una referència  $\mathcal{R} = [O, \mathbf{u}]$  de  $\mathbb{A}$ . Sigui  $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)$  i definim  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$  per la fórmula  $\mathbf{a} = \mathbf{b}G^{-1}$ , on  $G$  és la matriu de la mètrica en la referència  $\mathcal{R}$ . Proveu que el vector  $\mathbf{a} = \mathbf{u}\mathbf{a}^T = a_1\mathbf{u}_1 + \cdots + a_n\mathbf{u}_n$  és un vector perpendicular a  $H$ . Notem que en el cas que  $\mathcal{R}$  sigui rectangular, els mateixos coeficients  $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)$  són les  $\mathbf{u}$ -components d'un vector perpendicular a  $H$ .

**E.2.35.** *Hiperplà bisector de dos punts.* Donats dos punts diferents  $P$  i  $Q$ , demostreu que el conjunt de punts  $X$  tals que  $d(X, P) = d(X, Q)$  és l'hiperplà perpendicular a  $Q - P$  que passa pel punt mitjà del segment  $[P, Q]$ .

### Equacions d'una varietat lineal

Les consideracions que hem fet en l'apartat anterior s'estenen fàcilment al cas d'una varietat lineal  $L$  arbitrària.

Sigui  $W = W(L)$  l'espai director de  $L$  i escollim un punt  $P \in L$ . Sigui  $r = \dim(L)$  i posem  $s = n - r$ . Sigui  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_s)$  una base de  $W^\perp$  ( $\dim(W^\perp) = s$  pel teorema 2.9). D'aquesta manera es compleix que  $w \in W$  si i només si  $\mathbf{a}_i \cdot w = 0$  per  $i = 1, \dots, s$ , és a dir, si i només si  $\mathbf{a}^T \cdot w = 0$ . Si ara  $X$  és un punt qualsevol, la relació  $X \in L$  equival a  $X - P \in W$  i, per tant, a

$$\mathbf{a}^T \cdot (X - P) = 0, \quad [**]$$

que és l'anàloga per a  $L$  de la fórmula  $[*]$  del cas d'un hiperplà.

Vegem com s'expressa  $[**]$  en una referència  $\mathcal{R} = [O, \mathbf{u}]$ . Sigui  $G = \mathbf{u}^T \mathbf{u}$  la matriu de la mètrica i  $A$  la matriu dels vectors  $\mathbf{a}$  respecte de  $\mathbf{u}$ , de manera que  $\mathbf{a} = \mathbf{u}A$ . Posem  $\mathbf{x}$  i  $\mathbf{p}$  per denotar les  $\mathcal{R}$ -coordenades de  $X$  i de  $P$ , respectivament. Així  $X - P = \mathbf{u}(\mathbf{x}^T - \mathbf{p}^T)$  i l'equació  $[**]$  es tradueix en l'equació matricial

$$A^T G \mathbf{x}^T = A^T G \mathbf{p}^T. \quad [2.21]$$

Posem  $B = A^T G$  (és una matriu de tipus  $s \times n$ ) i  $\beta^T = B \mathbf{p}^T$ . Amb aquestes notacions, la darrera equació esdevé

$$B \mathbf{x}^T = \beta^T, \quad [2.21']$$

que és un sistema d'equacions cartesianes per la varietat  $L$  (de  $s$  equacions independents, per ser més exactes).

En el cas que  $\mathcal{R}$  sigui rectangular,  $B = A^T$  i el sistema  $[2.21']$  adopta la forma

$$A^T \mathbf{x}^T = \alpha^T, \quad [2.21'']$$

on  $\alpha^T = A^T \mathbf{p}^T$ .

**E.2.36.** Suposem que  $B\mathbf{x}^T = \beta^T$  és un sistema de  $s = n - r$  equacions cartesianes d'una varietat lineal  $L$  de dimensió  $r$  en una referència  $\mathcal{R} = [O, \mathbf{u}]$  de  $\mathbb{A}$  (suposem, doncs, que  $B$  és una matriu de tipus  $s \times n$ , de rang  $s$ , i que  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_s)$  és un vector fila de dimensió  $s$ ). Definim la matriu  $A$  per la fórmula  $A^T = BG^{-1}$ , on  $G$  és la matriu de la mètrica en la referència  $\mathcal{R}$ . Proveu que  $A$  és la matriu dels vectors d'una base de  $W(L)^\perp$  respecte de  $\mathbf{u}$ . En el cas que  $\mathcal{R}$  sigui rectangular, tenim simplement  $A = B^T$ .

### Distància entre varietats lineals

La *distància d'un punt  $P$  a un subconjunt no buit  $L \subseteq \mathbb{A}$* ,  $d(P, L)$ , es defineix com l'ímfim de les distàncies  $d(P, Q)$ , per  $Q \in L$ . Més generalment, la *distància entre dos subconjunts  $L, L' \subseteq \mathbb{A}$* ,  $d(L, L')$ , es defineix com l'ímfim de les distàncies  $d(P, Q)$ , per  $P \in L$  i  $Q \in L'$ .

En aquest apartat expressarem en termes geomètrics la distància  $d(L, L')$  en el cas que  $L$  i  $L'$  siguin varietats lineals. Trobarem, en particular, fórmules efectives per calcular-la.

**2.13 Proposició** (Distància d'un punt a una varietat lineal). *Sigui  $L$  una varietat lineal i  $P$  un punt. Llavors*

$$d(P, L) = d(P, \pi_L(P))$$

*i  $\pi_L(P)$  és l'únic punt de  $L$  que compleix aquesta igualtat.*

**Prova:** Sigui  $W = W(L)$  i  $Q \in L$  un punt qualsevol. Sigui  $P' = \pi_L(P)$ . Tenim  $P - Q = (P - P') + (P' - Q)$  i és clar que  $P' - Q \in W$  i  $P - P' \in W^\perp$ . Del teorema de Pitàgores (vegeu 2.4) i de la definició de distància entre punts, resulta que  $d(P, Q) > d(P, P')$  per a tot  $Q \in L$ ,  $Q \neq P'$ . Per tant,  $d(P, L) = d(P, P')$ , i és clar que  $P'$  és l'únic punt de  $L$  que compleix aquesta igualtat.  $\square$

**Exemple.** *Distància d'un punt a un hiperplà.* La distància  $d = d(Q, H)$  d'un punt  $Q$  a l'hiperplà  $H$  donat per l'equació  $[*]$ , pàg. 113, la proporciona la fórmula

$$d = \frac{|a \cdot (Q - P)|}{|a|} = |\pi_a(Q - P)|.$$

De fet, si posem  $Q'$  per denotar la projecció ortogonal de  $Q$  sobre  $H$ , llavors  $a \cdot (Q - P) = a \cdot (Q - Q') + a \cdot (Q' - P) = a \cdot (Q - Q')$ , ja que  $Q' - P \in W(H)$  és ortogonal al vector  $a$ , i prenent valors absoluts obtenim  $|a \cdot (Q - P)| = |a \cdot (Q - Q')| = |a|d$ , ja que  $Q - Q'$  i  $a$  són proporcionals i  $d = d(Q, Q')$ . En una referència rectangular l'equació de  $H$  és [2.20''] i

$$d = \frac{|\sum a_i(q_i - p_i)|}{\sqrt{\sum a_i^2}},$$

on  $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)$  són les coordenades de  $Q$ . Usant [2.20'] en lloc de [2.20''], és fàcil escriure una fórmula que ens doni  $d$  en qualsevol referència.

**E.2.37.** *Hiperplans bisectors de dos hiperplans.* Siguin  $H$  i  $H'$  dos hiperplans no paral·lels. Sigui  $a$  ( $a'$ ) un vector unitari perpendicular a  $H$  ( $H'$ ). Demostreu que el conjunt de punts que equidisten de  $H$  i  $H'$  és la unió de dos hiperplans. Demostreu també que aquests dos hiperplans contenen  $H \cap H'$  i que  $a + a'$  i  $a - a'$  en són sengles vectors perpendiculars (en particular, els dos hiperplans en qüestió són perpendiculars). Per altra banda, si  $H$  i  $H'$  són paral·lels, però diferents, els punts  $X$  tals que  $d(X, H) = d(X, H')$  formen un únic hiperplà.

Ara passem a estudiar la distància entre dues varietats lineals arbitràries en termes geomètrics.

**2.14 Proposició** (Distància entre dues varietats lineals). *Siguin  $L$  i  $L'$  dues varietats lineals i posem  $W = W(L)$  i  $W' = W(L')$  per denotar els seus espais directores. Sigui  $U = (W + W')^\perp$ . Llavors es compleix, qualssevol que siguin  $P \in L$  i  $P' \in L'$ , que*

$$d(L, L') = |\pi_U(P - P')|.$$

**Prova:** Observem primer que el vector  $\pi_U(P' - P)$  és constant mentre  $P \in L$  i  $P' \in L'$ . En efecte, si  $P, Q \in L$  i  $P', Q' \in L'$ , llavors  $Q = P + w$  i  $Q' = P' + w'$ , per a certs  $w \in W$  i  $w' \in W'$ . Per tant,  $Q' - Q = (P' - P) + w' - w$ . Com que  $w' - w \in W + W'$ , tenim  $\pi_U(w' - w) = 0$ , i d'això segueix que  $\pi_U(Q' - Q) = \pi_U(P' - P)$ .

En particular, tenim que la norma  $d = |\pi_U(P' - P)|$  és constant mentre  $P \in L$  i  $P' \in L'$ . Ara sabem que  $|P' - P| \geq |\pi_U(P' - P)|$ , siguin quins siguin els punts  $P$  i  $P'$ , i que val la igualtat si i només si  $P' - P \in U$  (E.2.32). Per tant, obtenim que  $P \in L$  i  $P' \in L'$  impliquen  $d(P, P') \geq d$  i que la igualtat val si i només si  $P' - P \in U$ . És clar, doncs, que per acabar la demostració només ens cal veure que existeixen  $P \in L$  i  $P' \in L'$  tals que  $P' - P \in U$ .

Fixem un punt  $P_0 \in L$  i considerem la varietat  $M = L + U = P_0 + W + U$ . Atès que  $(W + U) + W' = V$ , la varietat  $M$  talla  $L'$  (proposició 1.18). Sigui  $P' \in M \cap L'$ , de manera que existeixen  $w \in W$  i  $u \in U$  tals que  $P' = P_0 + w + u$ . Llavors, tenim  $P' - u = P_0 + w$ , i això mostra que el punt  $P = P' - u$  és de  $L$ . Com que  $P' - P = u \in U$ , això acaba la demostració.  $\square$

**E.2.38.** Amb les notacions de la proposició anterior,

- 1) Proveu que  $W' \cap (W + U) = W' \cap W$  i deduïu-ne, si  $i = \dim(W \cap W')$ , que la intersecció  $N' = (L + U) \cap L' \subseteq L'$  té dimensió  $i$ . Anàlogament, tenim que  $N = (L' + U) \cap L \subseteq L$  té dimensió  $i$ .
- 2) Donat un punt  $Q \in L$ , proveu que la intersecció  $Q^* = (Q + U) \cap L'$  és no buida si i només si  $Q \in N$ , i que, si aquest és el cas, llavors  $Q^*$  és un punt de  $N'$ . A més, l'aplicació  $N \rightarrow N'$  tal que  $Q \mapsto Q^*$  és bijectiva.
- 3) Si  $Q \in L$  i  $Q' \in L'$ , demostreu que  $d(Q, Q') = d(L, L')$  si i només si  $Q \in N$  i  $Q' = Q^*$ . Notem que  $N$  i  $N'$  es redueixen a un punt si i només si  $W \cap W' = \{0\}$ .

**Exemple.** Siguin  $L = P + \langle w \rangle$  i  $L' = P' + \langle w' \rangle$  dues rectes no paral·leles de l'espai ordinari (figura 2.4). Els respectius espais directors són  $W = \langle w \rangle$  i  $W' = \langle w' \rangle$ . Com que les rectes són no paral·leles,  $W + W' = \langle w, w' \rangle$  té dimensió 2 i  $U = \langle w, w' \rangle^\perp$  té dimensió 1. Així podem escriure  $U = \langle u \rangle$  per a un cert vector no nul  $u$ . Si posem  $v = P' - P$ , la fórmula [2.15''] ens dóna que

$$\pi_U(v) = \frac{v \cdot u}{|u|^2} u$$

i, com a conseqüència,

$$d(L, L') = \frac{|v \cdot u|}{|u|}. \quad [2.22]$$

En aquest cas hi ha, per l'exercici anterior, un únic parell de punts  $Q \in L$  i  $Q' \in L'$  tals que  $d(L, L') = d(Q, Q')$ : el punt  $Q'$  és la intersecció del pla  $\bar{L} = P + \langle w, u \rangle$  amb  $L'$  i el punt  $Q$  és la intersecció del pla  $\bar{L}' = P' + \langle w', u \rangle$  amb  $L$ . La recta  $QQ'$  coincideix, doncs, amb la intersecció  $\bar{L} \cap \bar{L}'$  i és l'única recta perpendicular a  $L$  i  $L'$  alhora.

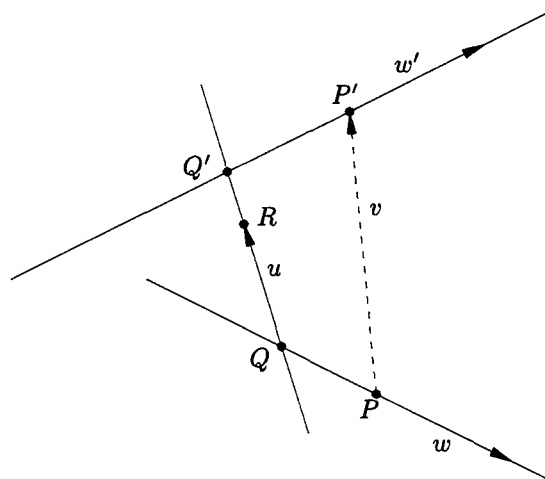


Figura 2.4: Il·lustració de 2.14 en el cas de dues rectes no paral·leles de l'espai ordinari

**Exemple.** Siguin  $L = P + \langle w \rangle$  i  $L' = P' + \langle w \rangle$  dues rectes paral·leles de l'espai ordinari. Llavors  $W = W' = \langle w \rangle$ ,  $W + W' = \langle w \rangle$  té dimensió 1 i  $U = \langle w \rangle^\perp$  té dimensió 2. Així podem escriure  $U = \langle u_1, u_2 \rangle$ ,  $u_1$  i  $u_2$  linealment independents. En aquest cas,  $L' + U = \mathbb{A}^3$  i, per tant, per a tot punt  $Q \in (L' + U) \cap L = L$  hi ha un punt  $Q' \in L'$  tal que  $d(L, L') = d(Q, Q')$ . El punt  $Q'$  és la intersecció del pla  $Q + \langle u_1, u_2 \rangle$  amb  $L'$  i és immediat comprovar que és la projecció ortogonal de  $Q$  sobre  $L'$ . Se'n desprèn que

$$d(L, L') = d(Q, L'), \text{ per a qualsevol punt } Q \in L. \quad [2.23]$$

Així, doncs, el problema de trobar la distància entre dues rectes paral·leles es redueix al càlcul de la distància entre un punt i una recta, i aquesta qüestió es pot resoldre amb la fórmula [2.13].

## 2.3 Volums

Primer farem algunes consideracions sobre la noció d'orientació d'un espai vectorial real i després ens ocuparem de la definició, propietats i càlcul efectiu de volums en un espai euclidià, així com d'algunes de les seves aplicacions.

### Orientacions

En aquest apartat suposarem que  $V$  és un espai vectorial real de dimensió finita  $n$ .

Donades dues bases  $\mathbf{e}$  i  $\mathbf{e}'$  de  $V$ , direm que *tenen la mateixa orientació*, i escriurem  $\mathbf{e} \sim \mathbf{e}'$ , si  $\det(A) > 0$ , on  $A$  és la matriu de  $\mathbf{e}'$  respecte de  $\mathbf{e}$ . Si  $\det(A) < 0$ , direm que  $\mathbf{e}$  i  $\mathbf{e}'$  tenen *orientacions oposades*, o *contràries*.

Si  $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$  és una base de  $V$  i posem  $\bar{\mathbf{e}} = (e_1, \dots, e_{n-1}, -e_n)$ , llavors la matriu de  $\bar{\mathbf{e}}$  respecte de  $\mathbf{e}$  és  $J_n = \text{diag}(1, \dots, 1, -1)$  i com que  $\det(J_n) = -1$ ,  $\mathbf{e}$  i  $\bar{\mathbf{e}}$  tenen orientacions contràries.

**2.15 Proposició.** *La relació  $\mathbf{e} \sim \mathbf{e}'$  és d'equivalència.*

**Prova:** Com que la matriu d'una base  $\mathbf{e}$  respecte de ella mateixa és la matriu identitat  $I_n$  i  $\det(I_n) = 1$ , resulta que  $\mathbf{e} \sim \mathbf{e}$ , és a dir, que  $\sim$  és reflexiva. Siguin ara  $\mathbf{e}$ ,  $\mathbf{e}'$  i  $\mathbf{e}''$  bases tals que  $\mathbf{e} \sim \mathbf{e}'$  i  $\mathbf{e}' \sim \mathbf{e}''$ . Llavors tenim, si  $\mathbf{e}' = \mathbf{e}A$  i  $\mathbf{e}'' = \mathbf{e}'A'$ ,  $\det(A) > 0$  i  $\det(A') > 0$ . Però com que  $\mathbf{e}'' = \mathbf{e}'A' = \mathbf{e}AA'$  i  $\det(AA') = \det(A)\det(A') > 0$ , resulta que  $\mathbf{e} \sim \mathbf{e}''$ , amb la qual cosa tenim que  $\sim$  és transitiva. Finalment, atès que si  $\mathbf{e}' = \mathbf{e}A$  llavors  $\mathbf{e} = \mathbf{e}'A^{-1}$  i  $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1} > 0$ , obtenim que  $\sim$  és simètrica.  $\square$

Posarem  $or(V)$  per denotar el quocient del conjunt de bases de  $V$  per la relació d'equivalència  $\sim$ . Dels elements de  $or(V)$  en direm *orientacions* de  $V$ .

**2.16 Proposició.** *L'espai vectorial  $V$  té exactament dues orientacions. Més precisament, si  $o$  és l'orientació d'una base qualsevol  $\mathbf{e}$  i  $\bar{o}$  la de la base  $\bar{\mathbf{e}}$ , llavors  $or(V) = \{o, \bar{o}\}$ .*

**Prova:** Sabem que  $\mathbf{e}$  i  $\bar{\mathbf{e}}$  tenen orientacions oposades i, per tant,  $o \neq \bar{o}$ .

Per acabar la prova, serà suficient demostrar que, donada una altra base  $\mathbf{e}'$ , o bé  $\mathbf{e}' \sim \mathbf{e}$  o bé  $\mathbf{e}' \sim \bar{\mathbf{e}}$ . Ara bé, si  $\mathbf{e}' = \mathbf{e}A$ , on  $A$  és la matriu de  $\mathbf{e}'$  respecte de  $\mathbf{e}$ , llavors  $\mathbf{e}' = \bar{\mathbf{e}}JA$ , i com que  $\det(JA) = -\det(A)$ , veiem que  $\mathbf{e}'$  té la mateixa orientació que  $\mathbf{e}$  si  $\det(A) > 0$  i la mateixa orientació que  $\bar{\mathbf{e}}$  si  $\det(A) < 0$ .  $\square$

Donada una base  $\mathbf{e}$  de  $V$ , i una orientació  $o$ , direm que  $\mathbf{e}$  té orientació  $o$ , o que és *o-orientada*, per expressar que  $o$  és la classe de  $\mathbf{e}$  respecte de  $\sim$ . És clar, pel que ja hem dit, que si  $\mathbf{e}$  és *o-orientada*, llavors  $\bar{\mathbf{e}}$  és  *$\bar{o}$ -orientada*.

### *Volum euclidià respecte d'una orientació*

Retornem a la geometria. Sigui  $V$  i  $g$  l'espai associat i la mètrica d'un espai euclidià  $\mathbb{A}$ , i sigui  $o$  una orientació de  $V$ .

Donats vectors  $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$  de  $V$  i una orientació  $o$  de  $V$ , posarem

$$V_o(\mathbf{e}) = \det(M), \quad [2.24]$$

on  $M$  és la matriu de  $\mathbf{e}$  respecte d'una base ortonormal *o-orientada*  $\mathbf{u}$ .

Per tal que aquesta definició tingui sentit, cal veure que el resultat no depèn de la base ortonormal *o-orientada*  $\mathbf{u}$  que fem servir. Sigui, doncs,  $\mathbf{u}'$  una altra base ortonormal *o-orientada* i posem  $\mathbf{u}' = \mathbf{u}A$ . Llavors  $\det(A) = 1$ , ja que  $A$  és ortogonal i  $\det(A) > 0$ . Si ara  $\mathbf{e} = \mathbf{u}'M'$ , llavors  $M = AM'$  i

$$\det(M) = \det(AM') = \det(M').$$

Direm que  $V_o(\mathbf{e})$  és el *volum* de  $\mathbf{e}$  respecte de la orientació  $o$ .

**E.2.39.** Useu les propietats dels determinants per mostrar que l'aplicació

$$(e_1, \dots, e_n) \mapsto V_o(e_1, \dots, e_n)$$

és multilinear alternada i que  $V_o(e_1, \dots, e_n) = 0$  si i només si els vectors  $e_1, \dots, e_n$  són linealment dependents (una aplicació es diu que és *multilinear* si és lineal en cada una de les seves variables fixant arbitràriament el valor de les demés, i que és *alternada* si la transposició de dues qualssevol de les seves variables té l'efecte de canviar el signe del valor de l'aplicació).

**E.2.40.** Comproveu que  $V_{\bar{o}}(\mathbf{e}) = -V_o(\mathbf{e})$  i que  $V_o(\bar{\mathbf{e}}) = -V_o(\mathbf{e})$ .

Si  $P_0, P_1, \dots, P_n$  són punts de  $\mathbb{A}$ , posarem

$$V_o(P_0, P_1, \dots, P_n) = V_o(P_1 - P_0, \dots, P_n - P_0) \quad [2.25]$$

i direm que és el volum del paralelepípede  $P_0, P_1, \dots, P_n$  respecte de l'orientació  $o$ .

### *Volum euclidià absolut*

Donats vectors  $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$  de  $V$ , l'exercici E.2.40 mostra que  $|V_o(\mathbf{e})|$  només depèn de  $\mathbf{e}$ , i no de l'orientació  $o$ . Posarem  $V(\mathbf{e}) = |V_o(\mathbf{e})|$  i direm que  $V(\mathbf{e})$  és el *volum absolut*, o simplement el *volum*, de  $\mathbf{e}$ . És clar que  $V(\mathbf{e}) = |\det(M)|$ , on  $M$  és la matriu de  $\mathbf{e}$  respecte d'una base ortonormal qualsevol.

**2.17 Proposició.** Donats vectors arbitraris  $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$  de  $V$ , posem  $\mathbf{e}^T \cdot \mathbf{e}$  per denotar la matriu  $(e_i \cdot e_j)$ . Llavors  $\det(\mathbf{e}^T \cdot \mathbf{e}) \geq 0$  i

$$V(\mathbf{e}) = \sqrt{\det(\mathbf{e}^T \cdot \mathbf{e})}.$$

**Prova:** En efecte, si  $\mathbf{e} = \mathbf{u}M$ , on  $\mathbf{u}$  és una base ortonormal, llavors

$$\mathbf{e}^T \cdot \mathbf{e} = (\mathbf{u}M)^T \cdot (\mathbf{u}M) = M^T(\mathbf{u}^T \cdot \mathbf{u})M = M^T M.$$

Per tant,

$$\det(\mathbf{e}^T \cdot \mathbf{e}) = \det(M^T M) = \det(M)^2 = V(\mathbf{e})^2,$$

d'on l'enunciat en resulta directament.  $\square$

**2.18 Corol·lari.** Donats vectors arbitraris  $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$  de  $V$ ,  $\det(\mathbf{e}^T \cdot \mathbf{e}) = 0$  si i només si els vectors  $e_1, \dots, e_n$  són linealment dependents.  $\square$

Siguin ara  $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_r)$  vectors arbitraris de  $V$ ,  $1 \leq r \leq n$ . Llavors sabem que  $\dim \langle e_1, \dots, e_r \rangle \leq r$ , i que la igualtat val si i només si  $e_1, \dots, e_r$  són linealment independents. Sigui  $V'$  un subespai vectorial de  $V$  de dimensió  $r$  tal que  $\langle e_1, \dots, e_r \rangle \subseteq V'$ . Raonant dins  $V'$  com ho hem fet abans a  $V$ , obtenim que

$$\det(\mathbf{e}^T \cdot \mathbf{e}) = V'(\mathbf{e})^2 \geq 0,$$

on  $V'(\mathbf{e})$  denota el volum de  $\mathbf{e}$  respecte de  $V'$ , i que  $\det(\mathbf{e}^T \cdot \mathbf{e}) = 0$  si i només si  $e_1, \dots, e_r$  són linealment dependents. Atès que l'expressió  $\sqrt{\det(\mathbf{e}^T \cdot \mathbf{e})}$  coincideix, per la proposició 2.17, amb  $V(\mathbf{e})$  quan  $r = n$ , és natural definir

$$V(\mathbf{e}) = \sqrt{\det(\mathbf{e}^T \cdot \mathbf{e})} \quad [2.26]$$

per a qualsevol  $r$ . Pel que hem dit fins ara:

**2.19**  $V(e_1, \dots, e_r) \geq 0$ , qualssevol que siguin  $e_1, \dots, e_r$ , i  $V(\mathbf{e}) = 0$  si i només si  $e_1, \dots, e_r$  són linealment dependents.  $\square$

**2.20 Exemple.** Per  $r = 1$  tenim  $V(e_1) = \sqrt{e_1 \cdot e_1} = |e_1|$ , és a dir, la longitud de  $e_1$ .

**2.21 Exemple.** Per  $r = 2$  tenim, si  $\alpha = \alpha(e_1, e_2)$ ,  $V(e_1, e_2) = |e_1||e_2|\sin(\alpha)$ . En efecte,

$$\begin{aligned} V(e_1, e_2)^2 &= \begin{vmatrix} e_1 \cdot e_1 & e_1 \cdot e_2 \\ e_2 \cdot e_1 & e_2 \cdot e_2 \end{vmatrix} \\ &= |e_1|^2 |e_2|^2 - (e_1 \cdot e_2)^2 \\ &= |e_1|^2 |e_2|^2 - |e_1|^2 |e_2|^2 \cos^2(\alpha) \\ &= |e_1|^2 |e_2|^2 \sin^2(\alpha), \end{aligned}$$

i l'afirmació se'n desprèn perquè  $\alpha \in [0, \pi]$  i, per tant,  $\sin(\alpha) \geq 0$ .

**E.2.41.** Amb les notacions de l'exemple anterior, comproveu que  $|e_2| \sin(\alpha)$  és la longitud del vector  $e'' = e_2 - \pi_{e_1}(e_2)$ , on  $\pi_{e_1}$  denota la projecció ortogonal sobre  $\langle e_1 \rangle$ . És a dir,  $V(e_1, e_2) = |e''||e_1| = |e''|V(e_1)$ .

La interpretació de l'exemple 2.21 que ens proporciona l'exercici E.2.41 es generalitza, com ho mostra la proposició que segueix, per a tot  $r$ .

**2.22 Proposició.** *Siguin  $r$  un enter tal que  $1 \leq r < n$  i  $e_1, \dots, e_r, e$  vectors arbitraris de  $V$ . Posem  $e = e' + e''$ , on  $e' \in \langle e_1, \dots, e_r \rangle$  i  $e'' \in \langle e_1, \dots, e_r \rangle^\perp$ . Llavors,  $V(e_1, \dots, e_r, e) = |e''|V(e_1, \dots, e_r)$ . En particular,  $V(e_1, \dots, e_r, e) = |e|V(e_1, \dots, e_r)$  si  $e$  és ortogonal als vectors  $e_1, \dots, e_r$  (figura 2.5).*

**Prova:** En efecte, si posem  $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_r)$ , es comprova immediatament que la matriu de productes escalars  $(\mathbf{e}, e)^T \cdot (\mathbf{e}, e)$  és de la forma

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}^T \cdot \mathbf{e} & \mathbf{e}^T \cdot e' \\ e' \cdot \mathbf{e} & |e'|^2 + |e''|^2 \end{pmatrix}.$$

Ara el determinant d'aquesta matriu és igual a

$$\det \begin{pmatrix} \mathbf{e}^T \cdot \mathbf{e} & \mathbf{e}^T \cdot e' \\ e' \cdot \mathbf{e} & |e'|^2 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \mathbf{e}^T \cdot \mathbf{e} & 0 \\ v \cdot \mathbf{e} & |e''|^2 \end{pmatrix}.$$

Però el primer determinant és nul, pel fet que és igual a  $V(e_1, \dots, e_r, e')^2$  i que els vectors  $e_1, \dots, e_r, e'$  són linealment dependents, i el segon determinant és  $|e''|^2 V(\mathbf{e})^2$ . La fórmula enunciada en resulta pel fet que el determinant de  $(\mathbf{e}, e)^T \cdot (\mathbf{e}, e)$  és igual a  $V(\mathbf{e}, e)^2$ .  $\square$

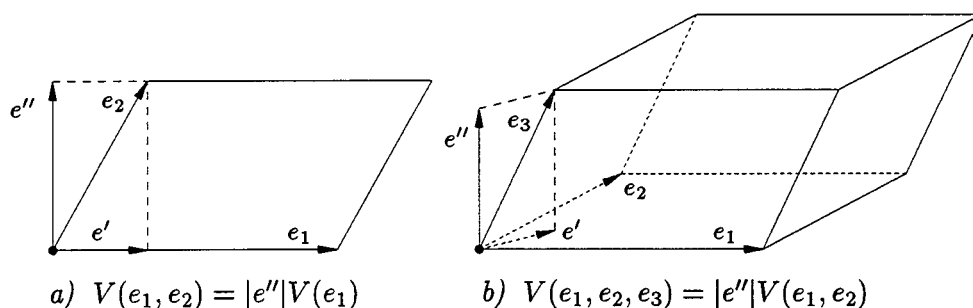


Figura 2.5: Àrea d'un paral·lelogram i volum d'un paral·lelepípede

**E.2.42.** Useu inducció per veure que si  $e_1, \dots, e_r$  són dos a dos ortogonals, llavors

$$V(e_1, \dots, e_r) = |e_1| \cdots |e_r|.$$



**E.2.43.** Sigui  $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_r)$ ,  $e_i \in V$ ,  $i = 1, \dots, r$ . Sigui  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$  una base arbitrària de  $V$ ,  $G = \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{u}$  (matriu de la mètrica respecte de la base  $\mathbf{u}$ ) i  $M$  la matriu de  $\mathbf{e}$  respecte de la base  $\mathbf{u}$  (per tant,  $\mathbf{e} = \mathbf{u}M$ ). Llavors,  $\mathbf{e}^T \cdot \mathbf{e} = M^T G M$  i, per tant,  $V(\mathbf{e}) = \sqrt{\det(M^T G M)}$ . Si la base  $\mathbf{u}$  és ortonormal, llavors  $G = I_n$ , i ens queda  $V(\mathbf{e}) = \sqrt{\det(M^T M)}$ . Si, a més a més,  $r = n$ , llavors  $\det(M^T M) = \det(M)^2$  i  $V(\mathbf{e}) = |\det(M)|$ , en concordança amb la definició de  $V(\mathbf{e})$  quan  $r = n$ .

### Volum geomètric

Si  $P_0, P_1, \dots, P_r$  són punts, posarem  $V(P_0, P_1, \dots, P_r) = V(P_1 - P_0, \dots, P_r - P_0)$ .

**E.2.44.** Comproveu que  $V(P_0 + v, \dots, P_r + v) = V(P_0, \dots, P_r)$ , per a qualsevol vector  $v$ .

Per  $r = 1$  tenim que  $V(P_0, P_1) = d(P_0, P_1)$ . Per  $r \geq 2$ , la clau per interpretar  $V(P_0, \dots, P_r)$  com un «volum geomètric» és la proposició que segueix.

**2.23 Proposició.** *Siguin  $P_0, P_1, \dots, P_r$  punts,  $2 \leq r \leq n$ , i posem  $L = P_0 \cdots P_{r-1}$  i  $h = d(P_r, L)$ . Llavors*

$$V(P_0, P_1, \dots, P_r) = h \cdot V(P_0, P_1, \dots, P_{r-1}). \quad [2.27]$$

**Prova:** Posem  $e_i = P_i - P_0$  ( $1 \leq i \leq r$ ). Llavors

$$V(P_0, P_1, \dots, P_r) = V(e_1, \dots, e_r) \text{ i } V(P_0, P_1, \dots, P_{r-1}) = V(e_1, \dots, e_{r-1}).$$

Per altra banda, amb les notacions de la proposició 2.22, tenim

$$V(e_1, \dots, e_r) = |e''| V(e_1, \dots, e_{r-1}),$$

on  $e' \in \langle e_1, \dots, e_{r-1} \rangle$  és la projecció ortogonal de  $e_r = P_r - P_0$  sobre  $\langle e_1, \dots, e_{r-1} \rangle$  i on  $e'' = e_r - e'$ . Així, doncs, és suficient veure que  $|e''| = h$ . Ara bé,  $P'_r = P_0 + e'$  és la projecció ortogonal de  $P_r$  sobre  $L$  i

$$h = d(P_r, L) = d(P_r, P'_r) = |P_r - P'_r| = |(P_r - P_0) - (P'_r - P_0)| = |e_r - e'| = |e''|,$$

com volíem demostrar.  $\square$

Remarquem que la proposició 2.23 pot ser usada per calcular la distància d'un punt  $Q$  a una varietat  $L$ : Si  $\dim(L) = r$  i  $P_0, P_1, \dots, P_r$  són punts independents de  $L$ , llavors

$$d(Q, L) = V(P_0, P_1, \dots, P_r, Q) / V(P_0, P_1, \dots, P_r). \quad [2.27']$$

**Exemple.** Sigui  $L$  una recta de  $\mathbb{A}^3$  i  $Q$  un punt. Per aplicar la fórmula [2.27'] al càlcul de la distància  $d = d(Q, L)$ , siguin  $P$  i  $v$  un punt i un vector director de  $L$  i posem  $P_0 = P$ ,  $P_1 = P + v$ . Sigui  $w = Q - P$ . Llavors,  $d = V(P_0, P_1, Q) / V(P_0, P_1)$ . Ara,  $V(P_0, P_1)^2 = |P_1 - P_0|^2 = |v|^2$  i  $V(P_0, P_1, Q)^2 = V(v, w)^2 = |v|^2 |w|^2 - (v \cdot w)^2$ , igualtats de les quals segueix que  $d^2 = |w|^2 - (v \cdot w)^2 / |v|^2$ , és a dir,

$$d = \sqrt{|w|^2 - |\pi_v(w)|^2}.$$

### Volum de paral·lelepípedes i simplexs

Donats punts  $P_0, \dots, P_r$ , direm que el conjunt

$$[P_0, \dots, P_r] = \{X \in \mathbb{A} \mid X = P_0 + \sum \lambda_i (P_i - P_0), 0 \leq \lambda_i \leq 1\}$$

és el *paral·lelepípede* determinat per  $P_0, \dots, P_r$ . Notem que  $[P_0] = \{P_0\}$ , que  $[P_0, P_1]$  és el segment d'extremes  $P_0$  i  $P_1$  i que  $[P_0, P_1, P_2]$  és el *paral·lelogram* determinat per  $P_0, P_1$  i  $P_2$ . Anàlogament, del conjunt

$$\Delta[P_0, \dots, P_r] = \{X \in \mathbb{A} \mid X = P_0 + \sum \lambda_i (P_i - P_0), \lambda_i \geq 0, \sum \lambda_i \leq 1\}$$

se'n diu el *simplex*, o *r-simplex*, de vèrtexs  $P_0, \dots, P_r$ . Notem que  $\Delta[P_0, P_1] = [P_0, P_1]$  i que  $\Delta[P_0, P_1, P_2]$  és la «superfície triangular» determinada pel triangle  $P_0P_1P_2$ . Els 3-simplexs s'anomenen *tetràedres*.

Donat un paral·lelepípede  $[P_0, \dots, P_r]$ , es diu que el paral·lelepípede  $[P_0, \dots, P_{r-1}]$  és la *base* de  $[P_0, \dots, P_r]$ . La distància de  $P_r$  a la varietat lineal  $P_0 \cdots P_{r-1}$  es diu que és l'*altura* de  $[P_0, \dots, P_r]$ . Anàlogament, es diu que el simplex  $\Delta[P_0, \dots, P_{r-1}]$  és la base de  $\Delta[P_0, \dots, P_r]$ , i l'altura de  $\Delta[P_0, \dots, P_r]$  es defineix igual que en el cas del paral·lelepípede.

Retornem a la interpretació de 2.23. Per a  $r = 1$ ,  $V(P_0, P_1) = d(P_0, P_1)$ , que és la *longitud* del segment  $[P_0, P_1]$ . Per a  $r = 2$ ,  $V(P_0, P_1, P_2) = d(P_0, P_1) \cdot d(P_2, P_0P_1)$ , que és el producte de la longitud de la base del paral·lelogram  $[P_0, P_1, P_2]$  per la seva altura. Per tant,  $V(P_0, P_1, P_2)$  és l'*àrea* del paral·lelogram  $[P_0, P_1, P_2]$  (figura 2.5.a). Per a  $r = 3$ , la relació

$$V(P_0, P_1, P_2, P_3) = V(P_0, P_1, P_2) d(P_3, P_0P_1P_2)$$

ens mostra que  $V(P_0, P_1, P_2, P_3)$  és al producte de l'àrea de la base del paral·lelepípede  $[P_0, P_1, P_2, P_3]$ , per la seva altura, i per tant veiem que  $V(P_0, P_1, P_2, P_3)$  no és més que el volum de  $[P_0, P_1, P_2, P_3]$  (figura 2.5.b).

**E.2.45.** Demostreu que si  $i_0, i_1, \dots, i_r$  és una permutació de  $0, 1, \dots, r$ , llavors

$$V(P_0, P_1, \dots, P_r) = V(P_{i_0}, P_{i_1}, \dots, P_{i_r}).$$

La proposició 2.23 ens dóna un criteri suficient (inductiu) per saber quan dos paral·lelepípedes  $[P_0, P_1, \dots, P_r]$  i  $[Q_0, Q_1, \dots, Q_r]$  tenen el mateix volum: és suficient que tinguin igual altura i que les seves bases tinguin el mateix volum. L'exercici anterior ens mostra que dos paral·lelepípedes tenen el mateix volum si compleixen la condició anterior per alguna permutació dels seus vèrtexs. En tal cas direm que els paral·lelepípedes tenen el mateix volum pel criteri «base per altura». Aquest criteri, l'estenem als simplexs.

Naturalment, l'àrea del triangle  $\Delta[P_0, P_1, P_2]$  es defineix per  $\frac{1}{2}V(P_0, P_1, P_2)$ , ja que (figura 2.6.a) el paral·lelogram  $[P_0, P_1, P_2]$  es descompon com la unió de dos triangles que tenen la mateixa àrea (pel criteri base per altura):  $\Delta[P_0, P_1, P_2]$  i  $\Delta[P_1, P_2, P_3]$ , on  $P_3 =$

$P_0 + (P_1 - P_0) + (P_2 - P_0)$ . Anàlogament, el volum del tetràedre  $\Delta[P_0, P_1, P_2, P_3]$  (figura 2.6.b) es defineix com  $\frac{1}{6}V(P_0, P_1, P_2, P_3)$ , ja que hi ha una descomposició del paral·lelepípede  $[P_0, P_1, P_2, P_3]$  en sis tetràedres d'igual volum anàloga a la descomposició en dos triangles del cas del paral·lelogram. La idea bàsica d'aquest fet es pot comprendre amb la figura 2.6.b, on es mostra com el paral·lelepípede  $[P_0, P_1, P_2, P_3]$  es descompon en dos prismes triangulars d'igual base i altura (corresponents a la descomposició de cada un dels paral·lelograms  $[P_0, P_1, P_2]$  i  $[P_3, P_4, P_5]$  en dos triangles d'igual àrea) i també com el prisma dibuixat amb línies més gruixudes es descompon com unió dels tetràedres  $\Delta[P_0, P_1, P_2, P_3]$ ,  $\Delta[P_1, P_2, P_3, P_4]$  i  $\Delta[P_2, P_3, P_4, P_5]$ , els quals tenen el mateix volum, com és fàcil de veure pel criteri base per altura. Aquestes consideracions es poden generalitzar per  $r$  arbitrari, obtenint-se que el volum d'un  $r$ -simplex és el volum del corresponent paral·lelepípede dividit per  $r!$ .

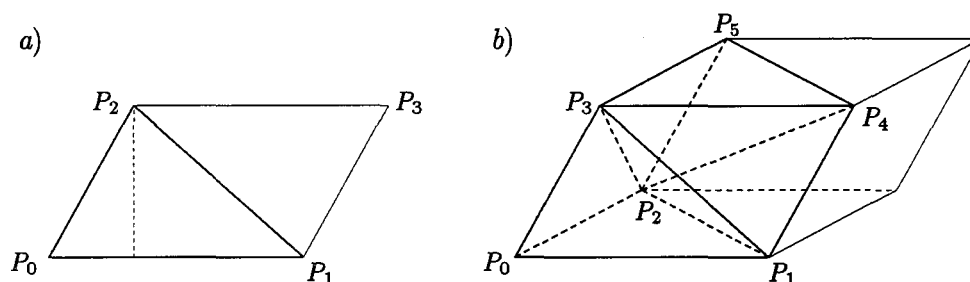


Figura 2.6: Àrea d'un triangle i volum d'un tetràedre

**E.2.46.** Si en una referència rectangular els vèrtexs  $P_1$ ,  $P_2$  i  $P_3$  d'un triangle tenen coordenades  $P_1 = (x_1, y_1)$ ,  $P_2 = (x_2, y_2)$  i  $P_3 = (x_3, y_3)$ , proveu que l'àrea del triangle és

$$\frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix},$$

amb signe més o menys segons que el triangle sigui horari o antihorari.

## Aplicacions

En aquest apartat il·lustrarem algunes de les idees que hem estudiat per establir dos punts que fins ara no hem pogut considerar: la noció d'angle en un pla orientat (angles orientats) i un criteri per decidir, a partir de la matriu d'una forma bilineal simètrica, si aquesta és o no definida positiva.

### Angles orientats

Suposem que  $V$  té dimensió 2 i que  $o$  és una orientació de  $V$ . Donats dos vectors no nuls  $u$  i  $v$  de  $V$ , definim  $\alpha_o = \alpha_o(v, w) \in [0, 2\pi)$  de la següent manera (figura 2.7):

$$\alpha_o(v, w) = \begin{cases} \alpha(v, w) & \text{si } V_o(v, w) \geq 0 \\ 2\pi - \alpha(v, w) & \text{si } V_o(v, w) < 0 \end{cases} \quad [2.28]$$

Notem que si  $V_o(v, w) \neq 0$ , llavors  $v$  i  $w$  són linealment independents i, per tant,  $\alpha(v, w) \in (0, \pi)$ , amb la qual cosa veiem que  $\alpha_o(v, w) \in (\pi, 2\pi)$  si  $V_o(v, w) < 0$ . Direm que  $\alpha_o(v, w)$  és l'*angle entre  $v$  i  $w$  relatiu a la orientació  $o$* . Si  $o$  es pot sobreentendre, direm simplement *angle orientat* entre  $v$  i  $w$ . En tot cas,

$$\cos(\alpha_o) = \cos(\alpha) = \frac{v \cdot w}{|v||w|} \quad [2.28']$$

(amb  $\alpha = \alpha(v, w)$ ). Pel que fa a  $\sin(\alpha_o)$ , a l'exemple 2.21 hem vist que  $V(v, w) = |v||w|\sin(\alpha)$ , d'on resulta, atès que  $V_o(v, w)$  i  $\sin(\alpha_o)$  tenen el mateix signe, que

$$V_o(v, w) = |v||w|\sin(\alpha_o). \quad [2.28'']$$

Recíprocament, aquesta igualtat i  $\cos(\alpha_o) = \frac{v \cdot w}{|v||w|}$  determinen unívocament  $\alpha_o$ .

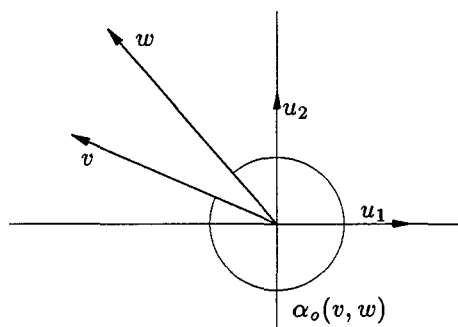


Figura 2.7: Angle orientat

### Criteri de positivitat

**2.24 Proposició.** *Sigui  $V$  un espai real de dimensió finita  $n$  i  $g: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  una aplicació bilineal simètrica. Sigui  $G = (g_{ij})$  la matriu de  $g$  respecte d'una base  $e = (e_1, \dots, e_n)$  de  $V$  i posem  $d_k = \det(g_{ij})_{1 \leq i, j \leq k}$ ,  $k = 1, \dots, n$ . Llavors,  $g$  és definida positiva si i només si  $d_k > 0$  per a tot  $k$ .*

**Prova:** Vegem primer que la condició és necessària. Si  $g$  és definida positiva, la teoria del volum que hem desenvolupat és vàlida per a  $g$  i  $d_k = V(e_1, \dots, e_k)^2 > 0$ , per a tot  $k = 1, \dots, n$ .

Per veure la suficiència de la condició, raonarem per inducció respecte de  $n$ . Si  $n = 1$ , llavors és clar que la condició  $d_1 = g_{11} > 0$  equival a dir que  $g$  sigui definida positiva. Suposem, doncs, que  $n > 1$  i que per inducció tenim demostrada la proposició per espais de dimensió  $n - 1$ . Posem  $V' = \langle e_1, \dots, e_{n-1} \rangle$ . Llavors la matriu  $G'$  de la restricció de  $g$  a  $V'$ , respecte de la base  $e_1, \dots, e_{n-1}$ , s'obté de  $G$  ometent la darrera fila i la darrera columna. Com que  $d_1, \dots, d_{n-1}$  són positius, per recurrència podem suposar que  $g(v', v') > 0$ , per a tot  $v' \in V'$  no nul.

Considerem ara un vector no nul  $\bar{e}_n \in V'^\perp$  (notem que  $\dim(V'^\perp) = n - (n - 1) = 1$ , pel teorema 2.9). Llavors  $e_1, \dots, e_{n-1}, \bar{e}_n$  és una base de  $V$  i per construcció la matriu de  $g$  respecte d'aquesta base és  $\bar{G} = \begin{pmatrix} G' & 0 \\ 0 & \bar{g}_{nn} \end{pmatrix}$ , on  $\bar{g}_{nn} = g(\bar{e}_n, \bar{e}_n)$ . Atès que  $\bar{G} = A^T G A$ , per una certa matriu invertible  $A$  (la de la base nova respecte de la vella), prenent determinants obtenim, tenint en compte que  $\det(G') = d_{n-1}$  i  $\det(G) = d_n$ , que  $d_{n-1} \bar{g}_{nn} = a^2 d_n$ , on  $a = \det(A)$ . Aquesta relació i la positivitat de  $d_{n-1}$  i  $d_n$  ens mostren que  $\bar{g}_{nn} > 0$ .

Sigui ara  $v$  un vector no nul de  $V$ . Posem  $v = v' + \lambda \bar{e}_n$ , on  $v' \in V'$  i  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Llavors,  $g(v, v) = g(v', v') + \lambda^2 \bar{g}_{nn} > 0$ , ja que  $g(v', v') \geq 0$ ,  $\lambda^2 \bar{g}_{nn} \geq 0$  i una de les dues expressions és no nula (altrament seria  $v = 0$ ).  $\square$

## 2.4 Producte vectorial

Destinem aquesta secció a l'estudi del producte vectorial en un espai vectorial euclidià  $V$  de dimensió  $n \geq 1$ . Tots els resultats els particularitzem per  $n = 3$ , ja que aquest és el cas més important, especialment per les aplicacions. També incloem una introducció al cos dels quaternions, la qual ens permet posar de relleu algunes de les relacions fonamentals d'aquests objectes amb la geometria euclidiana de dimensió 3.

### Definicions i propietats generals

Comencem per establir un resultat que ens serà útil per definir el producte vectorial, i també en altres ocasions.

**2.25 Lema.** Si  $\xi: V \rightarrow \mathbb{R}$  és una aplicació lineal, llavors existeix un únic vector  $v = v_\xi \in V$  tal que  $\xi(x) = v \cdot x$  per a tot  $x \in V$ .

**Prova:** Si  $v \in V$ , definim l'aplicació  $\hat{v}: V \rightarrow \mathbb{R}$  per la fórmula  $\hat{v}(x) = v \cdot x$ . L'aplicació  $\hat{v}$  és lineal, ja que el producte escalar és bilineal, i per tant  $\hat{v} \in V^*$  (l'espai dual de

$V$ ). Considerem ara l'aplicació  $V \rightarrow V^*$  tal que  $v \mapsto \hat{v}$ . Aquesta aplicació és lineal, com es comprova sense dificultat usant de nou que el producte escalar és bilineal  $[\diamond]$ . És, a més, una aplicació injectiva, ja que si  $\hat{v} = 0$  aleshores tenim, en particular,  $0 = \hat{v}(v) = v \cdot v = |v|^2$  i, per tant,  $v = 0$ . Com que  $V$  i  $V^*$  tenen la mateixa dimensió, l'aplicació  $V \rightarrow V^*$  és un isomorfisme. D'aquesta manera tenim, donat  $\xi \in V^*$ , que existeix un únic  $v \in V$  tal que  $\hat{v} = \xi$ , i això acaba la demostració.  $\square$

Fixem una orientació  $o$  de  $V$ . Donats vectors  $e_1, \dots, e_{n-1}$ , l'aplicació  $V \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$x \mapsto V_o(e_1, \dots, e_{n-1}, x)$$

és lineal (E.2.39). Així doncs existeix, pel lema 2.25, un únic vector  $v$  tal que

$$v \cdot x = V_o(e_1, \dots, e_{n-1}, x). \quad [2.29]$$

Direm que  $v$  és el producte vectorial de  $e_1, \dots, e_{n-1}$  respecte de  $o$ , i posarem

$$\Lambda_o(e_1, \dots, e_{n-1}) \text{ ó } e_1 \wedge_o \dots \wedge_o e_{n-1},$$

per denotar-lo. De [2.29], en direm la *fórmula del producte mixt*. Per  $n = 3$  la fórmula del producte mixt s'escriu

$$(e_1 \wedge_o e_2) \cdot x = V_o(e_1, e_2, x). \quad [2.29']$$

**E.2.47.** L'aplicació  $\Lambda_o: V^{n-1} \rightarrow V$  és multilinear alternada (useu E.2.39 i la fórmula del producte mixt).

**E.2.48.** Useu E.2.40 per veure que  $\Lambda_{\bar{o}} = -\Lambda_o$ .

**2.26 Proposició** (Propietats del producte vectorial). *Siguin  $e_1, \dots, e_{n-1}$  vectors arbitraris i posem  $v = \Lambda_o(e_1, \dots, e_{n-1})$ . Llavors:*

- 1) *El producte vectorial  $v$  és no nul si i només si  $e_1, \dots, e_{n-1}$  són linealment independents.*
- 2) *El vector  $v$  és perpendicular a tots els seus factors  $e_i$  ( $1 \leq i \leq n-1$ ).*
- 3) *Si  $e_1, \dots, e_{n-1}$  són linealment independents, llavors*

$$V_o(e_1, \dots, e_{n-1}, v) = V(e_1, \dots, e_{n-1}, v) = |v|^2 > 0$$

*i per tant  $e_1, \dots, e_{n-1}, v$  és una base  $o$ -orientada de  $V$ .*

- 4) *La norma de  $v$  és igual a  $V(e_1, \dots, e_{n-1})$ , és a dir,*

$$|\Lambda_o(e_1, \dots, e_{n-1})| = V(e_1, \dots, e_{n-1}).$$

**Prova:** El fet que el producte vectorial sigui una aplicació multilinear alternada implica que  $v = 0$  si  $e_1, \dots, e_{n-1}$  són linealment dependents. Per l'altra banda, si  $e_1, \dots, e_{n-1}$  són linealment independents i  $e_n$  és qualsevol vector linealment independent d'ells ( $e_n$  existeix ja que  $\dim(V) = n$ ), llavors  $V_o(e_1, \dots, e_{n-1}, e_n) \neq 0$  i per la fórmula del producte mixt tindrem  $v \neq 0$ . Això demostra 1).

La fórmula del producte mixt ens dona  $v \cdot e_i = V_o(e_1, \dots, e_{n-1}, e_i)$ . Com que en la darrera expressió el valor de la variable  $n$ -èsima,  $e_i$ , coincideix amb el valor de la variable  $i$ -èsima, i com que  $V_o$  és una aplicació multilinear alternada, obtenim que  $v \cdot e_i = 0$ . Això demostra 2).

Ara tenim

$$|v|^2 = v \cdot v = V_o(e_1, \dots, e_{n-1}, v), \quad [*]$$

altre cop per la fórmula del producte mixt. Com que  $|v|^2 \geq 0$ ,  $V_o(e_1, \dots, e_{n-1}, v) = V(e_1, \dots, e_{n-1}, v)$ . La proposició 2.22, i el fet que  $v$  sigui perpendicular a tots els seus factors, impliquen que

$$V(e_1, \dots, e_{n-1}, v) = |v|V(e_1, \dots, e_{n-1}).$$

Per tant,

$$|v|^2 = |v|V(e_1, \dots, e_{n-1}). \quad [**]$$

Suposem ara que  $e_1, \dots, e_{n-1}$  són linealment independents. Com que per 1) sabem que  $v \neq 0$ ,  $[**]$  ens dona 4) i  $[*]$  ens dona 3).  $\square$

Per  $n = 3$ , el producte vectorial  $v = e_1 \wedge_o e_2$  és un vector perpendicular a  $e_1$  i  $e_2$ , el seu mòdul és  $|v| = V(e_1, e_2) = |e_1||e_2|\sin(\alpha)$ , on  $\alpha = \alpha(e_1, e_2)$ , i  $e_1, e_2, v$  és una base  $\alpha$ -orientada (vegeu la figura 2.8).

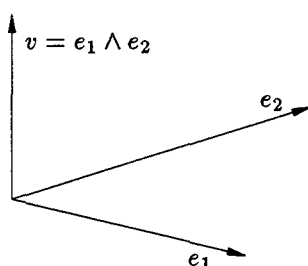


Figura 2.8: Producte vectorial

### Càlcul efectiu

Pel que fa el càlcul efectiu del producte vectorial, podem usar el resultat que segueix.

**2.27 Proposició.** *Sigui  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$  una base qualsevol de  $V$  i o l'orientació definida per  $\mathbf{u}$ . Llavors*

$$\Lambda_o(e_1, \dots, e_{n-1}) = \frac{1}{V(\mathbf{u})} \det(\mathbf{u}^T \cdot \mathbf{e} | \mathbf{u}^T), \quad [2.30]$$

on  $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_{n-1})$ .

*Si, a més a més, la base  $\mathbf{u}$  és ortonormal, llavors  $V(\mathbf{u}) = 1$ ,  $M = \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{e}$  és la matriu  $n \times (n-1)$  dels vectors  $\mathbf{e}$  respecte de la base  $\mathbf{u}$  i*

$$\Lambda_o(e_1, \dots, e_{n-1}) = \det(M | \mathbf{u}^T) = \sum_{i=1}^n (-1)^{n+i} \det_i(M) u_i, \quad [2.30']$$

*on posem  $\det_i(M)$  per denotar el determinant de la matriu  $(n-1) \times (n-1)$  que resulta de suprimir la  $i$ -èsima fila de  $M$ .*

**Prova:** Demostrem primer les afirmacions de la segona part. Sigui  $\mathbf{u}$  ortonormal i posem  $v = \Lambda_o(e_1, \dots, e_{n-1})$ . Per [2.15'], podem escriure  $v = \sum_{i=1}^n (u_i \cdot v) u_i$ . Ara la fórmula del producte mixt ens dona  $u_i \cdot v = V_o(\mathbf{e}, u_i)$ . Com que  $\mathbf{u}$  és  $\alpha$ -orientada,  $V_o(\mathbf{e}, u_i)$  coincideix amb el determinant de la matriu  $M'$  dels vectors  $e_1, \dots, e_{n-1}, u_i$  en la base  $u_1, \dots, u_n$ . Però si  $M$  és la matriu de  $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_{n-1})$  respecte de  $\mathbf{u}$  i  $\delta_i \in \mathbb{R}^n$  és el vector fila tal que  $\delta_{ij} = 0$  si  $i \neq j$  i  $\delta_{ii} = 1$ , llavors  $M' = (M | \delta_i^T)$ . Desenvolupant  $\det(M')$  per la darrera columna, és clar que  $\det(M') = (-1)^{n+i} \det_i(M)$ . Per tant  $u_i \cdot v = (-1)^{n+i} \det_i(M)$  i  $v = \sum_{i=1}^n (-1)^{n+i} \det_i(M) u_i$ . Finalment, remarquem que  $\mathbf{u}^T \cdot \mathbf{e} = M$ , ja que la  $j$ -èsima columna de  $\mathbf{u}^T \cdot \mathbf{e}$  és

$$(u_1 \cdot e_j, \dots, u_n \cdot e_j)^T,$$

és a dir, el vector de les components de  $e_j$  respecte de la base  $\mathbf{u}$ .

Sigui ara  $\mathbf{u}$  una base arbitrària. Escollim una base ortonormal  $\mathbf{u}'$  amb la mateixa orientació que  $\mathbf{u}$  (per exemple, podem prendre com a  $\mathbf{u}'$  el resultat d'aplicar el procés de Gram-Schmidt a  $\mathbf{u}$ ). Sigui  $A$  la matriu de  $\mathbf{u}$  respecte de  $\mathbf{u}'$ , és a dir,  $\mathbf{u} = \mathbf{u}' A$ . Llavors,  $(\mathbf{u}^T \cdot \mathbf{e} | \mathbf{u}^T) = (A^T \mathbf{u}'^T \cdot \mathbf{e} | A^T \mathbf{u}'^T) = A^T (\mathbf{u}'^T \cdot \mathbf{e} | \mathbf{u}'^T)$  i, per tant,  $\det(\mathbf{u}^T \cdot \mathbf{e} | \mathbf{u}^T) = \det(A^T) \det(\mathbf{u}'^T \cdot \mathbf{e} | \mathbf{u}'^T)$ . Ara  $\det(A^T) = \det(A) = V_o(\mathbf{u}) = V(\mathbf{u})$ , ja que  $\mathbf{u}$  i  $\mathbf{u}'$  tenen la mateixa orientació i, per tant,  $V_o(\mathbf{u}) > 0$  i  $\det(\mathbf{u}'^T \cdot \mathbf{e} | \mathbf{u}'^T) = v$ , per la fórmula [2.30'] ja demostrada. En resulta que

$$\det(\mathbf{u}^T \cdot \mathbf{e} | \mathbf{u}^T) = V(\mathbf{u}) v$$

i així  $v = \Lambda_o(e_1, \dots, e_{n-1})$  efectivament coincideix amb l'expressió [2.30].  $\square$



**2.28 Remarca.** A la fórmula [2.30] hem disposat la base  $\mathbf{u}$  a la darrera columna del determinant. En cas de posar-la com a primera columna, introduïm  $n - 1$  canvis de signe i, per tant, el producte vectorial també es pot calcular per la fórmula

$$\wedge_o(e_1, \dots, e_{n-1}) = \frac{(-1)^{n-1}}{V(\mathbf{u})} \det(\mathbf{u}^T | \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{e}).$$

Per  $n = 3$  és indiferent, doncs, si  $\mathbf{u}^T$  es disposa a la darrera columna o a la primera. Per altra banda, transposant el darrer determinant també podem escriure

$$\wedge_o(e_1, \dots, e_{n-1}) = \frac{(-1)^{n-1}}{V(\mathbf{u})} \det \left( \frac{\mathbf{u}}{\mathbf{e}^T \cdot \mathbf{u}} \right).$$

**Exemple.** Si  $V$  té dimensió 2, i  $o$  és l'orientació d'una base ortonormal  $u_1, u_2$ , llavors

$$\wedge_o(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) = \begin{vmatrix} \lambda_1 & u_1 \\ \lambda_2 & u_2 \end{vmatrix} = -\lambda_2 u_1 + \lambda_1 u_2. \quad [2.31]$$

El vector  $v' = -\lambda_2 u_1 + \lambda_1 u_2$  és el vector perpendicular a  $v = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2$  tal que  $|v'| = |v|$  i de manera que  $v, v'$  és una base  $o$ -orientada.

**Exemple.** Suposem que  $n = 3$  i sigui  $o$  l'orientació definida per una base ortonormal  $u_1, u_2, u_3$ .

Si  $v = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3$  i  $w = \mu_1 u_1 + \mu_2 u_2 + \mu_3 u_3$ , llavors

$$v \wedge_o w = \begin{vmatrix} \lambda_1 & \mu_1 & u_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 & u_2 \\ \lambda_3 & \mu_3 & u_3 \end{vmatrix} = d_{23} u_1 + d_{31} u_2 + d_{12} u_3, \quad [2.32]$$

on  $d_{ij} = \lambda_i \mu_j - \lambda_j \mu_i$ .

El determinant anterior coincideix (vegeu la remarca 2.28) amb

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \end{vmatrix}, \quad [2.32']$$

que és l'expressió que ordinàriament es dona del producte vectorial en aquest cas (compareu amb la fórmula [2.41]).

**E.2.49.** Si  $\mathbf{u}$  és una base ortonormal i  $o$  és l'orientació definida per  $\mathbf{u}$ , llavors

$$\wedge_o(u_1, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots, u_n) = (-1)^{n-i} u_i.$$

Remarquem que, amb les notacions de 2.27, la  $i$ -èsima fila de la matriu  $M$  dels vectors

$$u_1, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots, u_n$$

respecte de la base  $\mathbf{u}$  és nul·la, amb la qual cosa  $\det_j(M) = 0$  per a tot  $j \neq i$ , i  $\det_i(M) = \det(I_{n-1}) = 1$ , ja que la matriu que resulta de suprimir la  $i$ -èsima fila de  $M$  és  $I_{n-1}$ . Així  $\wedge_o(u_1, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots, u_n) = (-1)^{n+i} u_i = (-1)^{n-i} u_i$ .

En el cas particular  $n = 3$ , trobem

$$u_1 \wedge_o u_2 = u_3, \quad u_2 \wedge_o u_3 = u_1, \quad u_3 \wedge_o u_1 = u_2.$$

**2.29 Proposició** (Producte vectorial doble). *Si  $e_1, \dots, e_{n-2}$  i  $v_1, \dots, v_{n-1}$  són vectors qualssevol, aleshores*

$$e_1 \wedge_o \dots \wedge_o e_{n-2} \wedge_o (v_1 \wedge_o \dots \wedge_o v_{n-1}) = -\det(\mathbf{v}^T \cdot \mathbf{e} | \mathbf{v}^T), \quad [2.33]$$

on  $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_{n-2})$  i  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_{n-1})$ .

**Prova:** En efecte, atès que els dos membres de la igualtat són nuls si  $v_1, \dots, v_{n-1}$  són linealment dependents  $[\diamond]$ , podem suposar que  $v_1, \dots, v_{n-1}$  són linealment independents. Si aquest és el cas, i  $v = \wedge_o(v_1, \dots, v_{n-1})$ , llavors  $(\mathbf{v}, v)$  és una base  $o$ -orientada de  $V$  i  $V(\mathbf{v}, v) = v \cdot v = |v|^2$  (proposició 2.26.3). Podem fer servir, doncs, la base  $(\mathbf{v}, v)$  per avaluar el producte vectorial  $e_1 \wedge_o \dots \wedge_o e_{n-2} \wedge_o v$  mitjançant la fórmula [2.30]. Tenim  $(\mathbf{v}, v)^T \cdot (\mathbf{e}, v) = \begin{pmatrix} \mathbf{v}^T \cdot \mathbf{e} & 0 \\ v \cdot \mathbf{e} & v \cdot v \end{pmatrix}$ , ja que  $\mathbf{v}^T \cdot v = 0$  per 2.26.2, i així el resultat és

$$\frac{1}{|v|^2} \begin{vmatrix} \mathbf{v}^T \cdot \mathbf{e} & 0 & \mathbf{v}^T \\ v \cdot \mathbf{e} & v \cdot v & v \end{vmatrix} = \frac{1}{|v|^2} (-1)^{2n-1} (v \cdot v) \det(\mathbf{v}^T \cdot \mathbf{e} | \mathbf{v}^T) = -\det(\mathbf{v}^T \cdot \mathbf{e} | \mathbf{v}^T),$$

i això acaba la demostració. □

Notem que pel caràcter alternat del producte vectorial tenim

$$v \wedge_o e_1 \wedge_o \dots \wedge_o e_{n-2} = (-1)^n e_1 \wedge_o \dots \wedge_o e_{n-2} \wedge_o v$$

(tingueu present que  $(-1)^{n-2} = (-1)^n$ ). Per tant,

$$v \wedge_o e_1 \wedge_o \dots \wedge_o e_{n-2} = (-1)^{n+1} \det(\mathbf{v}^T \cdot \mathbf{e} | \mathbf{v}^T) = -\det(\mathbf{v}^T | \mathbf{v}^T \cdot \mathbf{e}) \quad [2.33']$$

La fórmula [2.33] implica que  $e_1 \wedge_o \dots \wedge_o e_{n-2} \wedge_o v$  és una combinació lineal de  $v_1, \dots, v_{n-1}$ . Aquest fet l'havíem d'esperar, ja que el producte vectorial 2.33 pertany a  $\langle v \rangle^\perp$  i  $\langle v \rangle^\perp = \langle v_1, \dots, v_{n-1} \rangle$  si  $v \neq 0$   $[\diamond]$ .

**Exemple.** Si  $n = 3$ , llavors [2.33] ens dona (posant  $u, v, w$  en lloc de  $e_1, v_1, v_2$ )

$$u \wedge_o (v \wedge_o w) = - \begin{vmatrix} v \cdot u & v \\ w \cdot u & w \end{vmatrix} = (w \cdot u)v - (v \cdot u)w. \quad [2.33'']$$

**E.2.50.** Per  $n = 2$ , comproveu que la fórmula [2.33] ens dona que  $\wedge_o(\wedge_o(v)) = -v$ . Aquesta igualtat és, per altra banda, una conseqüència directa de [2.31].

**2.30 Proposició** (Producte escalar de dos productes vectorials). Si  $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_{n-1})$  i  $\mathbf{e}' = (e'_1, \dots, e'_{n-1})$ , on  $e_1, \dots, e_{n-1}, e'_1, \dots, e'_{n-1} \in V$ , llavors

$$(e_1 \wedge_o \dots \wedge_o e_{n-1}) \cdot (e'_1 \wedge_o \dots \wedge_o e'_{n-1}) = \det(\mathbf{e}^T \cdot \mathbf{e}'). \quad [2.34]$$

**Prova:** En efecte, és immediat comprovar, per les propietats dels determinants, que els dos membres de la igualtat són nuls si  $e_1, \dots, e_{n-1}$  són linealment dependents [◊]. Suposem, doncs, que  $e_1, \dots, e_{n-1}$  són linealment independents. Si aquest és el cas tenim, posant  $v = e_1 \wedge_o \dots \wedge_o e_{n-1}$ , que  $(\mathbf{e}, v)$  és una base  $o$ -orientada de  $V$  amb  $V(\mathbf{e}, v) = |v|^2$ . Per la fórmula 2.30 tenim, si  $v' = e'_1 \wedge_o \dots \wedge_o e'_{n-1}$ ,

$$v' = \frac{1}{|v|^2} \det \begin{pmatrix} \mathbf{e}^T \cdot \mathbf{e}' & \mathbf{e}^T \cdot v \\ v \cdot \mathbf{e}' & v \cdot v \end{pmatrix}.$$

D'aquesta fórmula en resulta, per la bilinearitat del producte escalar i les propietats dels determinants, que

$$v \cdot v' = \frac{1}{|v|^2} \det \begin{pmatrix} \mathbf{e}^T \cdot \mathbf{e}' & \mathbf{e}^T \cdot v \\ v \cdot \mathbf{e}' & v \cdot v \end{pmatrix} = \det(\mathbf{e}^T \cdot \mathbf{e}'),$$

ja que  $\mathbf{e}^T \cdot v = 0$  (per 2.26.2) i  $v \cdot v = |v|^2$ . □

La fórmula [2.34] generalitza la proposició 2.26.4, ja que si  $\mathbf{e}' = \mathbf{e}$  llavors  $v \cdot v' = |v|^2$ , per definició de  $|v|$ , i  $\det(\mathbf{e}^T \cdot \mathbf{e}) = V(\mathbf{e})^2 = |v|^2$ , per la fórmula [2.26] i la proposició 2.26.4.

**Exemple.** Si  $n = 3$ , la fórmula [2.34] s'escriu

$$(v \wedge_o w) \cdot (v' \wedge_o w') = \begin{vmatrix} v \cdot v' & v \cdot w' \\ w \cdot v' & w \cdot w' \end{vmatrix} \quad [2.34']$$

**E.2.51.** Useu la fórmula [2.22], que dóna la distància entre dues rectes de l'espai euclidià ordinari, per mostrar que si  $v$  i  $v'$  són vectors linealment independents, llavors

$$d(P + \langle v \rangle, P' + \langle v' \rangle) = V(P' - P, v, v') / |v \wedge v'|,$$

on l'orientació usada per definir  $v \wedge v'$  és arbitrària.

## Quaternions

En aquest apartat exposem una introducció al cos dels quaternions de Hamilton, amb l'objectiu d'estudiar les seves relacions fonamentals amb la geometria mètrica de l'espai euclidià ordinari. Els quaternions són també importants en física, especialment en física quàntica.

**El cos  $\mathbb{H}$** 

Considerem el conjunt  $\mathbb{H} \subset M_2(\mathbb{C})$  format per les matrius

$$q = \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} \quad \text{amb } z, w \in \mathbb{C}.$$

Si posem  $z = a + bi$ ,  $w = c + di$  ( $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ), llavors

$$q = \begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix} = a1 + bi + cj + dk, \quad [2.35]$$

on posem

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad i = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad j = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad k = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}. \quad [2.36]$$

És clar que  $\{1, i, j, k\}$  formen una base de  $\mathbb{H}$  com a espai vectorial sobre  $\mathbb{R}$  i l'expressió  $q = a1 + bi + cj + dk$  explica l'origen del nom «quaternió».

Es comprova que  $\mathbb{H}$  és tancat amb la suma i el producte de matrius i que  $1$  és l'element neutre del producte. També és fàcil verificar que

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i \quad i \quad ki = -ik = j, \quad [2.37]$$

que són les *relacions de Hamilton*. En particular resulta que el producte de  $\mathbb{H}$  no és commutatiu.

Observem, a més, que si

$$q = \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} \in \mathbb{H},$$

llavors  $\det(q) = z\bar{z} + w\bar{w} = |z|^2 + |w|^2 \geq 0$  i  $\det(q) = 0$  si i només si  $q = 0$ . Per tant, si  $q \neq 0$ ,  $q$  es invertible en  $\mathbb{H}$  i el seu invers és

$$q^{-1} = \frac{1}{\det(q)} \begin{pmatrix} \bar{z} & -w \\ \bar{w} & z \end{pmatrix} \in \mathbb{H}. \quad [2.38]$$

Resulta així que  $\mathbb{H}$  és un cos, al qual en direm el *cos dels quaternions*. En particular,  $\mathbb{H}^* = \mathbb{H} - \{0\}$  és un grup amb el producte.

El cos  $\mathbb{R}$  és isomorf al subcòs de  $\mathbb{H}$

$$\{\lambda 1\}_{\lambda \in \mathbb{R}} = \{\lambda 1 + 0i + 0j + 0k \mid \lambda \in \mathbb{R}\} = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\},$$

per l'aplicació  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}$  tal que  $\lambda \mapsto \lambda 1$ . D'ara endavant, identificarem el quaternió  $\lambda 1$  amb el nombre real  $\lambda$ .

El subespai de  $\mathbb{H}$  generat per  $i, j, k$  es denotarà  $V_3$ . El considerarem orientat de manera que  $i, j, k$  sigui una base positiva. Dels elements de  $V_3$  en direm *quaternions purs*. Tot quaternió  $q$  es pot posar d'una única manera en la forma  $q = \lambda + v$ , on  $\lambda \in \mathbb{R}$  i  $v \in V_3$ . Direm que  $\lambda$  és la *part real* de  $q$  i que  $v$  és la *part pura*, o la *part vectorial*. És clar que  $\lambda = \frac{1}{2} \text{Tr}(q)$ .

**E.2.52.** Demostreu que un quaternió  $q$  commuta amb tots els quaternions (és a dir,  $qx = xq$  per a tot  $x \in \mathbb{H}$ ) si i només si  $q \in \mathbb{R}$ . En particular, veiem que  $\mathbb{R}^*$  coincideix amb el subconjunt de  $\mathbb{H}^*$  format pels elements que commuten amb tot element de  $\mathbb{H}^*$  (es diu que  $\mathbb{R}^*$  és el *centre* de  $\mathbb{H}^*$ ).

### Norma i conjugat

Donat un quaternió

$$q = \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} \in \mathbb{H},$$

posem  $|q| = +\sqrt{\det(q)}$  i diem que  $|q|$  és el *mòdul* de  $q$ . És clar que  $|q| > 0$  si  $q \neq 0$ . Si  $q = x_0 1 + x_1 i + x_2 j + x_3 k$ , llavors  $|q|^2 = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ .

Per la propietat multiplicativa dels determinants inferim, si  $q, q' \in \mathbb{H}$ , que  $|qq'| = |q||q'|$  i, si  $q \neq 0$ ,  $|q^{-1}| = |q|^{-1}$ . D'això, en segueix fàcilment que els quaternions de mòdul 1 formen un subgrup, que denotarem  $SU_2$ , de  $\mathbb{H}^*$ .

Donat un quaternió

$$q = \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} \in \mathbb{H},$$

definim

$$\bar{q} = \begin{pmatrix} \bar{z} & \bar{w} \\ -w & z \end{pmatrix}, \quad q^T = \begin{pmatrix} z & -\bar{w} \\ w & \bar{z} \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad q^* = \bar{q}^T = \begin{pmatrix} \bar{z} & -w \\ \bar{w} & z \end{pmatrix} \in \mathbb{H}.$$

És a dir,  $\bar{q}$  és el quaternió que resulta de conjugar els elements de  $q$ , i  $q^*$  s'obté de transposar  $\bar{q}$ . L'aplicació  $q \mapsto q^*$  és l'automorfisme de  $\mathbb{H}$ , considerat com a espai vectorial sobre  $\mathbb{R}$ , definit per les relacions  $1^* = 1$ ,  $i^* = -i$ ,  $j^* = -j$ ,  $k^* = -k$ . Es compleix, a més, que

$$(qq')^* = q'^* q^*, \quad [2.39]$$

com es comprova immediatament a partir de les definicions. Així, doncs, si  $q = \lambda + v$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $v \in V_3$ , llavors  $q^* = \lambda - v$ , d'on  $\lambda = \frac{1}{2}(q + q^*)$  i  $v = \frac{1}{2}(q - q^*)$ . Ara és clar que  $q^* = q$  equival a dir que  $q \in \mathbb{R}$ .

Com que la fórmula [2.38] es pot reescriure  $q^{-1} = |q|^{-2} q^*$ , veiem que  $q^* = |q|^2 q^{-1}$ , o bé

$$qq^* = q^*q = |q|^2. \quad [2.40]$$

Per l'analogia d'aquesta fórmula amb la fórmula  $z\bar{z} = |z|^2$  per a nombres complexos,  $q^*$  s'anomena *conjugat* de  $q$ . Hem vist que l'aplicació  $q \mapsto q^*$  és un automorfisme  $\mathbb{R}$ -lineal de  $\mathbb{H}$  i que compleix la fórmula [2.39]: aquests dos fets també s'enuncien dient que  $q \mapsto q^*$  és un *antiautomorfisme* del cos  $\mathbb{H}$ .

### Estructura euclidiana

Donats quaternions  $q$  i  $q'$ , posem

$$g(q, q') = \frac{1}{2}(q^* q' + q'^* q) = \frac{1}{2} \text{Tr}(q^* q').$$

Llavors, és fàcil comprovar que  $g$  és una forma  $\mathbb{R}$ -bilineal simètrica definida positiva. Per tant,  $\mathbb{H}$  és un espai euclidià de dimensió 4 i, com sempre, posarem  $q \cdot q' = g(q, q')$ . Com que  $g(q, q) = q q^* = |q|^2$ , veiem que la norma de  $q$  corresponent a la mètrica  $g$  coincideix amb el mòdul de  $q$ . La base  $1, i, j, k$  és ortonormal, com es comprova immediatament. Per tant, si  $q = x_0 1 + x_1 i + x_2 j + x_3 k$  i  $q' = y_0 1 + y_1 i + y_2 j + y_3 k$  són quaternions, llavors  $q \cdot q' = x_0 y_0 + x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$ . També tenim que  $SU_2$  és, vist relativament a la base  $1, i, j, k$ , l'esfera  $S^3$  de  $\mathbb{R}^4$ , ja que

$$SU_2 = \{x_0 1 + x_1 i + x_2 j + x_3 k \in \mathbb{H} \mid x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\} = S^3.$$

En particular tenim que la esfera  $S^3$  de  $\mathbb{R}^4$  admet una estructura de grup.

### Producte escalar i vectorial de $V_3$

De tot el que hem dit resulta que  $V_3$  és un espai euclidià orientat de dimensió 3. La relació entre el producte de quaternions, d'una banda, i els productes escalar i vectorial de  $V_3$ , de l'altra, és com segueix.

En primer lloc, si  $v = \lambda_1 i + \lambda_2 j + \lambda_3 k$  i  $w = \mu_1 i + \mu_2 j + \mu_3 k$  són quaternions purs, per la fórmula [2.32'] tenim que

$$v \wedge w = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \end{vmatrix}, \quad [2.41]$$

on  $v \wedge w$  denota el producte vectorial de  $v$  i  $w$  respecte de l'orientació de  $V_3$  definida per la base  $i, j, k$ .

Siguin ara  $q = \lambda + v$  i  $q' = \mu + w$ , amb  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  i  $v, w \in V_3$ . És un càlcul senzill provar que

$$q q' = (\lambda \mu - v \cdot w) 1 + \lambda w + \mu v + v \wedge w. \quad [2.42]$$

Fent  $\lambda = \mu = 0$ , obtenim

$$vw = -(v \cdot w) 1 + v \wedge w, \quad [2.42']$$

fórmula remarcable en la qual queden relacionats el producte escalar, el producte vectorial i el producte com a quaternions de dos vectors de  $V_3$ .

La relació [2.42'] dóna immediatament que

$$v \wedge w = \frac{1}{2}(vw - wv). \quad [2.42'']$$

## 2.5 Semblances i desplaçaments

El propòsit d'aquesta secció és estudiar les transformacions d'un espai euclidià  $\mathbb{A} = \mathbb{A}^n$  que conserven la distància, o que l'alteren en una proporció donada. Importants com són aquestes transformacions en les aplicacions de la geometria mètrica, val a dir que ho són també des d'un punt de vista teòric, ja que en essència la geometria mètrica és l'estudi de les propietats que romanen invariants per elles.

Com anteriorment, posarem  $V$  per designar l'espai vectorial associat a  $\mathbb{A}$  i  $g$  per denotar la mètrica. També posarem  $v \cdot v'$  en lloc de  $g(v, v')$ .

### Definicions i generalitats

Direm que una aplicació  $\varphi: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$  és una *semblança* si existeix  $k \in \mathbb{R}$  no nul tal que  $d(\varphi(P), \varphi(Q)) = k d(P, Q)$  qualssevol que siguin  $P, Q \in \mathbb{A}$ . La constant  $k$ , a més de ser òbviament positiva, queda unívocament determinada per aquesta relació, i direm que és la *raó* de la semblança  $\varphi$ . Les semblances de raó 1 són les aplicacions  $\varphi$  que conserven les distàncies, és a dir, les que compleixen  $d(\varphi(P), \varphi(Q)) = d(P, Q)$ . D'aquestes aplicacions, en direm *desplaçaments* o *moviments rígids* de  $\mathbb{A}$ . La identitat  $Id$  de  $\mathbb{A}$  és clarament un desplaçament de  $\mathbb{A}$ .

**E.2.53.** Si  $v \in V$  i  $P, Q \in \mathbb{A}$ , llavors  $d(t_v(P), t_v(Q)) = d(P + v, Q + v) = d(P, Q)$ . Per tant, la translació  $t_v$  és un desplaçament per a tot  $v \in V$ .

**E.2.54.** La composició d'una semblança de raó  $k$  amb una de raó  $k'$  és una semblança de raó  $kk'$ . En particular, la composició de dos desplaçaments és un desplaçament.

La proposició que segueix ens permetrà veure més endavant (teorema 2.38) que tota semblança és una afinitat.

**2.31 Proposició.** *Sigui  $\varphi: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$  una semblança de raó  $k$  i  $P_0, P_1, \dots, P_r$  punts de  $\mathbb{A}$ . Posem  $P'_i = \varphi(P_i)$ ,  $e_i = P_i - P_0$  i  $e'_i = P'_i - P'_0$ . Llavors,*

- 1)  $e'_i \cdot e'_j = k^2 e_i \cdot e_j$  ( $1 \leq i, j \leq r$ ). Abreujadament,  $e'^T \cdot e' = k^2 e^T \cdot e$ , on hem posat  $e = (e_1, \dots, e_r)$  i  $e' = (e'_1, \dots, e'_r)$ .
- 2)  $V(P'_0, P'_1, \dots, P'_r) = k^r V(P_0, P_1, \dots, P_r)$ .

**Prova:** Com que  $|e_i| = d(P_0, P_i)$ ,  $|e'_i| = d(P'_0, P'_i)$  i  $d(P'_0, P'_i) = k d(P_0, P_i)$ , tenim  $|e'_i|^2 = k^2 |e_i|^2$ . Per tant,  $e'_i \cdot e'_i = k^2 e_i \cdot e_i$ . Per altra banda,  $P_i - P_j = e_i - e_j$ ,  $P'_i - P'_j = e'_i - e'_j$  i  $d(P'_i, P'_j) = k d(P_i, P_j)$ , d'on s'obté  $|e'_i - e'_j|^2 = k^2 |e_i - e_j|^2$ . Com que aquestes condicions equivalen a

$$|e'_i|^2 + |e'_j|^2 - 2e'_i \cdot e'_j = k^2(|e_i|^2 + |e_j|^2 - 2e_i \cdot e_j),$$

i a més ja hem vist que  $|e'_i|^2 = k^2|e_i|^2$  per a tot  $i$ , la part 1) en resulta immediatament. Prenent determinants a la igualtat matricial  $\mathbf{e}'^T \cdot \mathbf{e}' = k^2 \mathbf{e}^T \cdot \mathbf{e}$  de la part 1) obtenim  $\det(\mathbf{e}'^T \cdot \mathbf{e}') = k^{2r} \det(\mathbf{e}^T \cdot \mathbf{e})$ . Tot seguit, la fórmula [2.26] ens dóna  $V(\mathbf{e}') = k^r V(\mathbf{e})$ , i això prova la part 2), ja que  $V(P_0, P_1, \dots, P_r) = V(\mathbf{e})$  i  $V(P'_0, P'_1, \dots, P'_r) = V(\mathbf{e}')$ .  $\square$

**2.32 Corol·lari.** *Una semblança transforma punts independents en punts independents i punts dependents en punts dependents. En particular, resulta que una semblança transforma referències afins en referències afins.*

**Prova:** Només cal recordar, donats punts  $P_0, P_1, \dots, P_r$ , que  $V(P_0, P_1, \dots, P_r) = 0$  equival a dir que  $P_0, P_1, \dots, P_r$  siguin dependents.  $\square$

**E.2.55.** Proveu que si una semblança  $\varphi$  deixa fixos els punts d'una referència, llavors  $\varphi$  és la identitat. Indicació: feu primer el cas  $n = 1$  i després raoneu per inducció respecte de  $n$ .

### Semblances afins

Per poder disposar d'altres exemples de semblances (ultra els referits a E.2.53 i E.2.54), dediquem aquest apartat a l'estudi de les semblances que són aplicacions afins (*semblances afins*). Com que després veurem que tota semblança és una afinitat (teorema 2.38), les conclusions que obtenim són de fet vàlides per a totes les semblances. Remarquem que 1.43 no es pot aplicar, malgrat que 2.32 ens diu que una semblança transforma punts alineats en punts alineats, ja que *a priori* no sabem si una semblança és exhaustiva. I si es pogués aplicar, encara hauríem de fer un argument separat pel cas  $n = 1$  i el cost d'aquest no resultaria ser gaire diferent del cas general.

**2.33 Proposició.** *Sigui  $\varphi: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$  una aplicació afí i posem  $f = \tilde{\varphi}$ . Llavors  $\varphi$  és una semblança de raó  $k > 0$  si i només si  $|f(v)| = k|v|$  per a tot  $v \in V$  i, en aquest cas,  $\varphi$  és una afinitat. En particular, tenim que  $\varphi$  és un desplaçament si i només si  $|f(v)| = |v|$  per a tot  $v \in V$  i que, en aquest cas,  $\varphi$  és una afinitat.*

**Prova:** Donats  $P, Q \in \mathbb{A}$ , tenim  $\varphi(P) - \varphi(Q) = f(P - Q)$ , per definició d'afinitat, i, per tant,  $d(\varphi(P), \varphi(Q)) = |f(P - Q)|$ .

Si ara suposem que  $|f(v)| = k|v|$  per a tot  $v \in V$ , llavors  $|f(P - Q)| = k|P - Q| = kd(P, Q)$  i, per tant,  $\varphi$  és una semblança de raó  $k$ . Això demostra la suficiència de la condició.

Recíprocament, si  $\varphi$  és una semblança de raó  $k$ , llavors

$$k|P - Q| = kd(P, Q) = d(\varphi(P), \varphi(Q)) = |f(P - Q)|$$

qualssevol que siguin els punts  $P$  i  $Q$ . Si  $v$  és un vector qualsevol i escollim punts  $P, Q$  tals que  $P - Q = v$ , la relació anterior ens dóna  $|f(v)| = k|v|$ . Fixem-nos, per acabar, que si aquesta condició se satisfà, llavors  $\ker(f) = 0$ , amb la qual cosa  $f$  és bijectiva i, per tant,  $\varphi$  és una afinitat.  $\square$



**Exemple: Homotècies.** Donat  $\lambda \in \mathbb{R}$ , l'aplicació  $h_\lambda: V \rightarrow V$  tal que  $v \mapsto \lambda v$  és lineal i compleix  $|h_\lambda(v)| = |\lambda||v|$ . Com que  $h_\lambda$  és la transformació associada a l'homotècia  $h_{O,\lambda}$  de centre  $O$  i raó  $\lambda$  (vegeu [1.20]), per la proposició 2.33 tenim:

**2.34** Si  $\lambda \neq 0$ , llavors  $h_{O,\lambda}$  és una semblança de raó  $k = |\lambda|$ . □

**Exemple: Simetria respecte d'una varietat lineal.** Sigui  $L$  una varietat lineal. Donat un punt  $X$ , direm que el punt  $X + 2(\pi_L(X) - X)$  és el *simètric de  $X$  respecte de  $L$*  i posarem  $\sigma_L(X)$  per denotar-lo (figura 2.9.a). També direm que l'aplicació  $\sigma_L$  és la *simetria respecte de  $L$* . Tot seguit estudiarem  $\sigma_L$  i veurem, en particular, que és un desplaçament.

Si  $W$  és un subespai vectorial de  $V$  i  $x \in V$ , sabem (teorema 2.9) que  $x$  es descompon d'una única manera en la forma  $x = v + v'$ , on  $v \in W$  i  $v' \in W^\perp$  (figura 2.9.b). El vector  $s_W(x) = v - v'$  s'anomena *simètric de  $x$  respecte de  $W$*  i l'aplicació  $s_W$ , que clarament és un automorfisme lineal de  $V$ , *simetria respecte de  $W$* . Atès que  $v = \pi_W(x)$  i  $v' = \pi_{W^\perp}(x)$ , tenim, per a tot  $x \in V$ ,

$$x = \pi_W(x) + \pi_{W^\perp}(x) \quad \text{i} \quad s_W(x) = \pi_W(x) - \pi_{W^\perp}(x). \quad [2.43]$$

A més, pel teorema de Pitàgores és clar que

$$|s_W(x)| = |x| \quad \text{per a tot } x \in V. \quad [2.44]$$

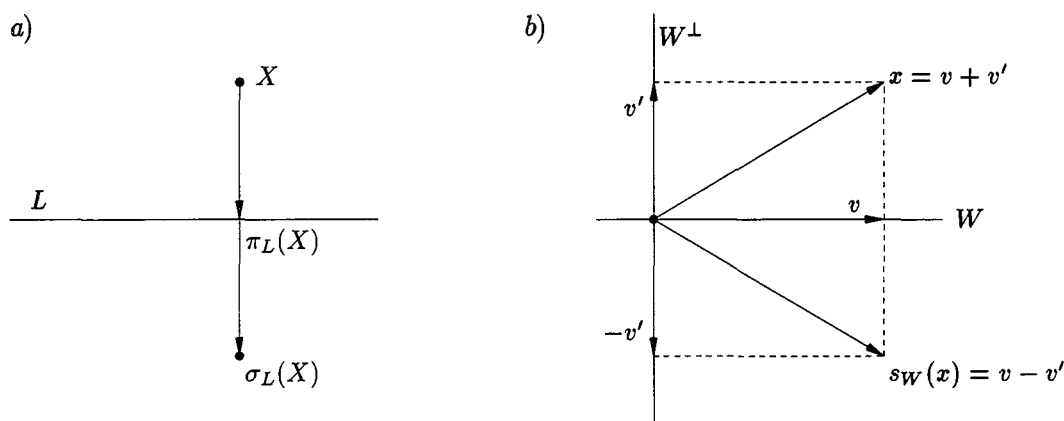


Figura 2.9: Simetries

**2.35 Proposició.** Sigui  $L$  una varietat lineal i  $W$  el seu espai director. Llavors la simetria  $\sigma_L$  és una afinitat i  $\tilde{\sigma}_L = s_W$ . Per tant, tenim, usant la relació [2.44] i la proposició 2.33, que  $\sigma_L$  és un desplaçament.

**Prova:** És suficient veure, doncs, que  $\sigma_L(Q) - \sigma_L(P) = s_W(Q - P)$  qualssevol que siguin  $P, Q \in \mathbb{A}$ . Ara bé, l'expressió de l'esquerra és igual, per definició de  $\sigma_L$ , a

$$[Q + 2(\pi_L(Q) - Q)] - [P + 2(\pi_L(P) - P)] = 2(\pi_L(Q) - \pi_L(P)) - (Q - P).$$

Atès que  $\pi_L(Q) - \pi_L(P) = \pi_W(Q - P)$ , per la fórmula [2.17],

$$2(\pi_L(Q) - \pi_L(P)) - (Q - P) = 2\pi_W(Q - P) - (Q - P).$$

Finalment la fórmula [2.43] ens dona que aquesta expressió és igual a  $s_W(Q - P)$ .  $\square$

Com que  $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & -I_{n-r} \end{pmatrix}$  és la matriu de  $s_W$  respecte de qualsevol base  $\mathbf{u}$  formada per una base  $u_1, \dots, u_r$  de  $W$  i una base  $u_{r+1}, \dots, u_n$  de  $W^\perp$ , les equacions de  $\sigma_L$  respecte d'una referència  $[O, \mathbf{u}]$ ,  $O \in L$ , adopten la forma

$$x'_i = \begin{cases} x_i & \text{si } 1 \leq i \leq r \\ -x_i & \text{si } r+1 \leq i \leq n \end{cases} \quad [2.45]$$

Veiem, així, que  $\sigma_L^2$  és la identitat (també és diu que  $\sigma_L$  és una *involució*).

Si  $L$  és un punt  $O$ , la simetria  $\sigma_O$  coincideix amb l'homotècia de centre  $O$  i raó  $-1$ . Direm que  $\sigma_O$  és la *simetria central de centre  $O$* . Quan  $L$  és una recta, la simetria  $\sigma_L$  s'anomena *simetria axial*. En espais de dimensió  $n \geq 3$ , les simetries respecte d'hiperplans, en particular respecte de plans de l'espai ordinari, es denominen *simetries especulars*.

A la proposició 2.33 hem vist que la condició  $|f(v)| = k|v|$ , per a tot  $v \in V$ , és necessària i suficient per tal que una aplicació afí  $\varphi: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$  amb  $\tilde{\varphi} = f$  sigui una semblança de raó  $k$ . Així doncs, les aplicacions lineals  $f: V \rightarrow V$  tals que  $|f(v)| = k|v|$  ( $k$  un nombre real positiu) tenen un paper fonamental en la teoria de semblances. En direm *semblances lineals de raó  $k$* . Quan  $k = 1$ , en direm *isometries lineals* o *transformacions ortogonals*.

**2.36 Proposició** (Caracteritzacions de les semblances lineals). *Donada una base  $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$  de  $V$ , un nombre real positiu  $k$ , i una aplicació lineal  $f: V \rightarrow V$ , les condicions següents són equivalents:*

- 1) *L'aplicació  $f$  és una semblança lineal de raó  $k$ .*
- 2) *Es compleix  $(fv) \cdot (fv') = k^2(v \cdot v')$ , qualssevol que siguin  $v, v' \in V$ .*
- 3) *Per  $1 \leq i, j \leq n$ ,  $(fe_i) \cdot (fe_j) = k^2(e_i \cdot e_j)$  (aquestes condicions es poden escriure abreujadament  $(f\mathbf{e})^T \cdot (f\mathbf{e}) = k^2(\mathbf{e}^T \cdot \mathbf{e})$ ).*
- 4) *Si  $A$  i  $G$  són la matriu de  $f$  i la matriu de la mètrica respecte de  $\mathbf{e}$ , llavors*

$$A^T G A = k^2 G.$$

**Prova:** Primer observem que 3) i 4) són equivalents. En efecte,  $fe = eA$ , ó  $fe^T = A^T e^T$  (per definició de  $A$ );  $e^T \cdot e = G$ , per definició de  $G$ ; i  $(fe^T) \cdot (fe) = A^T GA$ .

Remarquem també que 1) i 3) són òbviament conseqüència de 2).

Ara 4) implica 2), ja que si  $v = ex^T$  i  $v' = ex'^T$ , on  $x = (x_1, \dots, x_n)$  i  $x' = (x'_1, \dots, x'_n)$  són les components de  $v$  i  $v'$  en la base  $e$ , llavors  $fv = eAx^T$ ,  $fv' = eAx'^T$  i per tant (fórmula [2.6])

$$(fv) \cdot (fv') = x'A^TGAx^T = k^2x'Gx^T = k^2v \cdot v'.$$

Restava veure que 1) implica 2). Però això és una conseqüència de la relació

$$v \cdot v' = \frac{1}{2}(|v + v'|^2 - |v|^2 - |v'|^2),$$

vàlida qualssevol que siguin els vectors  $v, v' \in V$  (remarca 2.3), i del fet que  $f$  és lineal.  $\square$

### Els grups $\mathcal{S}(g)$ , $O(g)$ , $\mathcal{S}(\mathbb{A})$ i $\mathcal{D}(\mathbb{A})$

La proposició 2.33 es pot tornar a enunciar dient que una aplicació afí  $\varphi: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$  és una semblança de raó  $k$  (un desplaçament) si i només si  $\tilde{\varphi}$  és una semblança lineal de raó  $k$  (una isometria lineal).

Com hem observat al final de la prova de l'esmentada proposició, tota semblança lineal és un automorfisme. Posarem  $\mathcal{S}(g) \subseteq GL(V)$  i  $O(g) \subseteq \mathcal{S}(g)$  per denotar el conjunt de les semblances lineals (de raó arbitrària) i el conjunt de les isometries lineals, respectivament.

**E.2.56.** La composició d'una semblança lineal de raó  $k$  amb una semblança lineal de raó  $k'$  és una semblança lineal de raó  $kk'$ . En particular, la composició de dues isometries lineals és una isometria lineal. L'aplicació inversa d'una semblança lineal de raó  $k$  és una semblança lineal de raó  $k^{-1}$ . En particular, l'aplicació inversa d'una isometria lineal és una isometria lineal. Com que  $Id_V$  és clarament una isometria lineal, tenim que  $\mathcal{S}(g)$  i  $O(g)$  són grups amb l'operació de composició i que  $O(g)$  és un subgrup de  $\mathcal{S}(g)$ . Demés,  $O(g)$  és un subgrup normal de  $\mathcal{S}(g)$ , ja que si  $\varphi$  és una isometria lineal i  $\beta$  una semblança lineal, llavors  $\beta\varphi\beta^{-1}$  és una semblança lineal de raó 1, és a dir, una isometria lineal. De  $O(g)$  en direm també el *grup ortogonal* de la mètrica  $g$ .

Posem  $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{A})$  per denotar el conjunt d'afinitats de l'espai  $\mathbb{A}$  que són semblances i  $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\mathbb{A})$  per denotar el conjunt d'afinitats de  $\mathbb{A}$  que són desplaçaments. Com que les afinitats de  $\mathbb{A}$  formen un grup i (vegeu E.2.54) la composició de semblances (desplaçaments) és una semblança (desplaçament), resulta que  $\mathcal{S}$  i  $\mathcal{D}$  són tancats amb l'operació de composició. Per altra banda, si  $\varphi \in \mathcal{S}$  té raó  $k$  i  $f = \tilde{\varphi}$ , llavors l'afinitat  $\varphi^{-1}$  és una semblança de raó  $k^{-1}$  (vegeu E.2.56). En particular,  $\varphi^{-1} \in \mathcal{D}$  quan  $\varphi \in \mathcal{D}$ . Remarquem, a més, que si  $\varphi \in \mathcal{D}$  i  $\beta \in \mathcal{S}$ , llavors  $\beta\varphi\beta^{-1} \in \mathcal{D}$ . Com que  $\mathcal{T} \subset \mathcal{D}$  (les

translacions són desplaçaments), i a més sabem que  $\mathcal{T}$  és un subgrup normal del grup afí, podem resumir les consideracions d'aquest punt en el següent enunciat:

**2.37 Proposició.** *Els conjunts  $\mathcal{S}$  i  $\mathcal{D}$  són grups amb l'operació de composició i  $\mathcal{D}$  és un subgrup normal de  $\mathcal{S}$ . A més a més, el grup  $\mathcal{T}$  de translacions és un subgrup normal de  $\mathcal{D}$  i de  $\mathcal{S}$ .*  $\square$

Les proposicions 2.33 i 2.36 ens donen un principi per reconèixer quan una afinitat obtinguda pel teorema fonamental de les aplicacions afins és una semblança, en particular un desplaçament:

**E.2.57. Construcció de semblances.** Siguin  $\mathcal{R} = [P_0, P_1, \dots, P_n]$  i  $\mathcal{R}' = [P'_0, P'_1, \dots, P'_n]$  dues referències afins de  $\mathbb{A}$  i  $\varphi$  l'única afinitat tal que  $\varphi(P_i) = P'_i$  ( $0 \leq i \leq n$ ). Recordem que si posem  $e_i = P_i - P_0$  i  $e'_i = P'_i - P'_0$ ,  $f = \tilde{\varphi}$  és l'única aplicació lineal  $V \rightarrow V$  tal que  $f(e_i) = e'_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ). Amb això,  $\varphi$  és una semblança de raó  $k$  si i només si la condició 2.36.3 es compleix, és a dir, si i només si  $(e'_i) \cdot (e'_j) = k^2(e_i \cdot e_j)$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ .

El principi de construcció de semblances de l'exercici anterior és l'ingredient principal de la demostració del teorema que segueix.

**2.38 Teorema.** *Tota semblança és una afinitat.*

**Prova:** Sigui  $\varphi$  una semblança de raó  $k$ ,  $[P_0, P_1, \dots, P_n]$  una referència de  $\mathbb{A}$  i  $e_i = P_i - P_0$  ( $1 \leq i \leq n$ ). Si posem  $P'_i = \varphi(P_i)$  i  $e'_i = P'_i - P'_0$ , llavors les proposicions 2.32 i 2.31 ens diuen que  $[P'_0, P'_1, \dots, P'_n]$  és una referència i que  $e'_i \cdot e'_j = k^2(e_i \cdot e_j)$ . Per E.2.57, l'única afinitat  $\alpha$  tal que  $\alpha(P_i) = P'_i$  ( $0 \leq i \leq n$ ) és una semblança de raó  $k$ . Ara  $\alpha^{-1}$  és una semblança de raó  $k^{-1}$  i per tant  $\beta = \alpha^{-1}\varphi$  és un desplaçament que deixa fixos els punts  $P_0, P_1, \dots, P_n$ . Però  $\beta = Id$ , per E.2.55, d'on  $\varphi = \alpha \in \mathcal{S}$ .  $\square$

El teorema anterior ens permet parlar, doncs, de la semblança lineal associada a una semblança i val a dir que el coneixement de la semblança queda determinat en bona part pel coneixement de la corresponent semblança lineal. De fet moltes de les propietats d'una semblança es defineixen a partir de les propietats de la seva semblança lineal. Per posar un exemple: direm que una semblança  $\varphi$  és *directa* o *pròpia* si  $\det(\tilde{\varphi}) > 0$  i que és *inversa* o *impròpia* si  $\det(\tilde{\varphi}) < 0$ . En particular, queden definides les nocions de desplaçament *directe*, o *propí* i de desplaçament *invers*, o *impropí*.

**E.2.58** (Semblances d'una recta euclidiana). Useu l'exemple 1.35 per comprovar que:

- 1) Tota afinitat d'una recta euclidiana és una semblança.
- 2) Les semblances sense punts fixos són les translacions diferents de la identitat i les que tenen un únic punt fix són les homotècies diferents de la identitat.
- 3) Els desplaçaments directes són les translacions i els inversos són les simetries centrals.

### Propietats addicionals de les semblances lineals

Recopilem, en aquest apartat, diversos resultats sobre semblances lineals que necessitem per a la classificació i tractament efectiu de les semblances.

**2.39 Proposició.** *Si  $f: V \rightarrow V$  és una semblança lineal, llavors  $f$  conserva els angles, és a dir,  $\alpha(fv, fv') = \alpha(v, v')$  qualssevol que siguin els vectors no nuls  $v, v' \in V$ . En particular,  $f$  transforma vectors perpendiculars en vectors perpendiculars.*

**Prova:** Si  $k$  és la raó de  $f$ ,  $(fv) \cdot (fv') = k^2(v \cdot v')$ ,  $|fv| = k|v|$  i  $|fv'| = k|v'|$ . Si posem  $\alpha' = \alpha(fv, fv')$  i  $\alpha = \alpha(v, v')$ , llavors  $\cos(\alpha') = \frac{(fv) \cdot (fv')}{|fv||fv'|} = \frac{v \cdot v'}{|v||v'|} = \cos(\alpha)$ .  $\square$

**2.40 Proposició.** *Si  $f: V \rightarrow V$  és una semblança lineal i  $W$  és un subespai vectorial tal que  $f(W) \subseteq W$ , llavors  $f(W) = W$  i  $f(W^\perp) = W^\perp$ .*

**Prova:** Com que  $f$  és injectiva,  $\dim(fW) = \dim(W)$ . Si a més a més  $f(W) \subseteq W$ , llavors serà  $f(W) = W$ . Sigui ara  $x \in W^\perp$ . Llavors  $f(x) \in W^\perp$ , ja que si  $w$  és qualsevol vector de  $W$  i  $w' \in W$  és tal que  $w = f(w')$ , llavors

$$f(x) \cdot w = f(x) \cdot f(w') = k^2(x \cdot w') = 0,$$

on  $k$  és la raó de  $f$ . Així tenim  $f(W^\perp) \subseteq W^\perp$ . Per tant també tenim  $f(W^\perp) = W^\perp$ .  $\square$

**E.2.59.** Una semblança, pel fet de ser una afinitat, transforma varietats lineals paral·leles en varietats lineals paral·leles. Comproveu que també transforma varietats lineals perpendiculars en varietats lineals perpendiculars.

**2.41 Proposició.** *Si  $f: V \rightarrow V$  és una semblança lineal de raó  $k$  i  $\lambda$  és un valor propi real de  $f$ , llavors  $\lambda = \pm k$ . En particular, si  $f$  és una transformació ortogonal i  $\lambda$  un valor propi real de  $f$ , llavors  $\lambda = \pm 1$ . Per altra banda,  $f$  té almenys un valor propi real si  $n = \dim(\mathbb{A})$  és senar.*

**Prova:** Sigui  $e$  un vector propi no nul de valor propi  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Així  $f(e) = \lambda e$  i  $|e| \neq 0$ . Ara  $k^2|e|^2 = k^2e \cdot e = (fe) \cdot f(e) = \lambda^2|e|^2$ , d'on  $\lambda^2 = k^2$ . Per tant  $\lambda = \pm k$ . Per a la darrera afirmació observem que el polinomi característic  $Q_f$  de  $f$  té grau  $n$  i que tot polinomi real de grau senar té almenys una arrel real (recordem que els valors propis de  $f$  són les arrels de  $Q_f$ ).  $\square$

**E.2.60.** Sigui  $\varphi$  una semblança i  $L$  una recta. Posem  $f = \tilde{\varphi}$  i sigui  $v$  un vector director de  $L$ . Comproveu que  $\varphi(L) \parallel L$  si i només si  $v$  és un vector propi de  $f$ .

**2.42 Proposició.** *Si  $f: V \rightarrow V$  és una semblança lineal i  $e$  i  $e'$  són vectors propis de valors propis reals diferents, llavors  $e$  i  $e'$  són ortogonals.*

**Prova:** Sigui  $k$  la raó de  $f$ . Com que els valors propis reals de  $f$  són  $\pm k$  (proposició 2.41), podem suposar que el valor propi real de  $e$  és  $k$  i que el de  $e'$  és  $-k$ . Així  $f(e) = ke$  i  $f(e') = -ke'$ . Per tant,  $k^2 e \cdot e' = (fe) \cdot (fe') = (ke) \cdot (-ke') = -k^2 e \cdot e'$ , d'on  $e \cdot e' = 0$ .  $\square$

**2.43** Sigui  $f: V \rightarrow V$  una semblança lineal i posem  $V^+$  i  $V^-$  per denotar els espais de vectors propis de valor propi  $k$  i  $-k$ , respectivament. Llavors  $V^+$  i  $V^-$  són ortogonals (per la proposició 2.42),  $f(V^+) = kV^+ = V^+$  i  $f(V^-) = -kV^- = V^-$ . Si posem  $V' = (V^+ \oplus V^-)^\perp$ , llavors  $f(V') = V'$ , per la proposició 2.40, i  $V = V^+ \oplus V^- \oplus V'$ , pel teorema 2.9. A més a més,  $f|_{V'}$  no té valors propis reals, per la primera part de la proposició 2.41. En particular tenim que  $\dim(V')$  és parell (per la darrera part de la proposició 2.41). Posarem  $n^+ = \dim(V^+)$ ,  $n^- = \dim(V^-)$  i  $n' = \dim(V')$ . Pel que hem dit, tenim  $n = n^+ + n^- + n'$  i que  $n'$  és parell.

**2.44 Proposició.** *Suposem que  $\dim(V) = 2$  i que  $f: V \rightarrow V$  és una aplicació lineal. Fixem una base ortonormal qualsevol  $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$  de  $V$ . Llavors  $f$  és semblança lineal de raó  $k$  si i només si la matriu de  $f$  en la base  $\mathbf{u}$  és de la forma  $k\rho(\alpha)$  o  $k\rho(\alpha)J$ , on  $\alpha \in [0, 2\pi)$  i  $J = \text{diag}(1, -1)$  [usem les notacions de l'exercici E.2.15]. D'aquestes aplicacions, les úniques que no tenen valors propis reals són les de la forma  $k\rho(\alpha)$  amb  $\alpha \neq 0, \pi$ .*

**Prova:** Si  $A$  és la matriu de  $f$  en la base  $\mathbf{u}$ , llavors  $f$  és semblança lineal de raó  $k$  si i només si  $A^T A = k^2 I_2$  (proposició 2.36.4). Així  $k^{-1}A$  és una matriu ortogonal. Per E.2.15 tindrem que  $k^{-1}A = \rho(\alpha)$  o  $k^{-1}A = \rho(\alpha)J$ , on  $J = \text{diag}(1, -1)$  i  $\alpha \in [0, 2\pi)$ .

El polinomi característic de

$$k\rho(\alpha)J = k \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

és  $\lambda^2 - k^2$ , i per tant aquest cas té valors propis  $k$  i  $-k$ . El polinomi característic de

$$k\rho(\alpha) = k \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

és  $\lambda^2 - 2k \cos(\alpha)\lambda + k^2$  i, com que el seu discriminant és  $4k^2(\cos^2 \alpha - 1) \leq 0$ , té arrels reals si i només si  $\cos(\alpha)^2 = 1$ , és a dir, si i només si  $\alpha = 0$  ó  $\alpha = \pi$ .  $\square$

**E.2.61.** Amb les notacions de la proposició anterior, remarquem que si  $A = k\rho(\alpha)$  és la matriu de  $f$  respecte de la base  $\mathbf{u}$ , llavors la matriu de  $f$  respecte de la base  $\bar{\mathbf{u}} = (u_1, -u_2)$  és  $JAJ = kJ\rho(\alpha)J = k\rho(2\pi - \alpha)$ . Per tant resulta que si  $f$  no té valors propis, llavors podem escollir una base ortonormal de  $V$  respecte de la qual la matriu de  $f$  sigui de la forma  $k\rho(\alpha)$ , amb  $\alpha \in (0, \pi)$ . És clar, però, que la orientació de  $\bar{\mathbf{u}}$  és oposada a la de  $\mathbf{u}$ .

### Semblances i desplaçaments del pla

En aquest apartat suposarem que  $\varphi$  és una semblança de raó  $k$  de  $\mathbb{A}^2$  i posarem  $f = \tilde{\varphi}$ . Farem servir les notacions de 2.43 i procedirem a l'estudi de  $\varphi$  segons els diversos valors de  $n^+$ ,  $n^-$  i  $n'$ . Recordem que  $n^+ + n^- + n' = 2$  i que  $n' \neq 1$ .

Posarem  $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$  per denotar una base de  $V$  i  $\mathcal{R} = [O, \mathbf{u}]$  una referència de  $\mathbb{A}^2$ . En cada cas direm com s'escullen els eixos  $u_i$  i l'origen  $O$ . Les coordenades d'un punt general  $X$  respecte de  $\mathcal{R}$  es denotaran  $(x, y)$  i les de  $\varphi(X)$  es denotaran  $(x', y')$ .

**$n^+ = 2$**  En aquest cas tenim  $V = V^+$  i  $f$  és una homotècia lineal de raó  $k$ . Les semblances d'aquest cas són directes.

Si  $k \neq 1$ , per 1.34 sabem que  $\varphi$  té un únic punt fix, que prendrem com a origen  $O$ , i és clar que  $\varphi = h_{O,k}$ , l'homotècia de centre  $O$  i raó  $k$ . Les equacions de  $\varphi$  en la referència  $[O, \mathbf{u}]$  (u qualsevol) són  $\{x' = kx, y' = ky\}$ .

Si  $k = 1$ , llavors  $f$  és la identitat i per tant  $\varphi$  és una translació. Prenent  $u_1$  de manera que el vector  $v$  de la translació sigui de la manera  $pu_1$ ,  $p \geq 0$ , llavors les equacions de  $\varphi$  adopten la forma  $\{x' = x + p, y' = y\}$ .

**$n^+ = n^- = 1$**  Si  $u_1$  és un vector unitari de  $V^+$  i  $u_2$  un vector unitari de  $V^-$ , llavors  $\mathbf{u}$  és una base ortonormal (proposició 2.42) i la matriu de  $f$  respecte d'aquesta base és  $\text{diag}(k, -k)$ . Les semblances d'aquest cas són inverses.

Si  $k \neq 1$ , llavors  $\varphi$  té un únic punt fix, que escollim com a origen  $O$ , i les equacions de  $\varphi$  en la referència  $\mathcal{R}$  són de la forma  $\{x' = kx, y' = -ky\}$ . Aquesta semblança és composició (commutativa) de la simetria axial  $\sigma$  respecte de l'eix  $O + \langle u_1 \rangle$  (seguint el costum en direm eix  $Ox$ ) amb l'homotècia  $h = h_{O,k}$  de centre  $O$  i raó  $k$ .

Si  $k = 1$ , les equacions de  $\varphi$  respecte de la referència  $\mathcal{R}$ , amb  $O$  escollit arbitràriament, són de la forma  $\{x' = x + p, y' = -y + q\}$ . Com que la relació  $y' = -y + q$  es pot escriure en la forma  $y' - \frac{q}{2} = -(y - \frac{q}{2})$ , que és de la forma  $\bar{y}' = -\bar{y}$  amb el canvi  $\bar{y} = y - \frac{q}{2}$ , veiem que canviant l'origen  $O$  podem suposar que les equacions són de la forma  $\{x' = x + p, y' = -y\}$ . Quan  $p = 0$  el desplaçament és la *simetria axial*  $\sigma$  respecte de l'eix  $Ox$ . Si  $p \neq 0$ , llavors el desplaçament és composició (commutativa) de la simetria  $\sigma$  amb una translació  $\tau$  paral·lela a l'esmentat eix. D'aquest moviment en direm una *simetria axial amb lliscament* o una *simetria axial amb translació paral·lela*.

**$n^- = 2$**  L'aplicació  $f$  és l'homotècia lineal de raó  $-k$ . La matriu de  $f$  respecte de qualsevol base  $\mathbf{u}$  és  $\text{diag}(-k, -k)$  i, per tant, les semblances d'aquest cas són directes. Com que  $-k \neq 1$ ,  $\varphi$  té un únic punt fix, que prenem com origen  $O$ . En resulta que  $\varphi = h_{O,-k}$ , l'homotècia de centre  $O$  i raó  $-k$ . Per  $k = 1$  és tracta de la *simetria central*  $\sigma_O$ . En general és la composició (commutativa) d'aquesta simetria amb l'homotècia de centre  $O$  i raó  $k$ .

**$n' = 2$**  En aquest cas l'aplicació  $f$  no té valors propis reals. Hem vist que la matriu de  $f$  respecte d'una base ortonormal arbitrària  $\mathbf{u}$  és de la forma  $k\rho(\alpha)$ ,  $\alpha \in (0, 2\pi)$ ,  $\alpha \neq \pi$ . En particular, totes les semblances d'aquest cas són directes. Remarquem també que

si ens fos permès de canviar les orientacions de les bases de  $V$ , llavors sempre podríem escollir la base  $u$  de forma que  $\alpha \in (0, \pi)$  (vegeu E.2.61).

Com que  $\varphi$  té un únic punt fix, que escollim com origen  $O$ , les equacions de  $\varphi$  respecte de la referència  $\mathcal{R}$  són  $\{x' = k(cx - sy), y' = k(sx + cy)\}$ , on  $c = \cos(\alpha)$  i  $s = \sin(\alpha)$ . Es tracta, per tant, de la composició (commutativa) d'un gir o rotació de centre  $O$  i amplitud  $\alpha$  amb l'homotècia de centre  $O$  i raó  $k$ .

Quan  $k = 1$ , l'homotècia és la identitat i, per tant, el desplaçament  $\varphi$  es redueix a un gir d'amplitud  $\alpha$ .

La taula 2.1 presenta d'una manera sinòptica les conclusions a què hem arribat en el cas dels desplaçaments. La columna  $\varphi$  conté una descripció simbòlica del desplaçament:  $\sigma$  representa una simetria axial;  $\tau$ , una translació paral·lela a l'eix de  $\sigma$ ; i  $\rho$ , un gir d'amplitud  $\alpha \neq 0, \pi$ . La columna  $s$  conté el «sentit» del desplaçament: posem  $d$  ó  $i$  segons que el desplaçament sigui directe o invers. La columna  $F$  conté la descripció del conjunt de punts fixos:  $O$  significa un únic punt fix i  $L$  una recta de punts fixos. Abreugem els noms que donem als diversos desplaçaments amb les convencions següents:  $T$  indica una translació;  $SA$ , una simetria axial;  $SA + T$ , una simetria axial amb translació paral·lela;  $SC$ , una simetria central; i  $G$ , un gir.

Taula 2.1: Desplaçaments en el pla

| $n^+$ | $n^-$ | $n'$ | $\varphi$    | $s$ | $F$         | Equacions reduïdes           | Nom      |
|-------|-------|------|--------------|-----|-------------|------------------------------|----------|
| 2     | 0     | 0    | $t_v$        | $d$ | $\emptyset$ | $x' = x + p, y' = y$         | $T$      |
| 1     | 1     | 0    | $\sigma$     | $i$ | $L$         | $x' = x, y' = -y$            | $SA$     |
| 1     | 1     | 0    | $\tau\sigma$ | $i$ | $\emptyset$ | $x' = x + p, y' = -y$        | $SA + T$ |
| 0     | 2     | 0    | $h_{O,-1}$   | $d$ | $O$         | $x' = -x, y' = -y$           | $SC$     |
| 0     | 0     | 2    | $\rho$       | $d$ | $O$         | $x' = cx - sy, y' = sx + cy$ | $G$      |

**E.2.62.** Mirant la taula 2.1 es poden constatar els fets següents:

- 1) Els únics desplaçaments, diferents de la identitat, que tenen més d'un punt fix són les simetries axials.
- 2) Només les translacions diferents de la identitat i les simetries axials amb lliscament no tenen punts fixos. Aquests dos tipus es distingeixen perquè són directes les translacions i inverses les simetries.
- 3) Tenint en compte, per altra banda, que una simetria central es pot considerar com a un gir d'amplitud  $\pi$ , comprova que els únics desplaçaments del pla que tenen un únic punt fix són els girs  $\rho$  d'amplitud  $\alpha \in (0, 2\pi)$ .

**E.2.63.** Si un desplaçament  $\varphi$  és una simetria axial o una simetria axial amb lliscament, l'eix de  $\varphi$  és el lloc geomètric dels punts  $X$  tals que  $\varphi(X) - X$  és proporcional al vector propi de



valor propi  $-1$ . En una referència, la seva equació és

$$\begin{vmatrix} (a-1)x + by + r & \alpha \\ cx + (d-1)y + s & \beta \end{vmatrix},$$

on  $\{x' = ax + by + r, y' = cx + dy + s\}$  són les equacions de  $\varphi$  i  $(\alpha, \beta)$  les components d'un vector propi no nul de valor propi  $-1$  de la matriu  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ . Prenent un punt  $P$  arbitrari de l'eix, la diferència  $v = \varphi(P) - P$  és el vector del lliscament.

**E.2.64.** Si  $\rho$  és un gir d'amplitud  $\alpha$ , on  $\alpha \in (0, 2\pi)$ ,  $\alpha$  es pot calcular mitjançant la fórmula  $\cos(\alpha) = \frac{1}{2} \text{Tr}(\tilde{\rho})$ , on  $\text{Tr}(\tilde{\rho})$  és la traça de la transformació lineal associada ( $a + d$ , amb les notacions de l'exercici anterior).

Taula 2.2: Algorisme de classificació dels desplaçaments del pla

Partim d'una afinitat donada per l'equació matricial  $\mathbf{x}'^T = A\mathbf{x}^T + \mathbf{p}^T$  i suposem que hem verificat la condició  $A^TGA = G$  i calculat  $n^+$ ,  $n^-$ ,  $n'$  i la dimensió  $d$  de la varietat de punts fixos, amb la convenció que  $d = -1$  si no hi ha punts fixos.

$$\begin{cases} n' \neq 0 & \rightarrow G, \cos(\alpha) = \frac{1}{2} \text{Tr}(A) \\ n' = 0 & \rightarrow \begin{cases} n^+ = 2 & \rightarrow T \\ n^+ = 1 & \rightarrow \begin{cases} d < 0 & \rightarrow SA + T \\ d > 0 & \rightarrow SA \end{cases} \\ n^+ = 0 & \rightarrow SC \end{cases} \end{cases}$$

La taula 2.3 conté les conclusions a les que hem arribat pel cas de les semblances que no són desplaçaments. Suposarem que  $k$  és un nombre real positiu i diferent de 1. A més, abreguem els noms posant  $h$  i  $h'$  per indicar homotècies de raó  $k$  i  $-k$ , respectivament;  $SA + h$  per indicar una simetria axial seguida d'una homotècia de raó  $k$  amb centre sobre l'eix de la simetria; i  $G + h$  per indicar un gir d'amplitud  $\alpha \neq 0, \pi$  seguit d'una homotècia de raó  $k$  amb el mateix centre que el gir. Els altres elements de la taula tenen el mateix significat que per la taula 2.1.

**E.2.65.** Mirant la taula 2.3, veiem que les semblances  $\varphi$  del pla de raó  $k \neq 1$  tenen totes un únic punt fix. Vegem com podem distingir-les. Posem  $f = \tilde{\varphi}$ .

- 1) Si  $f$  no té valors propis reals, llavors  $\varphi$  és un  $G + h$ . L'amplitud  $\alpha$  del gir es pot determinar mitjançant la fórmula  $2k \cos(\alpha) = \text{Tr}(f)$ .
- 2) Si  $f$  té valors propis reals, llavors  $\varphi$  és una homotècia quan els dos valors propis tenen el mateix signe i una  $SA + h$  quan tenen signes contraris. En el cas que sigui una  $SA + h$ , l'eix de la simetria es pot determinar per un procediment similar a l'emprat al punt 3) de l'exercici E.2.63.

Taula 2.3: Semblances del pla

| $n^+$ | $n^-$ | $n'$ | $\varphi$       | $s$ | $F$ | <b>Equacions reduïdes</b>          | <b>Nom</b> |
|-------|-------|------|-----------------|-----|-----|------------------------------------|------------|
| 2     | 0     | 0    | $h_{O,k}$       | $d$ | $O$ | $x' = kx, y' = ky$                 | $h$        |
| 1     | 1     | 0    | $h_{O,k\sigma}$ | $i$ | $O$ | $x' = kx, y' = -ky$                | $SA + h$   |
| 0     | 2     | 0    | $h_{O,-k}$      | $d$ | $O$ | $x' = -kx, y' = -ky$               | $h'$       |
| 0     | 0     | 2    | $\rho h$        | $d$ | $O$ | $x' = k(cx - sy), y' = k(sx + cy)$ | $G + h$    |

**E.2.66.** Hi ha també propietats geomètriques que ens permeten distingir els diversos casos de la taula 2.3. Una possibilitat és la consideració de les rectes invariants (una varietat lineal  $L$  es diu *invariant* per una afinitat  $\alpha$  si  $\alpha(L) = L$ ).

- 1) Les homotècies deixen invariants totes les rectes pel seu centre.
- 2) Una semblança de la forma  $SA + h$  només deixa invariants dues rectes per  $O$ : l'eix de la simetria i la recta perpendicular al mateix per  $O$ .
- 3) Una semblança de la forma  $G + h$  no deixa invariant cap recta.

Per distingir geomètricament les homotècies  $h$  i  $h'$ , podem usar la raó simple:

- 4) Si  $P \neq O$  i  $\lambda \in \mathbb{R}$ , llavors  $\sigma(O, P, h_{O,\lambda}(P)) = \lambda$ .

Taula 2.4: Algorisme de classificació de les semblances del pla

Partim d'una afinitat donada per l'equació matricial  $\mathbf{x}'^T = A\mathbf{x}^T + \mathbf{p}^T$  i suposem que hem verificat la condició  $A^TGA = k^2G$ , on  $k \neq 1$ , i calculat  $n^+$ ,  $n^-$  i  $n'$ .

$$\begin{cases} n' \neq 0 & \rightarrow G + h, \cos(\alpha) = \frac{1}{2k} \text{Tr}(A) \\ n' = 0 & \rightarrow \begin{cases} n^+ = 2 & \rightarrow h_{O,k} \\ n^+ = 1 & \rightarrow SA + h \\ n^+ = 0 & \rightarrow h_{O,-k} \end{cases} \end{cases}$$

### Semblances i desplaçaments a l'espai

En aquest apartat suposarem que  $\varphi$  és una semblança de raó  $k$  de  $\mathbb{A}^3$  i posarem  $f = \tilde{\varphi}$ . Farem servir les notacions de 2.43 i procedirem a l'estudi de  $\varphi$  segons els diversos valors de  $n^+$ ,  $n^-$  i  $n'$ .

L'aplicació  $f$  sempre té valors propis reals (per la proposició 2.41). Això significa que  $n^+ + n^- > 0$ . Com que  $n^+ + n^- + n' = 3$ , tenim que  $n' \leq 2$ , i com que  $n' \neq 1$ , serà

$n' = 0$  ó  $n' = 2$ . Amb això passem a discutir l'estructura de  $\varphi$  segons els sis casos que es poden presentar tenint en compte aquestes condicions.

Posarem  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$  per denotar una base de  $V$  i  $\mathcal{R} = [O, \mathbf{u}]$  una referència de  $\mathbb{A}^3$ . En cada cas direm com s'escullen els eixos  $u_i$  i l'origen  $O$ . Les coordenades d'un punt general  $X$  respecte d'aquesta referència es denotaran  $(x, y, z)$  i les de  $\varphi(X)$  es denotaran  $(x', y', z')$ .

$n^+ = 3$  La matriu de  $f$  respecte de  $\mathbf{u}$  és  $\text{diag}(k, k, k)$ , qualsevol que sigui  $\mathbf{u}$ . Es tracta, doncs, de semblances directes.

Si  $k \neq 1$ , llavors  $\varphi$  té un únic punt fix (proposició 1.34), que podem prendre com origen  $O$ . Les equacions de  $\varphi$  en la referència  $\mathcal{R}$  són  $\{x' = kx, y' = ky, z' = kz\}$ . Això mostra que  $\varphi = h_{O,k}$ , l'homotècia de centre  $O$  i raó  $k$ .

Si  $k = 1$ , llavors  $f = Id$  i  $\varphi$  és una translació. Si  $v$  és el vector que dona aquesta translació, i escollim  $u_1$  de forma que  $v = pu_1$  ( $p \in \mathbb{R}$ ), llavors les equacions de  $\varphi$  són  $\{x' = x + p, y' = y, z' = z\}$ .

$n^+ = 2, n^- = 1$  Escollim  $\mathbf{u}$  de forma que  $u_1, u_2$  sigui una base de  $V^+$  i  $u_3$  una base de  $V^-$ . Llavors la matriu de  $f$  és igual a  $\text{diag}(k, k, -k)$  i estem en presència de semblances inverses.

Si  $k \neq 1$ , llavors  $\varphi$  té un únic punt fix, que escollim com a origen  $O$ . Les equacions de  $\varphi$  són  $\{x' = kx, y' = ky, z' = -kz\}$ . Veiem doncs que  $\varphi$  és la composició (commutativa) de la simetria especular respecte del pla  $\{z = 0\}$  amb l'homotècia de centre  $O$  i raó  $k$ .

Quan  $k = 1$ , les equacions de  $\varphi$ , amb l'origen  $O$  arbitrari, són de la forma  $\{x' = x + p, y' = y + q, z' = -z + r\}$  ( $p, q, r \in \mathbb{R}$ ). Escollint com a origen el punt de coordenades  $(0, 0, r/2)$  (la qual cosa equival a fer el canvi  $z \mapsto z - r/2$ ), podem suposar que  $r = 0$ . Ara el vector  $v$  de components  $(p, q, 0)$  és de  $V^+$ . Podem suposar que  $q = 0$ , ja que podem escollir la base de  $V^+$  de manera que  $v$  sigui proporcional a  $u_1$ . Així, doncs, les equacions del desplaçament es poden posar en la forma  $\{x' = x + p, y' = y, z' = -z\}$ . Per tant  $\varphi$  és la composició (commutativa) de la simetria especular respecte del pla  $\{z = 0\}$  amb una translació paral·lela al pla de la simetria. Direm que  $\varphi$  és una *simetria especular amb lliscament*, o una *simetria especular amb translació paral·lela*. Si  $p = 0$  tenim simplement una *simetria especular*.

$n^+ = 1, n^- = 2$  Escollim  $\mathbf{u}$  de forma que  $u_1$  sigui una base de  $V^+$  i  $(u_2, u_3)$  una base de  $V^-$ . Llavors la matriu de  $f$  és igual a  $\text{diag}(k, -k, -k)$  i estem en presència de semblances directes.

Si  $k \neq 1$ , llavors  $\varphi$  té un únic punt fix, que escollim com origen  $O$ . Les equacions de  $\varphi$  són  $\{x' = kx, y' = -ky, z' = -kz\}$ . Veiem, doncs, que  $\varphi$  és la composició (commutativa) de la simetria axial respecte de l'eix  $Ox$  amb l'homotècia de centre  $O$  i raó  $k$ .

Quan  $k = 1$ , les equacions de  $\varphi$ , amb l'origen  $O$  arbitrari, són de la forma

$$\{x' = x + p, y' = -y + q, z' = -z + r\} \quad (p, q, r \in \mathbb{R}).$$

Escollint ara com origen el punt de coordenades  $(0, q/2, r/2)$  (la qual cosa equival a fer

el canvi  $y \mapsto y - q/2, z \mapsto z - r/2$ ), podem suposar que  $q = r = 0$ . Així, doncs, les equacions del desplaçament es poden posar en la forma  $\{x' = x + p, y' = -y, z' = -z\}$ . Per tant,  $\varphi$  és la composició (commutativa) de la simetria axial respecte de l'eix  $Ox$  amb una translació paral·lela a l'esmentat eix. Direm que  $\varphi$  és una *simetria axial amb lliscament*, o una *simetria axial amb translació paral·lela*. Si  $p = 0$  tenim simplement una *simetria axial*.

**$n^- = 3$**  L'aplicació  $f$  és l'homotècia lineal de raó  $-k$ . La matriu de  $f$  respecte de qualsevol base  $\mathbf{u}$  és  $\text{diag}(-k, -k, -k)$  i per tant les semblances d'aquest cas són inverses. Com que  $-k \neq 1$ ,  $\varphi$  té un únic punt fix, que prenem com origen  $O$ . En resulta que  $\varphi = h_{O, -k}$ , l'homotècia de centre  $O$  i raó  $-k$ . Per a  $k = 1$  es tracta de la *simetria central*  $\sigma_O$  i, en general,  $\varphi$  és la composició (commutativa) d'aquesta simetria amb l'homotècia de centre  $O$  i raó  $k$ .

**$n' = 2, n^+ = 1$**  Escollim  $u_1$  i  $u_2$  de manera que consitueixin una base ortonormal de  $V'$  i  $u_3$  un vector unitari de  $V^+$ . Llavors,  $\mathbf{u}$  és una base ortonormal de  $V$  i la matriu de  $f$  respecte d'aquesta base és de la forma  $k \begin{pmatrix} \rho(\alpha) & \\ & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\alpha \in (0, \pi)$ .

Si  $k \neq 1$ ,  $\varphi$  té un únic punt fix, que prenem com a origen  $O$ . Les equacions de  $\varphi$  són de la forma  $\{x' = k(cx - sy), y' = k(sx + cy), z' = kz\}$ , on  $c = \cos(\alpha)$  i  $s = \sin(\alpha)$ . Això mostra que  $\varphi$  és composició (commutativa) d'un gir d'amplitud  $\alpha$  al voltant de l'eix  $Oz$  amb l'homotècia de centre  $O$  i raó  $k$ .

Si  $k = 1$ , llavors les equacions de  $\varphi$ , amb un origen  $O$  qualsevol, són de la forma  $\{x' = cx - sy + p, y' = sx + cy + q, z' = z + r\}$ ,  $p, q, r \in \mathbb{R}$  i  $c$  i  $s$  com en el paràgraf anterior. Si ens fixem només en la transformació dels punts  $(x, y, 0)$ , veiem que es tracta d'un desplaçament tal que l'aplicació lineal associada no té vectors propis, i per tant té un únic punt fix. Escollint aquest punt com a origen, les equacions de  $\varphi$  adopten la forma  $\{x' = cx - sy, y' = sx + cy, z' = z + r\}$ . Veiem que es tracta de la composició (commutativa) d'un gir d'amplitud  $\alpha$  al voltant de l'eix  $Oz$  amb una translació paral·lela al mateix. D'aquest desplaçament, que és un «gir amb lliscament», se'n diu un *moviment helicoidal*.

**$n' = 2, n^- = 1$**  Escollim  $u_1$  i  $u_2$  de forma que consitueixin una base ortonormal de  $V'$  i  $u_3$  un vector unitari de  $V^-$ . Llavors,  $\mathbf{u}$  és una base ortonormal de  $V$  i la matriu de  $f$  respecte d'aquesta base és de la forma  $k \begin{pmatrix} \rho(\alpha) & \\ & -1 \end{pmatrix}$ ,  $\alpha \in (0, \pi)$ . Atès que  $f$  no té el valor propi 1,  $\varphi$  té un únic punt fix, que escollim com a origen  $O$ . Les equacions de  $\varphi$  adopten la forma  $\{x' = k(cx - sy), y' = k(sx + cy), z' = -kz\}$  ( $c = \cos(\alpha)$ ,  $s = \sin(\alpha)$ ) i veiem que es tracta de la composició (commutativa) d'una rotació d'amplitud  $\alpha$  al voltant de l'eix  $Oz$  amb la simetria especular respecte del pla  $\{z = 0\}$  i amb l'homotècia de centre  $O$  i raó  $k$ .

Si  $k = 1$  l'homotècia és la identitat i  $\varphi$  és composició del gir d'amplitud  $\alpha$  al voltant de l'eix de les  $Oz$  amb la simetria especular respecte del pla  $\{z = 0\}$ .

La taula 2.5 presenta d'una manera sinòptica les conclusions a les que hem arribat

pels desplaçaments de  $\mathbb{A}^3$ . La columna  $\varphi$  conté una descripció simbòlica del desplaçament:  $\sigma$  representa una simetria especular,  $\rho$  una simetria axial i  $\gamma$  un gir d'amplitud  $\alpha \neq 0, \pi$  al voltant d'una recta. Per altra banda,  $\tau$  representa una translació paral·lela al pla de  $\sigma$ , a l'eix de  $\rho$  ó a l'eix de  $\gamma$ , segons el cas. En la darrera fila, l'eix de  $\gamma$  és perpendicular al pla de  $\sigma$  i el punt  $O$  és la intersecció dels referits eix i pla.

La columna  $s$  conté el «sentit» del desplaçament: posem  $d$  o  $i$  segons que el desplaçament sigui directe o invers, respectivament, i la columna  $F$  conté una descripció del conjunt de punts fixos:  $O$  significa un punt fix,  $L$  una recta de punts fixos i  $\pi$  un pla de punts fixos.

Abreugem els noms amb els següents convenis:  $T$  indica una translació;  $SE$ , una simetria especular;  $SE + T$ , una simetria especular amb lliscament;  $SA$ , una simetria axial;  $SA + T$ , una simetria axial amb lliscament;  $SC$ , una simetria central;  $G$ , un gir;  $G + T$ , un moviment helicoïdal; i  $G + SE$ , la composició d'un gir amb una simetria especular respecte d'un pla perpendicular a l'eix del gir.

Taula 2.5: Desplaçaments de l'espai

| $n^+$ | $n^-$ | $n'$ | $\varphi$      | $s$ | $F$         | <b>Equacions reduïdes</b>                | <b>Nom</b> |
|-------|-------|------|----------------|-----|-------------|------------------------------------------|------------|
| 3     | 0     | 0    | $t_v$          | $d$ | $\emptyset$ | $x' = x + p, y' = y, z' = z$             | $T$        |
| 2     | 1     | 0    | $\sigma$       | $i$ | $\pi$       | $x' = x, y' = y, z' = -z$                | $SE$       |
| 2     | 1     | 0    | $\tau\sigma$   | $i$ | $\emptyset$ | $x' = x + p, y' = y, z' = -z$            | $SE + T$   |
| 1     | 2     | 0    | $\rho$         | $d$ | $L$         | $x' = x, y' = -y, z' = -z$               | $SA$       |
| 1     | 2     | 0    | $\tau\rho$     | $d$ | $\emptyset$ | $x' = x + p, y' = -y, z' = -z$           | $SA + T$   |
| 0     | 3     | 0    | $\sigma_O$     | $i$ | $O$         | $x' = -x, y' = -y, z' = -z$              | $SC$       |
| 1     | 0     | 2    | $\gamma$       | $d$ | $L$         | $x' = cx - sy, y' = sx + cy, z' = z$     | $G$        |
| 1     | 0     | 2    | $\tau\gamma$   | $d$ | $\emptyset$ | $x' = cx - sy, y' = sx + cy, z' = z + p$ | $G + T$    |
| 0     | 1     | 2    | $\sigma\gamma$ | $i$ | $O$         | $x' = cx - sy, y' = sx + cy, z' = -z$    | $G + SE$   |

**E.2.67.** Mirant la taula 2.5, comproveu que:

- 1) Les translacions, simetries axials amb lliscament i moviments helicoïdals coincideixen amb els desplaçaments directes sense punts fixos. Notem que podem mirar les simetries axials com girs d'amplitud  $\pi$ , amb la qual cosa les simetries axials amb lliscament es poden entendre com un cas particular de moviment helicoïdal. D'aquesta manera, els moviments helicoïdals són, descomptades les translacions, els únics desplaçaments directes sense punts fixos.
- 2) Les simetries especulars amb lliscament coincideixen amb els desplaçaments inversos sense punts fixos.
- 3) De desplaçaments amb un únic punt fix n'hi ha de directes i d'inversos: els directes són les simetries centrals i els inversos són els de la forma  $G + SE$ .

- 4) Tenint en compte, com en el punt 1), que una simetria axial es pot considerar com a un gir d'amplitud  $\pi$ , veiem que els únics desplaçaments de l'espai, la varietat de punts fixos dels quals és una recta, són els girs d'amplitud  $\alpha \in (0, 2\pi)$ .
- 5) Les simetries especulars són, tret de la identitat, els únics desplaçaments que tenen un pla de punts fixos.

**E.2.68.** En relació amb la classificació dels desplaçaments a l'espai explicada a l'exercici E.2.67, vegem que també hi ha certes propietats geomètriques que ens permeten distingir els diversos casos.

- 1) Una translació  $t_v$  deixa invariants les rectes paral·leles al vector  $v$ . Un moviment helicoidal (que pot ser una simetria axial amb lliscament) només deixa invariant una recta: el seu eix.
- 2) Una simetria especular amb lliscament deixa invariants, exactament, les rectes del pla de simetria que són paral·leles al vector del lliscament.
- 3) Una simetria central deixa invariants, precisament, les rectes que passen pel seu centre. En canvi, un desplaçament de la forma  $G + SE$  només deixa invariant una recta: el seu eix. Es diferencia, però, del cas del moviment helicoidal pel fet que aquest no deixa cap punt invariant del seu eix mentre que un desplaçament de la forma  $G + SE$  en deixa invariant un.
- 4) Un gir, descomptant ara les simetries axials, deixa invariant una única recta: el seu eix. Tots els punts d'aquest eix també són fixos i aquest fet ens permet diferenciar-lo dels moviments helicoidals i dels desplaçaments del tipus  $G + SE$ . Les rectes invariants per una simetria axial, en canvi, són el seu eix i totes les perpendiculars a aquest.
- 5) Les rectes invariants per una simetria especular són totes les rectes del seu pla de simetria i totes les rectes perpendiculars a aquest.

La taula 2.7 conté les conclusions a què hem arribat pel cas de semblances de  $A^3$  que no són desplaçaments. Ultra els abreujaments de la taula anterior, fem servir els següents convenis. El símbol  $k$  representa un nombre real positiu i diferent de 1. Posarem  $h$  i  $h'$  per indicar homotècies de raó  $k$  i  $-k$ , respectivament;  $SE + h$ , una simetria especular seguida d'una homotècia de raó  $k$  i centre sobre el pla de la simetria;  $SA + h$ , una simetria axial seguida d'una homotècia de raó  $k$  amb centre sobre l'eix de la simetria;  $G + h$ , un gir d'amplitud  $\alpha \neq 0, \pi$  seguit d'una translació al llarg de l'eix del gir; i  $G + SE + h$ , un gir d'amplitud  $\alpha \neq 0, \pi$ , seguit per una simetria especular respecte d'un pla perpendicular a l'eix del gir, i després per una homotècia de centre el punt  $O$  d'intersecció dels esmentats eix i pla.

**E.2.69.** Proveu, amb l'ajut de la taula 2.7, que amb l'esquema que segueix podem classificar les semblances a l'espai:

**E.2.70.** Establiu les propietats geomètriques de les semblances de l'espai que enunciem tot seguit.

Taula 2.6: Algorisme de classificació dels desplaçaments de l'espai

Partim d'una afinitat donada per l'equació matricial  $\mathbf{x}'^T = A\mathbf{x}^T + \mathbf{p}^T$  i suposem que hem verificat la condició  $A^TGA = G$  i calculat  $n^+$ ,  $n^-$ ,  $n'$  i la dimensió  $d$  de la varietat de punts fixos, amb el conveni que  $d = -1$  si no hi ha punts fixos.

$$\left\{ \begin{array}{l} n' \neq 0 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} d < 0 \rightarrow G + T, \cos(\alpha) = \frac{1}{2}(Tr(A) - 1) \\ d \geq 0 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} n^+ > 0 \rightarrow G, \cos(\alpha) = \frac{1}{2}(Tr(A) - 1) \\ n^+ = 0 \rightarrow G + SE, \cos(\alpha) = \frac{1}{2}(Tr(A) + 1) \end{array} \right. \end{array} \right. \\ \\ n' = 0 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} n^+ = 3 \rightarrow T \\ n^+ = 2 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} d < 0 \rightarrow SE + T \\ d \geq 0 \rightarrow SE \end{array} \right. \\ n^+ = 1 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} d < 0 \rightarrow SA + T \\ d \geq 0 \rightarrow SA \end{array} \right. \\ n^+ = 0 \rightarrow SC \end{array} \right. \end{array} \right.$$

- 1) Les homotècies són les úniques semblances que deixen invariants totes les rectes per  $O$ . Les de raó positiva són directes i les de raó negativa són inverses.
- 2) Considerem una simetria axial seguida d'homotècia ( $SA + h$ ) i posem  $L$  per denotar el seu eix i  $\Pi$  per denotar el pla per  $O$  perpendicular a  $L$ . Amb això, les rectes que deixa invariants són  $L$  i les rectes per  $O$  contingudes en el pla  $\Pi$ . Pel que fa als plans, deixa invariants  $\Pi$  i els que contenen  $L$ .
- 3) Considerem una simetria especular seguida d'homotècia ( $SE + h$ ) i posem  $\Pi$  per denotar el pla de la simetria i  $L$  per denotar la recta per  $O$  perpendicular a  $\Pi$ . D'aquesta manera les rectes que deixa invariants aquesta semblança són  $L$  i les del pla  $\Pi$  que passen per  $O$ . Anàlogament, deixa invariants el pla  $\Pi$  i els plans que contenen  $L$ . Veiem, doncs, que amb la configuració de rectes i plans invariants no podem distingir aquest cas de l'anterior. Tanmateix, el present cas és una semblança inversa i el cas anterior és una semblança directa.
- 4) Considerem un gir seguit d'homotècia ( $G + h$ ) i posem  $L$  per denotar l'eix del gir i  $\Pi$  per denotar el pla per  $O$  perpendicular a  $L$ . Llavors,  $L$  és l'única recta i  $\Pi$  l'únic pla que són invariants.
- 5) Considerem una semblança del tipus  $G + SE + h$  i posem  $\Pi$  per denotar el pla de la simetria i  $L$  per denotar la recta per  $O$  perpendicular a  $\Pi$ . Com en el cas anterior,  $L$  és l'única recta i  $\Pi$  l'únic pla que són invariants per la semblança. La distinció entre els dos casos és ben clara: mentre les semblances de tipus  $G + SE + h$  són inverses, les considerades en el cas anterior són directes.

Taula 2.7: Semblances a l'espai

| $n^+$ | $n^-$ | $n'$ | $\varphi$       | $s$ | $F$ | Equacions reduïdes                         | Nom          |
|-------|-------|------|-----------------|-----|-----|--------------------------------------------|--------------|
| 3     | 0     | 0    | $h_{O,k}$       | $d$ | $O$ | $x' = kx, y' = ky, z' = kz$                | $h$          |
| 2     | 1     | 0    | $h_{O,k\sigma}$ | $i$ | $O$ | $hx' = kx, y' = ky, z' = -kz$              | $SE + h$     |
| 1     | 2     | 0    | $h_{O,k\rho}$   | $d$ | $O$ | $x' = kx, y' = -ky, z' = -kz$              | $SA + h$     |
| 0     | 3     | 0    | $h_{O,-k}$      | $i$ | $O$ | $x' = -kx, y' = -ky, z' = -kz$             | $h'$         |
| 1     | 0     | 2    | $h_{O,k\gamma}$ | $d$ | $O$ | $x' = kcx - ksy, y' = ksx + kcy, z' = kz$  | $G + h$      |
| 0     | 1     | 2    | $h\sigma\gamma$ | $i$ | $O$ | $x' = kcx - ksy, y' = ksx + kcy, z' = -kz$ | $G + SE + h$ |

Taula 2.8: Algorisme de classificació de les semblances de l'espai

Partim d'una afinitat donada per l'equació matricial  $\mathbf{x}'^T = A\mathbf{x}^T + \mathbf{p}^T$  i suposem que hem verificat la condició  $A^TGA = kG$ , on  $k \neq 1$ , i calculat  $n^+$ ,  $n^-$  i  $n'$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} n' \neq 0 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} n^+ = 1 \rightarrow G + h, \cos(\alpha) = \frac{1}{2k} \text{Tr}(A) - \frac{1}{2} \\ n^+ = 0 \rightarrow G + SE + h, \cos(\alpha) = \frac{1}{2k} \text{Tr}(A) + \frac{1}{2} \end{array} \right. \\ n' = 0 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} n^+ = 3 \rightarrow h_{O,k} \\ n^+ = 2 \rightarrow SE + h \\ n^+ = 1 \rightarrow SA + h \\ n^+ = 0 \rightarrow h_{O,-k} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

## 2.6 Problemes

**P.2.1.** Sigui  $V$  un espai vectorial real de dimensió 3 i  $g$  una forma bilineal definida positiva de  $V$ . Sigui  $S^2 \subset V$  l'esfera unitat de  $V$ , és a dir,  $S^2 = \{x \in V \mid g(v, v) = 1\}$ . Donada una base ortonormal  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$  de  $V$ , sigui  $p: [0, 2\pi) \times [-\pi/2, \pi/2] \rightarrow S^2$  l'aplicació definida per la fórmula

$$p(\varphi, \theta) = \cos(\varphi) \cos(\theta) u_1 + \sin(\varphi) \cos(\theta) u_2 + \sin(\theta) u_3.$$

Demostreu que  $p$  és exhaustiva i que indueix una bijecció entre  $[0, 2\pi) \times (-\pi, \pi)$  i  $S^2 - \{\pm u_3\}$ .

Els angles  $\varphi$  i  $\theta$  es solen denominar, quan  $|\theta| < \frac{\pi}{2}$ , *longitud* i *latitud* del punt  $p(\varphi, \theta)$  (relativament a la base  $\mathbf{u}$ ). La latitud de  $\pm u_3$  és  $\pm \frac{\pi}{2}$ , però la longitud d'aquests vectors no està definida.



**P.2.2.** Siguin  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , les coordenades, en una referència rectangular, dels vèrtexs  $P_i$  d'un polígon pla convex (és a dir, per a cada costat  $P_i P_{i+1}$  del polígon, tots els vèrtexs estan en un mateix semiplà d'aquest costat, on convenim que  $P_{n+1} = P_1$ ). Proveu que l'àrea del polígon és igual a

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \begin{vmatrix} x_i & x_{i+1} \\ y_i & y_{i+1} \end{vmatrix}.$$

Noteu que en el cas d'un triangle aquesta fórmula coincideix amb la que hem establert en l'exercici E.2.46.

**P.2.3.** Siguin  $L$  i  $L'$  varietats lineals,  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_k)$  una base de  $W(L) + W(L')$ ,  $P \in L$ ,  $P' \in L'$  i  $x = P' - P$ . Demostreu que

$$d(L, L') = V(v_1, \dots, v_k, x) / V(v_1, \dots, v_k)$$

i que

$$d(L, L') = \sqrt{|x|^2 - (x \cdot \mathbf{v})(\mathbf{v}^T \cdot \mathbf{v})^{-1}(x \cdot \mathbf{v})^T}.$$

**P.2.4.** Siguin  $L$  i  $L'$  varietats lineals i suposem que tenim una base  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_s)$  de  $(W(L) + W(L'))^\perp$ . Demostreu que si  $P \in L$ ,  $P' \in L'$  i  $x = P' - P$ , llavors

$$d(L, L') = \sqrt{(x \cdot \mathbf{u})(\mathbf{u}^T \cdot \mathbf{u})^{-1}(x \cdot \mathbf{u})^T}.$$

Demostreu també que

$$d(L, L') = \sqrt{|x|^2 - \delta^2},$$

on  $\delta = V(u_1, \dots, u_s, x) / V(u_1, \dots, u_s)$ .

**P.2.5.** Sigui  $K$  un cos i  $V$  un espai vectorial sobre  $K$ . Sigui  $g: V \times V \rightarrow K$  una aplicació bilineal i definim  $\hat{g}: V \rightarrow V^*$  per la fórmula

$$\hat{g}(v)(x) = v \cdot x,$$

per a tot  $x \in V$ . Usant que  $g$  és bilineal, comproveu que  $\hat{g}$  és lineal.

Es diu que  $g$  és *no degenerada* si  $\hat{g}$  és un isomorfisme. Aquesta condició equival, atès que  $V$  i  $V^*$  tenen la mateixa dimensió, a  $\ker(\hat{g}) = \{0\}$ . Dit explícitament,  $g$  és no degenerada si i només si de  $g(v, x) = 0$  per a tot  $x \in V$  es pot deduir que  $v = 0$ . Dir que  $g$  és no degenerada es pot formular encara de la següent manera: per a tot  $\xi \in V^*$ , existeix un únic  $v \in V$  tal que  $g(v, x) = \xi(x)$  per a tot  $x \in V$ .

Demostreu que si  $g$  és no degenerada i  $g(x, v) = 0$  per a tot  $x \in V$ , llavors  $v = 0$  (noteu que aquest enunciat només és obvi quan  $g$  és simètrica).

Comproveu, finalment, que la matriu  $G$  de  $g$  en una base  $\mathbf{e}$  de  $V$  coincideix amb la matriu de  $\hat{g}$  respecte de  $\mathbf{e}$  i  $\mathbf{e}^*$ , on  $\mathbf{e}^*$  designa la base dual de  $\mathbf{e}$  (és a dir, si  $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$ , llavors  $\mathbf{e}^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$ , on  $e_i^* \in V^*$  es defineix per les relacions  $e_i^*(e_j) = 0$  si  $i \neq j$  i  $e_i^*(e_i) = 1$ ).

**P.2.6.** Amb les notacions del problema anterior, demostreu que l'aplicació  $g \mapsto \hat{g}$  és un isomorfisme entre l'espai  $L_2(V)$  de les aplicacions bilineals  $g: V \times V \rightarrow K$  i l'espai  $L(V, V^*)$  de les aplicacions lineals de  $V$  en  $V^*$ .

Demostreu també que aquest isomorfisme induïx un isomorfisme entre l'espai  $S_2(V) \subseteq L_2(V)$  de les aplicacions bilineals simètriques i l'espai  $S(V)$  de les aplicacions lineals simètriques  $\gamma: V \rightarrow V^*$  (diem que  $\gamma$  és simètrica si  $\gamma = \gamma^T$ , on  $\gamma^T: V \rightarrow V^*$  és la composició de l'isomorfisme canònic  $V \rightarrow V^{**}$  amb l'aplicació  $\gamma^*: V^{**} \rightarrow V^*$  dual de  $\gamma$ ; pareu esment en que  $\gamma^T$  és l'única aplicació lineal tal que  $\gamma^T(v)(w) = \gamma(w)(v)$ ).

**P.2.7.** En un espai vectorial euclidià de dimensió 1, el producte vectorial  $\wedge_o$  és una funció sense variables, és a dir, un element de  $V$ . Quin element?

**P.2.8** (Teorema de Dieudonné–Cartan). En un espai euclidià de dimensió  $n$ , tot desplaçament es pot obtenir com a composició de simetries especulars. A més, el nombre mínim de simetries és no superior a  $n + 1$ .

Indicacions: Sigui  $\varphi$  un desplaçament,  $P_0, P_1, \dots, P_n$  una referència i posem  $P'_i = \varphi(P_i)$  ( $0 \leq i \leq n$ ). Sigui  $j = j(\varphi) \in [0, n + 1]$  el nombre d'índexos  $i \in [0, n]$  tals que  $P'_i \neq P_i$ . Ara es pot raonar inductivament per mostrar que  $\varphi$  és producte de com a màxim  $j$  simetries especulars. Si  $j = 0$ , llavors  $\varphi = Id$ , i  $Id$  és producte de 0 simetries especulars. Si  $j > 0$  i  $P'_\ell \neq P_\ell$ , sigui  $s$  la simetria especular respecte de l'hiperplà bisector del segment  $[P_\ell, P'_\ell]$  (és a dir, l'hiperplà perpendicular a  $P_\ell P'_\ell$  i que passa pel punt mitjà  $M(P_\ell, P'_\ell)$  de  $[P_\ell, P'_\ell]$ ). Llavors  $\varphi' = s\varphi$  deixa fix  $P_i$  si  $P_i = P'_i$  i a més a més deixa fix  $P_\ell$ , la qual cosa mostra que  $j(\varphi') \leq j - 1$ . Per recurrència  $\varphi'$  és producte de com a màxim  $j - 1$  simetries especulars i, per tant,  $\varphi = s\varphi'$  és producte de com a màxim  $j$  simetries especulars.

**P.2.9.** Demostreu que les úniques semblances  $\varphi$  d'un espai euclidià tals que  $\varphi^2 = Id$  són les simetries  $\sigma_L$  respecte de varietats lineals  $L$ .

**P.2.10.** Siguin  $L$  i  $L'$  dues varietats lineals d'un espai euclidià de dimensió  $n$  i posem  $W = W(L)$  i  $W' = W(L')$ . Demostreu que les simetries  $\sigma_L$  i  $\sigma_{L'}$  commuten si i només si compleixen les dues condicions següents:

- 1)  $L \cap L' \neq \emptyset$ , i
- 2) Si  $W = W_0 \oplus U$  i  $W' = W_0 \oplus U'$ , amb  $W_0 \perp U$  i amb  $W_0 \perp U'$ , es té que  $U \perp U'$ .

Demostreu també que si aquestes condicions es compleixen i  $\Lambda = O + (U + U')^\perp$ , on  $O$  és qualsevol punt de  $L \cap L'$ , aleshores  $\sigma_L \circ \sigma_{L'} = \sigma_\Lambda$ .

**P.2.11.** Sigui  $f: V \rightarrow V$  una semblança lineal de raó  $k$  d'un espai vectorial euclidià de dimensió  $n$ . Amb les notacions de 2.43, demostreu que existeix una base ortonormal de

$V$  respecte de la qual la matriu de  $f$  és de la forma

$$k \begin{pmatrix} I_{n^+} & & & \\ & I_{n^-} & & \\ & & \rho(\alpha_1) & \\ & & & \ddots \\ & & & & \rho(\alpha_s) \end{pmatrix},$$

on  $s = n'/2$  i on  $\alpha_i \in (0, \pi)$ . Com que el polinomi característic d'aquesta matriu és (sense tenir en compte el factor  $k$ )

$$(\lambda - 1)^{n^+} (\lambda + 1)^{n^-} \prod_{i=1}^s (\lambda^2 - 2 \cos(\alpha_i) + 1),$$

veiem que els angles  $\alpha_i$  queden unívocament determinats per  $f$ .

Els problemes que segueixen fan referència als quaternions (vegeu l'apartat «Quaternions» de la secció 2.3 per a notacions i resultats).

**P.2.12.** De la fórmula [2.33''] se'n dedueix fàcilment que en un espai vectorial euclidià orientat de dimensió 3 tenim la identitat

$$u \wedge (v \wedge w) + v \wedge (w \wedge u) + w \wedge (u \wedge v) = 0$$

(*identitat de Jacobi* del producte vectorial). Demostreu, a l'espai  $V_3$  dels quaternions purs, que la identitat de Jacobi és equivalent a la propietat associativa  $u(vw) = (uv)w$  del producte de quaternions.

**P.2.13** (Identitat de Lagrange). Donats nombres reals  $x_1, \dots, x_4, y_1, \dots, y_4$ , demostreu que

$$\begin{aligned} (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2) = \\ (x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3 - x_4y_4)^2 + (x_1y_2 + x_2y_1 + x_3y_4 - x_4y_3)^2 \\ + (x_1y_3 + x_3y_1 - x_2y_4 + x_4y_2)^2 + (x_1y_4 + x_4y_1 + x_2y_3 - x_3y_2)^2. \end{aligned}$$

Indicació: useu el fet que si  $\mathbf{q}$  i  $\mathbf{q}'$  són quaternions, llavors  $|\mathbf{q}\mathbf{q}'| = |\mathbf{q}||\mathbf{q}'|$ .

**P.2.14.** Demostreu que un quaternió és pur (és a dir, que la seva part real és 0) si i només si el seu quadrat és un nombre real no positiu. Deduïu-ne que, si  $\mathbf{q}$  és un quaternió tal que  $\mathbf{q}^2 = -1$ , llavors  $\mathbf{q} \in S^2$ , on  $S^2$  és l'esfera de radi 1 de  $V_3$ , i recíprocament. Indicació: Si posem  $\mathbf{q} = \lambda + v$ , amb  $\lambda \in \mathbb{R}$  i  $v \in V_3$ , llavors  $\mathbf{q}^2 = (\lambda^2 - |v|^2) + 2\lambda v$ .

**P.2.15.** Si  $v, x \in V_3$ , demostreu que  $v xv = -2(v \cdot x)v + |v|^2 x$ .

L'objecte bàsic dels problemes que segueixen és exposar els trets essencials dels remarcables lligams que hi ha entre els quaternions i la geometria de l'espai ordinari. Tot i que es poden entendre i resoldre amb el que duem dit, abans de prosseguir amb els enunciats fem unes consideracions que poden ajudar a comprendre el seu significat geomètric.

Originalment Hamilton cercava reproduir per als vectors  $V_3$  de l'espai ordinari una interpretació similar a la dels vectors d'un pla vectorial real com a nombres complexos. Segons aquesta interpretació, es pot mirar un vector  $z \in V_2$  com la transformació  $x \mapsto zx$ , que equival a aplicar al vector  $x$  un gir d'amplitud  $\arg(z)$  seguit d'una homotècia de raó  $|z|$ . Així doncs, hi ha una correspondència bijectiva entre els nombres complexos no nuls i les semblances lineals directes de  $V_2$ .

L'esmentada interpretació per  $V_3$ , però, no és possible. La raó que una tal interpretació no sigui possible per  $V_3$  prové del fet que un vector de  $V_3$  té tres graus de llibertat (un per a cada una de les seves components respecte d'una base), mentre que les semblances lineals del mateix espai tenen quatre graus de llibertat: un per fixar la raó de la semblança i tres per donar la transformació d'una base ortonormal donada  $\mathbf{u} = u_1, u_2, u_3$  en una altra base ortonormal  $\mathbf{u} = u'_1, u'_2, u'_3$ . Adoneu-vos que hi ha dos graus de llibertat per donar la imatge  $u'_1$  de  $u_1$ , pel problema P.2.1, i, un cop fixat  $u'_1$ , un grau de llibertat per fixar  $u'_2$  dins de  $\langle u'_1 \rangle^\perp$ .

Per tant, una hipotètica estructura amb la qual es puguin representar les semblances lineals directes d'un espai vectorial euclidià de dimensió 3, de manera anàloga a com es poden representar les semblances directes d'un pla vectorial euclidià amb nombres complexos, ha de tenir necessàriament quatre graus de llibertat. Un cop feta aquesta constatació per Hamilton, els elements d'aquesta estructura hipotètica els va anomenar *quaternions* i a poc a poc va anar dilucidant moltes de les meravelloses propietats que havien de tenir. Un dels passos més importants va consistir a adonar-se que la no commutativitat de la composició de semblances lineals a l'espai forçava, per contrast amb el que passa amb les semblances d'un pla, que els quaternions  $\pm q$  havien de representar la mateixa semblança. Un cop comprès aquest fet, Hamilton aviat va arribar a poder definir *formalment* els quaternions com a expressions de la forma  $a1 + bi + cj + dk$ , on  $\pm 1$  són els quaternions que representen la identitat i on  $\pm i, \pm j, \pm k$  representen els girs d'amplitud  $\pi$  al voltant dels eixos d'una referència ortonormal donada. A més a més, amb aquesta representació la multiplicació de quaternions corresponent a la composició de semblances queda determinada imposant que sigui bilineal i que es compleixin les relacions de Hamilton (fórmules [2.37]). Aquí assenyallem només que les rotacions  $I, J, K$  que corresponen a  $i, j, k$  compleixen  $I^2 = J^2 = K^2 = Id$ ,  $IJ = JI = K$ ,  $JK = KJ = I$  i  $KI = IK = J$ , amb la qual cosa l'àlgebra dels quaternions  $\{a1 + bi + cj + dk\}$  seria commutativa si la representació de semblances per quaternions fos biunívoca.

Havent exposat la introducció formal dels quaternions al final de la secció 2.3, és ara apropiat aprofundir el seu coneixement segons les idees que hem explicat. L'objecte és, doncs, de comprendre el procés pel qual s'associa una semblança lineal a un quaternió i d'utilitzar-lo per obtenir noves propietats de les semblances i de les isometries lineals.

**P.2.16.** Donat un quaternió  $q = \lambda + v$  no nul ( $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $v \in V_3$ ), i un  $x \in V_3$ , posem  $f_q(x) = qxq^*$ . Demostreu que  $f_q(x) \in V_3$ , que l'aplicació  $f_q: V_3 \rightarrow V_3$  és una semblança lineal directa de raó  $|q|^2$ , i que  $f_q(v) = |q|^2v$  (és a dir, que  $v$  és un vector propi de  $f_q$  de valor propi  $|q|^2$ ). En particular tenim que  $f_q$  és una isometria lineal de  $V_3$  si i només si  $q \in SU_2$ , i en aquest cas  $v$  és un vector propi de  $f_q$  de valor propi 1 (recordem que  $SU_2$  és el grup de quaternions de mòdul 1).

**P.2.17.** Demostreu que si  $q = \lambda + v$  ( $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $v \in V_3$ ) és un quaternió no nul i  $x \in V_3$ , llavors

$$f_q(x) = 2(v \cdot x)v + (\lambda^2 - |v|^2)x + 2\lambda v \wedge x.$$

En particular, tenim, fent  $\lambda = 0$ , que

$$f_v(x) = 2(v \cdot x)v - |v|^2x,$$

i, fent  $v = 0$ , que

$$f_\lambda(x) = \lambda^2x.$$

Remarqueu que la darrera fórmula es pot escriure  $f_\lambda = h_{\lambda^2}$  (és a dir, l'homotècia de raó  $\lambda^2$ ).

**P.2.18.** Useu el problema anterior per mostrar que si  $v \in V_3$ ,  $v \neq 0$ , i  $x \in \langle v \rangle^\perp$ , llavors  $f_v(x) = -|v|^2x$ . Tot seguit mostreu que  $f_v = |v|^2s_{\langle v \rangle}$  (recordem que  $s_{\langle v \rangle}$  és la simetria respecte de  $\langle v \rangle$ ). Així, doncs,  $f_v$  és la composició del gir d'amplitud  $\pi$  al voltant de  $v$  seguit de l'homotècia de raó  $|v|^2$ .

**P.2.19.** Sigui  $q = \lambda + v$  un quaternió ( $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $v \in V_3$ ) i suposem que  $v \neq 0$ . Demostreu que  $x \in V_3$  és un vector propi de  $f_q$  si i només si, o bé  $x \in \langle v \rangle$ , o bé  $x \in \langle v \rangle^\perp$  i  $q = v$  (és a dir,  $\lambda = 0$ ). Deduïu-ne que  $f_q$  és una semblança directa (amb les notacions de 2.43,  $n^+ = 1$  i  $n^- = 0$  si  $\lambda \neq 0$ ,  $n^+ = 1$  i  $n^- = 2$  si  $\lambda = 0$ ).

Aquest darrer fet el podeu demostrar també de la següent manera. Sigui  $u_1 = v/|v|$  i formem una base ortonormal  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$  amb la mateixa orientació que  $i, j, k$ . Llavors podeu veure, usant les fórmules anteriors, que la matriu de  $f_q$  en la base  $\mathbf{u}$  és

$$\begin{pmatrix} |q|^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2 - |v|^2 & -2\lambda|v| \\ 0 & 2\lambda|v| & \lambda^2 - |v|^2 \end{pmatrix},$$

d'on podeu deduir que  $\det(f_q) = |q|^6 > 0$ .

**P.2.20.** Amb les notacions i resultats del problema anterior, si posem  $g$  per denotar la mètrica euclidiana de  $V_3$ , llavors podem escriure  $f_q \in \mathcal{S}^+(g)$ , quan  $q \in \mathbb{H}^*$ , i  $f_q \in SO(g)$ , quan  $q \in SU_2$ , on posem  $\mathcal{S}^+(g) \subset \mathcal{S}(g)$  per denotar el subgrup del grup  $\mathcal{S}(g)$  de les semblances lineals format per les semblances lineals directes de  $V_3$  i  $SO(g) \subset O(g)$ .

per denotar el subgrup de  $O(g)$  format per les isometries lineals amb determinant  $+1$ . Demostreu que l'aplicació  $\sigma : \mathbb{H}^* \rightarrow \mathcal{S}^+(g)$  tal que  $\sigma(\mathbf{q}) = f_{\mathbf{q}}$  és un homomorfisme de grups. Demostreu també, usant la fórmula del problema P.2.17, que  $\ker(\sigma) = \{\pm 1\}$ . Remarqueu que  $\sigma$  induïx un homomorfisme  $SU_2 \rightarrow SO(g)$  (que també serà denotat per  $\sigma$ ) i que el seu nucli és  $\{\pm 1\} \cap SU_2 = \{\pm 1\}$ .

**P.2.21.** Sigui  $\mathbf{q} = \lambda + v$  un quaternió ( $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $v \in V_3$ ) i suposem que  $v \neq 0$ . Sigui  $x \in \langle v \rangle^\perp \subseteq V_3$ ,  $x \neq 0$ , i posem  $\alpha = \alpha_o(x, f_{\mathbf{q}}(x))$ , on una base  $u_1, u_2$  de  $\langle v \rangle^\perp$  és  $\sigma$ -orientada si i només si la base  $u_1, u_2, v$  de  $V_3$  té la mateixa orientació que la base  $i, j, k$ . Demostreu que

$$\cos(\alpha) = \frac{\lambda^2 - |v|^2}{|\mathbf{q}|^2} = \frac{\lambda^2 - |v|^2}{\lambda^2 + |v|^2} \quad \text{i} \quad \sin(\alpha) = V_o(x, f_{\mathbf{q}}(x)) = \frac{2\lambda|v|}{|\mathbf{q}|^2} = \frac{2\lambda|v|}{\lambda^2 + |v|^2}.$$

Com que  $\alpha$  és independent de  $x$ , en resulta que  $f_{\mathbf{q}}$  és la composició de  $\rho_{v,\alpha}$ , el gir directe d'amplitud  $\alpha$  al voltant de  $v$ , amb l'homotècia de raó  $|\mathbf{q}|^2$ .

**P.2.22.** Demostreu que els homomorfismes  $\sigma : \mathbb{H}^* \rightarrow \mathcal{S}^+(g)$  i  $\sigma : SU_2 \rightarrow SO(g)$  són exhaustius. Per tant, tota semblança directa de  $V_3$  és de la forma  $\sigma(\mathbf{q}) = f_{\mathbf{q}}$ , amb  $\mathbf{q} \in \mathbb{H}^*$  determinat llevat d'un signe. En particular, tota isometria lineal de  $V_3$  és de la forma  $\sigma(\mathbf{q})$ , amb  $\mathbf{q} \in SU_2$  determinat llevat d'un signe.

**P.2.23.** Siguin  $B_3 = \{v \in V_3 \mid |v| < 1\}$  i  $\overline{B}_3 = \{v \in V_3 \mid |v| \leq 1\} = B_3 \sqcup S^2$ , on  $S^2 = \{v \in V_3 \mid |v| = 1\}$ . Donat  $v \in \overline{B}_3$ , sigui  $\hat{v} = \sqrt{1 - |v|^2} + v \in \mathbb{H}$ . Comproveu que  $\hat{v} \in SU_2$  i demostreu que si  $\alpha \in [0, \pi]$  és l'angle determinat per la relació  $\cos(\frac{\alpha}{2}) = \sqrt{1 - |v|^2}$ , llavors  $\sigma(\hat{v}) = \rho_{v,\alpha}$ . Deduïu-ne que l'aplicació  $\overline{B}_3 \rightarrow SO(g)$  tal que  $v \mapsto \sigma(\hat{v})$  és exhaustiva, que la seva restricció a  $B_3$  és injectiva i que si  $v \neq v'$  i  $\sigma(\hat{v}) = \sigma(\hat{v}')$ , llavors  $v \in S^2$  i  $v' = -v$ .

**P.2.24.** Per a cada vector  $u \in S^2$  i cada angle  $\alpha \in [0, \pi]$ , posem

$$\hat{u}_\alpha = \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)u \in \mathbb{H}.$$

Comproveu que  $\hat{u}_\alpha \in SU_2$  i que  $\sigma(\hat{u}_\alpha) = \rho_{u,\alpha}$ . Deduïu-ne que l'aplicació  $S^2 \times (0, \pi] \rightarrow SO(g)$  tal que  $(u, \alpha) \mapsto \sigma(\hat{u}_\alpha)$  és exhaustiva i que, si  $\sigma(\hat{u}_\alpha) = \sigma(\hat{u}'_{\alpha'})$  amb  $(u, \alpha) \neq (u', \alpha')$ , llavors  $u' = -u$  i  $\alpha = \alpha' = \pi$ . Remarqueu que  $\rho_{u,0} = Id$  per a tot  $u \in S^2$ .

### 3 Geometria projectiva

A la secció 3.0 es fan diverses consideracions per tal de motivar la introducció dels dos conceptes principals sobre els quals descansa el nostre tractament de la geometria projectiva: la noció d'espai projectiu i la noció de clausura projectiva d'un espai afí. Si bé la secció no és necessària, des d'un punt de vista estrictament lògic, per a la resta del capítol, al lector que comença l'estudi de la geometria projectiva pot resultar-li indispensable per tal d'entendre pròpiament els esmentats conceptes.

L'espai projectiu i les varietats lineals s'introdueixen formalment a la secció 3.1. Després de considerar les seves propietats més fonamentals, es demostren alguns dels resultats més bàsics, com ara el teorema de Desargues, el teorema de Pappus i la fórmula de les dimensions per a varietats lineals. Al final de la secció s'estudia la clausura projectiva d'un espai afí i de les seves varietats lineals.

A la secció 3.4 s'introdueixen, després d'unes primeres consideracions relatives a les configuracions de punts, les referències projectives, i s'estudien les coordenades projectives, especialment en relació amb la representació de les varietats lineals mitjançant equacions —implícites i explícites. Tot seguit (secció 3.3), s'estudien les projectivitats i, especialment, les perspectivitats, d'una banda, i el grup de les homografies d'un espai projectiu, de l'altra. També es mostra com el grup d'afinitats d'un espai afí s'inclou en el grup d'homografies de la seva clausura projectiva.

El concepte de raó doble, un dels més bàsics de la geometria projectiva, s'estudia a la secció 3.4. Abans de la seva definició formal, s'explica la seva significació «projectiva» en termes de geometria mètrica i, immediatament després, es mostra com es relaciona amb les coordenades projectives i amb la raó simple. A continuació, s'estudien les seves propietats en relació amb les permutacions dels punts. En els dos darrers apartats, s'introdueixen i estudien les quaternes harmòniques i les anharmòniques. Els resultats més importants que incloem, relatius a les quaternes harmòniques, són el teorema del quadrangle complet i la construcció del quart harmònic.

Finalitzem el capítol amb una secció destinada al principi de dualitat. Aquest principi produeix, per a cada teorema de geometria projectiva, un nou teorema, anomenat «dual» d'aquell. En el cas del pla, per exemple, el dual del teorema de Pappus és un nou teorema d'incidència i el dual del teorema de Desargues coincideix amb el seu recíproc.

Pel que fa a la justificació del principi de dualitat, esmentem només que es basa en la consideració de l'espai projectiu  $\mathbb{P}(E')$  de l'espai vectorial  $E'$ , dual de l'espai vectorial  $E$ , i en la relació natural que hi ha entre les varietats lineals de  $\mathbb{P}(E)$  i  $\mathbb{P}(E')$ .

### 3.0 De la perspectiva a l'espai projectiu

Entre les idees més importants degudes a Desargues (1593-1662), històricament el primer que va intentar sistematitzar la geometria projectiva, s'ha d'esmentar l'addició d'un punt (dit «impropi») comú a totes les rectes d'un mateix feix de rectes paral·leles, amb la qual cosa dues rectes coplanàries distintes sempre es tallen en un punt (impropi si són paral·leles).

En aquesta secció, primer adduïm algunes raons, originades en l'estudi de la perspectiva, que fan veure la naturalitat de la idea dels punts impropis. Després descrivim breument la clausura projectiva d'un espai afí, és a dir, l'estructura que resulta d'afegir els punts impropis als punts ordinaris (o «propis»). Finalment, exposem una demostració del teorema de Desargues dels triangles en perspectiva, seguida d'unes reflexions sobre la «unificació» que el punt de vista projectiu aporta en relació amb la geometria afí.

#### *Perspectiva. Projecció i secció*

Els pintors del Renaixement es van adonar que el dibuix en «perspectiva» d'un objecte ha de satisfer les relacions que s'esquematitzen en la figura 3.1: si  $O$  és el punt des del qual es contemplen els punts  $P, Q, R, \dots$  de la figura, i  $\Pi$  és el pla del dibuix, els punts  $P', Q', R', \dots$  corresponents a  $P, Q, R, \dots$  són la intersecció de les rectes  $OP, OQ, OR, \dots$  amb  $\Pi$ .

De la descripció anterior podem destil·lar dues operacions geomètriques fonamentals: la primera consisteix a *projectar* un punt  $P$  de l'espai afí des d'un punt fix  $O$ , és a dir, a formar la recta  $OP$  (anomenada la *projectant de  $P$  des de  $O$* ), i la segona consisteix a *tallar* les rectes per  $O$  (dites *projectants des de  $O$* ) per un pla  $\Pi$  que no passa per  $O$ . La composició d'aquestes dues operacions ens dona la *projecció des de  $O$  d'un punt  $P$  sobre el pla  $\Pi$* , això és, el punt  $P'$  d'intersecció amb  $\Pi$  de la projectant de  $P$  des de  $O$ .

Adonem-nos que  $O$  és l'únic punt que no es pot projectar des de  $O$ , i que la secció per  $\Pi$  només està definida per les projectants des de  $O$  que tallen a  $\Pi$ , és a dir, no està definida per les projectants paral·leles a  $\Pi$ . D'això en resulta que la projecció d'un punt  $P$  sobre el pla  $\Pi$  no està definida precisament quan la projectant  $OP$  és paral·lela a  $\Pi$ .



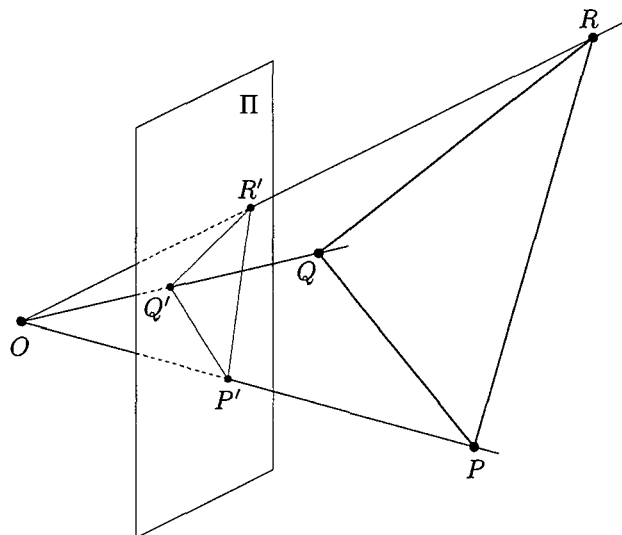


Figura 3.1: Dibuix de  $PQR$ , sobre el pla  $\Pi$ , en perspectiva des de  $O$

### Representació projectiva d'una recta

Per tal de veure que el comportament de les projeccions respecte del paral·lelisme no és tan insatisfactori com podria fer pensar el darrer paràgraf, estudiem primer amb una mica més de detall la projecció d'una recta des d'un punt.

Considerem una recta  $L$  que no passa per  $O$  i formem el conjunt  $L_O$  de les projectants des de  $O$  dels punts  $P$  de  $L$  (figura 3.2). És clar que  $L_O$  coincideix amb el conjunt de rectes per  $O$  contingudes en el pla  $L \vee O$ , llevat de la recta per  $O$  paral·lela a  $L$ . Si posem  $\bar{L}_O$  per denotar el conjunt de rectes per  $O$  contingudes en el pla  $L \vee O$ , conjunt al qual ens referirem dient-ne la «representació projectiva» de  $L$ , i  $OL_\infty \in \bar{L}_O$  per denotar la recta per  $O$  paral·lela a  $L$ , llavors tenim  $\bar{L}_O = L_O \cup \{OL_\infty\}$ .

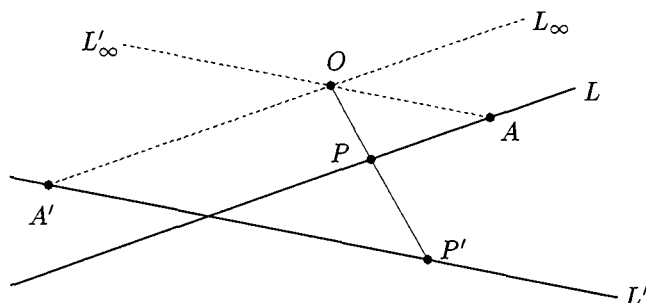


Figura 3.2: Representació projectiva de les rectes  $L$  i  $L'$

La projectant  $OL_\infty$  només és excepcional respecte de  $L$  o, més ben dit, de les rectes paral·leles a  $L$ . Per veure això amb més relleu, considerem una altra recta  $L'$  del pla  $L \vee O$ , no paral·lela a  $L$  i que no passa per  $O$ . Llavors  $OL_\infty$  és la projectant des de  $O$  del punt  $A'$  de  $L'$  obtingut tallant  $OL_\infty$  i  $L'$ , és a dir,  $OL_\infty = OA'$ . És natural, per tant, pensar  $L_\infty$  com un «punt» (que podem anomenar «punt de l'infinit» de  $L$ ), tal que la seva projectant des de  $O$  és la recta  $OL_\infty$ . Per contrast, si  $A$  és la intersecció de  $L$  amb la paral·lela a  $L'$  per  $O$  (que d'acord amb les notacions ja explicades denotarem  $OL'_\infty$ ), llavors la projectant  $OA \in L_O$  de  $A$  no és la projectant de cap punt de  $L'$ . Però com que  $OA = OL'_\infty$ , és natural dir que la projecció de  $A$  sobre  $L'$  és el «punt»  $L'_\infty$ .

### Punts impropis

Les observacions de l'apartat anterior ens suggereixen la construcció, que exposem tot seguit, i que essencialment és deguda a Desargues, de la clausura projectiva d'un espai afi.

Sigui  $\mathbb{A}$  un espai afi. Posem  $\mathbb{A}_\infty$  per denotar el conjunt de classes d'equivalència de les rectes de  $\mathbb{A}$  per la relació de paral·lisme. Dels elements de  $\mathbb{A}_\infty$  en direm *punts impropis* de  $\mathbb{A}$  i del conjunt  $\bar{\mathbb{A}} = \mathbb{A} \sqcup \mathbb{A}_\infty$  la *clausura projectiva* de  $\mathbb{A}$ . Posarem  $L_\infty \in \mathbb{A}_\infty$  per denotar la seva classe d'equivalència d'una recta  $L$ , i direm que  $L_\infty$  és el *punt improp*i, o de l'*infinit*, de  $L$ . Notem que a tot vector  $v \neq 0$  li correspon un punt improp, que denotarem  $[v]$ , i que és la classe de les rectes que tenen espai director  $\langle v \rangle$ . És clar, doncs, que  $[v] = [v']$  si i només si existeix un escalar  $\lambda$  tal que  $v' = \lambda v$ , i que si  $v$  és un vector director d'una recta  $L$ , llavors  $L_\infty = [v]$ . Posarem  $\bar{L} = L \sqcup \{L_\infty\}$ , i direm que  $\bar{L}$  és la *clausura projectiva* de  $L$ .

Donat un punt improp  $X \in \mathbb{A}_\infty$ , i un punt  $O \in \mathbb{A}$ , posarem  $OX$  per denotar l'única recta per  $O$  el punt improp de la qual és  $X$ , és a dir, l'única recta per  $O$  que és de la classe  $X$ . Així, si  $L$  és una recta,  $OL_\infty$  és la recta per  $O$  paral·lela a  $L$ . Direm que  $OX$  és la projectant des de  $O$  del punt improp  $X$ .

Anàlogament, si  $\Pi$  és un pla, posarem  $\Pi_\infty$  per denotar el conjunt de punts impropis de les rectes contingudes a  $\Pi$ , o, el que és el mateix, el conjunt de punts impropis de les rectes paral·leles a  $\Pi$ . Si  $W$  és l'espai director de  $\Pi$ , llavors  $\Pi_\infty$  és el conjunt, que també denotarem  $[W]$ , de punts de la forma  $[v]$ , on  $v \in W - \{0\}$ .

Considerem ara, amb el propòsit d'il·lustrar les idees anteriors en relació amb les projeccions i seccions, la projecció d'un pla  $\Pi$  que no passa per  $O$  (vegeu la figura 3.3). La projectant  $OP$  d'un punt  $P \in \Pi$  variable ens dona una bijecció entre  $\Pi$  i el conjunt  $\Pi_O$  de les projectants des de  $O$  no paral·leles a  $\Pi$ . Per altra banda, la projectant  $OX$  d'un punt variable  $X \in \Pi_\infty$  ens dona una bijecció entre  $\Pi_\infty$  i el conjunt de projectants des de  $O$  paral·leles a  $\Pi$ . Per analogia amb el cas d'una recta, posarem  $\bar{\Pi}_O$  per denotar el conjunt de projectants des de  $O$  contingudes a  $\Pi \vee O$ , amb la qual cosa tenim una bijecció entre  $\bar{\Pi}$  i  $\bar{\Pi}_O$ , donada per  $X \mapsto OX$ , per a tot  $X \in \bar{\Pi}$ . Direm que  $\bar{\Pi}_O$  és la *representació projectiva* de  $\Pi$ .

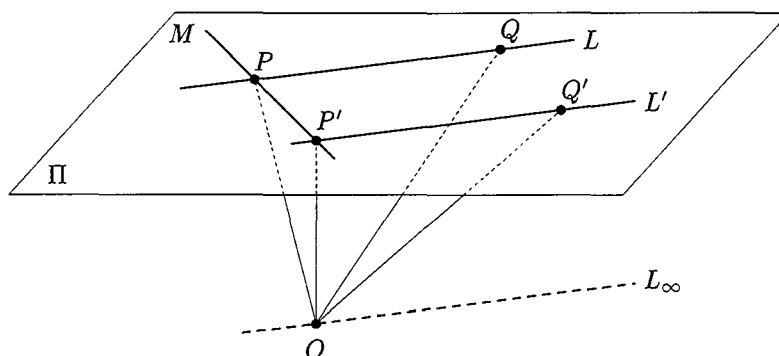


Figura 3.3: Projecció d'un pla des d'un punt

Sigui  $L$  una recta continguda a  $\Pi$ . La bijecció entre  $\overline{\Pi}$  i  $\overline{\Pi}_O$  ( $X \mapsto OX$ ), restringida a  $\overline{L}$ , ens dóna la bijecció, que hem descrit anteriorment, entre  $\overline{L}$  i el conjunt  $\overline{L}_O$ . Al punt impropí de  $L$ ,  $L_\infty$ , li correspon la projectant  $OL_\infty$ . (Parem esment: a l'apartat anterior  $OL_\infty$  no era més que una notació per designar la recta per  $O$  paral·lela a  $L$ ; aquesta notació ens ha suggerit tractar  $L_\infty$  com un punt; ara, un cop definit què cal entendre per  $L_\infty$ ,  $OL_\infty$  representa efectivament la projectant de  $L_\infty$  des de  $O$ .)

Si  $M$  és una altra recta del pla  $\Pi$ , no paral·lela a  $L$ , i si  $\{P\} = L \cap M$ , llavors  $\{OP\} = \overline{L}_O \cap \overline{M}_O$ , en correspondència amb la relació  $\overline{L} \cap \overline{M} = \{P\}$ . Per altra banda, si  $L'$  és una recta del pla  $\Pi$  paral·lela a  $L$ , però diferent de  $L$ , llavors  $\overline{L}_O \cap \overline{L}'_O = \{OL_\infty\}$  ( $= OL'_\infty$ ), en correspondència amb la relació  $\overline{L} \cap \overline{L}' = \{L_\infty\}$ .

Hem trobat, així, que la clausura projectiva  $\overline{\Pi}$  d'un pla  $\Pi$  de l'espai afí de dimensió 3 (amb aquesta hipòtesi tenim  $\Pi \vee O = \mathbb{A}^3$ ) es pot descriure com el conjunt de rectes que passen per un punt  $O$  exterior a  $\Pi$ , corresponent-se les rectes no paral·leles a  $\Pi$  amb els punts de  $\Pi$  i les rectes paral·leles a  $\Pi$  amb els punts impropis de  $\Pi$ . En aquesta correspondència, la clausura projectiva d'una recta  $L$  es representa com el conjunt de rectes per  $O$  contingudes en el pla  $L \vee O$ , de manera que queda establerta una bijecció entre les rectes  $L$  de  $\Pi$  i els plans que passen per  $O$ , llevat el paral·lel a  $\Pi$ . Ara els punts impropis de  $\Pi$  estan en correspondència bijectiva amb les rectes per  $O$  paral·leles a  $\Pi$ . Com que aquestes rectes són les rectes per  $O$  contingudes en el pla per  $O$  paral·lel a  $\Pi$ , veiem que  $\Pi_\infty$  té, des del punt de vista de les projeccions des de  $O$ , la mateixa estructura que  $\overline{L}$ , raó per la qual  $\Pi_\infty$  s'anomena «recta de punts impropis» de  $\Pi$ .

Com veurem a la secció 3.1, la representació projectiva d'un pla es pot formular fàcilment en termes d'àlgebra lineal, independents de la geometria afí. S'obté així la noció d'espai projectiu associat a un espai vectorial, que és l'objecte a partir del qual desenvoluparem sistemàticament la geometria projectiva.

### Teorema de Desargues

Per familiaritzar-se una mica més amb el llenguatge de Desargues dels punts impropis i amb la seva significació, enunciem i demostrarem el teorema, que duu el seu nom, relatiu a dos triangles en perspectiva. D'aquest teorema, en donarem una altra demostració en la secció 3.1. Treballarem directament a l'espai  $\bar{A}$  i ens basarem en el fet, establert prèviament, que dues rectes coplanàries distintes d'aquest espai sempre es tallen en un punt (impropi si les rectes són paral·leles).

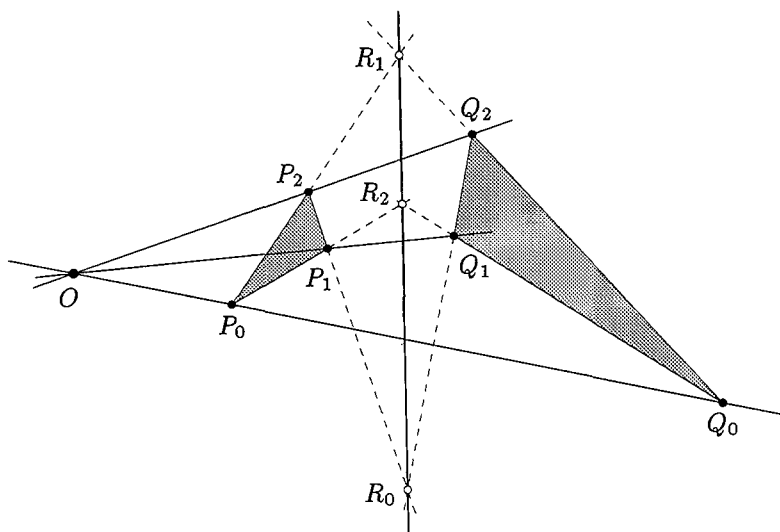


Figura 3.4: Teorema de Desargues dels triangles en perspectiva

**3.1 Teorema** (Desargues, 1639). *Siguin  $P_0P_1P_2$  i  $Q_0Q_1Q_2$  dos triangles de l'espai afí  $A$  tals que  $P_i \neq Q_i$ ,  $i = 0, 1, 2$ , i suposem que estan en perspectiva a l'espai  $\bar{A}$ , és a dir, de manera que les rectes  $P_iQ_i$  són concurrents en un punt  $O$ ,  $i = 0, 1, 2$  (vegeu la figura 3.4). Llavors les interseccions  $R_0 = P_1P_2 \cap Q_1Q_2$ ,  $R_1 = P_2P_0 \cap Q_2Q_0$ ,  $R_2 = P_0P_1 \cap Q_0Q_1$  són punts (possiblement impropis) i aquests punts estan sobre una recta.*

**Prova:** Fem primer la demostració del cas en que els plans dels dos triangles siguin diferents. Sigui  $\bar{L}$  clausura projectiva de la recta d'intersecció d'aquests dos plans (si són paral·lels, prenem com  $\bar{L}$  la recta comú de punts impropis dels dos plans). Com que les rectes  $P_1Q_1$  i  $P_2Q_2$  són coplanàries (perquè es tallen en el punt  $O$ ), les rectes  $P_1P_2$  i  $Q_1Q_2$  es tallen en un punt,  $R_0$ , possiblement impropi. Anàlogament es veu que  $R_1$  i  $R_2$  són punts, possiblement impropis. El resultat queda establert pel fet que  $R_0, R_1, R_2 \in \bar{L}$ . En efecte, el punt  $R_0$ , per exemple, és del pla del triangle  $P_0P_1P_2$  (o de la seva clausura projectiva), per ser de la recta  $P_1P_2$ , i és del pla de  $Q_0Q_1Q_2$  (o de la seva clausura projectiva), per ser de la recta  $Q_1Q_2$ , d'on en resulta que  $R_0 \in \bar{L}$ . Que  $R_1$  i  $R_2$  són punts de  $\bar{L}$  es veu d'una manera semblant.

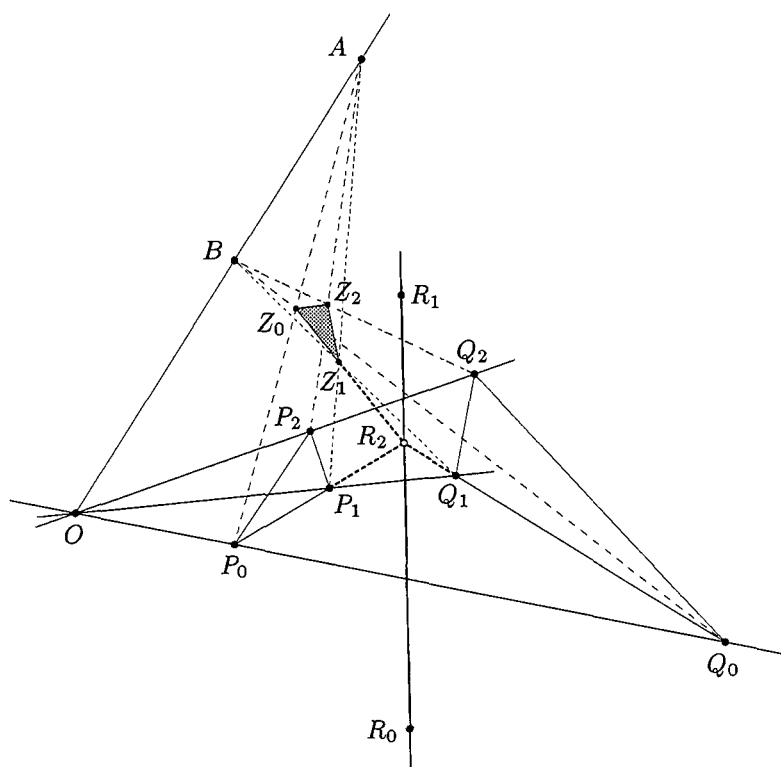


Figura 3.5: Reducció del teorema de Desargues per triangles coplanaris al cas de triangles no coplanaris.

Anem a veure ara el cas en què els plans dels triangles  $P_0P_1P_2$  i  $Q_0Q_1Q_2$  coincideixen. El mètode que seguirem consisteix en reduir aquest cas al cas anterior. Això ho farem mitjançant una construcció que hem representat a la figura 3.5.

Sigui  $A$  un punt exterior al pla dels triangles (diguem-ne  $\Pi$ , d'aquest pla). Sigui  $B$  un punt de la recta  $OA$ , diferent de  $O$  i de  $A$ . Com que les rectes  $AB$  i  $P_0Q_0$  són coplanàries (perquè són concurrents a  $O$ ), les rectes  $AP_0$  i  $BQ_0$  es tallen en un punt  $Z_0$  (possiblement impropí). Els punts  $Z_1$  i  $Z_2$  es defineixen anàlogament. S'obté així un triangle  $Z_0Z_1Z_2$  que està en perspectiva amb  $P_0P_1P_2$  des de  $A$  i en perspectiva amb  $Q_0Q_1Q_2$  des de  $B$ . Sigui  $L$  la recta d'intersecció del pla de  $Z_0Z_1Z_2$  amb  $\Pi$ . Llavors,  $P_0P_1$  i  $Z_0Z_1$  es tallen en un punt  $R_2$  de  $\bar{L}$  (pel cas que ja hem demostrat). Per la mateixa raó,  $Q_0Q_1$  i  $Z_0Z_1$  es tallen en un punt de  $\bar{L}$ , i aquest punt només pot ser  $R_2$ , ja que  $R_2$  és el punt d'intersecció de  $Z_0Z_1$  amb  $\bar{L}$ . Per tant  $P_0P_1$  i  $Q_0Q_1$  passen per  $R_2$  i, en ser rectes diferents, la seva intersecció és exactament el punt  $R_2$ . De la mateixa manera, es veu que  $P_1P_2$  i  $Q_1Q_2$  es tallen en un punt  $R_0 \in \bar{L}$  i que  $P_2P_0$  i  $Q_2Q_0$  es tallen en un punt  $R_1 \in \bar{L}$ .  $\square$

La natura «projectiva» del teorema de Desargues queda remarcada si considerem els nombrosos casos particulars que en resulten, des del punt de vista de l'espai afí  $\mathbb{A}$ , quan un o més elements de les dades esdevenen impropis. Per il·lustrar-ho, serà suficient veure un exemple amb un cert detall. Si suposem que el punt  $O$  és impropí, llavors les rectes  $P_0Q_0$ ,  $P_1Q_1$ ,  $P_2Q_2$  són paral·leles (vegeu la figura 3.6). Suposem, a més, que els costats  $P_1P_2$  i  $Q_1Q_2$  són paral·lels. Això vol dir que el punt  $R_0$  és el punt impropí (comú) d'aquestes dues rectes. Per tant, quan diem que  $R_0$ ,  $R_1$  i  $R_2$  estan alineats, realment estem dient que el punt impropí de la recta  $R_1R_2$  és  $R_0$ , és a dir, que la recta  $R_1R_2$  és paral·lela als costats paral·lels  $P_1P_2$  i  $Q_1Q_2$ .

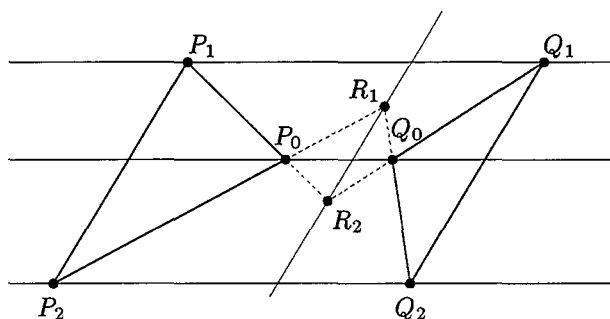


Figura 3.6: Un cas particular del teorema de Desargues

Aquest resultat afí, i d'altres anàlegs, sens dubte es podrien demostrar directament només amb recursos afins, però per a cada un caldria una demostració diferent, i, per regla general, aquestes demostracions estarien desconnectades unes de les altres. L'avantatge, doncs, del llenguatge de la clausura projectiva és que ens permet veure tots aquests casos com a especialitzacions d'una situació general i, en particular, demostrar-los d'una manera unificada.

### 3.1 Espai projectiu

A la secció 3.0 hem vist que la clausura projectiva d'un pla de l'espai afí ordinari es podia representar pel conjunt de rectes que passen per un punt  $O$  exterior al pla, i que, en aquesta representació, la clausura projectiva d'una recta de l'esmentat pla (incloent-hi la seva recta de punts impropis) és el conjunt de rectes per  $O$  contingudes en un pla.

En general, el conjunt de rectes per un punt  $O$  d'un espai afí  $\mathbb{A}'$  de dimensió  $n + 1$  és una representació de la clausura projectiva de qualsevol varietat lineal  $\mathbb{A}$  de dimensió  $n$  de  $\mathbb{A}'$  que no passa per  $O$ . Notem que si  $E$  és l'espai vectorial de  $\mathbb{A}'$ , aleshores el conjunt de rectes per  $O$  s'identifica, per la bijecció  $\mathbb{A}' \simeq E$  tal que  $X \mapsto X - O$ , amb el conjunt de subespais vectorials de dimensió 1 de  $E$ . En aquesta representació, la

clausura projectiva d'una varietat lineal afi  $L$  de dimensió  $r$  de  $\mathbb{A}$  s'identifica amb les rectes per  $O$  contingudes en una varietat lineal de dimensió  $r + 1$ , és a dir, amb el conjunt de subespais lineals de dimensió 1 d'un subespai lineal de dimensió  $r + 1$  de  $E$ .

Aquestes observacions mostren que el concepte de clausura projectiva d'un espai afi es pot definir purament en termes d'àlgebra lineal, sense referència a l'espai afi inicial. Les definicions que segueixen (particularment les d'espai projectiu, de varietat lineal i de dimensió) no són més que una transcripció explícita d'aquesta constatació. Quan hàgim desenvolupat una mica aquest nou llenguatge, veurem (al darrer apartat d'aquesta secció) com es pot reformular la clausura projectiva d'un espai afi.

En el que resta d'aquest capítol,  $K$  denotarà un cos commutatiu i *espai vectorial* significarà 'espai vectorial sobre  $K$  de dimensió finita'.

### Definicions i notacions bàsiques

Donat un espai vectorial  $E$  de dimensió  $n + 1$  ( $n \geq -1$ ), posarem  $[E]$  per denotar el conjunt dels seus subespais vectorials de dimensió 1. Direm que  $[E]$  és l'*espai projectiu* associat a  $E$ . També direm que  $[E]$  té dimensió  $n$ , i posarem  $\dim[E] = n$ . En lloc de la notació  $[E]$ , també s'escriu  $\mathbb{P}(E)$ , i fins i tot  $\mathbb{P}$  si  $E$  es pot sobreentendre. Per indicar que l'espai projectiu  $\mathbb{P}$  té dimensió  $n$ , escriurem  $\mathbb{P}^n$ . Si  $n = 1$ , direm que  $[E]$  és una *recta projectiva* i si  $n = 2$ , direm que  $[E]$  és un *pla projectiu*.

Els elements de  $[E]$  s'anomenaran *punts*. El punt corresponent al subespai vectorial  $\langle x \rangle$  generat per un vector no nul  $x \in E$  serà denotat  $[x]$ . Si  $P$  és un punt i  $P = [x]$ , on  $x$  és un vector no nul de  $E$ , direm que  $x$  és un *representant* de  $P$ .

**E.3.1.** Si  $x, x' \in E - \{0\}$ , llavors  $[x] = [x']$  si i només si existeix  $\lambda \in K$  tal que  $x' = \lambda x$  (noteu que  $\lambda \neq 0$ , necessàriament). Equivalentment,  $[x] \neq [x']$  si i només si  $x$  i  $x'$  són linealment independents.

Si  $F$  és un subespai vectorial de dimensió  $r + 1$  de  $E$ , llavors  $[F] \subseteq [E]$ . Els punts de  $[F]$  són de la forma  $[x]$ , on  $x$  és un vector no nul arbitrari de  $F$ . Notem que  $\{[0]\} = \emptyset$  i que si  $x$  és un vector no nul de  $E$ , llavors  $[\langle x \rangle] = \{[x]\}$ .

**3.2 Proposició.** Si  $F, F'$  són subespais vectorials de  $E$ , llavors  $[F] \subseteq [F']$  si i només si  $F \subseteq F'$ . En particular,  $[F] = [F']$  si i només si  $F = F'$ .

**Prova:** Que  $F \subseteq F'$  implica  $[F] \subseteq [F']$  és evident. Només ens cal veure, doncs, que  $F \subseteq F'$  segueix de  $[F] \subseteq [F']$ . Sigui, doncs,  $x \in F$ . Volem veure que  $x \in F'$ . Com que aquesta conclusió és òbvia si  $x = 0$ , podem suposar que  $x \neq 0$ . Llavors  $[x] \in [F] \subseteq [F']$  ens diu que existeix un  $x' \in F'$ ,  $x' \neq 0$ , tal que  $[x] = [x']$ . Per l'exercici E.3.1, però, existeix  $\lambda \in K$  tal que  $x = \lambda x'$ . Com que  $x' \in F'$ , també és cert que  $x \in F'$ .  $\square$

Un subconjunt  $L$  d'un espai projectiu  $[E]$  és una *varietat lineal* si existeix un subespai vectorial  $F$  de  $E$  tal que  $L = [F]$ . Si  $F$  té dimensió  $r + 1$ , direm, d'acord amb la

definició de dimensió de l'espai projectiu associat a un espai vectorial, que  $L$  té *dimensió*  $r$ , i escriurem  $\dim(L) = r$ . Remarquem, tanmateix, que en aquesta definició no hi ha ambigüitat, ja que el subespai vectorial  $F$  queda unívocament determinat per  $L$  (proposició 3.2). Les varietats lineals de dimensió 1 s'anomenen *rectes* i les de dimensió 2, *plans*.

Per expressar que una varietat lineal  $L$  està continguda en una varietat lineal  $L'$ , sovint direm que  $L'$  *passa per*  $L$ , o que  $L'$  és *incident* amb  $L$ . Un punt  $P$  és diu *exterior* a una varietat  $L$ , o que és *independent* de  $L$ , si  $P \notin L$ .

**E.3.2.** Si  $F, F' \subseteq E$  són subespais vectorials, proveu que  $[F] \cap [F'] = [F \cap F']$ . Així, doncs, la intersecció de dues varietats lineals és una varietat lineal. Més generalment, si  $F_1, \dots, F_k$  són subespais vectorials de  $E$ , llavors  $[F_1] \cap \dots \cap [F_k] = [F_1 \cap \dots \cap F_k]$ .

Si  $x_0, \dots, x_r$  són vectors de  $E$ , posarem  $[x_0, \dots, x_r]$  en lloc de  $[\langle x_0, \dots, x_r \rangle]$ . Els punts de la varietat lineal  $[x_0, \dots, x_r]$  són de la forma  $[\lambda_0 x_0 + \dots + \lambda_r x_r]$ , on  $\lambda_0, \dots, \lambda_r \in K$  són tals que  $\lambda_0 x_0 + \dots + \lambda_r x_r \neq 0$ . En particular tenim  $[x_i] \in [x_0, \dots, x_r]$  si  $x_i \neq 0$ . Si  $x_0, \dots, x_r$  són linealment independents, llavors  $[x_0, \dots, x_r]$  té dimensió  $r$  i els seus punts són de la forma  $[\lambda_0 x_0 + \dots + \lambda_r x_r]$ , amb  $(\lambda_0, \dots, \lambda_r) \neq (0, \dots, 0)$ . En aquest cas tenim  $x_i \neq 0$  i, per tant,  $[x_i] \in [x_0, \dots, x_r]$  ( $i = 0, 1, \dots, r$ ).

El conjunt buit és una varietat lineal i  $\dim(\emptyset) = -1$ . Com que  $\{0\}$  és l'únic subespai vectorial de  $E$  de dimensió 0,  $\emptyset$  és l'única varietat lineal de dimensió negativa.

Les varietats de dimensió 0 de  $[E]$  són les de la forma  $[\langle x \rangle] = \{[x]\}$ , on  $x$  és un element no nul de  $E$ . Com que els elements d'un conjunt es poden identificar amb els subconjunts que només tenen un element, veiem que les varietats lineals de dimensió 0 de  $[E]$  es poden identificar amb els punts de  $[E]$ .

Una recta és una varietat lineal  $L = [F]$ , amb  $F$  un subespai vectorial de dimensió 2 de  $E$ . Si  $x, x' \in F$  són dos vectors linealment independents, llavors els punts de la recta  $[F] = [x, x']$  són els que tenen la forma  $[\lambda x + \lambda' x']$ , amb  $\lambda, \lambda' \in K$  i  $\lambda \neq 0$  o  $\lambda' \neq 0$ .

**3.3 Proposició.** *Donats dos punts diferents  $P$  i  $P'$  d'un espai projectiu  $\mathbb{P}$ , existeix una única recta que els conté.*

**Prova:** Sigui  $E$  l'espai vectorial tal que  $\mathbb{P} = [E]$ . Siguin  $x, x' \in E$  vectors no nuls tals que  $P = [x]$  i  $P' = [x']$ . Com que  $P \neq P'$ ,  $x$  i  $x'$  són linealment independents. Per tant,  $\langle x, x' \rangle$  té dimensió 2 i  $L = [x, x']$  és una recta. Com que  $P = [x] \in L$  i  $P' = [x'] \in L$ , queda provada l'existència d'una recta que conté els punts  $P$  i  $P'$ . Sigui ara  $M$  una altra recta que conté els punts  $P$  i  $P'$ . Veurem que  $M = L$ , i això acabarà la prova. Sigui  $F'$  el subespai vectorial de  $E$  tal que  $M = [F']$ . Com que  $M$  és una recta,  $F'$  té dimensió 2. Atès que  $P, P' \in M$ , tindrem  $x, x' \in F'$ . Per tant,  $\langle x, x' \rangle \subseteq F'$ . Com que els dos subespais vectorials d'aquesta inclusió tenen dimensió 2, tenim  $\langle x, x' \rangle = F'$ , d'on  $L = M$ .  $\square$



La recta que uneix dos punts diferents  $P$  i  $P'$  serà denotada  $PP'$ . La demostració anterior prova que si  $x$  és un representant de  $P$  i  $x'$  un representant de  $P'$ , llavors  $PP' = [x, x']$ .

**E.3.3.** Si  $L$  és una varietat lineal i  $P, P'$  són dos punts diferents de  $L$ , proveu que  $PP' \subseteq L$ .

### Punts alineats

Direm que tres punts  $P, Q, R$  d'un espai projectiu de dimensió  $n \geq 1$  estan *alineats* si existeix una recta que els conté.

**3.4 Proposició.** *Sigui  $[E]$  un espai projectiu de dimensió  $n \geq 1$  i  $P, Q, R \in \mathbb{P}$ . Siguin  $x, y, z \in E$  representants de  $P, Q, R$ , respectivament. Llavors  $P, Q, R$  estan alineats si i només si  $x, y, z$  són linealment dependents.*

**Prova:** Si  $P, Q, R$  estan continguts en una recta  $[F]$ , llavors  $x, y, z \in F$ . Com que  $F$  té dimensió 2, els vectors  $x, y, z$  són linealment dependents. Recíprocament, si  $x, y, z$  són linealment dependents, aleshores  $\dim \langle x, y, z \rangle \leq 2$  i, atès que  $\dim(E) \geq 2$ , podem trobar un subespai vectorial  $F$  de dimensió 2 de  $E$  tal que  $\langle x, y, z \rangle \subseteq F$  (notem que  $F = \langle x, y, z \rangle$  si els tres punts  $P, Q, R$  no coincideixen). Així serà  $P, Q, R \in [F]$  i els tres punts estan alineats.  $\square$

**E.3.4.** Proveu que si  $P, Q, R$  són tres punts alineats diferents i  $x$  és un representant de  $P$ , aleshores existeix un representant  $y$  de  $Q$  tal que  $R = [x + y]$ .

### Prova analítica del teorema de Desargues

Un *triangle ordenat* d'un espai projectiu  $\mathbb{P}$  és una successió  $P_0, P_1, P_2$  de tres punts no alineats. Escrivem  $P_0P_1P_2$  per denotar-lo i direm que els punts  $P_0, P_1$  i  $P_2$  són els seus *vèrtexs*. Les rectes  $L_0 = P_1P_2$ ,  $L_1 = P_2P_0$  i  $L_2 = P_0P_1$  es diran *costats* del triangle  $P_0P_1P_2$ . De  $L_i$  en direm el costat *oposat* al vèrtex  $P_i$ .

Dos triangles ordenats  $P_0P_1P_2$  i  $P'_0P'_1P'_2$  estan en *perspectiva* si  $P_i \neq P'_i$  i les tres rectes  $P_iP'_i$  passen per un mateix punt, diferent de qualsevol dels vèrtexs  $P_i$  i de qualsevol dels vèrtexs  $P'_i$  (vegeu la figura 3.1, en la qual els triangles  $PQR$  i  $P'Q'R'$  estan en perspectiva).

**3.5 Teorema** (Desargues, 1639). *Si els triangles  $P_0P_1P_2$  i  $P'_0P'_1P'_2$  estan en perspectiva, i  $L_i$  i  $L'_i$  són els costats de  $P_0P_1P_2$  i  $P'_0P'_1P'_2$  oposats a  $P_i$  i a  $P'_i$ , respectivament, llavors les interseccions  $R_i = L_i \cap L'_i$  són tres punts alineats.*

**Prova:** Sigui  $P$  el punt en el qual concorren les tres rectes  $P_iP'_i$ . Siguin  $x, x_0, x_1, x_2 \in E - \{0\}$  tals que  $P = [x]$  i  $P_i = [x_i]$ . Com que  $P, P_i$  i  $P'_i$  estan alineats i són diferents, podem escollir  $x_i$  de manera que  $P'_i = [x + x_i]$  (vegeu E.3.4).

Ara observem que el punt  $[x_1 - x_2]$  de la recta  $P_1P_2$  és també de la recta  $P'_1P'_2$ , ja que  $[x_1 - x_2] = [(x + x_1) - (x + x_2)]$ . Com que les rectes  $L_3$  i  $L'_3$  són clarament distintes, veiem que  $R_3 = L_3 \cap L'_3 = [x_1 - x_2]$ . Anàlogament, es veu que  $R_1 = [x_2 - x_3]$  i  $R_2 = [x_3 - x_1]$ . Finalment els punts  $R_3, R_1, R_2$  estan alineats, ja que

$$(x_1 - x_2) + (x_2 - x_3) + (x_3 - x_1) = 0$$

i podem aplicar la proposició 3.4. □

**E.3.5.** Comproveu directament que el teorema de Desargues també és cert si en la definició de triangles en perspectiva llevem la restricció que cap dels vèrtexs dels triangles coincideixi amb el punt  $O$  de concurrència de les rectes  $P_iP'_i$ , és a dir, si admetem que un dels vèrtexs  $P_i$  o/i un dels vèrtexs  $Q_j$  coincideixi amb  $O$ . (Com que  $P_i \neq Q_i$ , si es dona la circumstància que un  $P_i$  i un  $Q_j$  coincideixen amb  $O$ , necessàriament ha de ser  $i \neq j$ .)

**3.6 Remarca.** El recíproc del teorema de Desargues també és cert. En donarem una demostració a la secció 3.5 mitjançant el principi de dualitat. Deixem al lector com a exercici fer-ne una demostració, d'aquest teorema recíproc, amb mètodes similars als que hem usat per fer la demostració del teorema directe.

### Teorema de Pappus

En la prova d'aquest teorema usem que dues rectes diferents d'un pla projectiu es tallen en un punt. Això és clar, atès que la intersecció de dos subespais vectorials de dimensió 2 diferents d'un espai vectorial de dimensió 3 és un subespai vectorial de dimensió 1. L'enunciat que acabem de provar no és més que un cas particular de la fórmula de les dimensions que demostrarem a l'apartat següent.

**3.7 Teorema.** En un pla projectiu  $\mathbb{P}$ , siguin  $L$  i  $M$  dues rectes diferents (vegeu la figura 3.7) i suposem, si  $P$  és el punt d'intersecció de  $L$  i  $M$ , que  $P_0, P_1, P_2$  són punts diferents de  $L - \{P\}$  i  $Q_0, Q_1, Q_2$  punts diferents de  $M - \{P\}$ . Aleshores, les interseccions  $R_0 = P_1Q_2 \cap P_2Q_1$ ,  $R_1 = P_2Q_0 \cap P_0Q_2$ ,  $R_2 = P_0Q_1 \cap P_1Q_0$  són tres punts alineats.

**Prova:** Sigui  $x \in E - \{0\}$  tal que  $P = [x]$ . Com que  $P, P_0, P_1, P_2$  són punts diferents de  $L$ , existeix  $y \in E - \{0\}$  tal que  $P_0 = [y]$ ,  $P_1 = [x + y]$  i  $P_2 = [x + ay]$ , per un cert  $a \in K - \{0, 1\}$ . Anàlogament, existeix  $z \in E - \{0\}$  tal que  $Q_0 = [z]$ ,  $Q_1 = [x + z]$  i  $Q_2 = [x + bz]$ , per un cert  $b \in K - \{0, 1\}$ . Com que  $P, P_0$  i  $Q_0$  no estan alineats, els vectors  $x, y, z$  són linealment independents.

Ara tenim

$$R_2 = [x + y + z],$$

ja que

$$[x + y + z] = \begin{cases} [(x + y) + z] \in P_1Q_0 \\ [y + (x + z)] \in P_0Q_1 \end{cases}$$

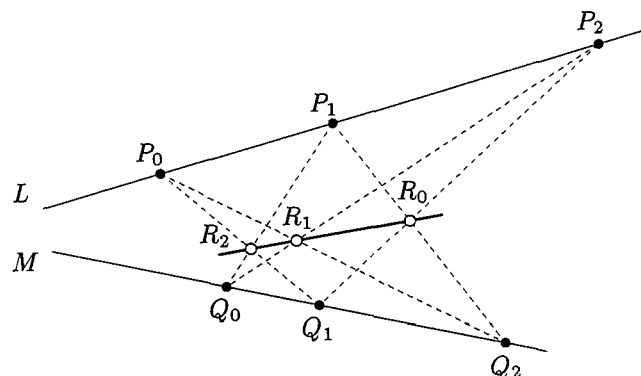


Figura 3.7: Teorema de Pappus

Notem que les rectes  $P_0Q_1$  i  $P_1Q_0$  són diferents i que, per tant,  $[x + y + z]$  és l'únic punt comú a les dues. També tenim

$$R_1 = [x + ay + bz],$$

ja que

$$[x + ay + bz] = \begin{cases} [(x + ay) + bz] \in P_2Q_0 \\ [ay + (x + bz)] \in P_0Q_2 \end{cases}$$

Finalment

$$R_0 = [(ab - 1)x + a(b - 1)y + b(a - 1)z]$$

ja que

$$[(ab - 1)x + a(b - 1)y + b(a - 1)z] = \begin{cases} [a(b - 1)(x + y) + (a - 1)(x + bz)] \in P_1Q_2 \\ [(a - 1)b(x + z) + (b - 1)(x + ay)] \in P_2Q_1. \end{cases}$$

Ara observem que

$$ab(x + y + z) - (x + ay + bz) = (ab - 1)x + a(b - 1)y + b(a - 1)z$$

i, per tant,  $R_0 \in R_1R_2$ . □

### Fórmula de les dimensions

Hem vist que la intersecció de dues varietats lineals d'un espai projectiu  $[E]$  és una varietat lineal (exercici E.3.2). Si  $L$  i  $L'$  són varietats lineals d'un espai projectiu  $\mathbb{P}$ ,

llavors  $L \cap L'$  és la màxima varietat lineal continguda a  $L$  i  $L'$ , en el sentit que una varietat lineal  $M$  compleix  $M \subseteq L$  i  $M \subseteq L'$  si i només si  $M \subseteq L \cap L'$ .

Vegem ara que existeix, amb les mateixes notacions, una varietat  $L \vee L'$  que és la mínima que conté  $L$  i  $L'$ , en el sentit que  $M \supseteq L$  i  $M \supseteq L'$  si i només si  $M \supseteq L \vee L'$ . En efecte, si  $L = [F]$  i  $L' = [F']$ , on  $F$  i  $F'$  són subespais vectorials de  $E$ , llavors de la proposició 3.2 en resulta que la varietat  $[F + F']$  satisfà les condicions, atès que  $F + F'$  és el mínim subespai vectorial de  $E$  que conté  $F$  i  $F'$ . Direm que  $L \vee L'$  és la *suma projectiva* de les varietats  $L$  i  $L'$ .

**E.3.6.** Proveu que si  $P$  i  $Q$  són punts diferents, llavors  $P \vee Q = PQ$  (la recta que uneix els dos punts).

**3.8 Proposició** (Fórmula de les dimensions). *Siguin  $L$  i  $L'$  varietats lineals d'un espai projectiu  $[E]$ . Llavors*

$$\dim(L \vee L') + \dim(L \cap L') = \dim(L) + \dim(L').$$

**Prova:** Siguin  $F$  i  $F'$  subespais vectorials de  $E$  tals que  $L = [F]$  i  $L' = [F']$ . Aleshores  $\dim(F + F') + \dim(F \cap F') = \dim(F) + \dim(F')$ , per la fórmula de les dimensions per a subespais vectorials d'un espai vectorial. Com que  $\dim(F + F') = \dim(L \vee L') + 1$ ,  $\dim(F \cap F') = \dim(L \cap L') + 1$ ,  $\dim(F) = \dim(L) + 1$  i  $\dim(F') = \dim(L') + 1$ , la fórmula en resulta immediatament.  $\square$

**3.9 Exemple.** Sigui  $L$  una varietat lineal d'un espai projectiu i  $Q$  un punt exterior a  $L$ . Així  $L \cap Q = \emptyset$  i, per tant,  $\dim(L \cap Q) = -1$ . Com que  $\dim(Q) = 0$ , de la fórmula de les dimensions en deduïm que

$$\dim(L \vee Q) = \dim(L) + 1.$$

En el cas particular en què  $L$  és un punt  $P$ , aquesta fórmula ens diu que  $P \vee Q$  és una recta, la qual cosa confirma la conclusió de l'exercici E.3.6.

**3.10 Exemple.** Una varietat lineal  $H$  de  $\mathbb{P}^n$  es diu que és un *hiperplà* si  $\dim(H) = n - 1$ . Suposem que  $H$  és un hiperplà i que  $L$  és una varietat no continguda a  $H$ . Si  $Q$  és un punt de  $L$  exterior a  $H$ , llavors  $H \vee L \supseteq H \vee Q$ . Com que  $H \vee Q = \mathbb{P}^n$  (ja que  $\dim(H \vee Q) = n$ , per l'exemple 3.9), tenim  $L \vee H = \mathbb{P}^n$ . Aleshores, la fórmula de les dimensions ens dona  $\dim(H \cap L) = \dim(H) + \dim(L) - \dim(H \vee L) = n - 1 + \dim(L) - n = \dim(L) - 1$ , és a dir,

$$\dim(H \cap L) = \dim(L) - 1.$$

En el cas en què  $\dim(L) = 1$ , aquesta fórmula ens diu que la intersecció d'una recta amb un hiperplà que no la conté és un punt.

Quan  $n = 2$ ,  $H$  és una recta i l'enunciat precedent ens dona una propietat que hem vist a l'inici de l'apartat «Teorema de Pappus»: dues rectes distintes d'un pla projectiu es tallen en un punt.

**3.11 Exemple.** L'exemple 3.9 ens mostra que  $L \vee Q$  és un pla quan  $L$  és una recta i  $Q$  un punt exterior a  $L$ . Per altra banda, 3.10 ens mostra que la intersecció d'un pla de  $\mathbb{P}^n$  amb un hiperplà que no el conté és una recta.

Considerem el cas  $n = 3$  amb més detall. Com que els hiperplans de  $\mathbb{P}^3$  són els plans, l'enunciat precedent ens dóna que dos plans diferents de  $\mathbb{P}^3$  es tallen en una recta. Per altra banda, tenim que la intersecció d'una recta amb un pla que no la conté és un punt. Pel que fa a dues rectes diferents  $L$  i  $L'$  de  $\mathbb{P}^3$ , es poden donar dues possibilitats. Una és que  $\dim(L \vee L') = 2$ , és a dir, que les dues rectes estiguin contingudes en un mateix pla (es diu, aleshores, que les dues rectes són *coplanàries*), i que és equivalent a dir que  $L \cap L'$  és un punt  $[\diamond]$ . L'altra possibilitat és que  $\dim(L \vee L') = 3$  i que equival a dir que  $L \cap L' = \emptyset$ . En aquest cas, es diu que les dues rectes *es creuen*.

### Clausura projectiva d'un espai afí $\mathbb{A}$

Amb el llenguatge de l'espai projectiu, podem donar ara un contingut matemàtic molt més precís a la construcció de la clausura projectiva d'un espai afí. El mètode que seguirem és donar primer una definició independent de la clausura projectiva  $\overline{\mathbb{A}}$  d'un espai afí  $\mathbb{A}$  i veure després que la nova definició incorpora la donada a la secció 3.0.

#### Notacions

Sigui  $\mathbb{A}$  un espai afí de dimensió  $n$  i  $V$  el seu espai vectorial associat. Posarem  $\overline{V} = K \oplus V$ . Si  $(\lambda, v) \in \overline{V}$ , podem escriure  $(\lambda, v) = (\lambda, \mathbf{0}) + (0, v) = \lambda(1, \mathbf{0}) + (0, v)$ . Si posem  $e_0 = (1, \mathbf{0})$  i identifiquem el vector  $v \in V$  amb el vector  $(0, v) \in \overline{V}$ , llavors podem posar  $(\lambda, v) = \lambda e_0 + v$ .

Fixem un punt  $O \in \mathbb{A}$  i considerem l'aplicació  $P \mapsto e_P$  de  $\mathbb{A}$  en  $\overline{V}$  tal que  $e_P = e_0 + (P - O)$ . En particular, tenim  $e_O = e_0$ . També és immediat comprovar que es compleix la fórmula

$$e_P - e_Q = P - Q. \quad [3.1]$$

Notem, també, que

$$\overline{V} = \langle e_P \rangle \oplus V, \quad [3.2]$$

qualsevol que sigui  $P \in \mathbb{A}$ .

**3.12 Remarca.** La propietat [3.2], per a tot punt  $P \in \mathbb{A}$ , es pot deduir de la propietat [3.1] i de la relació  $\overline{V} = \langle e_O \rangle \oplus V$  per a un punt donat  $O$ . En efecte, si  $P = O + v$  ( $v \in V$ ), llavors  $e_P = e_O + v$  (per [3.1]) i  $\langle e_P \rangle + V = \langle e_O \rangle + V = \overline{V}$ .

L'exercici que segueix mostra que l'espai  $\overline{V}$  i l'aplicació  $e$  no depenen, llevat d'un isomorfisme únic, del punt  $O$ .

**E.3.7.** Proveu que si  $V'$  és un  $K$ -espai vectorial que conté  $V$  com a subespai vectorial i  $P \mapsto e'_P$  és una aplicació de  $\mathbb{A}$  en  $V'$  que satisfà les propietats [3.1] i [3.2] (és a dir,  $e'_P - e'_Q = P - Q$  qualssevol que siguin  $P, Q \in \mathbb{A}$ , i  $V' = \langle e'_P \rangle \oplus V$  per a tot  $P \in \mathbb{A}$ ), llavors hi ha un únic isomorfisme  $\bar{V} \simeq V'$  tal que  $e_P \mapsto e'_P$  per a tot  $P \in \mathbb{A}$ . Proveu també que aquest isomorfisme és necessàriament la identitat pels elements de  $V$ .

### L'espai projectiu $\bar{\mathbb{A}}$

Sigui  $\bar{V}$  un espai vectorial que conté  $V$  com a un subespai vectorial i  $e: \mathbb{A} \rightarrow \bar{V}$ ,  $P \mapsto e_P$ , una aplicació que compleix les propietats [3.1] i [3.2]. Sabem que aquests objectes existeixen i que, segons es precisa a l'exercici E.3.7, són únics. De l'espai projectiu  $\bar{\mathbb{A}} = [\bar{V}]$  en direm que és la *clausura projectiva*, o també una *compleció projectiva*, de  $\mathbb{A}$ . Notem que  $\bar{\mathbb{A}}$  té dimensió  $n$ . A l'hiperplà  $[V]$  de  $\bar{\mathbb{A}}$  l'anomenarem, d'acord amb el que s'ha dit a l'apartat «Punts impropis» de la secció 3.0, *hiperplà de l'infinit* de  $\mathbb{A}$ , o *hiperplà de punts impropis* de  $\mathbb{A}$ , i el denotarem  $\mathbb{A}_\infty$ .

Per tal de poder interpretar  $\bar{\mathbb{A}}$  com el resultat d'afegir a  $\mathbb{A}$  els punts impropis, usarem l'aplicació  $i: \mathbb{A} \rightarrow \bar{\mathbb{A}}$  tal que  $X \mapsto \bar{X} = [e_X]$ . Si fixem un punt  $O$  com a origen, i  $X = O + v$ , on  $v \in V$ , llavors  $\bar{X} = [e_X] = [e_{O+v}] = [e_O + v]$ . Per a una representació gràfica d'aquest procés, vegeu la figura 3.8.

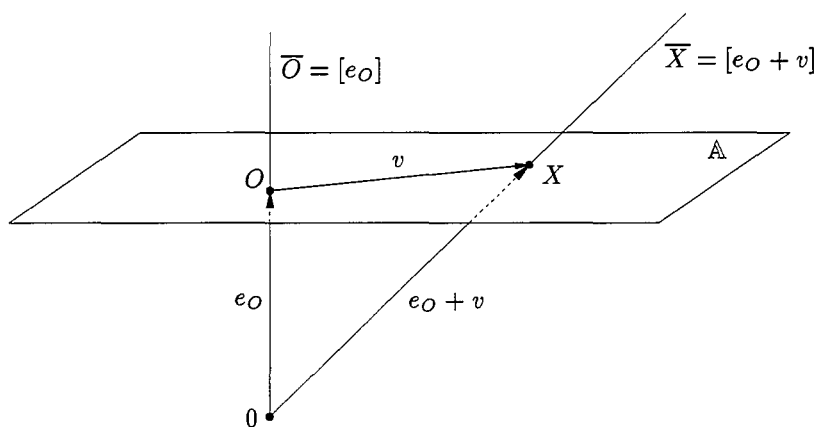


Figura 3.8: Clausura projectiva de l'espai afí  $\mathbb{A}$

**3.13 Proposició.** L'aplicació  $i: \mathbb{A} \rightarrow \bar{\mathbb{A}}$  és injectiva.

**Prova:** Suposem que  $P, Q \in \mathbb{A}$  són tals que  $[e_P] = [e_Q]$ . Llavors  $e_Q = \lambda e_P$ , per a un cert  $\lambda \in K$ , i  $Q - P = e_Q - e_P = \lambda e_P - e_P = (\lambda - 1)e_P$  (hem usat la propietat [3.1]). Com que  $Q - P \in V$  i  $e_P \notin V$  (propietat [3.2]), la darrera igualtat només pot ser certa si els dos membres són nuls. Així  $Q = P$  i la prova és completa.  $\square$

**3.14 Proposició.** La imatge de  $\mathbb{A}$  per  $i$  coincideix amb  $\overline{\mathbb{A}} - \mathbb{A}_\infty$ , és a dir, amb el conjunt dels punts representats per vectors de  $\overline{V} - V$ . En particular tenim  $\overline{\mathbb{A}} = i(\mathbb{A}) \sqcup \mathbb{A}_\infty$ .

**Prova:** En efecte, donat un punt  $P \in \mathbb{A}$ ,  $i(P) \in \overline{\mathbb{A}} - \mathbb{A}_\infty$ , ja que  $\overline{P} = [e_P]$  i  $e_P \notin V$ . Recíprocament, un punt  $Q$  de  $\overline{\mathbb{A}} - \mathbb{A}_\infty$  és de la forma  $Q = [\bar{v}]$ , amb  $\bar{v} \in \overline{V} - V$ . Si escollim un punt qualsevol  $O$ , sabem (propietat [3.2]) que  $\overline{V} = \langle e_O \rangle + V$ , d'on  $\bar{v} = \lambda e_O + v$ , per un cert  $\lambda \in K$ . Com que  $\bar{v} \notin V$ , tenim  $\lambda \neq 0$ , i

$$Q = [\lambda e_O + v] = [e_O + \lambda^{-1}v] = [e_{O+\lambda^{-1}v}] = i(O + \lambda^{-1}v),$$

que és un punt de  $i(\mathbb{A})$ . □

### Clausura projectiva d'una varietat lineal

Sigui  $L$  una varietat lineal de dimensió  $r$  de l'espai afí  $\mathbb{A}$ . Si  $W = W(L)$  és l'espai director de  $L$ , la varietat lineal  $[W] \subseteq [V] = \mathbb{A}_\infty$  s'anomena *varietat de l'infinit (o de punts impropis)* de  $L$ , i posarem  $L_\infty$  per denotar-la. Pel que hem dit a l'apartat «Punts impropis» de la secció 3.0,  $L_\infty$  s'identifica amb el conjunt de classes d'equivalència de les rectes de  $\mathbb{A}$  per la relació de paral·lelisme. També posarem  $\overline{L} = i(L) \sqcup L_\infty$ , i direm que  $\overline{L}$  és la *clausura projectiva* de  $L$ .

**3.15 Proposició.** Donada una varietat lineal  $L$  de dimensió  $r$  de l'espai afí  $\mathbb{A}$ ,  $\overline{L}$  és una varietat lineal de dimensió  $r$  de  $\overline{\mathbb{A}}$ . La varietat  $\overline{L}$  és l'única varietat lineal de  $\overline{\mathbb{A}}$  tal que  $\overline{L} \cap i(\mathbb{A}) = i(L)$ .

**Prova:** Sigui  $L = P + W$ , on  $W$  és l'espai director de  $L$ . Considerem el subespai vectorial  $\overline{W} = \langle e_P \rangle + W$  de  $\overline{V}$ . Atès que  $W \subseteq V$ ,  $\overline{W}$  té dimensió  $1 + \dim(W) = r + 1$ . Per tant  $[\overline{W}]$  és una varietat lineal de dimensió  $r$  de  $\overline{\mathbb{A}}$ . Els punts  $Q$  de  $[\overline{W}]$  tenen la forma  $Q = [\lambda e_P + w]$ , amb  $\lambda \in K$ ,  $w \in W$  i  $\lambda e_P + w \neq 0$ . Si  $\lambda = 0$ , llavors  $Q = [w] \in [W] = L_\infty$ , i si  $\lambda \neq 0$ , llavors  $Q = [\lambda e_P + w] = [e_P + \lambda^{-1}w] = [e_{P+\lambda^{-1}w}] = i(P + \lambda^{-1}w) \in i(L)$ , ja que  $\lambda^{-1}w \in W$ . Com que  $P + \lambda^{-1}w$  és, fins i tot amb  $\lambda = 1$ , un punt arbitrari de  $P + W$ , veiem que  $\overline{L} \cap i(\mathbb{A}) = i(L)$ .

Per acabar la prova manca veure que si  $M$  és una varietat lineal de  $\mathbb{A}_\infty$  tal que  $M \cap i(\mathbb{A}) = i(L)$ , llavors  $M = \overline{L}$ . Si  $M = [F]$ , on  $F$  és un subespai vectorial de  $\overline{V}$ , serà suficient de veure que  $F = \overline{W}$ . Ara, com que per a tot  $w \in W$  tenim  $i(P + w) \in i(L) = M \cap i(\mathbb{A})$  i  $i(P + w) = [e_{P+w}] = [e_P + w]$ , en particular  $e_P + w \in F$  per a tot  $w \in W$ . Posant  $w = 0$ , tenim  $e_P \in F$ , que amb la relació anterior ens dóna que  $w \in F$  per a tot  $w \in W$ . Així  $\overline{W} = \langle e_P \rangle + W \subseteq F$ .

Per veure la inclusió contrària, sigui ara  $x = \lambda e_P + v \in F$  (recordem que tot vector de  $\overline{V}$  es pot escriure d'aquesta manera per la propietat [3.2]). Volem veure que  $x \in \overline{W}$ . Com que aquesta conclusió és òbvia si  $x = 0$ , podem suposar  $x \neq 0$ .

Suposem primer que  $\lambda = 0$ , amb la qual cosa  $x = v$  és un vector no nul de  $F \cap V$ . Com que  $e_P \in F$ , també tenim  $e_P + v \in F$ . Per tant  $[v]$ ,  $[e_P] = i(P)$ ,  $[e_P + v] = i(P + v) \in M$ .

Com que aquests tres punts estan alineats i  $i(P), i(P+v) \in M \cap i(\mathbb{A}) = i(L) \subseteq \overline{L}$ , inferim que  $[v] \in \overline{L}$  (E.3.3), és a dir, que  $v \in \overline{W}$ .

Manca examinar el cas  $\lambda \neq 0$ . Dividint per  $\lambda$ , és clar que és suficient veure que  $e_P + v \in F$  implica  $v \in W$ . Però  $e_P + v = e_{P+v} \in F$  implica que  $i(P+v) \in M \cap i(\mathbb{A}) = i(L)$ , d'on  $v \in W$  per la injectivitat de  $i$ .  $\square$

**E.3.8.** Proveu que la clausura projectiva  $\overline{L} \subseteq \overline{\mathbb{A}}$  d'una varietat lineal  $L = P + W$ , considerada com un espai projectiu, és una clausura projectiva de  $L$  considerada com un espai afi. Més precisament, proveu que l'espai  $\overline{W} = \langle e_P \rangle + W$  no depèn de  $P \in L$  i que l'aplicació  $L \rightarrow \overline{W}$  tal que  $Q \mapsto e_Q$  compleix les propietats [3.1] i [3.2].

**3.16 Proposició.** *Siguin  $L$  i  $L'$  dues varietats de l'espai afi  $\mathbb{A}$ . Llavors  $L$  i  $L'$  són paral·leles si i només si  $L_\infty \subseteq L'_\infty$  o  $L'_\infty \subseteq L_\infty$ . Si  $L$  i  $L'$  tenen la mateixa dimensió,  $L$  i  $L'$  són paral·leles si i només si  $L_\infty = L'_\infty$ .*

**Prova:** Si  $W$  i  $W'$  són els espais directores de  $L$  i  $L'$ , respectivament,  $L$  i  $L'$  són paral·leles, per definició, si i només si  $W \subseteq W'$  o  $W' \subseteq W$ . Però  $W \subseteq W'$  equival a  $[W] \subseteq [W']$ , és a dir, a  $L_\infty \subseteq L'_\infty$ . Anàlogament,  $W' \subseteq W$  equival a  $[W'] \subseteq [W]$ , és a dir, a  $L'_\infty \subseteq L_\infty$ .  $\square$

## 3.2 Configuracions de punts. Referències projectives

Els conceptes més bàsics que introduïm en aquesta secció són els de referència (projectiva) i de coordenades (projectives) d'un punt respecte d'una referència. Després estudiem dues maneres de representar les varietats lineals mitjançant coordenades relatives a una referència (equacions cartesianes i equacions paramètriques). Al principi de la secció es tracten algunes qüestions preliminars, com ara les nocions de punts dependents i de punts independents. També fem algunes consideracions sobre les «configuracions de punts».

### *Punts dependents i independents*

Siguin  $P_0, \dots, P_r$  punts i suposem que  $P_i = [e_i]$ . Llavors  $P_0 \vee \dots \vee P_r = [e_0, \dots, e_r]$  i  $\dim(P_0 \vee \dots \vee P_r) = \dim_K \langle e_0, \dots, e_r \rangle - 1$ . Així, doncs, veiem que la màxima dimensió que pot assolir la varietat lineal  $P_0 \vee \dots \vee P_r$  (quan movem els punts  $P_i$ , però mantenint  $r$  fix) és  $r$ , i que aquest valor màxim és assolit si i només si els vectors  $e_0, \dots, e_r$  són linealment independents. Si aquest és el cas, diem que els punts  $P_0, \dots, P_r$  són *independents*. Altrament, és a dir, si  $\dim(P_0 \vee \dots \vee P_r) < r$ , direm que són *dependents*.

**E.3.9.** Siguin  $P_0, \dots, P_r$  punts d'un espai afi  $\mathbb{A}$  i posem  $\overline{P}_0, \dots, \overline{P}_r$  per denotar els corresponents punts de la clausura projectiva  $\overline{\mathbb{A}}$ . Comproveu que  $P_0, \dots, P_r$  són independents de  $\mathbb{A}$  (en el sentit



del subapartat «Punts independents» de la secció 1.2, pàg. 67) si i només si  $\overline{P}_0, \dots, \overline{P}_r$  són punts independents de  $\overline{\mathbb{A}}$ .

### Varietat determinada per $r + 1$ punts independents

Sabem que donats dos punts diferents, diguem  $P_0$  i  $P_1$ , hi ha una única recta (que denotem  $P_0P_1$ ) que els conté. De fet, aquesta recta és  $P_0 \vee P_1$ . La proposició que segueix és una generalització natural d'aquest enunciat.

**3.17 Proposició.** *Siguin  $P_0, \dots, P_r$  punts independents de  $\mathbb{P}$ . Llavors,  $P_0 \vee \dots \vee P_r$  és l'única varietat lineal de dimensió  $r$  que els conté.*

**Prova:** Si  $P_0, \dots, P_r$  són independents, llavors  $L = P_0 \vee \dots \vee P_r$  té dimensió  $r$  i  $P_i \in L$  ( $i = 0, \dots, r$ ). Si ara  $M$  és una varietat lineal tal que  $P_i \in M$  ( $i = 0, \dots, r$ ), llavors  $L \subseteq M$ , ja que  $L$  és la mínima varietat lineal que conté els punts  $P_i$ . Si a més  $M$  té dimensió  $r$ ,  $\dim(L) = \dim(M)$  i, per tant,  $M = L$ .  $\square$

De la varietat lineal  $P_0 \vee \dots \vee P_r$  es diu que és la *varietat determinada pels punts*  $P_0, \dots, P_r$ . Quan els punts  $P_0, \dots, P_r$  són independents,  $P_0 \vee \dots \vee P_r$  sovint es denota abreviadament  $P_0P_1 \dots P_r$ . En el cas  $r = 2$ , la notació  $P_0P_1P_2$  s'ha usat abans per denotar el triangle de vèrtexs  $P_0, P_1$  i  $P_2$ . Aquests dos significats del símbol  $P_0P_1P_2$  no porten, en general, a confusió, ja que pel context sol ser clar a quin ens referim. Si cal, però, distingir, posarem  $\Delta P_0P_1P_2$  per denotar el triangle.

**E.3.10.** *Siguin  $P_0, \dots, P_r$  punts independents d'un espai afi  $\mathbb{A}$  i sigui  $L \subseteq \mathbb{A}$  la varietat lineal que determinen (pàg. 68). Siguin  $L' \subseteq \overline{\mathbb{A}}$  la varietat lineal determinada pels punts  $\overline{P}_0, \dots, \overline{P}_r \in \overline{\mathbb{A}}$  corresponents a  $P_0, \dots, P_r$ . Verifiqueu que  $L' = \overline{L}$  (la clausura projectiva de  $L$ ).*

### Configuracions

D'una successió  $\Pi = P_0, P_1, \dots, P_r$  de punts diferents d'un espai projectiu  $\mathbb{P}$  en direm una *configuració* de  $r + 1$  punts de  $\mathbb{P}$ , i dels punts  $P_i$  en direm els *vèrtexs* de la configuració. Usarem *terna* i *quaterna* per referir-nos a configuracions de tres i quatre punts, respectivament. Per *dimensió* de la configuració  $\Pi$  entendrem la dimensió de la varietat lineal  $\bigvee \Pi = P_0 \vee P_1 \vee \dots \vee P_r$ , i posarem  $\dim(\Pi)$  per denotar-la.

El valor màxim de la dimensió d'una configuració de  $r + 1$  punts és  $r$ , i s'assoleix si i només si els punts de la configuració són independents. En aquest cas, direm que la configuració és un  *$r$ -simplex*. D'un 2-simplex se'n diu un *triangle* i d'un 3-simplex un *tetràedre*.

Direm que una configuració  $\Pi'$  és *subordinada* d'una configuració  $\Pi$  si  $\Pi'$  és una subsuccessió de  $\Pi$ . Les configuracions de  $s + 1$  punts subordinades d'un  $r$ -simplex  $\Pi$  són  $s$ -simplexs i les varietats lineals que generen s'anomenen *cares* de dimensió  $s$  de  $\Pi$  (*arestes* si  $s = 1$  i *cares*, simplement, si  $s = 2$ ). Les arestes d'un triangle s'anomenen

*costats*. Dues cares d'un símplex  $\Pi$  es diuen *complementàries*, o *oposades*, si estan definides per configuracions que, com a subconjunts de  $\Pi$ , són complementaris.

**3.18 Exemples.** Una configuració de tres punts pot tenir dimensió 2, en el qual cas és un triangle, o dimensió 1, en el qual cas es tracta de tres punts alineats diferents. Les configuracions de quatre punts poden tenir dimensió 3, 2 o 1. En cas de dimensió 3, es tracta d'un tetràedre, i en el cas de dimensió 1, de quatre punts alineats diferents. En el cas de dimensió 2, hi ha dues possibilitats: que formin un *quadrangle*, és a dir, que les quatre configuracions subordinades de tres punts siguin triangles, o que exactament tres dels punts estiguin sobre una recta que no passa pel quart punt. En el cas d'un quadrangle, les rectes determinades per les sis possibles parelles de vèrtexs s'anomenen *costats* del quadrangle, i dos costats es diuen *oposats* si no tenen cap vèrtex en comú (vegeu la figura 3.9, en el qual les tres parelles de costats oposats són  $AB$  i  $CD$ ,  $AD$  i  $BC$ , i  $AC$  i  $BD$ ). Els tres punts d'intersecció de les tres parelles de costats oposats formen el *triangle diagonal* del quadrangle (a la figura 3.9, són els punts  $X$ ,  $Y$  i  $Z$ ).

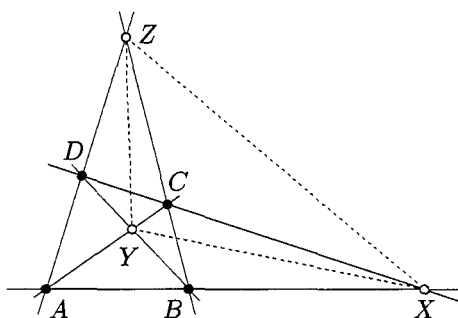


Figura 3.9: Quadrangle i el seu triangle diagonal

Direm que una configuració  $\Pi$  de  $r+1$  punts és de tipus  $s_{r+1}$ , o que és un  $r+1$ -vèrtex  $s$ -dimensional, si  $s = \dim(\Pi)$  (per tant  $s \leq r$ ) i totes les configuracions subordinades de  $s+1$  punts són  $s$ -símplexs. És clar, doncs, que un  $r$ -símplex és de tipus  $r_{r+1}$  (un  $r+1$ -vèrtex  $r$ -dimensional). Per exemple, una configuració de tres punts alineats és de tipus  $1_3$  i un quadrangle és una configuració de tipus  $2_4$  (o un *quadrivèrtex* de dimensió 2). Un triangle és una configuració de tipus  $2_3$  i un tetràedre és una configuració de tipus  $3_4$ .

Una configuració  $P_0, P_1, \dots, P_r, P'_0, P'_1, \dots, P'_r$  es dirà que és de tipus  $s_{r+1} \vee s'_{r'+1}$  si  $\Pi = P_0, P_1, \dots, P_r$  és de tipus  $s_{r+1}$ ,  $\Pi' = P'_0, P'_1, \dots, P'_r$  és de tipus  $s'_{r'+1}$  i  $(\vee \Pi) \cap (\vee \Pi') = \emptyset$ . Per exemple, dir que la configuració  $P_0, P_1, P_2, P_3$  és de tipus  $1_3 \vee 0$  significa que  $P_0, P_1, P_2$  són tres punts alineats diferents (sigui  $L$  la recta que els conté) i que  $P_3$  és un punt exterior a  $L$ .

### Referències projectives

Una *referència projectiva*, o un *sistema de coordenades projectives*, de  $\mathbb{P}^n$  és una configuració de  $n + 2$  punts  $P_0, \dots, P_n, U$  de tipus  $n_{n+2}$ , és a dir, tal que  $n + 1$  qualssevol d'ells són independents.

Posarem  $[P_0, \dots, P_n; U]$  per indicar que  $P_0, \dots, P_n, U$  formen una referència projectiva. Els punts  $P_0, \dots, P_n$  són independents i, per tant, defineixen un símplex; en direm el *símplex de la referència*, i dels punts  $P_0, \dots, P_n$ , els *vèrtexs de la referència*. El punt  $U$  s'anomena *punt unitat*. Notem que el punt unitat no pertany a cap cara del símplex  $[\diamond]$ .

Per exemple (figura 3.10), donar una referència projectiva de la recta projectiva  $\mathbb{P}^1$  equival a donar una terna ordenada de punts diferents  $P_0, P_1, U$ ; donar una referència projectiva del pla projectiu  $\mathbb{P}^2$  equival a donar tres punts no alineats  $P_0, P_1, P_2$  i un punt  $U$  no situat sobre cap de les rectes  $P_0P_1$ ,  $P_1P_2$ ,  $P_2P_0$ ; i donar una referència de l'espai projectiu  $\mathbb{P}^3$  equival a donar un tetràedre  $P_0P_1P_2P_3$  i un punt  $U$  no situat a cap de les seves cares.

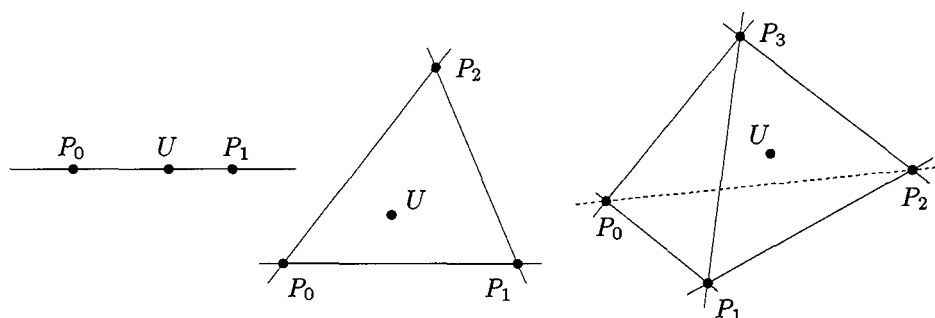


Figura 3.10: Referències projectives de  $\mathbb{P}^1$ ,  $\mathbb{P}^2$  i  $\mathbb{P}^3$

**3.19 Proposició.** Si  $[P_0, \dots, P_n; U]$  és una referència projectiva, existeixen vectors  $e_0, \dots, e_n$  de  $E$  tals que  $P_i = [e_i]$  i  $U = [e_0 + \dots + e_n]$ .

**Prova:** En efecte, siguin  $e'_0, \dots, e'_n$  representants dels punts  $P_0, \dots, P_n$  i  $e$  un representant de  $U$ . Com que  $P_0, \dots, P_n$  són independents, els vectors  $e'_0, \dots, e'_n$  són linealment independents, i com que  $n$  és la dimensió de l'espai,  $e'_0, \dots, e'_n$  és una base de  $E$ . Existeixen, per tant, escalars  $\lambda_0, \dots, \lambda_n$  tals que  $e = \lambda_0 e'_0 + \dots + \lambda_n e'_n$ . Es compleix que  $\lambda_i \neq 0$  per a tot  $i$ , ja que si fos, per exemple,  $\lambda_n = 0$ , llavors els punts  $P_0, \dots, P_{n-1}, U$  serien dependents i això contradiu la definició de referència projectiva. Així, doncs, si posem  $e_i = \lambda_i e'_i$ , llavors  $P_i = [e'_i] = [e_i]$  i  $U = [e_0 + \dots + e_n]$ .  $\square$

Els vectors  $e_0, \dots, e_n$  del lema anterior formen una base de  $E$  i d'aquesta base en direm que està *adaptada* a la referència  $[P_0, \dots, P_n; U]$ .

**3.20 Remarca.** Si  $e_0, \dots, e_n$  és una base de  $E$ , i definim  $P_i = [e_i]$  i  $U = [e_0 + \dots + e_n]$ , llavors  $[P_0, \dots, P_n; U]$  és una referència projectiva de  $\mathbb{P}$  per la qual  $e_0, \dots, e_n$  és una base adaptada: direm que és la *referència projectiva associada* a  $e_0, \dots, e_n$ .

**3.21 Proposició.** Dues bases  $e_0, \dots, e_n$  i  $e'_0, \dots, e'_n$  de  $E$  estan adaptades a la mateixa referència projectiva si i només si existeix  $\lambda \in K - \{0\}$ , tal que  $e'_i = \lambda e_i$ , per  $i = 0, \dots, n$ .

**Prova:** Si  $e_0, \dots, e_n$  i  $e'_0, \dots, e'_n$  són bases adaptades a la mateixa referència, llavors  $[e_i] = [e'_i]$ , per  $i = 0, \dots, n$ , i  $[e_0 + \dots + e_n] = [e'_0 + \dots + e'_n]$ . Existeixen, per tant, escalars no nuls  $\lambda_i$  i  $\lambda$  tals que  $e'_i = \lambda_i e_i$  ( $i = 0, \dots, n$ ) i  $e'_0 + \dots + e'_n = \lambda(e_0 + \dots + e_n)$ . D'aquestes relacions, i el fet que  $e_0, \dots, e_n$  siguin linealment independents, en resulta que  $\lambda_0 = \dots = \lambda_n = \lambda$ . Això prova la necessitat de la condició. La suficiència és una conseqüència immediata de les definicions.  $\square$

### Exemple: Referència projectiva associada a una referència afí

Sigui  $\mathbb{A}$  un espai afí. Sigui  $\mathcal{R} = [O; e_1, \dots, e_n]$  una referència afí de  $\mathbb{A}$ . Sigui  $\overline{\mathbb{A}}$  la clausura projectiva de  $\mathbb{A}$ . Posarem  $P_0 = \overline{O} = [e_0]$  (recordem que  $e_0 = (1, \mathbf{0}) \in \overline{V}$ ),  $P_i = [e_i]$  ( $i = 1, \dots, n$ ) i  $U = [e_0 + e_1 + \dots + e_n]$ . Tenim així que  $\overline{\mathcal{R}} = [P_0, \dots, P_n; U]$  és una referència projectiva de  $\overline{\mathbb{A}}$  i que  $e_0, \dots, e_n$  és una base de  $\overline{V}$  adaptada a  $\overline{\mathcal{R}}$ . Direm que  $\overline{\mathcal{R}}$  és la *referència projectiva associada* a la referència afí  $\mathcal{R}$ .

### Coordenades projectives

Sigui  $\mathcal{R} = [P_0, \dots, P_n; U]$  una referència projectiva,  $P$  un punt,  $e_0, \dots, e_n$  una base adaptada a  $\mathcal{R}$  i  $e$  un representant de  $P$ . Siguin  $(x_0, \dots, x_n)$  els components de  $e$  respecte de  $e_0, \dots, e_n$ , això és, els escalars tals que  $e = x_0 e_0 + \dots + x_n e_n$ . Llavors direm que  $(x_0, \dots, x_n)$  són *coordenades projectives* de  $P$  respecte de  $\mathcal{R}$ , o  *$\mathcal{R}$ -coordenades projectives* de  $P$ .

Notem que si  $(x_0, \dots, x_n)$  són coordenades projectives de  $P$  respecte de la referència  $\mathcal{R}$ , llavors  $(x_0, \dots, x_n)$  és un vector no nul de  $K^{n+1}$ .

**3.22 Proposició.** Donada una referència  $\mathcal{R}$  i un vector no nul  $(x_0, \dots, x_n) \in K^{n+1}$ , existeix un únic punt  $P$  pel qual  $(x_0, \dots, x_n)$  són coordenades projectives respecte de  $\mathcal{R}$ .

**Prova:** Si  $e_0, \dots, e_n$  és una base adaptada a  $\mathcal{R}$ , el punt  $P = [x_0 e_0 + \dots + x_n e_n]$  té coordenades  $(x_0, \dots, x_n)$ . Si  $P'$  també té coordenades  $(x_0, \dots, x_n)$ , llavors  $P' = [x_0 e'_0 + \dots + x_n e'_n]$ , on  $e'_0, \dots, e'_n$  és una base adaptada a  $\mathcal{R}$ . Però de 3.21 en resulta que existeix  $\lambda \in K^*$  tal que  $x_0 e'_0 + \dots + x_n e'_n = \lambda(x_0 e_0 + \dots + x_n e_n)$ , d'on  $P' = P$ .  $\square$

El punt pel qual  $(x_0, \dots, x_n)$  són coordenades projectives respecte de  $\mathcal{R}$ , el denotarem  $[x_0, \dots, x_n]_{\mathcal{R}}$ , o simplement  $[x_0, \dots, x_n]$  si la referència  $\mathcal{R}$  es pot sobreentendre pel context. Així tenim  $[x_0, \dots, x_n] = [x_0 e_0 + \dots + x_n e_n]$  per a qualsevol base  $e_0, \dots, e_n$  de  $E$  adaptada a la referència  $\mathcal{R}$ . En particular, tenim  $P_0 = [1, 0, \dots, 0], \dots, P_n = [0, 0, \dots, 0, 1], U = [1, 1, \dots, 1]$ .

Com que la definició de coordenades projectives d'un punt  $P$  respecte de la referència  $\mathcal{R}$  depèn de l'elecció d'una base adaptada a  $\mathcal{R}$  i d'un representant de  $P$ , no queden unívocament determinades per  $P$ . La proposició que segueix aclareix l'ambigüitat.

**3.23 Proposició.** Si  $(x_0, \dots, x_n) \in K^{n+1} - \{0\}$  i  $\lambda \in K - \{0\}$ , llavors  $[x_0, \dots, x_n]_{\mathcal{R}} = [\lambda x_0, \dots, \lambda x_n]_{\mathcal{R}}$ . Recíprocament, si  $[x_0, \dots, x_n]_{\mathcal{R}} = [x'_0, \dots, x'_n]_{\mathcal{R}}$ , llavors existeix  $\lambda \in K^*$  tal que  $x'_i = \lambda x_i$  ( $i = 0, \dots, n$ ).

**Prova:** És immediata i es deixa com a exercici per al lector.  $\square$

### Canvi de referència

Siguin  $\mathcal{R} = [P_0, \dots, P_n; U]$  i  $\mathcal{R}' = [P'_0, \dots, P'_n; U']$  referències projectives. Sigui  $\mathbf{e} = (e_0, \dots, e_n)$  una base adaptada a  $\mathcal{R}$  i  $\mathbf{e}' = (e'_0, \dots, e'_n)$  una base adaptada a  $\mathcal{R}'$ . Sigui  $M$  la matriu de la base  $\mathbf{e}'$  respecte de la base  $\mathbf{e}$ . Posarem  $[M]$  per indicar la matriu  $M$  llevat un factor escalar no nul (és a dir,  $[M] = [M']$  si i només si existeix un escalar no nul  $\lambda$  tal que  $M' = \lambda M$ ) i direm que  $[M]$  és la *matriu de  $\mathcal{R}'$  respecte de  $\mathcal{R}$* .

Sigui  $P$  un punt i siguin  $(x_0, \dots, x_n)$  coordenades projectives de  $P$  respecte de  $\mathcal{R}$  i  $(x'_0, \dots, x'_n)$  coordenades projectives de  $P$  respecte de  $\mathcal{R}'$ . Tenim, doncs, que  $e = x_0 e_0 + \dots + x_n e_n = \mathbf{e} \mathbf{x}^T$  i  $e' = x'_0 e'_0 + \dots + x'_n e'_n = \mathbf{e}' \mathbf{x}'^T$  són representants del punt  $P$ , amb la qual cosa existeix un escalar no nul  $\rho$  tal que  $\rho e = e'$ . Així

$$\rho e = \begin{cases} \rho \mathbf{e} \mathbf{x}^T \\ \mathbf{e}' \mathbf{x}'^T = \mathbf{e} M \mathbf{x}'^T \end{cases}$$

d'on obtenim

$$\rho \mathbf{x}^T = M \mathbf{x}'^T, \quad [3.3]$$

que és la fórmula del canvi de coordenades. Aquesta fórmula es pot també escriure

$$[\mathbf{x}^T] = [M][\mathbf{x}'^T]. \quad [3.3']$$

### Coordenades afins i coordenades projectives

Siguin  $x_1, \dots, x_n$  les  $\mathcal{R}$ -coordenades d'un punt  $X \in \mathbb{A}$ . Així  $X = O + x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$  i  $\overline{X} = [e_0 + x_1 e_1 + \dots + x_n e_n]$ . Per tant,  $(1, x_1, \dots, x_n)$  són coordenades projectives de  $\overline{X}$  respecte de la referència  $\overline{\mathcal{R}}$ . Per altra banda, si un punt  $Q \in \mathbb{A}$  té coordenades projectives  $(\xi_0, \dots, \xi_n)$  respecte de  $\overline{\mathcal{R}}$ , llavors  $Q = [\xi_0 e_0 + \dots + \xi_n e_n]$  i és clar que  $Q \in \mathbb{A}_\infty$  si i només si  $\xi_0 = 0$ . A més, si  $Q \notin \mathbb{A}_\infty$ , llavors  $Q = \overline{X}$ , on  $X \in \mathbb{A}$ , i les  $\mathcal{R}$ -coordenades

de  $X$  són  $(\xi_1/\xi_0, \dots, \xi_n/\xi_0)$ , ja que  $[\xi_0 e_0 + \dots + \xi_n e_n] = [e_0 + \frac{\xi_1}{\xi_0} e_1 + \dots + \frac{\xi_n}{\xi_0} e_n]$  si  $\xi_0 \neq 0$ . Fem un sumari d'aquestes conclusions:

**3.24 Proposició.** Si  $\overline{\mathcal{R}}$  és la referència projectiva de  $\overline{\mathbb{A}}$  associada a la referència  $\mathcal{R}$  de l'espai afí  $\mathbb{A}$ , el punt  $[\xi_0, \dots, \xi_n]_{\overline{\mathcal{R}}} \in \overline{\mathbb{A}}$  és un punt propi si i només si  $\xi_0 \neq 0$  i, si aquest és el cas, el punt  $(x_1, \dots, x_n)_{\mathcal{R}} \in \mathbb{A}$  que li correspon queda determinat per les relacions

$$x_i = \frac{\xi_i}{\xi_0}, \quad i = 1, \dots, n.$$

**E.3.11.** Comproveu que si  $\mathbf{x}^T = A\mathbf{x}' + \mathbf{p}^T$  és la relació matricial que expressa el canvi de  $\mathcal{R}$ -coordenades a  $\mathcal{R}'$ -coordenades, on  $\mathcal{R}$  i  $\mathcal{R}'$  són referències de l'espai afí  $\mathbb{A}$ , llavors  $[\xi^T] = [\overline{A}][\xi'^T]$ , on

$$\overline{A} = \left[ \begin{array}{c|c} 1 & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{p}^T & A \end{array} \right],$$

expressa el canvi de  $\overline{\mathcal{R}}$ -coordenades a  $\overline{\mathcal{R}'}$ -coordenades.

### Coordenada absoluta

Sigui  $\mathcal{R} = [P_0, P_1; U]$  una referència d'una recta projectiva  $\mathbb{P}^1$ . Si  $[\xi_0, \xi_1]$  són  $\mathcal{R}$ -coordenades d'un punt  $X$  i  $\xi_1 \neq 0$ , llavors

$$x = \xi_0/\xi_1 \tag{3.4}$$

només depèn de  $X$  i  $\mathcal{R}$ , i direm que és la  $\mathcal{R}$ -coordenada absoluta de  $X$ . Com que l'únic punt que satisfà  $\xi_1 = 0$  és  $P_0 = [1, 0]_{\mathcal{R}}$ , direm que la seva  $\mathcal{R}$ -coordenada absoluta és el símbol  $\infty$ . Si posem  $\overline{K} = K \sqcup \{\infty\}$ , llavors tenim una aplicació bijectiva  $\overline{K} \simeq \mathbb{P}^1$  tal que  $x \mapsto [x, 1]_{\mathcal{R}}$  si  $x \in K$  i  $\infty \mapsto [1, 0]_{\mathcal{R}}$ . Aquest punt, el denotarem també  $[\infty, 1]_{\mathcal{R}}$  o  $\infty_{\mathcal{R}}$ .

**E.3.12.** Si  $\overline{\mathcal{R}} = [P_0, P_1; U]$  és la referència projectiva associada a una referència afí  $\mathcal{R} = [O; e_1]$  de  $\mathbb{A}^1$ , la  $\overline{\mathcal{R}}$ -coordenada absoluta del punt  $\overline{X}$  corresponent a un punt  $X \in \mathbb{A}^1$  coincideix amb la inversa de la  $\mathcal{R}$ -coordenada de  $X$ , amb la convenció que  $1/0 = \infty$  i  $1/\infty = 0$ .

### Equacions cartesianes d'una varietat lineal

Suposem que  $\mathcal{R} = [P_0, \dots, P_n; U]$  és una referència de l'espai projectiu  $\mathbb{P}$  i posem  $\xi_0, \dots, \xi_n$  per denotar les corresponents coordenades projectives. Considerem un sistema de  $m$  equacions lineals en les variables  $\xi_0, \dots, \xi_n$ :

$$a_{i0}\xi_0 + \dots + a_{in}\xi_n = 0, \quad a_{i0}, \dots, a_{in} \in K, \quad i = 1, \dots, m. \tag{3.5}$$

Les solucions d'aquest sistema formen un subespai vectorial  $W'$  de  $K^{n+1}$  i  $\dim(W') = n + 1 - r$ , on  $r$  és el rang de la matriu  $(a_{ij})$ . Així, doncs, els punts de la forma  $[\xi_0, \dots, \xi_n]_{\mathcal{R}}$ , on  $\xi_0, \dots, \xi_n$  és una solució no nul·la del sistema [3.5], formen una varietat lineal  $L$  de dimensió  $n-r$  de  $\mathbb{P}$ . D'aquesta varietat lineal en direm que és la *varietat lineal determinada per les equacions* [3.5]. També direm que [3.5] és una *sistema d'equacions cartesianes* de la varietat  $L$ .

Recíprocament, si  $L \subseteq \mathbb{P}$  és una varietat lineal de dimensió  $n-r$ , existeixen sistemes d'equacions lineals tals com el [3.5] que determinen  $L$ . De fet, veurem que existeix un sistema de la forma  $\xi_i = 0$  ( $i = 0, \dots, r-1$ ) que determina  $L$ . En efecte, sigui  $L = [F]$  on  $F \subseteq E$  és un subespai vectorial de  $E$ . Llavors  $\dim(F) = n+1-r$ . Siguin  $e_r, \dots, e_n$  una base de  $F$  i escollim vectors  $e_0, \dots, e_{r-1}$  de manera que  $e_0, \dots, e_{r-1}, e_r, \dots, e_n$  formin una base de  $E$ . Siguin  $\mathcal{R}$  la referència de  $\mathbb{P}$  determinada per la base  $e_0, \dots, e_n$ . En aquesta referència, els punts de  $L$  són els de la forma  $[\xi_r e_r + \dots + \xi_n e_n]$ , és a dir, els de la forma  $[0, \dots, 0, \xi_r, \dots, \xi_n]_{\mathcal{R}}$ . És clar, doncs, que coincideixen amb els que satisfan  $\xi_i = 0$  per  $i = 0, \dots, r-1$ .

**3.25 Exemple.** Una equació de la forma  $a_0 \xi_0 + \dots + a_n \xi_n = 0$  determina un hiperplà si els coeficients  $a_0, \dots, a_n$  no són tots nuls. En el cas de  $\mathbb{P}^1$ , l'hiperplà  $a_0 \xi_0 + a_1 \xi_1 = 0$  es redueix al punt  $[-a_1, a_0]$ .

**E.3.13.** Si  $[a_0, a_1, a_2]$  i  $[b_0, b_1, b_2]$  són dos punts diferents de  $\mathbb{P}^2$ , llavors l'equació de la recta que determinen és

$$\begin{vmatrix} \xi_0 & \xi_1 & \xi_2 \\ a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Anàlogament, si  $[a_0, a_1, a_2, a_3]$ ,  $[b_0, b_1, b_2, b_3]$  i  $[c_0, c_1, c_2, c_3]$  són tres punts diferents de  $\mathbb{P}^3$ , llavors

$$\begin{vmatrix} \xi_0 & \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

és l'equació del pla determinat pels tres punts.

**E.3.14.** Siguin  $[a_0, a_1, a_2, a_3]$  i  $[b_0, b_1, b_2, b_3]$  dos punts diferents de  $\mathbb{P}^3$ . Siguin  $i, j$  índexs tals que  $a_i b_j - a_j b_i \neq 0$  (noteu que si  $a_i b_j - a_j b_i = 0$  per a totes les parelles d'índexs, llavors els punts coincideixen). Proveu que si  $\{1, 2, 3, 4\} = \{i, j, k, \ell\}$ , llavors

$$\begin{vmatrix} \xi_i & \xi_j & \xi_k \\ a_i & a_j & a_k \\ b_i & b_j & b_k \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} \xi_i & \xi_j & \xi_\ell \\ a_i & a_j & a_\ell \\ b_i & b_j & b_\ell \end{vmatrix} = 0$$

són equacions cartesianes de la recta determinada pels dos punts.

### Equacions cartesianes afins i projectives

Suposem ara que tenim una referència afí  $\mathcal{R} = [O; e_1, \dots, e_n]$  de l'espai afí  $\mathbb{A}$  i un sistema d'equacions lineals no homogènies

$$b_{i1}x_1 + \dots + b_{in}x_n + b_{i0} = 0, \quad b_{i1}, \dots, b_{in}, b_{i0} \in K, \quad i = 1, \dots, m. \quad [3.6]$$

Sabem que si aquest sistema és compatible i el rang de la seva matriu és  $r$ , llavors (teorema 1.25) els punts  $[x_1, \dots, x_n]_{\mathcal{R}}$ , on  $(x_1, \dots, x_n)$  recorre les seves solucions, formen una varietat lineal afí  $L$  de dimensió  $n - r$  i que l'espai director de  $L$  és el determinat pel corresponent sistema lineal homogeni

$$b_{i1}x_1 + \dots + b_{in}x_n = 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad [3.6']$$

en el sentit que els vectors directores de  $L$  són els de la forma  $x_1e_1 + \dots + x_n e_n$ , on  $x_1, \dots, x_n$  recorre les solucions de [3.6']. Amb aquestes notacions tenim:

**3.26 Proposició.** *En la referència  $\overline{\mathcal{R}}$  de  $\overline{\mathbb{A}}$  associada a  $\mathcal{R}$ , el sistema homogeni*

$$b_{i1}\xi_1 + \dots + b_{in}\xi_n + b_{i0}\xi_0 = 0, \quad b_{i1}, \dots, b_{in}, b_{i0} \in K, \quad i = 1, \dots, m, \quad [*]$$

*representa la clausura projectiva  $\overline{L}$  i*

$$b_{i1}\xi_1 + \dots + b_{in}\xi_n = 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad [*']$$

*representa  $L_{\infty}$ .*

**Prova:** En efecte,  $[*]$  representa una varietat lineal  $M$  de  $\overline{\mathbb{A}}$ . Dividint per  $\xi_0$  veiem que  $M \cap i(\mathbb{A})$  coincideix amb  $i(L)$ . Per tant,  $M = \overline{L}$  (proposició 3.15). Que  $L_{\infty}$  és representada per  $[*']$  és una conseqüència directa de [3.6'].  $\square$

### Equacions paramètriques d'una varietat lineal

Un sistema d'equacions de la forma

$$\xi_i = \lambda_0 b_{i0} + \dots + \lambda_r b_{ir}, \quad i = 0, \dots, n, \quad [3.7]$$

on  $b_{ij}$  és una matriu  $(n+1) \times (r+1)$  de rang  $r+1$ , representa una varietat lineal de dimensió  $r$ , en el sentit que, quan  $(\lambda_0, \dots, \lambda_r)$  recorre  $K^{r+1}$ , el punt  $[\xi_0, \dots, \xi_n]_{\mathcal{R}}$  recorre una varietat lineal  $L \subseteq \mathbb{P}^n$  de dimensió  $r$ . Això és una conseqüència immediata del fet que els vectors  $(\xi_0, \dots, \xi_n) \in K^{n+1}$  tals que  $\xi_i = \lambda_0 b_{i0} + \dots + \lambda_r b_{ir}$  formen un espai vectorial de dimensió  $r+1$ . Direm que [3.7] són *equacions paramètriques* de  $L$ . Recíprocament, si  $L$  és una varietat lineal de dimensió  $r$ , els punts de  $L$  es poden determinar per un sistema d'equacions paramètriques de la forma [3.7]. En efecte, si  $P_0, \dots, P_r$  són punts independents de  $L$  i les coordenades projectives de  $P_i$  respecte



d'una referència són  $(b_{i0}, \dots, b_{in})$ , llavors les coordenades  $(\xi_0, \dots, \xi_n)$  dels punts de  $L$  són donades per les expressions

$$\xi_i = \lambda_0 b_{i0} + \dots + \lambda_r b_{ir}, \lambda_0, \dots, \lambda_r \in K.$$

**3.27 Exemple.** Les equacions paramètriques de la recta que uneix els punts  $[a_0, \dots, a_n]$  i  $[b_0, \dots, b_n]$  (que suposem diferents) són  $\xi_i = \lambda a_i + \mu b_i$ , on  $\lambda, \mu$  són escalars arbitraris no tots dos nuls.

### Coordenades baricèntriques

En el subapartat «Coordenades afins i projectives», pàg. 183, hem exposat la relació que hi ha entre les coordenades d'un punt de l'espai afí respecte d'una referència  $\mathcal{R}$  i les coordenades projectives d'aquest mateix punt respecte de la referència projectiva associada  $\overline{\mathcal{R}}$ .

Vegem ara una altra manera, que és útil en diverses circumstàncies, d'associar a una referència afí  $\mathcal{R} = [P_0, \dots, P_n]$  de  $\mathbb{A}^n$  una referència projectiva de  $\overline{\mathbb{A}}^n$ . Escollim primer un punt  $A = [a_1, \dots, a_n]_{\mathcal{R}}$ , qualsevol, no incident amb les cares del símplex  $P_0 P_1 \dots P_n$ . Així, si  $e_i = P_i - P_0$  ( $i = 1, \dots, n$ ), tenim  $A = P_0 + a_1 e_1 + \dots + a_n e_n$ , amb  $a_i \neq 0$  ( $i = 1, \dots, n$ ) i  $a_1 + \dots + a_n \neq 1$  (és a dir,  $a_0 \neq 0$ , on  $a_0 = 1 - (a_1 + \dots + a_n)$ ). Ara definim la referència  $\tilde{\mathcal{R}}_A$  de  $\overline{\mathbb{A}}$  per  $\tilde{\mathcal{R}}_A = [P_0, \dots, P_n; A]$ , on escrivim amb el mateix símbol un punt de  $\mathbb{A}$  i el corresponent punt de  $\overline{\mathbb{A}}$ . Notem que si  $\mathbf{e} = (e_0, \dots, e_n)$  és la base usual adaptada a  $\overline{\mathcal{R}}$ , llavors  $P_i = [e_0 + e_i]$ .

**3.28 Lema.** *Els vectors*

$$a_0 e_0, a_1(e_0 + e_1), \dots, a_n(e_0 + e_n)$$

*constitueixen una base adaptada a  $\tilde{\mathcal{R}}_A$ .*

**Prova:** És una comprovació immediata, usant que  $a_0 + a_1 + \dots + a_n = 0$  (per definició de  $a_0$ ). El lector pot completar els detalls com a exercici.  $\square$

**3.29 Proposició.** *Si  $X = [x_1, \dots, x_n]_{\mathcal{R}}$  és un punt de l'espai afí  $\mathbb{A}$  i posem  $x_0 = 1 - \sum_{i=1}^n x_i$ , llavors*

$$X = \left[ \frac{x_0}{a_0}, \frac{x_1}{a_1}, \dots, \frac{x_n}{a_n} \right]_{\tilde{\mathcal{R}}_A}.$$

*Inversament, si  $\tilde{\xi}_0, \dots, \tilde{\xi}_n$  són  $\tilde{\mathcal{R}}_A$ -coordenades d'un punt propi  $X$ ,  $X = [\tilde{\xi}_0, \dots, \tilde{\xi}_n]_{\tilde{\mathcal{R}}_A}$ , llavors les  $\mathcal{R}$ -coordenades  $(x_1, \dots, x_n)$  s'expressen per les fórmules*

$$x_i = \frac{a_i \tilde{\xi}_i}{a_0 \tilde{\xi}_0 + a_1 \tilde{\xi}_1 + \dots + a_n \tilde{\xi}_n} \quad (i = 1, \dots, n).$$

**Prova:** Sigui  $\overline{\mathcal{R}}$  la referència de  $\overline{\mathbb{A}}$  associada a  $\mathcal{R}$ . Sigui  $\mathbf{e} = (e_0, \dots, e_n)$  la base usual adaptada a  $\overline{\mathcal{R}}$ . Posem  $(\xi_0, \dots, \xi_n)$  per denotar coordenades projectives respecte de la referència  $\overline{\mathcal{R}}$  i  $(\tilde{\xi}_0, \dots, \tilde{\xi}_n)$  per denotar coordenades projectives respecte de la referència  $\tilde{\mathcal{R}}_A$ . El lema 3.28 i les fórmules [3.3] del canvi de coordenades projectives ens donen que

$$\xi_0 = a_0 \tilde{\xi}_0 + a_1 \tilde{\xi}_1 + \dots + a_n \tilde{\xi}_n, \quad \xi_i = a_i \tilde{\xi}_i \quad (i = 1, \dots, n). \quad [3.8]$$

Ara el fet que  $x_i = \xi_i / \xi_0$  (proposició 3.24) ens dona les relacions per obtenir les  $\mathcal{R}$ -coordenades  $x_1, \dots, x_n$  en termes de les  $\tilde{\mathcal{R}}_A$ -coordenades, i això estableix la segona part de la proposició.

Per veure la primera part, notem que, invertint les fórmules [3.8], obtenim

$$\tilde{\xi}_0 = \frac{1}{a_0} (\xi_0 - \xi_1 - \dots - \xi_n), \quad \tilde{\xi}_i = \frac{\xi_i}{a_i} \quad (i = 1, \dots, n). \quad [3.9]$$

i ara és suficient recordar que  $[1, x_1, \dots, x_n]$  són  $\overline{\mathcal{R}}$ -coordenades del punt  $[x_1, \dots, x_n]_{\mathcal{R}}$ .  $\square$

**3.30 Corol·lari.** *L'equació de l'hiperplà de l'infinit en la referència  $\tilde{\mathcal{R}}_A$  és*

$$a_0 \tilde{\xi}_0 + a_1 \tilde{\xi}_1 + \dots + a_n \tilde{\xi}_n = 0.$$

**Prova:** Immediata a partir de les fórmules [3.8] i del fet que  $\xi_0 = 0$  és l'equació de l'hiperplà de l'infinit en la referència  $\overline{\mathcal{R}}$ .  $\square$

**3.31 Exemple** (coordenades baricèntriques). Si  $\mathcal{R} = [P_0, \dots, P_n]$  és una referència de l'espai afí  $\mathbb{A}$ , i  $G$  és el baricentre del símplex  $P_0 P_1 \dots P_n$ , llavors podem considerar la referència projectiva  $\tilde{\mathcal{R}}_G$  de  $\overline{\mathbb{A}}$ , de la qual en direm la *referència baricèntrica* associada a  $\mathcal{R}$ . Les coordenades respecte d'aquesta referència s'anomenen *coordenades baricèntriques* de  $\mathbb{A}$  (o de  $\overline{\mathbb{A}}$ ). Com que  $a_i = \frac{1}{n+1}$  si  $A = G$ , també és  $a_0 = \frac{1}{n+1}$  i, per tant, l'equació de l'hiperplà de l'infinit, en coordenades baricèntriques, és

$$\tilde{\xi}_0 + \tilde{\xi}_1 + \dots + \tilde{\xi}_n = 0.$$

A més, les coordenades afins d'un punt,  $(x_1, \dots, x_n)$ , i les seves coordenades baricèntriques,  $\tilde{\xi}_0, \dots, \tilde{\xi}_n$ , es relacionen per les fórmules

$$x_i = \frac{\tilde{\xi}_i}{\tilde{\xi}_0 + \tilde{\xi}_1 + \dots + \tilde{\xi}_n}.$$

**E.3.15.** Proveu que si  $(x_1, \dots, x_n)$  són les coordenades afins d'un punt  $X$ , llavors  $(x_0, x_1, \dots, x_n)$  són coordenades baricèntriques de  $X$ , on  $x_0 = 1 - (x_1 + \dots + x_n)$ .

**3.32 Remarca.** Siguin  $\mathcal{R} = [P_0, \dots, P_n]$  i  $\mathcal{R}' = [P'_0, \dots, P'_n]$  referències afins de l'espai afi  $A$ . Sigui  $A$  un punt no incident amb cap de les cares del símplex de  $\mathcal{R}'$ . Siguin  $(a_{i0}, \dots, a_{in})$  coordenades projectives de  $P'_i$  respecte de la referència  $\overline{\mathcal{R}}$  i suposem que s'han normalitzat de manera que  $(\sum_{i=0}^n a_{i0}, \dots, \sum_{i=0}^n a_{in})$  siguin  $\overline{\mathcal{R}}$ -coordenades projectives de  $A$ . Posem  $M = (a_{ij})$ ,  $0 \leq i, j \leq n$ . Aleshores la relació

$$[\xi'^T] = [M^T][\tilde{\xi}^T]$$

ens expressa les  $\overline{\mathcal{R}}'$ -coordenades  $\xi' = (\xi'_0, \dots, \xi'_n)$  d'un punt en termes de les seves  $\tilde{\mathcal{R}}_A$ -coordenades  $\tilde{\xi} = (\tilde{\xi}_0, \dots, \tilde{\xi}_n)$ .

Aquesta relació és útil per a resoldre problemes en els quals la conclusió i les dades de problema s'expressen millor en referències diferents. En aquest cas, sol ser oportú d'escollir  $\mathcal{R}'$  de manera que ens permeti expressar còmodament la conclusió, i  $\tilde{\mathcal{R}}_A$  de manera que ens permeti traduir d'una manera natural les dades i les hipòtesis del problema. Per a exemples d'aquest principi, vegeu els problemes P.3.16, P.3.17 i P.3.18. En aquests dos darrers problemes, per exemple, és còmode usar *coordenades trimètriques*: si  $P_0P_1P_2$  és un triangle del pla euclidià, són les coordenades projectives relatives a la referència  $\tilde{\mathcal{R}}_I = [P_0, P_1, P_2; I]$ , on  $I$  és l'incentre del triangle.

### 3.3 Projectivitats

Siguin  $\mathbb{P} = [E]$  i  $\mathbb{P}' = [E']$  dos espais projectius. Donada una aplicació lineal injectiva  $f: E \rightarrow E'$ , posarem  $[f]: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}'$  per denotar l'aplicació tal que  $[x] \mapsto [f(x)]$ . Com que  $[f(\lambda x)] = [\lambda f(x)] = [f(x)]$  per a tot  $\lambda \in K - \{0\}$ , veiem que  $[f]$  està ben definida. Notem, per altra banda, que  $[\mu f] = [f]$  per a tot  $\mu \in K - \{0\}$ .

#### Generalitats

Direm que una aplicació  $\varphi: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}'$  és una *projectivitat* si existeix un isomorfisme lineal  $f: E \rightarrow E'$  tal que  $\varphi = [f]$ . Les projectivitats d'un espai projectiu  $\mathbb{P}$  en ell mateix s'anomenen *homografies* de  $\mathbb{P}$ .

**E.3.16.** Siguin  $E$ ,  $E'$  i  $E''$  espais vectorials i  $f: E \rightarrow E'$  i  $f': E' \rightarrow E''$  aplicacions lineals injectives. Verifiqueu que  $[f'] \circ [f] = [f' \circ f]$  i deduiu-ne que la composició de projectivitats és una projectivitat.

**E.3.17.** Si  $f$  és un isomorfisme lineal, comproveu que  $[f]$  és bijectiva i que la projectivitat  $[f^{-1}]$  és inversa de la projectivitat  $[f]$ .

**E.3.18.** Proveu que les homografies d'un espai projectiu  $\mathbb{P}$  formen un grup amb l'operació de composició. D'aquest grup, se'n diu el *grup projectiu* de  $\mathbb{P}$ , i posarem  $PGL(\mathbb{P})$  per denotar-lo.

**3.33 Proposició.** Si  $f$  i  $f'$  són aplicacions lineals injectives de  $E$  en  $E'$  i  $[f] = [f']$ , llavors existeix  $\mu \in K$  tal que  $f' = \mu f$ .

**Prova:** Per hipòtesi tenim  $[f'(e)] = [f(e)]$  per a tot  $e \in E - \{0\}$ . Així existeix, per a cada  $e \in E - \{0\}$ ,  $\mu_e \in K$  tal que  $f'(e) = \mu_e f(e)$ . Serà suficient veure que  $\mu_{e'} = \mu_e$  per a qualsevol parell de vectors  $e, e' \in E - \{0\}$ . Considerem primer el cas en què  $e$  i  $e'$  són linealment dependents. Això significa que existeix  $\lambda \in K$  tal que  $e' = \lambda e$  i  $\mu_{\lambda e} = \mu_e$  resulta de les relacions següents:

$$f'(e') = \begin{cases} \mu_{e'} f(e') = \mu_{\lambda e} f(e') \\ f'(\lambda e) = \lambda f'(e) = \lambda \mu_e f(e) = \mu_e f(\lambda e) = \mu_e f(e') \end{cases}$$

Per altra banda, tenim

$$f'(e + e') = \begin{cases} \mu_{e+e'} f(e + e') = \mu_{e+e'} f(e) + \mu_{e+e'} f(e') \\ f'(e + e') = f'(e) + f'(e') = \mu_e f(e) + \mu_{e'} f(e') \end{cases}$$

i d'aquestes relacions s'obté  $\mu_e = \mu_{e+e'} = \mu_{e'}$  si  $e$  i  $e'$  són linealment independents.  $\square$

Segui  $f: E \rightarrow E'$  un isomorfisme lineal entre els espais vectorials  $E$  i  $E'$  i sigui  $F$  un subespai vectorial de  $E$ . És clar que  $[f]([F]) = [f(F)]$ , amb la qual cosa tenim:

**3.34 Una projectivitat transforma varietats lineals en varietats lineals de la mateixa dimensió.**  $\square$

Si  $L$  i  $L'$  són varietats lineals de  $\mathbb{P} = [E]$  i  $\varphi = [f]$ , llavors a  $\mathbb{P}' = [E']$  tenim que

$$\varphi(L \vee L') = \varphi(L) \vee \varphi(L') \quad [3.10]$$

$$\varphi(L \cap L') = \varphi(L) \cap \varphi(L'). \quad [3.11]$$

Aquestes fórmules es dedueixen directament de les definicions i es deixen com a exercici.

### Representació d'una projectivitat en coordenades

Vegem com es representa una projectivitat  $\varphi: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}'$  mitjançant una referència  $\mathcal{R} = [P_0, \dots, P_n; U]$  de  $\mathbb{P}$  i una referència  $\mathcal{R}' = [P'_0, \dots, P'_n; U']$  de  $\mathbb{P}'$ . Segui  $\mathbf{e} = (e_0, \dots, e_n)$  una base de  $E$  adaptada a  $\mathcal{R}$  i sigui  $\mathbf{e}' = (e'_0, \dots, e'_n)$  una base de  $E'$  adaptada a  $\mathcal{R}'$ . Si  $\varphi = [f]$ , sigui  $M$  la matriu de  $f$  respecte de les bases  $\mathbf{e}$  i  $\mathbf{e}'$ , és a dir,  $f(\mathbf{e}) = \mathbf{e}'M$ . Com que  $\mathbf{e}$ ,  $\mathbf{e}'$  i  $f$  estan definides llevat d'un factor escalar no nul (proposicions 3.21 i 3.18),  $[M]$  només depèn de  $\varphi$  i direm que és la *matriu de  $\varphi$  respecte de les referències  $\mathcal{R}$  i  $\mathcal{R}'$* .

Seguin  $\xi = (\xi_0, \dots, \xi_n)$  les  $\mathcal{R}$ -coordenades d'un punt  $P$  de  $\mathbb{P}$  i  $\xi' = (\xi'_0, \dots, \xi'_n)$  les  $\mathcal{R}'$ -coordenades de  $\varphi(P)$ . Llavors, tenim

$$[\xi'^T] = [M][\xi^T] \quad [3.12]$$

En efecte,  $e\xi^T$  és un representant de  $P$ . Per tant,  $f(e\xi^T) = f(e)\xi^T = e'M\xi^T$  és un representant de  $\varphi(P)$ . Com que  $e'\xi'^T$  és un altre representant de  $\varphi(P)$ , la fórmula en resulta immediatament.

**E.3.19.** Sigui  $\varphi$  una homografia de  $\mathbb{P}^1$  i suposem que la matriu de  $\varphi$ , en una certa referència, és  $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ . Proveu que  $\varphi$  és una *involució* (això és, que  $\varphi^2$  és la identitat) si i només si, o bé  $a_{11} + a_{22} = 0$ , o bé  $\varphi$  és la identitat.

### Teorema fonamental de les projectivitats

**3.35 Teorema.** Sigui  $\mathcal{R} = [P_0, P_1, \dots, P_n; U]$  una referència de l'espai projectiu  $\mathbb{P}$  i  $\mathcal{R}' = [P'_0, P'_1, \dots, P'_n; U']$  una referència de l'espai projectiu  $\mathbb{P}'$ . Llavors existeix una única projectivitat  $\varphi: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}'$  tal que  $\varphi(P_i) = P'_i$  ( $0 \leq i \leq n$ ) i  $\varphi(U) = U'$  (per escriure aquestes relacions abreujadament posarem  $\varphi(\mathcal{R}) = \mathcal{R}'$ ).

**Prova:** Vegem primer l'existència. Sigui  $e_0, e_1, \dots, e_n$  una base de  $E$  adaptada a  $\mathcal{R}$  i  $e'_0, e'_1, \dots, e'_n$  una base de  $E'$  adaptada a  $\mathcal{R}'$ . Sigui  $f: E \rightarrow E'$  l'única aplicació lineal tal que  $f(e_i) = e'_i$ . Llavors  $f$  és un isomorfisme lineal i la projectivitat  $[f]$  transforma  $P_i = [e_i]$  en  $[e'_i] = P'_i$  i  $U = [e_0 + e_1 + \dots + e_n]$  en  $[e'_0 + e'_1 + \dots + e'_n] = U'$ .

Per veure la unicitat, sigui  $\varphi: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}'$  una projectivitat que transforma  $\mathcal{R}$  en  $\mathcal{R}'$ . N'hi haurà prou si mostrem que  $\varphi = [f]$ . Sigui  $g: E \rightarrow E'$  un isomorfisme lineal tal que  $\varphi = [g]$ . Com que  $P'_i = \varphi(P_i) = [g(e_i)]$  i  $U' = \varphi(U) = [g(e_0) + g(e_1) + \dots + g(e_n)]$ ,  $g(e_0), g(e_1), \dots, g(e_n)$  és una base de  $E'$  adaptada a  $\mathcal{R}'$ . Per la unicitat, llevat d'un factor escalar, de les bases adaptades a una referència (proposició 3.21), existeix un  $\lambda \in K - \{0\}$  tal que  $g(e_i) = \lambda e'_i$ . Ara  $e'_i = f(e_i)$ , per definició de  $f$ , i així  $g = \lambda f$ , d'on  $\varphi = [g] = [\lambda f] = [f]$ .  $\square$

**E.3.20.** Siguin  $L$  i  $L'$  dues varietats lineals de dimensió  $r$  d'un espai projectiu  $\mathbb{P}$ . Sigui  $\mathcal{R}$  una referència de  $L$  i  $\mathcal{R}'$  una referència de  $L'$ . Pel teorema fonamental de les projectivitats, existeix una única projectivitat  $\varphi: L \rightarrow L'$  que transforma  $\mathcal{R}$  en  $\mathcal{R}'$ . Proveu que  $\varphi$  és la restricció a  $L$  d'una homografia de  $\mathbb{P}$ , és a dir, que existeix una homografia  $\alpha$  de  $\mathbb{P}$  tal que  $\alpha(X) = \varphi(X)$  per a tot  $X \in L$ .

### Punts fixos per una homografia

Sigui  $\varphi = [f]$  una homografia de l'espai projectiu  $\mathbb{P} = [E]$ . Un punt  $[x] \in \mathbb{P}$  és *fix* per  $\varphi$  si i només si  $[f(x)] = [x]$ . Com que aquesta relació equival a dir que existeix  $\lambda \in K$  tal que  $f(x) = \lambda x$ , veiem que  $[x]$  és fix per  $\varphi$  si i només si  $x$  és un vector propi no nul de  $f$ .

**E.3.21.** Proveu que una homografia de  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$  té almenys un punt fix.

**3.36 Proposició.** El conjunt de punts fixos de  $\varphi$  és la unió d'un nombre finit de varietats lineals disjunts dues a dues.

**Prova:** Sigui  $\varphi = [f]$ , on  $f$  és un automorfisme lineal de  $E$ . El conjunt de vectors propis de  $f$  de valor propi  $\lambda \in K$  formen un subespai vectorial  $E_\lambda$  de  $E$ . A més,  $E_\lambda \cap E_\mu = \{0\}$  si  $\lambda \neq \mu$ . Si posem  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  per denotar els valors propis no nuls diferents de  $f$  i  $L_i = [E_{\lambda_i}]$  ( $i = 1, \dots, r$ ), llavors és clar que les varietats lineals  $L_1, \dots, L_r$  són disjunctes dues a dues i que el conjunt de punts fixos de  $\varphi$  és  $L_1 \cup \dots \cup L_r$ , i això acaba la prova.  $\square$

**3.37 Exemple (Homologies).** Es diu que una homografia  $\varphi$  és una *homologia* si és diferent de la identitat i té un hiperplà de punts fixos. En tal cas, l'hiperplà s'anomena l'eix de l'homologia. Si una homologia no té altres punts fixos que els de l'eix, es diu que l'homologia és *especial*; altrament, es diu que és *general*.

Vegem que una homologia general té un únic punt fix fora de l'eix. En efecte, sigui  $H$  l'eix d'una homologia  $\varphi$  i suposem que  $P, Q \notin H$  són dos punts fixos diferents de  $\varphi$ . Veurem que si  $R$  és un punt qualsevol, llavors  $R$  és fix per  $\varphi$ , amb la qual cosa l'afirmació queda establerta per reducció a l'absurd, ja que  $\varphi$  no és la identitat. Per veure que  $R$  és fix, podem suposar que no és de  $H$  i que és diferent de  $P$  i de  $Q$ . Aleshores la recta  $RP$  és fixa, ja que conté dos punts fixos ( $P$  i  $RP \cap H$ ). Per les mateixes raons,  $RQ$  és fixa. I d'això en resulta que  $R$  és fix, com havíem enunciat.

L'únic punt fix fora de l'eix d'una homologia general s'anomena *centre* de l'homologia.

**E.3.22.** Si  $\varphi$  és un homologia general, mostreu que existeixen referències projectives  $\mathcal{R}$  tals que la matriu de  $\varphi$  respecte de  $\mathcal{R}$  té la forma

$$\left[ \begin{array}{c|c} \kappa & \\ \hline & I_n \end{array} \right],$$

on  $\kappa \in K - \{0, 1\}$ . Mostreu també que  $\kappa$  queda unívocament determinada per  $\varphi$  (direm que  $\kappa$  és el mòdul de  $\varphi$ ).

**E.3.23.** Proveu que les rectes invariants per una homologia general són precisament les contingudes en el seu eix i les que passen pel seu centre.

**E.3.24.** Si  $\varphi$  és un homologia especial, mostreu que existeixen referències projectives  $\mathcal{R} = [P_0, \dots, P_n; U]$  tals que la matriu de  $\varphi$  respecte de  $\mathcal{R}$  té la forma

$$\left[ \begin{array}{c|ccc} 1 & & & \\ \hline 1 & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{array} \right].$$

Mostreu també que les rectes invariants per  $\varphi$  són precisament les contingudes a l'eix  $H$  de  $\varphi$  i les que passen pel punt  $P_1 \in H$ . D'aquesta manera, veiem que el punt  $P_1$  de l'eix de  $\varphi$  queda unívocament determinat per  $\varphi$  (direm que  $P_1$  és el *centre* de l'homologia especial  $\varphi$ ).

**E.3.25.** Sigui  $\varphi$  una homografia de  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$  i suposem que la matriu de  $\varphi$  respecte d'una certa referència és  $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ . Posem  $\Delta = (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21}$ . Proveu que si  $\Delta > 0$ , llavors  $\varphi$  té

exactament dos punts fixos reals, i que si  $\Delta < 0$ , llavors  $\varphi$  no té punts fixos reals (en el primer cas, es diu que l'homografia és *hiperbòlica* i en el segon, que és *el·líptica*; observem que una homografia hiperbòlica és una homologia). Mostreu també que si  $\Delta = 0$ , llavors, o bé  $\varphi$  és la identitat, o bé l'homografia té un únic punt fix, necessàriament real (en aquest cas l'homografia és una homologia especial i és costum dir que l'homografia és *parabòlica*).

### Perspectivitats

Sigui  $\mathbb{P} = [E]$  un espai projectiu de dimensió  $n \geq 2$  i  $V \subseteq \mathbb{P}$  una varietat lineal de dimensió  $d = n - r - 1$  ( $1 \leq r \leq n - 1$ ). Donat un punt  $P \notin V$ , direm que la varietat  $V \vee P$  és la *projectant de P des de V* i posarem  $VP$  per denotar-la (compareu-ho amb la noció de projectant d'un punt des d'un altre, en el context de la geometria afi, considerada a la secció 3.0). Notem que  $VP$  té dimensió  $d + 1 = n - r$ , de manera que  $VP$  és una recta quan  $V$  és un punt.

Sigui ara  $L$  una varietat de dimensió  $r$  tal que  $L \cap V = \emptyset$ . Parem esment que  $V \vee L = \mathbb{P}$ , com una conseqüència immediata de la fórmula de les dimensions  $[\diamond]$ . Donat un punt  $P \notin V$ , la intersecció de la projectant  $VP$  amb la varietat  $L$ ,  $VP \cap L$ , és un punt de  $L$ , ja que per la fórmula de les dimensions

$$\dim(VP \cap L) = \dim(VP) + \dim(L) - \dim(VP \vee L) = n - r + r - n = 0$$

(hem usat que  $V \vee L = \mathbb{P}$ ). Direm que  $P' = VP \cap L$  és la *projecció de P sobre L des de V* (o *amb centre V*). Òbviament, tenim  $P' = P$  si i només si  $P \in L$ .

Considerem ara una altra varietat  $L'$  de dimensió  $r$  i tal que  $V \cap L' = \emptyset$ . Llavors podem considerar l'aplicació  $\pi_V: L \rightarrow L'$  tal que  $P \mapsto P' = VP \cap L'$ . D'aquesta aplicació, en direm la *perspectivitat de L en L' des de V* (o *amb centre V*).

**3.38 Proposició.** *Siguin  $L$  i  $L'$  dues varietats lineals de dimensió  $r$  d'un espai projectiu  $\mathbb{P}^n = [E]$ ,  $1 \leq r \leq n - 1$ . Sigui  $V$  una varietat lineal de  $\mathbb{P}$  de dimensió  $n - r - 1$  i disjunta de  $L$  i de  $L'$ . Aleshores, la perspectivitat  $\pi_V: L \rightarrow L'$  és una projectivitat.*

**Prova:** Siguin  $F, F', G \subseteq E$  els subespais vectorials tals que  $L = [F]$ ,  $L' = [F']$  i  $V = [G]$ . Les relacions  $V \cap L = \emptyset$  i  $V \vee L = \mathbb{P}$  equivalen a  $E = G \oplus F$ . Anàlogament, les relacions  $V \cap L' = \emptyset$  i  $V \vee L' = \mathbb{P}$  equivalen a  $E = G \oplus F'$ .

Donat un  $x \in E$ , sigui  $x' \in F'$  l'únic vector tal que  $x - x' \in G$ , és a dir, la projecció de  $x$  sobre  $F'$  relativament a la descomposició  $E = G \oplus F'$ . L'aplicació  $E \rightarrow F'$  tal que  $x \mapsto x'$  és lineal i el seu nucli és  $G$ . Així doncs, atès que  $G \cap F = \{0\}$ , l'aplicació  $f: F \rightarrow F'$  tal que  $x \mapsto x'$  és lineal i injectiva. Com que  $F$  i  $F'$  tenen la mateixa dimensió,  $f$  és un isomorfisme.

Per acabar la demostració és suficient, doncs, provar que  $\pi_V = [f]$ . Però si  $P = [x] \in L$ , llavors  $[f](P) = [f(x)] = [x']$  i  $x - x' = w \in G$ , d'on en resulta que  $VP = [G + \langle x \rangle] = [G + \langle x' \rangle]$  i  $\pi_V(P) = VP \cap L' = [G + \langle x' \rangle] \cap [F'] = [x'] = [f(x)]$ .  $\square$

### Projectivitats de Poncelet

Si  $L$  i  $L'$  són varietats lineals de dimensió  $r$  ( $1 \leq r \leq n-1$ ) d'un espai projectiu  $\mathbb{P}^n$ , d'una aplicació  $\varphi: L \rightarrow L'$  en direm una *projectivitat de Poncelet* si es pot obtenir com a composició d'un nombre finit de perspectivitats, això és, si es pot trobar una successió  $L_0, \dots, L_k$  de varietats lineals de dimensió  $r$ , amb  $L = L_0$  i  $L' = L_k$ , i una successió  $V_1, \dots, V_k$  de varietats lineals de dimensió  $n-r-1$  tals que  $V_i \cap L_{i-1} = V_i \cap L_i = \emptyset$  per  $i = 1, \dots, k$ , de manera que  $\varphi$  és la composició de les perspectivitats  $\pi_{V_i}: L_{i-1} \rightarrow L_i$ . Com que les perspectivitats són projectivitats, és clar que tota projectivitat de Poncelet és una projectivitat. L'afirmació recíproca, també és certa:

**3.39 Teorema (de Poncelet).** *Tota projectivitat  $\varphi: L \rightarrow L'$  entre dues varietats lineals de dimensió  $r$  d'un espai projectiu  $\mathbb{P}^n$  ( $1 \leq r \leq n-1$ ) és una projectivitat de Poncelet.*

Com que els arguments que calen per donar una prova d'aquest teorema ens durien enllà dels objectius d'aquest curs, ens limitarem a establir-ne un parell de casos particulars. Per exemple, de la proposició que segueix en deduirem una prova del cas  $n = 2$  i  $r = 1$ .

**3.40 Proposició.** *Siguin  $L$  i  $L'$  dues rectes diferents de  $\mathbb{P}^2$ ,  $A, B, C$  tres punts diferents de  $L$  i  $A', B', C'$  tres punts diferents de  $L'$ . Llavors,  $A, B, C$  es poden transformar en  $A', B', C'$  per una perspectivitat o per una composició de dues perspectivitats.*

**Prova:** Suposem primer que  $A = A'$ . Llavors  $B \neq B'$ , ja que altrament  $L$  i  $L'$  coincidrien. Anàlogament,  $C \neq C'$ . Podem, doncs, considerar (vegeu la figura 3.11) el punt d'intersecció, diguem-ne  $O$ , de les rectes  $BB'$  i  $CC'$ . Ara és clar que la perspectivitat de vèrtex  $O$  transforma  $A, B, C$  en  $A', B', C'$ .

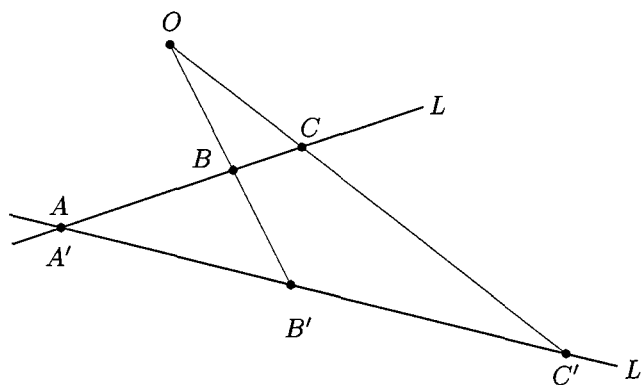


Figura 3.11: Perspectivitat de vèrtex  $O$

Si  $A' \neq A$ , considerem una recta  $L''$  per  $A'$  que no passi per  $A$  ni coincideixi amb  $L'$ , i un punt  $O$  sobre la recta  $AA'$  diferent de  $A$  i  $A'$  (vegeu la figura 3.12). La projecció



de  $L$  en  $L''$  amb vèrtex  $O$  transforma  $A$  en  $A'$ . Siguin  $B'', C'' \in L''$  les imatges de  $B$  i  $C$  per aquesta projecció. Com que, pel cas anterior, hi ha una projecció que transforma  $A', B'', C''$  en  $A', B', C'$ , això acaba la prova.  $\square$

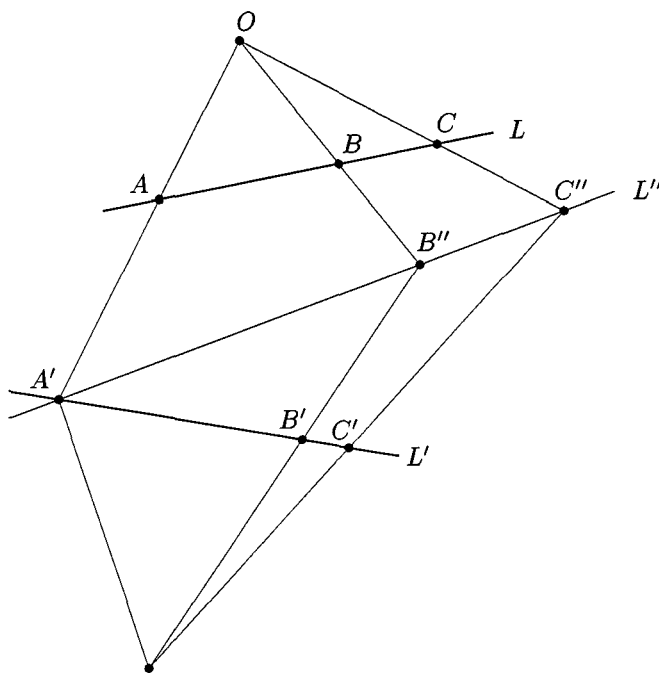


Figura 3.12: Composició de perspectives

**3.41 Corol·lari.** *Tota projectivitat entre dues rectes de  $\mathbb{P}^2$  és una projectivitat de Poncelet.*

**Prova:** Siguin  $L$  i  $L'$  les rectes i  $\varphi: L \rightarrow L'$  una projectivitat. Siguin  $A, B, C \in L$  tres punts diferents i posem  $A' = \varphi(A)$ ,  $B' = \varphi(B)$  i  $C' = \varphi(C)$ . Pel teorema fonamental de les projectivitats, serà suficient veure que existeix una projectivitat de Poncelet  $\psi: L \rightarrow L'$  tal que  $\psi(A) = A'$ ,  $\psi(B) = B'$  i  $\psi(C) = C'$ . Com que això ha estat establert a la proposició si  $L \neq L'$ , només ens manca ocupar-nos del cas  $L = L'$ . Aquest cas, però, es pot reduir a l'anterior com expliquem tot seguit. Escollim una recta  $L_1$  diferent de  $L$  i un punt  $O \notin L, L_1$ . Posem  $A_1, B_1$  i  $C_1$  per denotar les projeccions de  $A, B, C$  sobre  $L_1$  des de  $O$ . Com que  $L_1 \neq L = L'$ , per la proposició existeix una projectivitat de Poncelet  $\psi_1: L_1 \rightarrow L'$  tal que  $\psi_1(A_1) = A'$ ,  $\psi_1(B_1) = B'$  i  $\psi_1(C_1) = C'$ . Si posem  $\psi: L \rightarrow L'$  per denotar la composició de la perspectivitat  $\pi_O: L \rightarrow L_1$  amb la projectivitat de Poncelet  $\psi_1$ , llavors  $\psi$  és una projectivitat de Poncelet que compleix les condicions que necessitàvem.  $\square$

**E.3.26.** Una projectivitat entres dues rectes distintes del pla projectiu és una perspectivitat si i només si el punt d'intersecció de les dues rectes és fix.

La proposició que segueix permet establir, de manera similar al cas de dues rectes d'un pla, que el teorema 3.39 és cert per a dues rectes de  $\mathbb{P}^3$ .

**3.42 Proposició.** *Siguin  $L$  i  $L'$  dues rectes disjunts de  $\mathbb{P}^3$ ,  $A, B, C$  tres punts diferents de  $L$  i  $A', B', C'$  tres punts diferents de  $L'$ . Llavors  $A, B, C$  es poden transformar en  $A', B', C'$  per una perspectivitat.*

**Prova:** Les rectes  $L_1 = AA'$ ,  $L_2 = BB'$  i  $L_3 = CC'$  són disjunts dues a dues, ja que si fos, per exemple,  $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$ , llavors  $AB = L$  i  $A'B' = L'$  serien coplanàries. Sigui  $A'' \in L_1$  un punt diferent de  $A$  de  $A'$ . Llavors  $\Pi = A'' \vee L_3$  és un pla. Aquest pla no conté  $L_2$ , ja que altrament  $L_2$  i  $L_3$  serien coplanàries. Així doncs,  $\Pi$  i  $L_2$  es tallen en un únic punt  $B''$ . Les rectes  $L'' = A''B''$  i  $L_3$ , ambdues del pla  $\Pi$ , es tallen en un punt  $C''$ . Tenim així que  $L''$  talla  $L_1$ ,  $L_2$  i  $L_3$  en els punts  $A''$ ,  $B''$  i  $C''$ , respectivament. A més,  $B'' \neq B, B'$ : si, per exemple, fos  $B'' = B$ , llavors les rectes  $L'' = A''C''$  i  $L = AC$  es tallarien en el punt  $B$ , d'on resultaria que  $AA'' = L_1$  i  $CC'' = L_3$  serien coplanàries (notem que amb  $B'' = B$  ha de ser  $C \neq C''$ ). Anàlogament es veu que  $C'' \neq C, C'$ . Ara és clar que la perspectivitat de  $L$  sobre  $L'$  amb centre  $L''$  transforma  $A, B, C$  en  $A', B', C'$ , respectivament.  $\square$

**E.3.27.** Mostreu que una homografia d'una recta de  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$  no es pot expressar com a producte de només dues perspectivitats si és el·líptica, però que aquesta expressió és possible si l'homografia és hiperbòlica o parabòlica.

### Extensió projectiva d'una afinitat

A l'apartat «Clausura projectiva» de la secció 3.1 (pàg. 175) hem estudiat la clausura projectiva  $\overline{\mathbb{A}}$  d'un espai afí  $\mathbb{A}$ . Ara veurem que una afinitat de  $\mathbb{A}$  s'estén d'una sola manera a una projectivitat de  $\overline{\mathbb{A}}$  i que aquesta extensió ens permet identificar el grup de les afinitats de  $\mathbb{A}$  amb el subgrup de  $PGL(\overline{\mathbb{A}})$  format per les homografies que deixen invariant l'hiperplà de l'infinit  $\mathbb{A}_{\infty}$ .

Sigui  $\varphi: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$  una afinitat i  $f: V \rightarrow V$  el seu automorfisme lineal associat, de manera que  $f$  és l'únic automorfisme lineal de  $V$  tal que

$$f(Q - P) = \varphi(Q) - \varphi(P).$$

En particular, si  $O \in \mathbb{A}$  i  $v \in V$ , llavors  $\varphi(O + v) = \varphi(O) + f(v)$ .

**3.43 Teorema.** *Existeix una única homografia  $\overline{\varphi}$  de  $\overline{\mathbb{A}}$  tal que  $\overline{\varphi}(i(P)) = i(\varphi(P))$  per a tot  $P \in \mathbb{A}$ . A més, l'homografia  $\overline{\varphi}$  deixa  $\mathbb{A}_{\infty}$  invariant i  $\overline{\varphi}|_{\mathbb{A}_{\infty}} = [f]$ .*

**Prova:** Sigui  $w \in V$  el vector tal que  $\varphi(O) = O + w$ . Sigui  $\bar{f}: \bar{V} \rightarrow \bar{V}$  l'única aplicació lineal tal que  $e_0 \mapsto e_0 + w$  i  $\bar{f}|_V = f$ . Com que  $e_0 \notin V$  i  $f$  és un automorfisme de  $V$ ,  $\bar{f}$  és un automorfisme de  $\bar{V}$ . Sigui  $\bar{\varphi} = [\bar{f}]$ . Per definició tenim, doncs,  $[\bar{\varphi}](\lambda e_0 + v) = [\lambda(e_0 + w) + f(v)]$ . Si ara  $P$  és un punt de  $\mathbb{A}$  i  $P = O + v$  ( $v \in V$ ),

$$\bar{\varphi}(i(P)) = \bar{\varphi}([e_0 + v]) = [e_0 + w + f(v)] = i(O + w + f(v)) = i(\varphi(P)),$$

i això demostra l'existència de  $\bar{\varphi}$ . Notem que

$$\bar{\varphi}|_{\mathbb{A}_\infty} = [\bar{f}][V] = [\bar{f}|_V] = [f].$$

Per veure la unicitat, sigui  $\psi$  una homografia de  $\bar{\mathbb{A}}$  tal que  $\psi(i(P)) = i(\varphi(P))$  per a tot punt  $P \in \mathbb{A}$ . Veurem que  $\psi = \bar{\varphi}$  i això acabarà la demostració. Per la definició d'homografia, existeix un automorfisme lineal  $g$  de  $\bar{V}$  tal que  $\psi = [g]$ . Ara, de

$$\psi(i(O)) = \begin{cases} [g]([e_0]) = [g(e_0)] \\ i(\varphi(O)) = i(O + w) = [e_0 + w] \end{cases}$$

deduïm que existeix  $\mu \in K$  tal que  $g(e_0) = \mu(e_0 + w)$ , és a dir,  $(\mu^{-1}g)(e_0) = e_0 + w$  (notem que  $\mu \neq 0$  perquè  $g$  és injectiva). Com que  $[\mu^{-1}g] = [g] = \psi$ , canviant  $g$  per  $\mu^{-1}g$  podem suposar que  $\psi = [g]$  i  $g(e_0) = e_0 + w = f(e_0)$ . Sigui ara  $v \in V$  un vector qualsevol i  $P = O + v$ . Llavors, amb les relacions

$$\psi(i(P)) = \begin{cases} [g]([e_0 + v]) = [g(e_0) + g(v)] = [e_0 + w + g(v)] \\ i(\varphi(P)) = i(O + w + f(v)) = [e_0 + w + f(v)] \end{cases}$$

veiem que  $g(v) = f(v) = \bar{f}(v)$ . En suma, tenim  $g = \bar{f}$  i, per tant,  $\psi = \bar{\varphi}$ .  $\square$

**3.44 Corol·lari.** *L'aplicació  $\varphi \mapsto \bar{\varphi}$  és un monomorfisme de  $G(\mathbb{A})$  en  $PGL(\bar{\mathbb{A}})$  i la seva imatge és el subgrup de  $PGL(\bar{\mathbb{A}})$  format per les homografies que deixen  $\mathbb{A}_\infty$  invariant (o, equivalentment, que deixen  $i(\mathbb{A})$  invariant).*

**Prova:** Siguin  $\varphi$  i  $\varphi'$  afinitats de  $\mathbb{A}$ . Aleshores,  $\psi = \bar{\varphi}'\bar{\varphi}$  és una homografia de  $\bar{\mathbb{A}}$  que deixa  $i(\mathbb{A})$  invariant i que compleix  $\psi(i(P)) = i((\varphi'\varphi)(P))$  per a tot  $P \in \mathbb{A}$  [o]. Com que  $\psi' = \overline{\varphi'\varphi}$  també compleix  $\psi'(i(P)) = i((\varphi'\varphi)(P))$ , per unicitat veiem que  $\bar{\varphi}'\bar{\varphi} = \overline{\varphi'\varphi}$ , la qual cosa prova  $\varphi \mapsto \bar{\varphi}$  és un homomorfisme de grups. Aquest homomorfisme és un monomorfisme, ja que les extensions projectives d'afinitats diferents han de ser homografies diferents.

Sigui ara  $\psi = [g]$  una homografia de  $\bar{\mathbb{A}}$  que deixa  $\mathbb{A}_\infty$  invariant. Volem veure que  $\psi = \bar{\varphi}$  per alguna afinitat  $\varphi$  de  $\mathbb{A}$ . Ara bé, la hipòtesi que  $\psi$  deixa  $\mathbb{A}_\infty = [V]$  invariant equival a dir que  $g$  deixa  $V$  invariant. A més, si  $g(e_0) = \mu e_0 + w$ , amb  $w \in V$ , tenim  $\mu \neq 0$  (altrament  $g$  no seria injectiva). Canviant  $g$  per  $\mu^{-1}g$ , podem suposar, doncs,

que  $g(e_0) = e_0 + w$ . Aleshores, si posem  $f = g|V$  i  $\varphi(P) = O + w + f(P - O)$  (per a tot  $P \in \mathbb{A}$ ),  $\varphi$  és una afinitat de  $\mathbb{A}$  i

$$i(\varphi(P)) = [e_0 + w + f(P - O)] = [g(e_0 + (P - O))] = \psi(i(P))$$

d'on resulta que  $\psi = \bar{\varphi}$ . □

Si  $\mathbb{A}$  és un espai afí i  $\varphi$  és una homotècia de centre  $O$ , llavors la seva extensió projectiva  $\bar{\varphi}$  és una homologia general: el seu eix és l'hiperplà de l'infinit i el seu centre és el punt  $\bar{O}$ . Anàlogament, si  $\varphi$  és una translació de  $\mathbb{A}$ ,  $\bar{\varphi}$  és una homologia especial amb eix l'hiperplà  $\mathbb{A}_\infty$ .

Com que  $\varphi$  i  $\bar{\varphi}$  es determinen mútuament, a la pràctica no cal distingir-les. Així, d'una homografia de  $\bar{\mathbb{A}}$  en direm que és una afinitat si i només si és l'extensió d'una afinitat de  $\mathbb{A}$ . En particular, d'una homografia de  $\bar{\mathbb{A}}$  en direm *translació* (*homotècia*) si és l'extensió d'una translació (*homotècia*) de  $\mathbb{A}$ .

### Expressió de l'homografia $\bar{\varphi}$ en coordenades

Sigui  $\mathcal{R} = [O; e_1, \dots, e_n]$  una referència afí de  $\mathbb{A}$  i  $\bar{\mathcal{R}} = [P_0, \dots, P_n; U]$  la corresponent referència projectiva de  $\bar{\mathbb{A}}$ . Considerem una afinitat  $\varphi$  de  $\mathbb{A}$  i suposem que l'equació matricial de  $\varphi$  en la referència  $\mathcal{R}$  és  $\mathbf{x}'^T = A\mathbf{x}^T + \mathbf{p}^T$ , de manera que  $A$  és la matriu de  $f = \tilde{\varphi}$  en la base  $e_1, \dots, e_n$  i  $\mathbf{p}$  són les coordenades de  $\varphi(O)$  en la referència  $\mathcal{R}$ .

**3.45 Proposició.** *La matriu de  $\bar{\varphi}$  en el referència  $\bar{\mathcal{R}}$  és*

$$\left[ \begin{array}{c|c} 1 & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{p}^T & A \end{array} \right]$$

**Prova:** En efecte,  $\bar{f}(e_0) = e_0 + w = e_0 + p_1 e_1 + \dots + p_n e_n$  i  $\bar{f}(e_j) = f(e_j) = \sum_i a_{ij} e_i$  per  $j = 1, \dots, n$ , on hem posat  $A = (a_{ij})$ . □

**E.3.28.** Proveu que una homografia de  $\bar{\mathbb{A}}$ , diferent de la identitat, és una translació si i només si el seu conjunt de punts fixos coincideix amb l'hiperplà de l'infinit  $\mathbb{A}_\infty$ .

**E.3.29.** Comproveu que les translacions i homotècies (en particular les simetries centrals) de  $\bar{\mathbb{A}}^1$  són homografies parabòliques i homografies hiperbòliques, respectivament.

### L'espai afí com a complementari d'un hiperplà

A l'apartat «Clausura projectiva d'un espai afí  $\mathbb{A}$ » de la secció 3.1 (pàg. 175), hem vist que un espai afí  $\mathbb{A}$  de dimensió  $n$  determina un espai projectiu  $\bar{\mathbb{A}}$  de dimensió  $n$ , i un hiperplà  $\mathbb{A}_\infty$  de  $\bar{\mathbb{A}}$ , tals que les varietats de  $\mathbb{A}$  (en particular els punts) s'identifiquen

amb les varietats lineals de  $\overline{\mathbb{A}}$  no contingudes a  $\mathbb{A}_\infty$ . De fet, a la varietat lineal  $L$  de  $\mathbb{A}$  li associem la seva clausura projectiva  $\overline{L}$  i una varietat lineal  $\Lambda$  de  $\overline{\mathbb{A}}$  no continguda a  $\mathbb{A}_\infty$  és determinada per  $\Lambda \cap \mathbb{A}$ .

El procés descrit en el paràgraf anterior es pot invertir, en el sentit que es precisa tot seguit. Sigui  $\mathbb{P} = \mathbb{P}(E)$  un espai projectiu i  $H = \mathbb{P}(V)$  un hiperplà de  $\mathbb{P}$  (així,  $V \subset E$  és un subespai vectorial de codimensió 1 de  $E$ ). Veurem que el conjunt  $\mathbb{A} = \mathbb{P} - H$  té estructura d'espai afí, amb espai vectorial associat  $V$ , i que existeix una projectivitat de  $\overline{\mathbb{A}}$  en  $\mathbb{P}$  que transforma  $\mathbb{A}_\infty$  en  $H$ .

Per tal de definir una estructura d'espai afí en el conjunt  $\mathbb{A}$ , sigui  $\omega \in E^*$  una forma no nul·la incident amb  $V$ . Com que la relació  $[x] \in H$  equival a  $\omega(x) = 0$ , veiem que els punts de  $\mathbb{A}$  són de la forma  $[x]$ , amb  $\omega(x) \neq 0$ . Si  $P = [x] \in \mathbb{A}$ , sigui  $e_P = \frac{x}{\omega(x)} \in E$  (noteu que aquesta expressió pren el mateix valor per a qualsevol representant  $x$  de  $P$ ). Com que  $\omega(e_P) = 1$ , és clar que  $e_Q - e_P \in V$  siguin quins siguin els punts  $P, Q \in \mathbb{A}$ . A més, com que  $P = [e_P]$  per a tot  $P \in \mathbb{A}$ , és clar que l'aplicació  $P \mapsto e_P$  és injectiva.

**3.46 Proposició.** *Si posem  $\delta: \mathbb{A} \times \mathbb{A} \rightarrow V$  per denotar l'aplicació  $(P, Q) \mapsto e_Q - e_P$ , llavors  $(\mathbb{A}, V, \delta)$  és un espai afí.*

**Prova:** La llei d'addició és immediata, ja que  $\delta(P, Q) + \delta(Q, R) = e_Q - e_P + e_R - e_Q = e_R - e_P = \delta(P, R)$ . Per establir l'axioma d'homogeneïtat, cal veure que l'aplicació  $\delta_P$  tal que  $Q \mapsto \delta(P, Q)$  és bijectiva per a tot  $P \in \mathbb{A}$ .

Vegeu primer que  $\delta_P$  és injectiva. Si  $\delta_P(Q) = \delta_P(Q')$ , tenim  $e_Q - e_P = e_{Q'} - e_P$ , d'on  $e_Q = e_{Q'}$  i  $Q = Q'$ .

Per veure que és exhaustiva, sigui  $v \in V$  i considerem el punt  $Q = [e_P + v]$ . Llavors  $e_Q = e_P + v$ , ja que  $w(e_P + v) = w(e_P) = 1$  i, per tant,  $v = e_Q - e_P = \delta(P, Q)$ .  $\square$

Hem vist que l'aplicació  $P \mapsto e_P$  de  $\mathbb{A}$  en  $E$  compleix  $e_Q - e_P = \delta(P, Q) = Q - P$ . És a més immediat comprovar que  $E = \langle e_P \rangle \oplus V$  per a tot  $P \in \mathbb{A}$ , de manera que  $e$  compleix les condicions [3.1] i [3.2]. Tenint en compte l'exercici E.3.7, i les consideracions del subapartat «L'espai projectiu  $\overline{\mathbb{A}}$ », pàg. 176, veiem que  $\mathbb{P}$  és una clausura projectiva de  $\mathbb{A}$  i que  $H$  és el corresponent hiperplà de l'infinit. Notem que la translació  $t_v$  de  $\mathbb{A}$  corresponent al vector  $v \in V$  és la donada per la fórmula

$$t_v([x]) = [e_P + v] = [x + \omega(x)v].$$

Les consideracions anteriors ens permeten concebre un espai afí com un parell  $(\mathbb{P}, H)$  format per un espai projectiu  $\mathbb{P}$  i un hiperplà  $H$  de  $\mathbb{P}$ . D'aquesta manera, les varietats lineals afins es poden definir com les varietats lineals de  $\mathbb{P}$  no contingudes a  $H$  i el grup afí es pot definir com el grup d'homografies de  $\mathbb{P}$  que deixen invariant  $H$  (vegeu el corol·lari 3.44).

**E.3.30.** Proveu que les translacions de l'espai afí corresponent a  $(\mathbb{P}, H)$  coincideixen amb les homologies especials d'eix  $H$ . D'això segueix, en particular, que les homologies especials d'eix un hiperplà fix  $H = \mathbb{P}(V)$  formen un grup isomorf al grup additiu de  $V$ .

### Equivalència projectiva de configuracions

Si  $\mathbb{P}$  és un espai projectiu, dues configuracions  $\Pi = P_0, P_1, \dots, P_r$  i  $\Pi' = P'_0, P'_1, \dots, P'_r$  de  $r + 1$  punts de  $\mathbb{P}$  es diuen *projectivament equivalents* si existeix una homografia  $\varphi$  de  $\mathbb{P}$  tal que  $\varphi(\Pi) = \Pi'$ , és a dir, tal que  $\varphi(P_i) = P'_i$  per  $i = 0, \dots, r$ . Tenint en compte la fórmula [3.10], és clar que per tal que les configuracions  $\Pi$  i  $\Pi'$  siguin projectivament equivalents és necessari (però en general no suficient, com veurem al principi de la secció següent) que la dimensió de qualsevol configuració subordinada de  $\Pi$  coincideixi amb la dimensió de la corresponent configuració subordinada de  $\Pi'$ .

**3.47 Exemples.** Dos  $r$ -simplexs són projectivament equivalents, ja que tot  $r$ -simplex és subordinat de la configuració de vèrtexs d'una referència. L'exercici E.3.20 prova que dues configuracions de tipus  $r_{r+2}$  són projectivament equivalents. En particular, dues ternes de punts alineats són projectivament equivalents i dos quadrangles també són projectivament equivalents.

**E.3.31.** Proveu que dues quaternes de tipus  $1_3 \vee 0_1$  són projectivament equivalents.

## 3.4 Raó doble

Un *invariant projectiu*  $\lambda$  de les configuracions de punts d'un determinat tipus és una «funció»  $\lambda(\Pi) \in K$ , definida per a tota configuració  $\Pi$  del tipus en qüestió, tal que  $\lambda(\Pi) = \lambda(\Pi')$  si  $\Pi$  i  $\Pi'$  són projectivament equivalents. Per tal que  $\lambda$  sigui *no trivial*, és a dir, que  $\lambda(\Pi)$  no prengui el mateix valor per a tota configuració  $\Pi$ , és necessari que no totes les configuracions considerades siguin projectivament equivalents.

D'acord amb els exemples 3.47 i l'exercici E.3.31, és clar que els triangles, les ternes de punts alineats, els quadrangles i les quaternes de tipus  $1_3 \vee 0_1$  no tenen invariants projectius no trivials. Per tant, les configuracions més senzilles per a les quals té sentit investigar si admeten un invariant projectiu no trivial són les de tipus  $1_4$ , és a dir, quaternes de punts alineats. Noteu que si  $P_1, P_2, P_3, P_4$  i  $P'_4$  són punts diferents d'una recta projectiva, llavors les quaternes  $P_1, P_2, P_3, P_4$  i  $P_1, P_2, P_3, P'_4$  no són projectivament equivalents, ja que l'única homografia que transforma  $P_1, P_2, P_3$  en  $P_1, P_2, P_3$  és la identitat.

L'objecte d'aquesta secció és definir i estudiar la raó doble, que és un invariant projectiu  $\rho$  de les quaternes de punts alineats. Tot i que el mètode que seguirem ens permet recuperar fàcilment tots els resultats clàssics relatius a la raó doble, per molts lectors pot resultar instructiu que fem ara unes consideracions sobre l'origen del concepte de raó doble i sobre el seu significat en el context de la geometria euclidiana. Aquestes consideracions posen de manifest la natura projectiva de la raó doble i ens suggereixen la definició formal que adoptarem posteriorment.

### La raó doble en geometria euclidiana

Considerem un pla euclidià  $\mathbb{A}$ . Donats tres punts alineats diferents  $A$ ,  $B$  i  $C$ , posem  $(ABC) = \sigma(C, B, A)$  (la raó simple de la terna  $C$ ,  $B$  i  $A$ , que es pot representar simbòlicament (tenint en compte els signes) pel quocient  $AC/BC$ ). Sigui  $O$  un punt exterior a la recta  $L$  determinada per la terna i posem  $a = \overline{OA}$ ,  $b = \overline{OB}$  i  $c = \overline{OC}$ . Llavors tenim (vegeu la figura 3.13)

$$(ABC) = \frac{a \sin(\widehat{ac})}{b \sin(\widehat{bc})},$$

on posem  $\widehat{ac}$  i  $\widehat{bc}$  per denotar els angles (orientats)  $\widehat{AOC}$  i  $\widehat{BOC}$ , respectivament. En efecte, si  $h$  és la distància de  $O$  a  $L$ ,  $(ABC) = AC/BC = (h \cdot AC)/(h \cdot BC) = ac \sin(\widehat{ac})/bc \sin(\widehat{bc})$ , d'on resulta l'afirmació.

L'expressió anterior ens mostra que si  $A$ ,  $B$ ,  $C$  i  $D$  és una quaterna de punts alineats, llavors (posant  $d = \overline{OD}$ )

$$(ABC)/(ABD) = \frac{\sin(\widehat{ac})}{\sin(\widehat{bc})} : \frac{\sin(\widehat{ad})}{\sin(\widehat{bd})}.$$

Com que aquest valor només depèn d'angles que  $OA$ ,  $OB$ ,  $OC$  i  $OD$  formen a  $O$ , en resulta que el quocient de raons simples  $(ABC)/(ABD)$  es conserva per projeccions de centre  $O$ . Aquest quocient és, doncs, un invariant projectiu (vegeu el corollari 3.41 i l'exercici E.3.20); s'anomena *raó doble* de la quaterna  $A$ ,  $B$ ,  $C$  i  $D$  i es denota  $(ABCD)$ . (Atès que el terme *raó* vol dir 'quocient', i que  $(ABCD)$  és un quocient de raons simples, la locució *raó doble* significa, doncs, que es tracta d'un 'quocient de quocients'.)

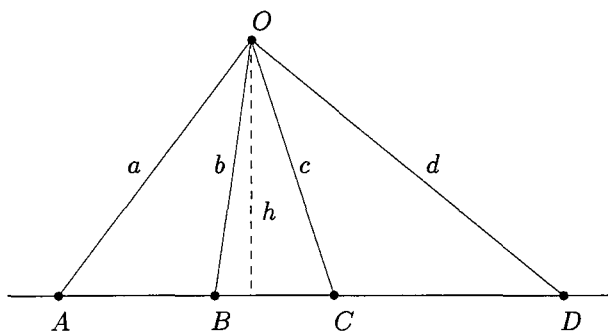


Figura 3.13: Raó doble d'una quaterna

### Definició de raó doble

Siguin  $Q_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$ , quatre punts diferents d'una recta projectiva  $\mathbb{P}^1$ . Sigui  $\mathcal{S} = [P_0, P_1; U]$  una referència projectiva de  $\mathbb{P}^1$  i suposem que  $Q_i \equiv [x_i, y_i]_{\mathcal{S}}$ ,  $i = 1, \dots, 4$ . El

valor de l'expressió

$$\frac{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_4 & y_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_4 & y_4 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_4 & y_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_4 & y_4 \end{vmatrix}}. \quad [3.13]$$

és un element de  $K$ . Aquest valor no depèn de les coordenades projectives dels punts que hàgim escollit: per exemple, si en lloc de  $[x_1, y_1]$  usem  $[\lambda x_1, \lambda y_1]$  ( $\lambda \in K - \{0\}$ ) com a  $\mathcal{S}$ -coordenades de  $Q_1$ , llavors és clar que el numerador i denominador de la segona expressió de [3.13] queden multiplicats per  $\lambda$  i, per tant, el valor final de l'expressió roman inalterat. Per altra banda, el valor de [3.13] tampoc depèn de la referència  $\mathcal{S}$ , ja que les coordenades dels punts  $Q_i$  en una altra referència  $\mathcal{S}'$  són de la forma  $[x_i, y_i]A$ , on  $A$  és una matriu  $2 \times 2$  invertible, i, per tant, el numerador i el denominador de [3.13] queden multiplicats per  $\det(A)^2$ . Així, el valor de [3.13] només depèn de la quaterna  $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4$ . Posarem  $\rho(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4)$  per indicar-lo i direm que és la *raó doble* de la quaterna.

### Raó doble de quatre punts alineats amb coincidències

La segona expressió de [3.13] ens permet estendre la definició de raó doble al cas de quatre punts de  $\mathbb{P}^1$  entre els quals hi ha una o dues coincidències.

En primer lloc, notem que la condició  $Q_i = Q_j$  equival a  $\begin{vmatrix} x_i & y_i \\ x_j & y_j \end{vmatrix} = 0$ . D'aquí en resulta que la segona expressió de [3.13] és de la forma  $0/0$  si i només si tres (almenys) dels punts  $Q_i$  són coincidents  $[\diamond]$ . En aquest cas (és a dir, quan almenys tres dels  $Q_i$  són coincidents), direm que la raó doble de  $Q_1, \dots, Q_4$  és *indeterminada*. Exclòs aquest cas, i suposant que entre els  $Q_i$  hi ha almenys una coincidència, la segona expressió de [3.13] és de la forma  $0/\beta$ , amb  $\beta \in K - \{0\}$ , si  $Q_1 = Q_3$  o  $Q_2 = Q_4$ , i de la forma  $\alpha/0$ , amb  $\alpha \in K - \{0\}$ , si  $Q_1 = Q_4$  o  $Q_2 = Q_3$ . Així, doncs, posarem  $\rho(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4) = 0$  si  $Q_1 = Q_3$  o  $Q_2 = Q_4$  i, amb el mateix criteri que l'usat al subapartat 3.2 per representar el valor excepcional de la  $\mathcal{R}$ -coordenada absoluta, posarem  $\rho(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4) = \infty$  si  $Q_1 = Q_4$  o  $Q_2 = Q_3$ .

Per dir-ho d'una manera resumida: calcularem  $\rho = \rho(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4)$  amb l'expressió [3.13] en tots els casos; el valor que en resulta és un element de  $K$ , llevat quan és de la forma  $\alpha/0$ ,  $\alpha \in K$ ; si  $\alpha \neq 0$ , posarem  $\rho = \infty$  i si  $\alpha = 0$  direm que  $\rho$  és *indeterminada*.

### Exemples

**3.48 Exemple.** Siguin  $P_0, P_1, U$  punts diferents de  $\mathbb{P}^1$ . Aleshores  $\rho(P_0, P_1, U, X)$  coincideix, per a tot punt  $X \in \mathbb{P}^1$ , amb la coordenada absoluta (vegeu la fórmula [3.4]) del



punt  $X$  respecte de la referència  $[P_0, P_1; U]$ .

En efecte, en aquesta referència tenim  $P_0 \equiv [1, 0]$ ,  $P_1 \equiv [0, 1]$ ,  $U \equiv [1, 1]$ ,  $X \equiv [\xi_0, \xi_1]$ . Per tant,

$$\rho(P_0, P_1, U, X) = \frac{1}{-1} : \frac{\xi_1}{-\xi_0} = \xi_0/\xi_1. \quad \square$$

**3.49 Exemple.** Sigui  $A, B, C, D$  una quaterna de punts de  $\mathbb{A}^1$  i definim  $(ABCD)$  com en el subapartat «La raó doble en geometria euclidiana» (pàg. 201), és a dir, com el quocient de raons simples  $(ABC)/(ABD)$ , on  $(ABC) = \sigma(C, B, A)$ . Llavors

$$\rho(\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, \overline{D}) = (ABCD),$$

on  $\overline{X} \in \overline{\mathbb{A}}^1$  denota el punt corresponent a  $X \in \mathbb{A}^1$  per la inclusió de  $\mathbb{A}^1$  en  $\overline{\mathbb{A}}^1$  relativa a un origen  $O$  fixat arbitràriament.

En efecte, siguin  $a, b, c, d$  les coordenades dels punts  $A, B, C, D$  respecte d'una referència  $\mathcal{R} = [O; e_1]$  de  $\mathbb{A}^1$ . Llavors, les coordenades projectives de  $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, \overline{D}$  respecte de la referència  $\overline{\mathcal{R}}$  són  $[1, a], [1, b], [1, c], [1, d]$ . Per tant,

$$\rho(\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, \overline{D}) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & c \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & b \\ 1 & c \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & b \\ 1 & d \end{vmatrix}} = \frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b},$$

la qual cosa prova l'afirmació.

**3.50 Exemple.** Sigui  $A, B, C$  una terna de punts de  $\mathbb{A}^1$ . Amb notacions i convenis com les de l'exemple anterior tenim:

$$\sigma(A, B, C) = \rho([\infty], \overline{A}, \overline{B}, \overline{C}),$$

on  $[\infty]$  denota el punt de l'infinit de  $\mathbb{A}^1$ .

En efecte,  $[\infty] = [0, 1]$ ,  $\overline{A} = [1, a]$ ,  $\overline{B} = [1, b]$  i  $\overline{C} = [1, c]$ . Per tant,

$$\rho([\infty], \overline{A}, \overline{B}, \overline{C}) = \frac{-1}{b-a} : \frac{-1}{c-a} = \sigma(A, B, C).$$

**3.51 Exemple** (Interpretació del mòdul d'una homologia). Sigui  $\varphi$  una homologia general de centre  $P$  i eix  $H$  (vegeu l'exemple 3.37). Sigui  $X$  un punt exterior a  $H$  i diferent de  $P$ . Llavors  $\varphi(X) \neq X$ , ja que el conjunt de punts fixos és  $H \cup \{P\}$ . Sigui  $X' = \varphi(X)$  i  $P' = XX' \cap H$ . Aleshores,

$$\rho(P, P', X, X') = \kappa,$$

on  $\kappa$  és el mòdul de  $\varphi$ . En efecte, si  $P = [e]$  i  $P' = [e']$ , llavors  $X = [\lambda e + e']$ , per un cert  $\lambda \in K - \{0\}$ , i  $X' = [\kappa \lambda e + e']$ , d'on l'afirmació en resulta fent un càlcul elemental com els anteriors.

Notem que de la interpretació de  $\kappa$  s'infereix que una homologia queda determinada pel centre, l'eix i la imatge d'un punt qualsevol no incident amb l'eix i diferent del centre. També cal remarcar que si  $\varphi$  és una homografia hiperbòlica de  $\mathbb{P}^1$ , amb punts fixos  $P$  i  $P'$ , llavors  $\rho(P, P', X, X') = \kappa$  per a tot punt  $X \neq P, P'$ .

**E.3.32.** Sigui  $\varphi = [f]$  una homografia de  $\mathbb{P}^2$  i suposem que  $\varphi$  té exactament tres punts fixos  $P_0, P_1, P_2$ . Donat un punt  $P \neq P_0, P_1, P_2$ , siguin  $Q_0, Q_1, Q_2$  els punts d'intersecció de la recta  $P\varphi(P)$  amb les rectes  $P_1P_2$ ,  $P_2P_0$  i  $P_0P_1$ , respectivament. Demostreu que si  $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$  són els valors propis de  $f$ , llavors

$$(P, \varphi(P), Q_i, Q_j) = \frac{\lambda_j}{\lambda_i}.$$

### Raó doble i coordenada absoluta

Siguin  $Q_1, Q_2, Q_3$  i  $Q_4$  quatre punts diferents de  $\mathbb{P}^1$  i suposem que en una referència tenen coordenades absolutes  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in K$ . Llavors,

$$\rho(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4) = \frac{\lambda_3 - \lambda_1}{\lambda_3 - \lambda_2} : \frac{\lambda_4 - \lambda_1}{\lambda_4 - \lambda_2}. \quad [3.14]$$

En efecte, en l'expressió [3.13] tenim  $y_i \neq 0$  ( $i = 1, \dots, 4$ ), ja que si  $y_i = 0$  llavors  $\lambda_i = \infty$ .

Així  $\begin{vmatrix} x_i & y_i \\ x_j & y_j \end{vmatrix} = y_i y_j (\lambda_i - \lambda_j)$  i d'aquí la fórmula resulta immediatament.

Suposem ara que un (i, essent diferents, només un) dels punts  $Q_i$  té coordenada absoluta  $\infty$ . Llavors, encara és possible emprar la fórmula [3.14] per obtenir el resultat correcte. Per explicar-ho, suposem, per exemple, que  $\lambda_1 = \infty$  (la qual cosa vol dir que  $y_1 = 0$ ). Llavors la fórmula [3.13] ens dona, sense dificultat, que la raó doble val  $\frac{\lambda_4 - \lambda_2}{\lambda_4 - \lambda_1}$ . El mateix resultat es pot obtenir aplicant formalment la fórmula [3.14], és a dir, escrivint  $\frac{\lambda_3 - \infty}{\lambda_3 - \lambda_2} \frac{\lambda_4 - \infty}{\lambda_4 - \infty}$ , i substituint  $\frac{\lambda_3 - \infty}{\lambda_3 - \infty}$  per 1, com si fos un càlcul de límits.

D'ara endavant posarem, si  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \overline{K}$ ,  $\rho(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$  per indicar l'expressió de la dreta de 3.14, avaluada, quan inclogui el símbol  $\infty$ , segons la regla (de «càlcul de límits») que hem explicat. Així, amb les notacions de l'exemple 3.50, i tenint en compte l'exercici E.3.12,  $\rho([\infty], \overline{A}, \overline{B}, \overline{C}) = \rho(0, 1/a, 1/b, 1/c)$ , que coincideix amb  $(c-a)/(b-a)$ .

**E.3.33** (Propietat multiplicativa de la raó doble). Siguin  $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5$  punts diferents d'una recta projectiva  $\mathbb{P}^1$ . Proveu que

$$\rho(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4) \rho(Q_1, Q_2, Q_4, Q_5) = \rho(Q_1, Q_2, Q_3, Q_5).$$

### Altres propietats de la raó doble

**3.52 Proposició** (Invariança projectiva de la raó doble). Si  $\varphi : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$  és una projectivitat, llavors

$$\rho(\varphi(Q_1), \varphi(Q_2), \varphi(Q_3), \varphi(Q_4)) = \rho(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4).$$

**Prova:** Referim els punts de  $\mathbb{P}^1$  a una referència  $\mathcal{S}$  i els de  $\overline{\mathbb{P}}^1$  a  $\varphi(\mathcal{S})$ . Si  $Q_i \equiv [x_i, y_i]_{\mathcal{S}}$ , llavors  $\varphi(Q_i) = [x_i, y_i]_{\varphi(\mathcal{S})}$  i l'enunciat s'obté directament de la definició de raó doble.  $\square$

**3.53 Corollari.** Si  $L$  i  $L'$  són dues rectes de  $\mathbb{P}^n$  i  $\pi: L \rightarrow L'$  és una perspectivitat, llavors, per a tota quaterna  $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 \in L$ ,

$$\rho(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4) = \rho(\pi(Q_1), \pi(Q_2), \pi(Q_3), \pi(Q_4)).$$

**Prova:** És una conseqüència directa de la proposició i del fet que les perspectivitats són projectivitats.  $\square$

**3.54 Corollari.** Siguin  $Q_i, i = 1, \dots, 4$ , quatre punts diferents de  $\mathbb{P}^1$  i  $\overline{Q}_i, i = 1, \dots, 4$ , quatre punts diferents de  $\overline{\mathbb{P}}^1$ . Llavors existeix una projectivitat  $\varphi: \mathbb{P}^1 \rightarrow \overline{\mathbb{P}}^1$  tal que  $\varphi(Q_i) = \overline{Q}_i$  si i només si

$$\rho(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4) = \rho(\overline{Q}_1, \overline{Q}_2, \overline{Q}_3, \overline{Q}_4),$$

i en aquest cas  $\varphi$  és única.

**Prova:** La condició és necessària per la proposició 3.52. Per veure que és suficient, sigui  $\varphi$  l'única projectivitat de  $\mathbb{P}^1$  a  $\overline{\mathbb{P}}^1$  que transforma  $Q_i$  en  $\overline{Q}_i, i = 1, 2, 3$  (hem usat el teorema fonamental de les projectivitats). Si es verifica la igualtat de l'enunciat, llavors la coordenada absoluta de  $Q_4$  respecte de  $[Q_1, Q_2; Q_3]$  coincideix amb la coordenada absoluta de  $\overline{Q}_4$  respecte de  $[\overline{Q}_1, \overline{Q}_2; \overline{Q}_3]$  (per l'exemple 3.48) i, per tant,  $\varphi$  també compleix que  $\varphi(Q_4) = \overline{Q}_4$ .  $\square$

**E.3.34.** Sigui  $\varphi$  una homografia de  $\mathbb{P}^1$  i  $P, Q$  dos punts diferents tals que  $\varphi(P) = Q$  i  $\varphi(Q) = P$ . Demostreu que  $\varphi$  és una involució. Proveu també que, donats quatre punts diferents  $P, P', Q, Q' \in \mathbb{P}^1$ , hi ha exactament una involució de  $\mathbb{P}^1$  tal que  $\varphi(P) = P'$  i  $\varphi(Q) = Q'$ .

**E.3.35.** Si  $\psi$  és una homografia de  $\mathbb{P}^1$ , mostreu que existeixen involucions  $\varphi_1$  i  $\varphi_2$  tals que  $\psi = \varphi_1 \varphi_2$ .

### Raó doble de quatre hiperplans d'un feix

Sigui  $V \subset \mathbb{P}^n$  una varietat lineal de dimensió  $n-2$ . El conjunt d'hiperplans que contenen  $V$  s'anomena el *feix d'hiperplans de vèrtex  $V$*  i es denota  $V^*$ . En el cas del pla projectiu  $\mathbb{P}^2$ ,  $V$  és un punt i el feix de vèrtex  $V$  és el conjunt de rectes que passen per  $V$ . Per  $n = 3$ ,  $V$  és una recta i el feix de vèrtex  $V$  és el conjunt de plans que contenen  $V$ .

Siguin  $H_1, H_2, H_3, H_4$  hiperplans diferents del feix  $V^*$ . Si  $L$  és una recta que no talla  $V$ , llavors  $L \not\subset H_i, i = 1, 2, 3, 4$ , i les interseccions  $Q_i = H_i \cap L$  són punts diferents  $[\diamond]$ . Com que aquests punts estan alineats, podem considerar la raó doble  $\rho(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4)$ . Ara el corollari 3.54 ens mostra que aquesta raó doble només depèn dels hiperplans, i

no de la recta  $L$ , ja que si  $L'$  és una altra recta que no talla  $V$  llavors la perspectivitat  $L \rightarrow L'$  de vèrtex  $V$  transforma  $Q_i = H_i \cap L$  en  $H_i \cap L'$ .

Així, doncs, podem definir la *raó doble*  $\rho(H_1, H_2, H_3, H_4)$  de quatre hiperplans  $H_i$  d'un feix  $V^*$  per la fórmula

$$\rho(H_1, H_2, H_3, H_4) = \rho(H_1 \cap L, H_2 \cap L, H_3 \cap L, H_4 \cap L), \quad [3.15]$$

on  $L$  és qualsevol recta que no talla  $V$ . En particular, queda així definida la raó doble de quatre rectes del pla concurrents en un punt i la de quatre plans de l'espai que contenen una recta donada.

### Comportament de la raó doble per permutacions

De la definició de raó doble en resulta immediatament que roman inalterada per les permutacions (12)(34), (13)(24) i (14)(23), això és,

$$\rho(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4) = \rho(Q_2, Q_1, Q_4, Q_3) = \rho(Q_3, Q_4, Q_1, Q_2) = \rho(Q_4, Q_3, Q_2, Q_1).$$

També en resulta que les permutacions (12) i (34) inverteixen la raó doble: si  $\rho = \rho(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4)$ , llavors

$$\rho(Q_2, Q_1, Q_3, Q_4) = \rho(Q_1, Q_2, Q_4, Q_3) = \frac{1}{\rho}.$$

Per altra banda, tenim que

$$\rho(Q_1, Q_3, Q_2, Q_4) = 1 - \rho,$$

ja que  $\rho = \rho(0, \infty, \rho, 1)$  i  $\rho(0, \rho, \infty, 1) = 1 - \rho$ . Ara és fàcil calcular la raó doble de totes les permutacions de  $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4$  en termes de  $\rho$ , ja que tota permutació dels índexos 1, 2, 3, 4 és composició de transposicions de la forma (12), (23) i (34). S'obté la següent taula:

$$\begin{aligned} \rho(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4) &= \rho(Q_2, Q_1, Q_4, Q_3) = \rho(Q_3, Q_4, Q_1, Q_2) = \rho(Q_4, Q_3, Q_2, Q_1) = & \rho \\ \rho(Q_2, Q_1, Q_3, Q_4) &= \rho(Q_1, Q_2, Q_4, Q_3) = \rho(Q_3, Q_4, Q_2, Q_1) = \rho(Q_4, Q_3, Q_1, Q_2) = & 1/\rho \\ \rho(Q_1, Q_3, Q_2, Q_4) &= \rho(Q_3, Q_1, Q_4, Q_2) = \rho(Q_2, Q_4, Q_1, Q_3) = \rho(Q_4, Q_2, Q_3, Q_1) = & 1 - \rho \\ \rho(Q_3, Q_1, Q_2, Q_4) &= \rho(Q_1, Q_3, Q_4, Q_2) = \rho(Q_2, Q_4, Q_3, Q_1) = \rho(Q_4, Q_2, Q_1, Q_3) = & 1/(1 - \rho) \\ \rho(Q_2, Q_3, Q_1, Q_4) &= \rho(Q_3, Q_2, Q_4, Q_1) = \rho(Q_1, Q_4, Q_2, Q_3) = \rho(Q_4, Q_1, Q_3, Q_2) = & (\rho - 1)/\rho \\ \rho(Q_3, Q_2, Q_1, Q_4) &= \rho(Q_2, Q_3, Q_4, Q_1) = \rho(Q_1, Q_4, Q_3, Q_2) = \rho(Q_4, Q_1, Q_2, Q_3) = & \rho/(\rho - 1) \end{aligned}$$

### Quaternes harmòniques

Una quaterna es diu *harmònica* si la seva raó doble és  $\rho = -1$ . En aquest cas  $\rho = 1/\rho$  i, per tant, de les sis raons dobles que es poden obtenir per permutacions només n'hi ha tres de diferents:  $\rho = -1$ ,  $1 - \rho = 2$ ,  $1/(1 - \rho) = 1/2$ .

**3.55 Proposició.** *Quatre punts diferents  $(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4)$  formen una quaterna harmònica si i només si*

$$\rho(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4) = \rho(Q_1, Q_2, Q_4, Q_3)$$

**Prova:** Sigui  $\rho = \rho(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4)$ . Com que  $1/\rho = \rho(Q_1, Q_2, Q_4, Q_3)$ , és clar que l'igualtat de l'enunciat és certa si  $\rho = -1$ . Recíprocament, la condició de l'enunciat equival a  $\rho = 1/\rho$ , és a dir, a  $\rho^2 = 1$ . Com que  $\rho \neq 1$ , tenim  $\rho = -1$ .  $\square$

Notem que la condició que una quaterna sigui harmònica es manté per les permutacions (12), (34) i (13)(24). És per això que també es diu que els parells  $\{Q_1, Q_2\}$  i  $\{Q_3, Q_4\}$  se «separen harmònicament», o que  $Q_3$  i  $Q_4$  són *conjugats respecte de*  $Q_1$  i  $Q_2$ .

**3.56 Exemple.** Siguin  $M, A, B$  tres punts diferents de  $\mathbb{A}^1$ . Com que  $M$  és el punt mitjà del segment  $[A, B]$  si i només si  $\sigma(M, A, B) = -1$ , l'exemple 3.50 ens dona que  $M$  és el punt mitjà del segment  $[A, B]$  si i només si el parell  $\{P_\infty, M\}$  separa harmònicament  $\{A, B\}$ , on  $P_\infty$  és el punt de l'infinit de la recta  $AB$ .

**E.3.36.** Mostreu que l'extensió projectiva de la simetria especular  $\sigma_H$  respecte d'un hiperplà  $H$  d'un espai euclidià és l'homologia de mòdul  $-1$  que té eix  $\overline{H}$  i centre en el punt de l'infinit de les rectes perpendiculars a  $H$ . En general, les homologies de mòdul  $-1$  es diuen *harmòniques*; la raó d'aquesta nomenclatura prové de l'exemple 3.51. Una homologia harmònica és *involutiva*, això és, el seu quadrat és la identitat.

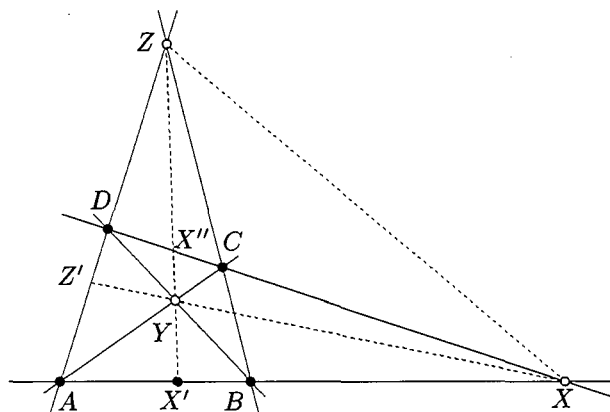
**E.3.37.** Demostreu que dues homologies harmòniques commuten si i només si l'eix de cada una és incident amb el centre de l'altra.

Atès que tenim definida la raó doble de quatre hiperplans d'un feix (fórmula [3.15]), queda definida, en particular, la noció de *quaterna harmònica d'hiperplans d'un feix*, o la noció de *separació harmònica* entre dues parelles d'hiperplans d'un feix.

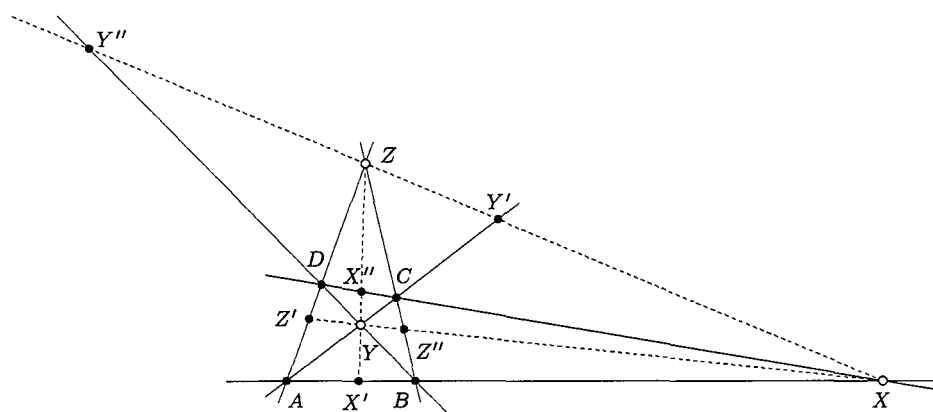
### Teorema del quadrangle complet

Considerem un quadrangle complet  $ABCD$  com el de la figura 3.14 i sigui  $XYZ$  el seu triangle diagonal (vegeu els exemples 3.18). Sigui  $X'$  el punt d'intersecció de les rectes  $AB$  i  $YZ$ .

**3.57 Lema.** *Els punts  $X$  i  $X'$  separen harmònicament els punts  $A$  i  $B$ .*

Figura 3.14: *Quadrangle complet i triangle diagonal*

**Prova:** Projectant la recta  $AB$  sobre la recta  $CD$  des de  $Z$  s'obté que  $\rho(A, B, X', X) = \rho(D, C, X'', X)$ , on  $X''$  és el punt d'intersecció de  $CD$  i  $YZ$ . Tornant a projectar la recta  $CD$  sobre  $AB$  des de  $Y$ , s'obté  $\rho(D, C, X'', X) = \rho(B, A, X', X)$ . Per tant,  $\rho(A, B, X', X) = \rho(B, A, X', X)$ , i aquesta relació implica que  $A, B, X', X$  és una quaterna harmònica (proposició 3.55).  $\square$

Figura 3.15: *Nou quaternes harmòniques*

**3.58 Teorema** (del quadrangle complet). *En un quadrangle complet, el parell de costats del triangle diagonal incidents amb un vèrtex d'aquest (per exemple, en la figura 3.14,*

$ZX$  i  $ZY$  són els costats incidents amb  $Z$ ) *separa harmònicament el parell de costats del quadrangle que es tallen en aquell vèrtex* ( $AD$  i  $BC$  en l'exemple).  $\square$

**E.3.38.** Amb les notacions de la figura 3.15, comproveu que les quaternes que segueixen són harmòniques:  $(A, B, X, X')$ ,  $(A, C, Y, Y')$ ,  $(A, D, Z, Z')$ ,  $(B, D, Y, Y'')$ ,  $(B, C, Z, Z'')$ ,  $(C, D, X, X'')$ ,  $(X, Y, Z', Z'')$ ,  $(X, Z, Y', Y'')$  i  $(Y, Z, X', X'')$ .

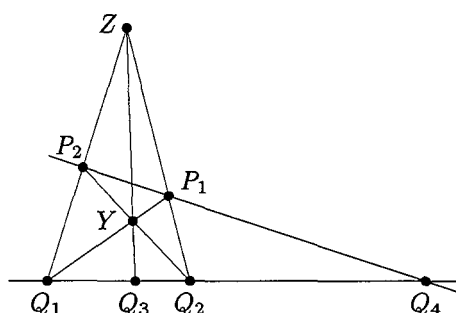


Figura 3.16: Construcció del quart harmònic

### Construcció geomètrica del quart harmònic

Siguin  $Q_1$ ,  $Q_2$  i  $Q_3$  tres punts alineats diferents. Volem construir el punt  $Q_4$  de la recta  $L = Q_1Q_2$  tal que  $\rho(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4) = -1$ . El lema 3.57 ens dona la solució. Sigui  $Z$  un punt exterior a  $L$  i escollim un punt  $Y$  de la recta  $Q_3Z$  diferent de  $Q_3$  i de  $Z$  (vegeu la figura 3.16). Sigui  $P_1$  i  $P_2$  les interseccions de  $Q_1Y$  amb  $Q_2Z$  i de  $Q_2Y$  amb  $Q_1Z$ , respectivament. Llavors  $Q_4$  és el punt d'intersecció de  $P_1P_2$  amb  $L$ .

### Quaternes equianharmòniques

Una quaterna de punts alineats diferents es diu *equianharmònica* si, posant  $\xi$  per denotar la seva raó doble, es té que  $\xi = 1/(1 - \xi)$ . Com que aquesta relació equival a  $\xi^2 = \xi - 1$ , veiem que  $\xi^3 = \xi^2 - \xi = -1$ . Si  $\xi$  és una solució de l'equació  $\xi^2 = \xi - 1$ , llavors l'altra solució és  $1 - \xi = -\xi^2 = \xi^{-1}$ . D'això en segueix que entre els sis valors possibles de la raó doble, en fer permutacions dels punts, només n'hi ha dos de diferents:  $\xi$  i  $1 - \xi$ . Si  $K = \mathbb{C}$ , llavors  $\xi$  i  $1 - \xi$  són les arrels cúbiques complexes de  $-1$  (vegeu la figura 3.17).

**E.3.39.** Demostreu que si entre les sis raons dobles de la pàg. 206 n'hi ha dues de coincidents, llavors la quaterna és harmònica o equianharmònica.

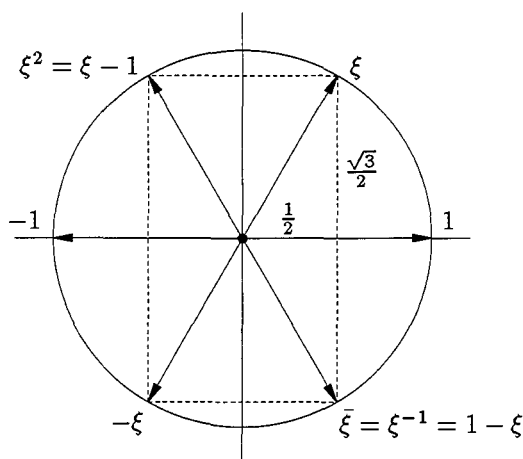


Figura 3.17: Valors de la raó doble equianharmònica quan  $K = \mathbb{C}$

### 3.5 Dualitat

Per contrast amb un pla afi, en el qual dues rectes només determinen un punt quan no són paral·leles, en un pla projectiu dues rectes distintes determinen un punt sense excepció, de la mateixa manera que dos punts diferents determinen una recta sense excepció. Aquesta mena de «simetria», entre el comportament dels punts i el comportament de les rectes d'un pla projectiu, origina el fenomen de la «dualitat», el qual es manifesta pel fet que a cada enunciat se li pot fer correspondre un altre enunciat, dit «dual» del primer, per intercanvi de les nocions de punt i recta, mantenint, però, la relació d'incidència.

Més precisament, per obtenir el dual d'un enunciat cal canviar cada punt  $P$  per una recta  $p$ , cada recta  $u$  per un punt  $U$ , i això de manera que si  $P$  és incident amb  $u$ , llavors  $U$  és incident amb  $p$ , i viceversa. En particular, si  $u = PQ$  és la recta que uneix dos punts  $P$  i  $Q$ ,  $U$  ha de ser el punt d'intersecció de les rectes  $p$  i  $q$ , i recíprocament.

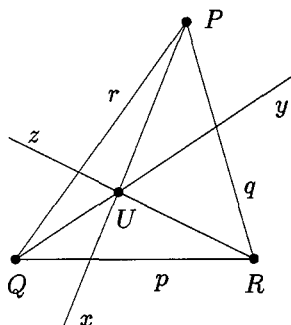
El «principi de dualitat» és l'afirmació que si un enunciat és cert, el seu dual també ho és. Aquest principi posa, doncs, a la nostra disposició un procediment automàtic de produir un «teorema dual» per a cada teorema de geometria projectiva del pla. Vegem-ne alguns exemples, per l'exposició dels quals seguirem el costum clàssic de presentar les diverses parelles duals amb un format de doble columna. Per simplificar les notacions, el punt d'intersecció de dues rectes diferents  $p, q$  serà denotat  $pq$ . Notem que els enunciats duals dels enunciats de la columna de la dreta són els corresponents enunciats de la columna de l'esquerra.



**Punts alineats.** Punts  $P, Q, \dots$  incidents amb una recta  $u$ .

**Triangle.** Triangle de vèrtexs  $P, Q, R$  i costats  $p = QR, q = RP, r = PQ$ .

(Figura 3.18) Un triangle de vèrtexs  $P, Q, R$ , els seus costats  $p = QR, q = RP, r = PQ$ , un punt  $U$  no incident amb cap d'aquests costats i les rectes  $x = PU, y = QU, z = RU$ .



**Rectes concurrents.** Rectes  $p, q, \dots$  incidents amb un punt  $U$ .

**Trilàter.** Triangle de costats  $p, q, r$  i vèrtexs  $P = qr, Q = rp, R = pq$ .

(Figura 3.18) Un triangle de costats  $p, q, r$ , els seus vèrtexs  $P = qr, Q = rp, R = pq$ , una recta  $u$  no incident amb cap d'aquests vèrtexs i els punts  $X = pu, Y = qu, Z = ru$ .

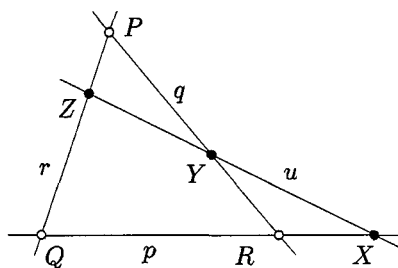


Figura 3.18: Exemple de figures duals

**Teorema de Pappus** (teorema 3.7). Dues rectes diferents  $u$  i  $u'$ ; tres punts diferents  $P, Q, R$  situats sobre  $u$  i diferents de  $uu'$ , tres punts diferents  $P', Q', R'$  situats sobre  $u'$  i diferents de  $uu'$ ; les parelles de rectes  $\{PQ', QP'\}$ ,  $\{QR', RQ'\}$ ,  $\{RP', PR'\}$ ; i els punts  $Z, X, Y$  d'intersecció d'aquestes parelles. Llavors, tenim que els punts  $X, Y, Z$  estan alineats.

**Teorema de Desargues** (teorema 3.1; vegeu també el subapartat «Demostració analítica del teorema de Desargues», pàg. 171). Tres rectes diferents  $u, v, w$ , concurrents en un punt  $O$ ; punts diferents  $P, P'$  de  $u$ , punts diferents  $Q, Q'$  de  $v$ , punts diferents  $R, R'$  de  $w$ ; les parelles de rectes  $\{PQ, P'Q'\}$ ,  $\{QR, Q'R'\}$ ,  $\{RP, R'P'\}$ ; i els corresponents punts d'intersecció  $Z, Y, X$ . Llavors, els punts  $X, Y, Z$  estan alineats.

**Dual del teorema de Pappus** (figura 3.19). Dos punts diferents  $U$  i  $U'$ ; tres rectes diferents  $p, q, r$  per  $U$  i diferents de  $UU'$ , tres rectes diferents  $p', q', r'$  per  $U'$  i diferents de  $UU'$ ; els punts  $\{pq', qp'\}$ ,  $\{qr', rq'\}$ ,  $\{rp', pr'\}$ ; i les rectes  $z, x, y$  que uneixen aquestes parelles de punts. Llavors,  $x, y, z$  són concurrents, pel teorema de Pappus i el principi de dualitat.

**Dual del teorema de Desargues.** Tres punts diferents  $U, V, W$ , situats sobre una recta  $o$ ; rectes diferents  $p, p'$  per  $U$ , rectes diferents  $q, q'$  per  $V$ , rectes diferents  $r, r'$  per  $W$ ; les parelles de punts  $\{pq, p'q'\}$ ,  $\{qr, q'r'\}$ ,  $\{rp, r'p'\}$ ; i les rectes  $x, y, z$  que les uneixen. Llavors,  $x, y, z$  són concurrents (pel teorema de Desargues i el principi de dualitat). Queda així establert el recíproc del teorema Desargues[ $\diamond$ ].

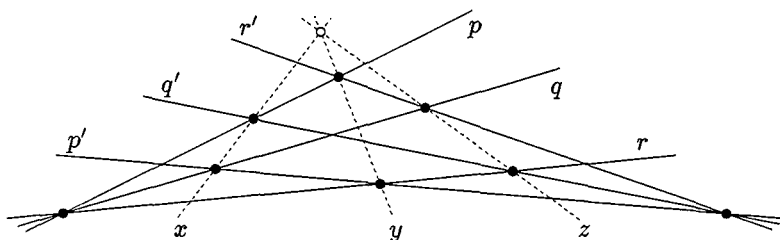


Figura 3.19: Dual del teorema de Pappus

**E.3.40.** Enuncieu la definició dual de la noció de perspectivitat entre dues rectes de  $\mathbb{P}^2$ .

En el cas de l'espai projectiu, la «simetria» en el comportament de punts i rectes de què parlàvem en el cas del pla s'ha de substituir per una «simetria» en el comportament de punts, rectes i plans, d'una banda, i el de plans, rectes i punts, de l'altra. Fixem-nos, per exemple, que, al costat del fet que dos punts diferents són incidents amb una única recta, hi tenim el fet que dos plans diferents també són incidents amb una única recta, i al costat de l'enunciat «dues rectes diferents es tallen en un punt» (que pot ser cert o no) hi tenim l'enunciat equivalent «dues rectes diferents són coplanàries» (vegeu l'exemple 3.11, pàg. 175).

En dimensió 3, doncs, l'enunciat «dual» d'un enunciat s'obté intercanviant les nocions de punt, recta i pla per les de pla, recta i punt, respectivament, i això de manera que es conservin les incidències. Igual que en el cas del pla, el «principi de dualitat» és l'afirmació que si un enunciat és cert, llavors també ho és el seu dual.

Els exemples en doble columna que esmentem a continuació il·lustren aquest procés. Per abreviar, posem  $\pi\pi'$  per denotar la intersecció  $\pi \cap \pi'$  de dos plans  $\pi$  i  $\pi'$ . Igual que en el cas del pla, els enunciats duals de la columna de la dreta són els corresponents enunciats de la columna de l'esquerra.

Dos punts diferents  $P, P'$  i la recta  $L = PP'$ .

**Punts alineats.** Punts  $P, P', \dots$  situats sobre una recta  $L$ .

**Pla d'un triangle.** El pla determinat per tres punts no alineats.

Un tetràedre amb vèrtexs  $P_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , amb arestes  $L_{ij} = P_iP_j$  i cares  $\pi_i$  ( $\pi_i$  és la cara oposada a  $P_i$ ).

Rectes concurrents (en un punt  $P$ ).

Dos plans diferents  $\pi, \pi'$  i la recta  $L = \pi\pi'$ .

**Radiació de plans.** Plans  $\pi, \pi', \dots$  que contenen una recta  $L$ .

**Vèrtex d'un triedre.** El punt d'intersecció de tres plans que no formen una radiació.

Un tetràedre amb cares  $\pi_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , amb arestes  $L_{ij} = \pi_i\pi_j$  i amb vèrtexs  $P_i$  ( $P_i$  és el vèrtex oposat a  $\pi_i$ ).

Rectes coplanàries (contingudes en un pla  $\pi$ ).

**Teorema de Desargues** (teorema 3.1; vegeu també el subapartat «Demostració analítica del teorema de Desargues», pàg. 3.1). Tres rectes diferents  $u, v, w$ , concurrents en un punt  $O$ ; punts diferents  $P, P'$  de  $u$ , punts diferents  $Q, Q'$  de  $v$ , punts diferents  $R, R'$  de  $w$ ; les parelles de rectes  $\{PQ, P'Q'\}$ ,  $\{QR, Q'R'\}$ ,  $\{RP, R'P'\}$ ; i els corresponents punts d'intersecció  $Z, Y, X$ . Llavors, *els punts  $Z, X, Y$  estan alineats*.

**Dual del teorema de Desargues a  $\mathbb{P}^3$**  (vegeu la figura 3.20). Tres rectes diferents  $u, v, w$ , situades en un pla  $\alpha$ ; plans diferents  $p, p'$  que contenen  $u$ , plans diferents  $q, q'$  que contenen  $v$ , plans diferents  $r, r'$  que contenen  $w$ ; les parelles de rectes  $\{pq, p'q'\}$ ,  $\{qr, q'r'\}$ ,  $\{rp, r'p'\}$  i els plans  $x, y, z$  que les uneixen. Llavors, *els plans  $x, y, z$  formen una radiació* (pel teorema de Desargues i el principi de dualitat per dimensió 3).

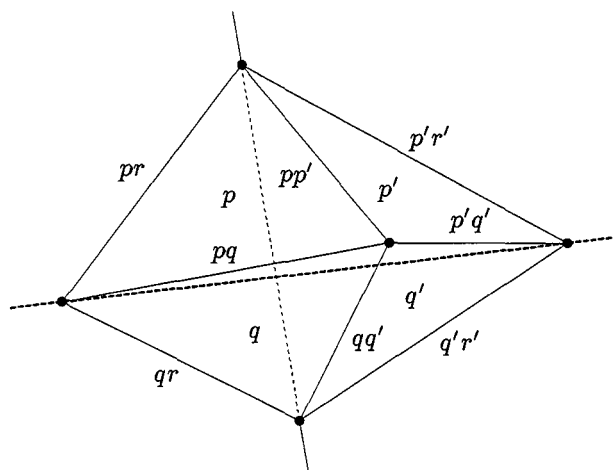


Figura 3.20: Dual del teorema de Desargues en dimensió 3

### Teorema de dualitat

El principi de dualitat no és, estrictament parlant, un teorema de la geometria projectiva. Es tracta, més aviat, d'un «metateorema», ja que és una afirmació general sobre l'estructura dels enuncisats d'aquesta disciplina. En aquest apartat, després de certs preliminars sobre l'espai dual d'un espai vectorial, enunciaré i demostraré un resultat que anomenaré «teorema de dualitat» i, tot seguit, farem veure com aquest teorema explica el principi de dualitat per a qualsevol dimensió.

### Incidència de vectors i formes lineals

Sigui  $E$  un espai vectorial. Posarem  $E^\vee$ , o  $\check{E}$ , per denotar l'espai dual de  $E$ , això és, l'espai vectorial de les aplicacions lineals  $\omega: E \rightarrow K$ . Els elements de  $E^\vee$  també

s'anomenen *formes lineals* de  $E$ . Si  $\omega \in E^\vee$  i  $e \in E$ , en lloc de  $\omega(e)$  també escriurem  $\langle \omega | e \rangle$  i direm que  $\omega$  i  $e$  són *incidents* si i només si  $\langle \omega | e \rangle = 0$ .

Si  $F$  és un subespai vectorial de  $E$ , escrivim  $F^* \subseteq E^\vee$  per denotar el subespai vectorial *incident amb*  $F$ , és a dir, el subespai de  $E^\vee$  format pels elements  $\omega \in E^\vee$  que són incidents amb tots els vectors de  $F$ . Es compleix que

$$\dim_K(F^*) = \dim_K(E) - \dim_K(F). \quad [3.16]$$

Anàlogament, si  $W$  és un subespai vectorial de  $E^\vee$ , posarem  $W^* \subseteq E$  per designar el subespai *incident amb*  $W$ , això és, el format pels vectors  $e \in E$  tals que  $\langle \omega | e \rangle = 0$  per a tot  $\omega \in W$ . També tenim que

$$\dim_K(W^*) = \dim_K(E) - \dim_K(W). \quad [3.16']$$

**E.3.41.** Si  $W = \langle \omega_1, \dots, \omega_r \rangle$ ,  $\omega_i \in E^\vee$ , proveu que  $W^* = \omega_1^* \cap \dots \cap \omega_r^*$ , on  $\omega^*$  denota, si  $\omega \in E^\vee$ , el subespai vectorial de  $E$  format pels vectors incidents amb  $\omega$ . Doneu un enunciat anàleg relatiu a  $F^*$ .

Com que  $F \subseteq F^{**}$  per a tot subespai vectorial  $F$  de  $E$ , les fórmules [3.16] i [3.16'] impliquen que  $F = F^{**}$ . Anàlogament, es veu que  $W = W^{**}$ , per a tot subespai vectorial  $W$  de  $E^\vee$ . Si ara posem  $\mathcal{L}(E)$  per a denotar el conjunt de subespais vectorials de  $E$ , tenim:

### 3.59 Teorema. L'aplicació

$$\mathcal{L}(E) \xrightarrow{*} \mathcal{L}(E^\vee), \quad F \mapsto F^*,$$

és una bijecció, i la seva inversa és l'aplicació tal que  $W \mapsto W^*$ . A més, l'aplicació  $*$  té les següents propietats:

- 1)  $F_1 \subseteq F_2$  si i només si  $F_2^* \subseteq F_1^*$ .
- 2)  $(F_1 + F_2)^* = F_1^* \cap F_2^*$ .
- 3)  $(F_1 \cap F_2)^* = F_1^* + F_2^*$ .

En particular, si restringim la bijecció  $*$  al conjunt  $\mathcal{L}_{d+1}$  de subespais vectorials de dimensió  $d+1$ , obtenim una bijecció

$$\mathcal{L}_{d+1}(E) \xrightarrow{*} \mathcal{L}_{n-d}(E^\vee),$$

on  $\dim(E) = n+1$  i on  $\mathcal{L}_{n-d}(E^\vee)$  indica el conjunt de subespais vectorials de dimensió  $n-d$  de  $E^\vee$ .

**Prova:** Es deixa com exercici per al lector, ja que tots els enunciats es desprenen fàcilment del que ja hem dit i de les definicions. Per exemple, per veure el punt 3) és suficient veure que la igualtat en qüestió val després d'aplicar  $*$  als dos membres, i això és clar per la propietat 2) i el fet que  $F^{**} = F$  per a tot subespai vectorial  $F$ .  $\square$

### Espai projectiu dual

Sigui  $\mathbb{P} = \mathbb{P}(E)$  un espai projectiu de dimensió  $n$ . Posem  $\mathbb{P}^\vee = \mathbb{P}(E^\vee)$ . Aquest espai s'anomena *espai projectiu dual de  $\mathbb{P}$* .

Donada una varietat lineal  $\Lambda \subseteq \mathbb{P}^\vee$ , diguem  $\Lambda = [W]$ , posarem  $\Lambda^* = [W^*] \subseteq \mathbb{P}$  i direm que  $\Lambda^*$  és l'eix, o el suport, de  $\Lambda$ . Anàlogament, donada una varietat lineal  $L \subseteq \mathbb{P}$ , diguem  $L = [F]$ , posarem  $L^* = [F^*]$  i direm que  $L^*$  és l'estel de  $L$ .

**E.3.42.** Si  $L$  és una varietat lineal de dimensió  $r$  de  $\mathbb{P}$ , comproveu que  $\dim(L^*) = n - r - 1$ . Anàlogament, si  $\Lambda$  és una varietat lineal de dimensió  $r'$  de  $\mathbb{P}^\vee$ , llavors  $\Lambda^*$  és una varietat lineal de dimensió  $n - r' - 1$ .

Posem  $\mathcal{S}$  per denotar el conjunt de varietats lineals de  $\mathbb{P}$  i  $\mathcal{S}^\vee$  per denotar el conjunt de varietats lineals de  $\mathbb{P}^\vee$ . Tenim aplicacions  $\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}^\vee$  ( $L \mapsto L^*$ ) i  $\mathcal{S}^\vee \rightarrow \mathcal{S}$  ( $\Lambda \mapsto \Lambda^*$ ). Si posem  $\mathcal{S}_r \subseteq \mathcal{S}$  per denotar el conjunt de varietats lineals de dimensió  $r$ , i definim  $\mathcal{S}_r^\vee$  d'una manera anàloga, llavors tenim aplicacions  $\mathcal{S}_r \rightarrow \mathcal{S}_{n-r-1}^\vee$  i  $\mathcal{S}_r^\vee \rightarrow \mathcal{S}_{n-r'-1}$  obtingudes per restricció de les aplicacions  $\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}^\vee$  i  $\mathcal{S}^\vee \rightarrow \mathcal{S}$ .

**3.60 Teorema** (de dualitat). *Les aplicacions  $\Lambda \mapsto \Lambda^*$  i  $L \mapsto L^*$  entre els conjunts  $\mathcal{S}$  i  $\mathcal{S}^\vee$  són bijectives i inverses l'una de l'altra. A més, tenen les següents propietats:*

- 1)  $L_1 \subseteq L_2$  si i només si  $L_2^* \subseteq L_1^*$ .
- 2)  $(L_1 \vee L_2)^* = L_1^* \cap L_2^*$ .
- 3)  $(L_1 \cap L_2)^* = L_1^* \vee L_2^*$ .

*Notem que, en particular, les aplicacions  $\mathcal{S}_r \rightarrow \mathcal{S}_{n-r-1}^\vee$  i  $\mathcal{S}_{n-r-1}^\vee \rightarrow \mathcal{S}_r$  són bijectives i inverses l'una de l'altra.*

**Prova:** És una conseqüència directa del teorema 3.59, de les fórmules [3.16] i [3.16'], i de les definicions.  $\square$

Com a conseqüència del teorema de dualitat, tenim que podem identificar els punts de  $\mathbb{P}^\vee$ , que formen el subconjunt  $\mathcal{S}_0^\vee$  de  $\mathcal{S}^\vee$ , amb els hiperplans de  $\mathbb{P}$ , que formen el subconjunt  $\mathcal{S}_{n-1}$  de  $\mathcal{S}$ . De fet, si  $\omega \in E^\vee$  és no nula,  $[\omega]^* = [\omega^*]$  és l'hiperplà representat per l'espai  $\omega^*$  de vectors incidents amb  $\omega$ . D'ara endavant, identificarem els punts de  $\mathbb{P}^\vee$  amb els hiperplans de  $\mathbb{P}$ , de manera que el símbol  $[\omega]$ , que per definició representa un punt de  $\mathbb{P}^\vee$  (si  $\omega \in E^\vee - \{0\}$ ), també s'usarà per representar l'hiperplà  $[\omega^*]$  de  $\mathbb{P}$ . D'aquesta manera, la relació  $[x] \in [\omega]$  equival, si  $x \in E - \{0\}$  i  $\omega \in E^\vee - \{0\}$ , a  $\langle \omega | x \rangle = 0$ .

Amb la interpretació dels punts de  $\mathbb{P}^\vee$  com a hiperplans de  $\mathbb{P}$ , les varietats lineals de  $\mathbb{P}^\vee$  es poden interpretar com a conjunts d'hiperplans de  $\mathbb{P}$ . De fet, direm que un conjunt d'hiperplans de  $\mathbb{P}$  és un *feix d'hiperplans* si aquest conjunt forma una varietat lineal  $\mathbb{P}^\vee$ .

Pel teorema de dualitat, tenim que tot feix  $\Lambda$  d'hiperplans és de la forma  $L^*$ , on  $L$  és una varietat lineal de  $\mathbb{P}$  unívocament determinada per  $\Lambda$  (de fet  $L = \Lambda^*$ , l'eix de  $\Lambda$ ). Per tant, per acabar de perfilar la interpretació de les varietats lineals de  $\mathbb{P}^\vee$  com

a feixos d'hiperplans només ens cal trobar una descripció del conjunt d'hiperplans que correspon a  $L^*$  en termes de  $L$  i  $\mathbb{P}$ .

**3.61 Proposició.** *El feix d'hiperplans  $L^*$  està format precisament pels hiperplans que contenen  $L$ .*

**Prova:** Sigui  $F$  el subespai vectorial de  $E$  tal que  $L = [F]$ . Sigui  $\omega$  una forma lineal no nul·la de  $E$ . Com que  $L^* = [F^*]$ , l'hiperplà  $[\omega]$  és un punt de  $L^*$  si i només si  $\omega \in F^*$ , és a dir, si i només si  $\omega$  és incident amb  $F$ . Ara bé, això equival a que  $F \subseteq \omega^*$ , és a dir, a que  $L = [F] \subseteq [\omega^*]$ . Per tant, un punt  $[\omega] \in \check{\mathbb{P}}$  és de  $L^*$  si i només si l'hiperplà que li correspon conté  $L$ .  $\square$

**E.3.43.** Proveu que l'eix d'un feix d'hiperplans  $\Lambda$  és la intersecció de tots els hiperplans de  $\Lambda$ .

**3.62 Exemples.** Els hiperplans de  $\mathbb{P}^v$  són els feixos de la forma  $P^*$ , on  $P$  és un punt de  $\mathbb{P}$ . El punt  $P$ , que és l'eix de l'hiperplà  $P^*$ , també s'anomena *focus* de l'hiperplà  $P^*$ .

En el cas del pla  $\mathbb{P}^2$ , veiem que les rectes de  $\mathbb{P}^2$  són els punts de  $\check{\mathbb{P}}^2$  i que els punts de  $\mathbb{P}^2$  s'identifiquen a les rectes de  $\check{\mathbb{P}}^2$ , fent correspondre al punt  $P$  el feix  $P^*$  de focus  $P$  (el conjunt de les rectes incidents amb  $P$ ).

En el cas de  $\mathbb{P}^3$ , els punts de  $\check{\mathbb{P}}^3$  són els hiperplans de  $\mathbb{P}^3$ , les rectes de  $\check{\mathbb{P}}^3$  es poden identificar amb les rectes de  $\mathbb{P}^3$  (si  $L$  és una recta de  $\mathbb{P}^3$ , la recta de  $\check{\mathbb{P}}^3$  que li correspon és  $L^*$ , la radiació de plans d'eix  $L$ , de manera que  $L$  és, com a recta de  $\mathbb{P}^3$ , el conjunt dels seus punts i, com a recta de  $\check{\mathbb{P}}^3$ , el conjunt dels hiperplans que la contenen). Finalment, els hiperplans de  $\check{\mathbb{P}}^3$  s'identifiquen als punts de  $\mathbb{P}^3$ , fent correspondre al punt  $P$  l'hiperplà  $P^*$  de focus  $P$ .

### Principi de dualitat

Sigui  $R = R(L_1, \dots, L_k)$  un enunciat relatiu a varietats lineals  $L_1, \dots, L_k$ , de dimensions  $r_1, \dots, r_k$ , d'un espai projectiu de dimensió  $n$ . Suposem, a més, que, en la formació de  $R$ , només hi entren les relacions i operacions  $\subseteq$ ,  $\supseteq$ ,  $\vee$  i  $\cap$ .

Posarem  $R^\vee = R^\vee(L'_1, \dots, L'_k)$  per denotar l'enunciat que s'obté substituint cada ocurrència de  $L_i$  en  $R$  per una varietat  $L'_i$  de dimensió  $n - r_i - 1$ , i cada ocurrència de  $\subseteq$  ( $\supseteq$ ,  $\vee$  o  $\cap$ ), per  $\supseteq$  ( $\subseteq$ ,  $\cap$  o  $\vee$ ). De l'enunciat  $R^\vee$ , en direm que és el *dual* de  $R$ .

El *principi de dualitat* afirma que si  $\mathcal{T}$  és un teorema de la forma  $R \Rightarrow S$ , on  $R$  i  $S$  són enunciats de la forma esmentada, aleshores l'enunciat  $\mathcal{T}^\vee$ , que per definició és  $R^\vee \Rightarrow S^\vee$ , també és un teorema.

La raó per la qual el principi de dualitat funciona és la següent. Com que  $R \Rightarrow S$  és un teorema, en particular tenim, si  $\Lambda_1, \dots, \Lambda_k$  són feixos d'hiperplans de dimensions  $r_1, \dots, r_k$  de  $\mathbb{P}^n$ , que  $S(\Lambda_1, \dots, \Lambda_k)$  és conseqüència de  $R(\Lambda_1, \dots, \Lambda_k)$ . Però  $\Lambda_i = L_i'^*$ , on  $L_i'$  és una varietat lineal de dimensió  $n - r_i - 1$  de  $\mathbb{P}$ , i és clar, pel teorema de dualitat, que

$R(L_1^*, \dots, L_k^*) = R^\vee(L_1', \dots, L_k')$  i, per la mateixa raó,  $S(L_1^*, \dots, L_k^*) = S^\vee(L_1', \dots, L_k')$ . Per tant,  $R^\vee \Rightarrow S^\vee$  també és un teorema.

**E.3.44.** Siguin  $H_1, H_2, H_3, H_4$  quatre hiperplans de  $\mathbb{P}^n$  incidents amb una varietat lineal  $L$  de dimensió  $n - 2$ . Demostreu que la raó doble  $\rho(H_1, H_2, H_3, H_4)$  definida al subapartat «Raó doble de quatre hiperplans d'un feix», pàg. 205, coincideix amb la raó doble dels hiperplans com a punts de la recta  $L^*$  de l'espai projectiu dual.

**E.3.45.** Enuncieu el dual del teorema del quadrangle complet.

### Projectivitat dual

Siguin  $\mathbb{P} = \mathbb{P}(E)$  i  $\mathbb{P}' = \mathbb{P}(E')$  espais projectius i  $\varphi = [f]$  una projectivitat de  $\mathbb{P}$  en  $\mathbb{P}'$ , on  $f: E \rightarrow E'$  és un isomorfisme lineal. Llavors  $\varphi^{-1}$  transforma hiperplans de  $\mathbb{P}'$  en hiperplans de  $\mathbb{P}$  (vegeu l'enunciat 3.34) i, per tant, tenim una aplicació

$$\varphi^\vee: \check{\mathbb{P}}' \rightarrow \check{\mathbb{P}}, \quad H' \mapsto \varphi^{-1}(H').$$

Aquesta aplicació és bijectiva, ja que la projectivitat  $\varphi$  transforma hiperplans de  $H$  en hiperplans de  $H'$  i  $\varphi(\varphi^{-1}(H')) = H'$  per a tot hiperplà  $H'$  de  $\mathbb{P}'$ ,  $\varphi^{-1}(\varphi(H)) = H$  per a tot hiperplà  $H$  de  $\mathbb{P}$ .

**3.63 Proposició.** *L'aplicació  $\varphi^\vee$  és la projectivitat  $[f^\vee]$  definida per l'isomorfisme lineal  $f^\vee: \check{E} \rightarrow \check{E}'$ , of  $f^\vee$  denota el dual de l'isomorfisme  $f: E \rightarrow E'$  que induïx  $\varphi$ .*

**Prova:** Sigui  $P = [x] \in \mathbb{P}$  i  $H' = [\omega'] \in \check{\mathbb{P}}'$ . Com que  $\varphi(P) = [f(x)]$ , tenim

$$\begin{aligned} P \in \varphi^\vee(H') &\Leftrightarrow \varphi(P) \in H' \\ &\Leftrightarrow \langle \omega' | f(x) \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \langle f^\vee \omega' | x \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow P \in [f^\vee \omega'], \end{aligned}$$

és a dir,  $\varphi^\vee(H') = [f^\vee \omega']$ . □

**E.3.46.** Una projectivitat de  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$  té almenys un punt fix (vegeu l'exercici E.3.21). Demostreu que també té almenys una recta fixa.

### Referència dual

Sigui  $\mathcal{R} = [P_0, \dots, P_n; U]$  una referència projectiva. La *referència dual* de la referència  $\mathcal{R}$ ,  $\mathcal{R}^\vee = [P_0^\vee, \dots, P_n^\vee; U^\vee]$ , és defineix com la referència associada a una base dual d'una base adaptada a  $\mathcal{R}$ . Per dir-ho amb més detalls, si  $\mathbf{e} = (e_0, \dots, e_n)$  és una base de  $E$  adaptada a  $\mathcal{R}$ , i  $\mathbf{e}^\vee = (e^0, \dots, e^n)$  és la corresponent base dual (és a dir,  $e^j \in E^\vee$  és

la forma lineal tal que  $\langle e^j | e_i \rangle = 1$  si  $i = j$ ,  $\langle e^j | e_i \rangle = 0$  si  $i \neq j$ , llavors  $P_j^\vee = [e^j]$  i  $U^\vee = [e^0 + \dots + e^n]$ .

Notem que  $R^\vee$  no depèn de la base  $\mathbf{e}$ , adaptada a  $\mathcal{R}$ , que hàgim escollit: una altra base adaptada a  $\mathcal{R}$  té la forma  $(\lambda e_0, \dots, \lambda e_n)$ , per a un cert  $\lambda \in K - \{0\}$ , la base dual d'aquesta base és  $(\lambda^{-1} e^0, \dots, \lambda^{-1} e^n)$ , ja que  $\langle \lambda^{-1} e^j | \lambda e_i \rangle = \langle e^j | e_i \rangle$ , i és clar que aquesta base defineix la mateixa referència que la base que  $e^0, \dots, e^n$ .

**3.64 Proposició.** *Un hiperplà d'equació  $u_0 \xi_0 + \dots + u_n \xi_n = 0$  respecte de la referència  $\mathcal{R}$  té coordenades projectives  $(u_0, \dots, u_n)$  respecte de la referència dual  $R^\vee$ . Recíprocament, si  $(u_0, \dots, u_n)$  són coordenades projectives d'un hiperplà respecte de la referència  $R^\vee$ , llavors l'hiperplà té equació  $u_0 \xi_0 + \dots + u_n \xi_n = 0$  respecte de la referència  $\mathcal{R}$ .*

**Prova:** Sigui  $H$  l'hiperplà d'equació  $u_0 \xi_0 + \dots + u_n \xi_n = 0$ . Sigui

$$\omega = u_0 e^0 + \dots + u_n e^n \in E^\vee,$$

on  $\mathbf{e} = (e_0, \dots, e_n)$  és una base adaptada a  $\mathcal{R}$  i  $\mathbf{e}^\vee = (e^0, \dots, e^n)$  la seva base dual. Com que  $\mathbf{e}^\vee$  és una base adaptada a  $\mathcal{R}^\vee$ , dir que  $(u_0, \dots, u_n)$  són coordenades projectives de  $H$  respecte de  $\mathcal{R}^\vee$  equival a veure que  $H = [\omega^*]$ . Ara bé, un punt  $[\xi_0 e_0 + \dots + \xi_n e_n]$  és de  $H$  si i només si  $u_0 \xi_0 + \dots + u_n \xi_n = 0$ , i com que

$$u_0 \xi_0 + \dots + u_n \xi_n = \langle u_0 e^0 + \dots + u_n e^n | \xi_0 e_0 + \dots + \xi_n e_n \rangle = \langle \omega | \xi_0 e_0 + \dots + \xi_n e_n \rangle,$$

veiem que  $[\xi_0 e_0 + \dots + \xi_n e_n] \in H$  si i només si  $\xi_0 e_0 + \dots + \xi_n e_n \in \omega^*$ . Per tant,  $H = [\omega^*]$ .

Per veure el recíproc, siguin  $(u_0, \dots, u_n)$  coordenades projectives d'un hiperplà  $H$  respecte de  $\mathcal{R}^\vee$ . Això significa que  $H = [u_0 e^0 + \dots + u_n e^n]$  i, per tant,  $[\xi_0 e_0 + \dots + \xi_n e_n]$  és de  $H$  si i només si  $\langle u_0 e^0 + \dots + u_n e^n | \xi_0 e_0 + \dots + \xi_n e_n \rangle = 0$ . Però el càlcul anterior mostra que aquesta condició equival a  $u_0 \xi_0 + \dots + u_n \xi_n = 0$ , i això acaba la prova.  $\square$

**3.65 Corol·lari.** *Els vèrtexs de la referència dual  $\mathcal{R}^\vee$  són les cares del símplex de la referència  $\mathcal{R}$ .*

**Prova:** En efecte, per definició tenim que l' $i$ -èsim vèrtex de  $\mathcal{R}^\vee$  és, amb les notacions introduïdes a la prova del teorema,  $P_i^\vee = [e^i]$ , que és l'hiperplà d'equació  $\xi_i = 0$ .  $\square$

**E.3.47.** Siguin  $\mathbb{P}$  i  $\mathbb{P}'$  espais projectius i  $\varphi: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}'$  una projectivitat. Si la matriu de  $\varphi$  respecte de referències  $\mathcal{R}$  i  $\mathcal{R}'$  de  $\mathbb{P}$  i  $\mathbb{P}'$ , respectivament, és  $[A]$ , proveu que la matriu de  $\varphi^\vee$  respecte de les referències  $\check{\mathcal{R}}'$  i  $\check{\mathcal{R}}$  és  $[A^T]$ .

**E.3.48.** Considerem una referència projectiva  $\mathcal{R}$  d'un espai projectiu  $\mathbb{P}$ . Donat un punt  $P = [\xi_0, \dots, \xi_n]_{\mathcal{R}}$ , verifiqueu que l'equació de l'hiperplà  $P^*$  de  $\mathbb{P}^\vee$ , respecte de la referència  $\mathcal{R}^\vee$ , és  $u_0 \xi_0 + \dots + u_n \xi_n = 0$ .



### Polar harmònica d'un punt respecte d'un símplex

Sigui  $\Delta = P_0 \cdots P_n$  un símplex de  $\mathbb{P}^n$  i  $A$  un punt no incident amb cap cara de  $\Delta$ . Així  $\mathcal{R} = [P_0, \dots, P_n; A]$  és un referència de  $\mathbb{P}$  i podem considerar la referència dual  $\mathcal{R}^\vee = [P_0^\vee, \dots, P_n^\vee; A^\vee]$ . L'hiperplà  $A^\vee$  només depèn de  $\Delta$  i de  $A$ : direm que és l'*hiperplà polar harmònic de  $A$  respecte de  $\Delta$*  (si  $n = 2$ , en direm la *recta polar harmònica* de  $A$  respecte del triangle  $P_0P_1P_2$ , i si  $n = 3$ , el *pla polar harmònic* de  $A$  respecte del tetràedre  $P_0P_1P_2P_3$ ).

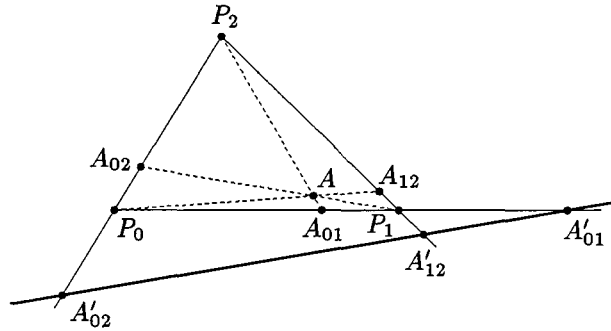


Figura 3.21: Polar harmònica de  $A$  respecte del triangle  $P_0P_1P_2$

La proposició i el corollari que segueixen donen una caracterització analítica i geomètrica, respectivament, de l'hiperplà polar d'un punt. Posem  $\mathcal{R} = [P_0, \dots, P_n; U]$  per denotar una referència de  $\mathbb{P}^n$  i  $A = [a_0, \dots, a_n]_{\mathcal{R}}$  un punt no incident amb cap cara del símplex  $[P_0, \dots, P_n]$  (és a dir,  $a_i \neq 0$  per a  $i = 0, \dots, n$ ).

**3.66 Proposició.** *L'equació de l'hiperplà polar de  $A$  en la referència  $\mathcal{R}$  és*

$$\frac{\xi_0}{a_0} + \dots + \frac{\xi_n}{a_n} = 1.$$

**Prova:** Sigui  $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$  una base adaptada a  $\mathcal{R}$ . Així  $A = [a_0e_0 + \dots + a_ne_n]$  i  $(a_0e_0, \dots, a_ne_n)$  és una base adaptada a la referència  $[P_0, \dots, P_n; A]$ . Com que la base dual de  $(a_0e_0, \dots, a_ne_n)$  és  $(a_0^{-1}e^0, \dots, a_n^{-1}e^n)$ , on  $e^0, \dots, e^n$  és la dual de la base  $\mathbf{e}$ , tenim que  $A^\vee = [a_0^{-1}e^0 + \dots + a_n^{-1}e^n]$ . Per tant  $(a_0^{-1}, \dots, a_n^{-1})$  són  $\mathcal{R}^\vee$ -coordenades de  $A^\vee$  i ara l'afirmació és una conseqüència directa de la proposició 3.64.  $\square$

**3.67 Proposició.** *Per a qualsevol parell de índexs  $i, j$  tals que  $0 \leq i < j \leq n$ , siguin  $L_{ij} = P_iP_j$ ,  $V_{ij}$  la cara del símplex de  $\mathcal{R}$  oposada a  $L_{ij}$ ,  $A_{ij}$  la projecció de  $A$  sobre la recta  $L_{ij}$  amb centre  $V_{ij}$  i  $A'_{ij}$  el quart harmònic de  $A_{ij}$  respecte de  $\{P_i, P_j\}$  (vegeu la figura 3.21). Aleshores l'hiperplà  $A^\vee$  és incident amb els punts  $A'_{ij}$ .*

**Prova:** Atès que la idea general de la prova és suficientment clara per  $n = 2$ , tractarem només aquest cas per evitar complicacions de notació. En la referència  $[P_0, P_1, P_2; A]$ , tenim  $A = [1, 1, 1]$ ,  $A_{01} = [1, 1, 0]$ ,  $A_{02} = [1, 0, 1]$  i  $A_{12} = [0, 1, 1]$ , d'on  $A'_{01} = [1, -1, 0]$ ,  $A'_{02} = [1, 0, -1]$  i  $A'_{12} = [0, 1, -1]$ . Finalment, com que  $A^\vee$  és la recta d'equació  $\xi_0 + \xi_1 + \xi_2 = 0$ , és clar que  $A^\vee$  conté els punts  $A'_{01}$ ,  $A'_{02}$  i  $A'_{12}$ .  $\square$

### 3.6 Problemes

**P.3.1.** Sigui  $K$  un cos finit de  $q$  elements i  $\mathbb{P}^n$  l'espai projectiu de dimensió  $n$  sobre  $K$ . Trobeu, en funció de  $q$  i  $n$ , el nombre de punts de  $\mathbb{P}^n$ . Trobeu també el nombre d'hiperplans, el nombre d'hiperplans incidents amb un punt donat i el nombre de rectes.

**P.3.2.** Siguin  $u$  i  $u'$  dues rectes del pla projectiu i suposem que el seu punt d'intersecció, diguem-ne  $Q$ , és «inaccessible». Donat un punt  $P$  no incident ni amb  $u$  ni amb  $u'$ , trobeu una construcció de la recta  $QP$ . Indicació: Useu el recíproc del teorema de Desargues dels triangles en perspectiva.

**P.3.3.** Suposem que els tetràedres  $P_0P_1P_2P_3$  i  $Q_0Q_1Q_2Q_3$  estan en perspectiva des del punt  $P$ , és a dir,  $P_i \neq Q_i$  i les rectes  $P_iQ_i$  són concurrents en un punt  $P$  ( $i = 0, 1, 2, 3$ ). Proveu que les interseccions  $R_{ij} = P_iP_j \cap Q_iQ_j$ ,  $0 \leq i < j \leq 3$ , són punts i que aquests punts són coplanaris.

**P.3.4.** Siguin  $L_1$ ,  $L_2$  i  $L_3$  tres plans de  $\mathbb{P}^4$  i suposem que  $P_1 = L_2 \cap L_3$ ,  $P_2 = L_3 \cap L_1$  i  $P_3 = L_1 \cap L_2$  són tres punts no alineats. Demostreu que existeix un únic pla  $L$  de  $\mathbb{P}^4$  tal que les interseccions  $L \cap L_1$ ,  $L \cap L_2$  i  $L \cap L_3$  són rectes.

**P.3.5.** Si la recta determinada per dos punts és «no constructible», com es pot trobar el punt en què la talla una altra recta?

La inclusió  $\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{C}$  induïx una inclusió de l'espai projectiu real  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$  en l'espai projectiu complex  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ . Si  $L$  és una varietat lineal de  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ , posarem  $L' = L \cap \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$ , i direm que  $L'$  és la *part real* de  $L$ . És immediat verificar que  $L'$  és una varietat lineal de  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$ . Per altra banda, direm que  $L$  és *real* si es pot definir per un sistema d'equacions lineals a coeficients reals.

**P.3.6.** Demostreu que:

- 1)  $2 \dim(L) - n \leq \dim(L') \leq \dim(L)$ .
- 2)  $L$  és real si i només si  $\dim(L') = \dim(L)$ .
- 3)  $L$  és real si i només si per a tot  $[z_0, \dots, z_n] \in L$  es compleix  $[\bar{z}_0, \dots, \bar{z}_n] \in L$ .
- 4) Si  $n = 2$ , tot punt de  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n - \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$  pertany a una única recta real, i tota recta no real de  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$  conté un únic punt real.
- 5) Si  $d$  i  $d'$  són nombres enters tals que  $0 \leq d \leq n$  i  $2d - n \leq d' \leq d$ , existeix una varietat lineal  $L$  de  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$  tal que  $\dim(L) = d$  i  $\dim(L') = d'$ .

**P.3.7.** Considerem un triangle  $PQR$ , un punt  $S$  no incident amb cap costat d'aquest i una recta  $L$  per  $S$ . Proveu que

$$\rho(SP, SQ, SR, L) = \rho(P', Q', R', S),$$

on  $P', Q', R'$  són les interseccions de  $L$  amb els costats  $QR$ ,  $RP$  i  $PQ$ , respectivament.

**P.3.8.** Proveu que la raó doble dels punts d'intersecció d'una recta amb les cares d'un tetràedre coincideix amb la raó doble dels plans determinats per la recta i els vèrtexs del tetràedre.

**P.3.9.** Determineu les homologies harmòniques d'un pla euclidià que deixen invariant el conjunt de vèrtexs d'un quadrat.

**P.3.10.** Les homografies harmòniques són involutives. Proveu que en un pla projectiu real l'enunciat recíproc també és cert, és a dir, que tota homografia involutiva de  $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$  és una homologia harmònica.

**P.3.11.** Considerem dues homologies harmòniques amb el mateix eix  $H$ , i centres  $P$  i  $P'$ ,  $P \neq P'$ . Demostreu que el seu producte és una homologia especial d'eix  $H$  i centre  $PP' \cap H$ . Recíprocament, proveu que tota homologia especial es pot descomposar com a producte de dues homologies harmòniques.

**P.3.12.** Generalitzeu l'exercici E.3.32 al cas de les homografies de  $\mathbb{P}^n$  que tenen exactament  $n + 1$  punts fixos.

Una homografia  $\varphi$  de  $\mathbb{P}^3$  s'anomena una *homologia biaxial* si el seu conjunt de punts fixos és la unió de dues rectes (direm que aquestes rectes són els *eixos* de l'homologia).

**P.3.13.** Sigui  $\varphi$  una homologia biaxial i siguin  $u$  i  $u'$  les seves rectes de punts fixos. Si  $P$  és un punt qualsevol no incident amb  $u$  i  $u'$ , demostreu que la recta  $P\varphi(P)$  és incident amb  $u$  i amb  $u'$ . Demostreu també que si els punts d'intersecció de  $P\varphi(P)$  amb  $u$  i  $u'$  són  $Q$  i  $Q'$ , respectivament, llavors el valor de la raó doble  $\rho(P, \varphi(P), Q, Q')$  és independent de  $P$  (aquest escalar, que usualment es denota  $\kappa$ , s'anomena el *mòdul* de l'homologia biaxial; si  $\kappa = -1$ , l'homologia biaxial es diu que és *harmònica*; notem que, en aquest cas, és una homografia involutiva).

**P.3.14.** Donades dues rectes disjunts de  $\mathbb{P}^3$ ,  $u$  i  $u'$ , i un escalar  $\kappa \neq 0, 1$ , proveu que hi ha exactament una homologia biaxial de mòdul  $\kappa$  i eixos  $u$  i  $u'$ .

**P.3.15.** Considereu un tetràedre  $P_1P_2P_3P_4$  de  $\mathbb{P}^3$  i un escalar  $\kappa \neq 0, 1$ . Sigui  $\alpha_i$  l'homologia de mòdul  $\kappa$ , centre  $P_i$  i eix la cara  $H_i$  oposada a  $P_i$ ,  $1 \leq i \leq 4$ . Per  $1 \leq i < j \leq 4$ , sigui  $\beta_{ij}$  l'homologia biaxial de mòdul  $\kappa$  i eixos l'aresta  $P_iP_j$  i la seva oposada.

- 1) Trobeu el producte  $\alpha_{i_1} \alpha_{i_2} \alpha_{i_3} \alpha_{i_4}$  per a tota permutació  $(i_1, i_2, i_3, i_4)$  de  $(1, 2, 3, 4)$ .
- 2) Fixat  $i$ , trobeu el producte  $\prod_{j \neq i} \beta_{ij}$ .

**P.3.16.** Els punts mitjans de les 3 diagonals d'un quadrangle estan alineats. Indicacions: Amb les notacions de la figura 3.22, en la qual el quadrangle és  $ABCD$  i les diagonals  $AC$ ,  $BD$  i  $XY$ , considereu la referència projectiva  $\tilde{\mathcal{R}}$  que té  $ABY$  com a triangle i  $CD$  com a recta unitat. Considereu també la referència projectiva  $\overline{\mathcal{R}}$  associada a una referència afi. Siguin  $\mathbf{a}_0 = (a_{00}, a_{01}, a_{02})$ ,  $\mathbf{a}_1 = (a_{10}, a_{11}, a_{12})$  i  $\mathbf{a}_2 = (a_{20}, a_{21}, a_{22})$  vectors de  $\overline{\mathcal{R}}$ -coordenades de  $A, B, Y$  tals que  $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3$  és un vector de  $\overline{\mathcal{R}}$ -coordenades del punt unitat de  $\tilde{\mathcal{R}}$ . Aleshores les coordenades afins del punt mitjà de  $AC$  són

$$\frac{1}{2} \left( \frac{\mathbf{a}_0}{a_{00}} + \frac{\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2}{a_{10} - a_{20}} \right).$$

Anàlogament es troben els punts mitjans de  $BD$  i  $XY$ . Finalment es comprova, amb les expressions trobades, que els esmentats punts mitjans estan alineats.

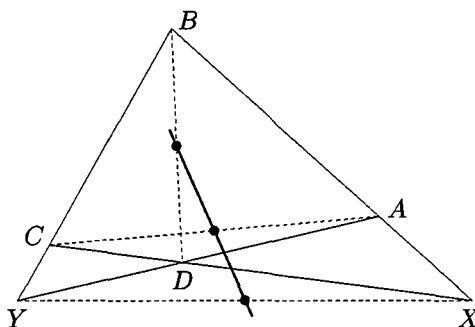


Figura 3.22: Punts mitjans de les diagonals d'un quadrangle

**P.3.17** (Punt de Nagel d'un triangle). Les rectes que uneixen cada vèrtex d'un triangle del pla euclidià amb el punt del costat oposat on és tangent el corresponent cercle exinscrit, són concurrents en un punt. Indicació: Useu coordenades trimètriques.

**P.3.18** (Punt de Lemoine d'un triangle). Si  $P_0P_1P_2$  és un triangle i  $A$  un punt no incident amb cap dels seus costats, sigui  $L_i$  la simètrica de la recta  $P_iA$  respecte de la bisectriu interior de  $P_i$ . Proveu que les rectes  $L_i$  són concurrents en un punt  $A'$ . Si  $G$  és el baricentre del triangle, el punt  $G'$  s'anomena *punt de Lemoine* del triangle. Indicació: Useu coordenades trimètriques.

La recta projectiva complexa,  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ , es pot identificar amb l'esfera  $S^2$  de radi 1 de la manera que segueix. Escollim un punt  $P$  de  $S^2$ , al qual anomenarem *pol* (o pol nord),

i considerem la *projecció estereogràfica* de  $S^2 - \{P\}$  sobre el pla  $\mathbb{A}$  que passa pel centre de l'esfera i és perpendicular al diàmetre que passa per  $P$  (pla *equatorial*): és l'aplicació que transforma el punt  $X$  en el punt  $X'$  d'intersecció de la recta  $PX$  amb  $\mathbb{A}$ . Per altra banda,  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 = \mathbb{C} \sqcup \{\infty\}$ , on identifiquem  $z \in \mathbb{C}$  amb el punt  $[z, 1] \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$  i  $\infty$  amb el punt  $[0, 1]$ . Si ara identifiquem  $\mathbb{C}$  amb  $\mathbb{A}$  isomètricament (mitjançant la referència rectangular  $[0, 1, i]$  de  $\mathbb{C}$  i una referència rectangular  $[O, u_1, u_2]$  de  $\mathbb{A}$ , on  $O$  és el centre de l'esfera; vegeu les figures 3.23 i 3.24), llavors la projecció estereogràfica  $S^2 - \{P\} \rightarrow \mathbb{C}$  es pot estendre a una bijecció  $S^2 \simeq \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$  tal que  $P \mapsto \infty$ .

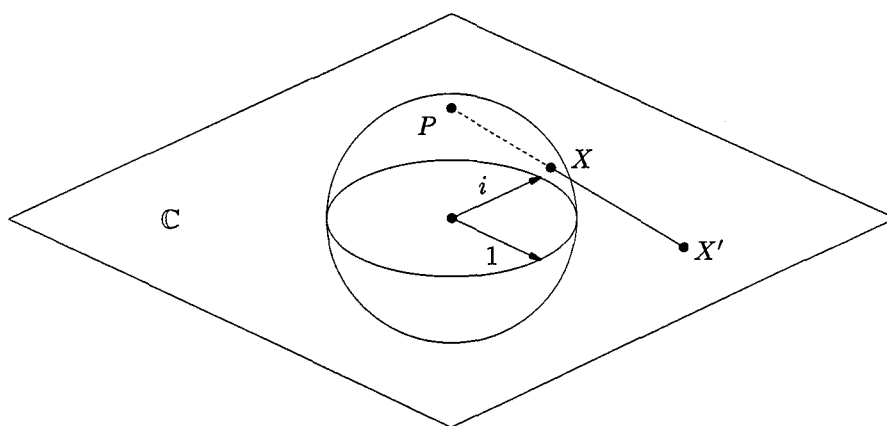


Figura 3.23: *Projecció estereogràfica*

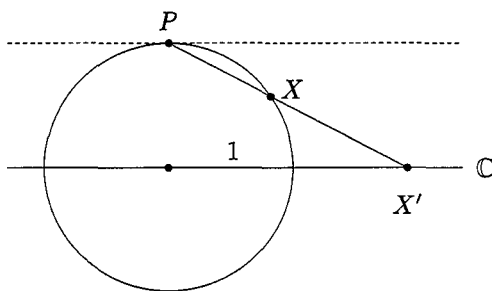


Figura 3.24: *El pol  $P$  i el punt  $\infty$  es corresponen per la projecció estereogràfica.*

Per altra banda, les semblances directes (inverses) de  $\mathbb{C}$  s'estenen a (semihomografies) de  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$  que deixen fix el punt  $\infty$ . A més a més, a  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$  hi tenim *inversions*: la inversió de  $\mathbb{C}$  respecte de la circumferència de centre  $z_0$  i radi  $r$  s'estén a la bijecció de  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$  tal que  $z_0 \mapsto \infty$  i  $\infty \mapsto z_0$ .

**P.3.19.** Proveu que les inversions de  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$  són semihomografies *antilineals* (és a dir, que com automorfisme de  $\mathbb{C}$  podeu prendre la conjugació). Indicació: Demostreu primer que la inversió respecte de la circumferència de radi 1 amb centre a l'origen és l'aplicació  $z \mapsto 1/\bar{z}$ .

**P.3.20.** Proveu que tota col·lineació contínua de  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$  és composició de simetries i inversions.

**P.3.21.** Demostreu que la raó doble de quatre nombres complexos diferents és un nombre real si i només si estan sobre una circumferència.

Siguin  $\mathbb{P} = \mathbb{P}(E)$  i  $\mathbb{P}' = \mathbb{P}'(E)$  dos espais projectius de dimensió  $n$  i  $\varphi: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}'$  una aplicació bijectiva. Es diu que és una *col·lineació*, o una *projectivitat de von Staudt*, si, o bé  $n \geq 2$  i  $\varphi$  transforma punts alineats en punts alineats, o bé  $n = 1$  i  $\varphi$  transforma quaternes harmòniques en quaternes harmòniques. Exemple: les projectivitats són col·lineacions (vegeu l'enunciat 3.34 i la proposició 3.52).

Direm que l'aplicació  $\varphi$  és una *semiprojectivitat* si existeix un isomorfisme semilineal  $f: E \rightarrow E'$  tal que  $\varphi([x]) = [f(x)]$  per a tot vector no nul  $x \in E$ .

**P.3.22.** Proveu que una semiprojectivitat transforma punts alineats en punts alineats i que si  $P_0, P_1, P_2, P_3$  són quatre punts alineats diferents amb  $\rho = \rho(P_0, P_1, P_2, P_3)$ , llavors

$$\rho(\varphi(P_0), \varphi(P_1), \varphi(P_2), \varphi(P_3)) = \rho^*,$$

on  $\lambda \mapsto \lambda^*$  és un automorfisme del cos  $K$  (per la notació  $\lambda^*$ , vegeu l'apartat «Aplicacions semiafins i col·lineacions», pàg. 91). Deduïu-ne que tota semiprojectivitat és una col·lineació.

**P.3.23** (Teorema de von Staudt). Suposem que en el cos  $K$  es compleix  $2 \neq 0$ . Proveu que una col·lineació entre dues rectes projectives és una semiprojectivitat. Indicació: Feu primer el cas en què la col·lineació és una autocol·lineació d'una recta projectiva amb tres punts fixos diferents (vegeu la prova del teorema 1.41).

**P.3.24** (Teorema fonamental de la geometria projectiva). Suposem que en el cos  $K$  es compleix  $2 \neq 0$ . Demostreu que tota col·lineació entre dos espais projectius de dimensió  $n \geq 2$  és una semiprojectivitat. Indicació: Feu primer el cas en què la col·lineació deixa fixos els punts d'una referència projectiva (el problema anterior, i la construcció geomètrica del quart harmònic, us permeten raonar per inducció).

**P.3.25.** Demostreu el teorema 3.39 en el cas  $r = 2$ .

## 4 Còniques i quàdriques

Aquest capítol s'inicia amb una secció introductòria, en la qual es revisen les definicions, i algunes propietats, de les seccions còniques —l'el·lipse, la hipèrbola i la paràbola. Aquestes figures s'estudien tot seguit, des d'un punt de vista analític, a les seccions 4.1 i 4.2. La idea directriu és fer veure com podem determinar, a partir de l'equació, la mena de cònica que representa i, després, com en podem calcular els elements geomètrics més importants.

Les seccions 4.3 i 4.4 es destinen a exposar una introducció a l'estudi de les quàdriques. La definició d'aquestes superfícies de l'espai de dimensió 3, i els mètodes que usarem per estudiar-les, són anàlegs als usats per a l'estudi analític de les còniques d'un pla. Un punt important (secció 4.3) és constatar que, tret de casos «degenerats» (com ara els cons i cilindres la base dels quals és una cònica), només hi ha cinc «tipus» possibles: el·lipsoïdes, dues menes d'hiperboloïdes (d'un full i de dos fulls) i dues menes de paraboloides (no reglats i reglats). Després de familiaritzar-nos amb aquestes figures, mitjançant l'estudi de les còniques que en resulten quan es tallen per diversos plans convenients, considerem la qüestió de com podem obtenir d'una manera efectiva, a partir de l'equació, l'«espècie» de quàdrica que representa i els seus elements geomètrics (secció 4.4).

Tot i que en principi les còniques i quàdriques es defineixen en un pla i en un espai euclidià, respectivament, en el seu estudi apareix inevitablement, sobretot quan es considera el comportament asimptòtic, la seva relació profunda amb l'espai projectiu. La darrera secció del capítol (secció 4.5) s'ocupa d'explorar aquestes relacions, i algunes de les seves conseqüències, d'una manera més sistemàtica.

### 4.0 Seccions còniques

Considerem dues rectes  $e$  i  $g$  de l'espai euclidià i suposem que es tallen en un punt  $O$  formant un angle agut  $\alpha$ . La figura que s'obté per rotació de  $g$  al voltant de  $e$  és un *con circular recte*. De cada una de les dues parts del con, generades per les dues semirectes

definides per  $O$  sobre  $g$ , se'n diu un *full* del con. La recta  $e$  i el punt  $O$  s'anomenen l'eix i el vèrtex del con, respectivament. Una recta  $g'$  és una *generatriu* del con si és la imatge de  $g$  per una certa rotació al voltant de l'eix, i en aquest cas és clar que l'angle que forma amb aquest és  $\alpha$ .

Les *còniques*, o *seccions còniques*, són les corbes que s'obtenen quan es talla un con circular recte per un pla que no passa pel seu vèrtex. L'objecte principal d'aquesta secció és establir un pont conceptual entre aquesta presentació geomètrica i la presentació analítica sistemàtica que en farem a les seccions 4.1 i 4.2.

Posarem  $\Pi$  per denotar el pla amb el que tallem el con, i  $\gamma$  per indicar l'angle que forma  $\Pi$  amb l'eix del con. Les tres possibilitats que es poden donar s'han esquematitzat a la figura 4.1.

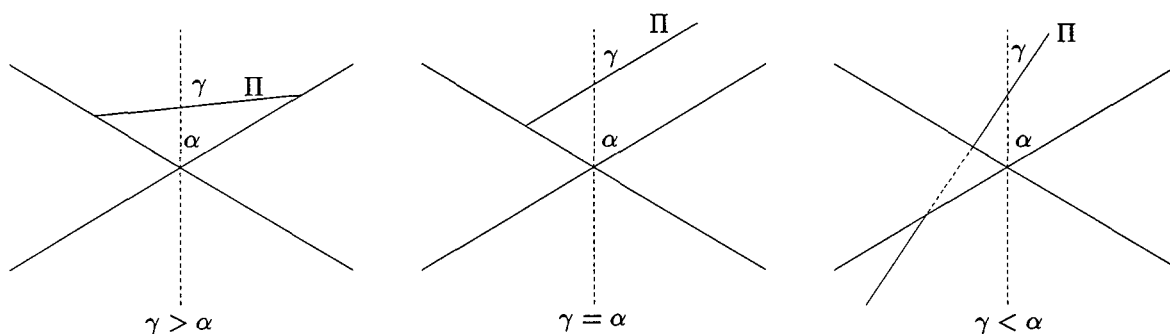


Figura 4.1: *Inclinació de  $\Pi$  respecte de l'eix del con (línia vertical puntejada). El cas  $\gamma > \alpha$  dóna el·lipses (circumferències quan  $\gamma = \pi/2$ ), el cas  $\gamma = \alpha$  dóna paràboles i el cas  $\gamma < \alpha$  dóna hipèrboles.*

**Remarca.** La línia que separa l'ombra i la claror quan il·luminem una paret plana amb un focus puntual de llum situat sobre l'eix d'una pantalla en forma de con circular recte és una secció cònica. Variant la direcció de l'eix del con, és fàcil veure els casos que hem esmentat. Aquest experiment també ens permet percebre d'una manera visual el fet que puguem passar de la circumferència a la paràbola i a la hipèrbola amb continuïtat, passant per el·lipses d'excentricitat creixent.

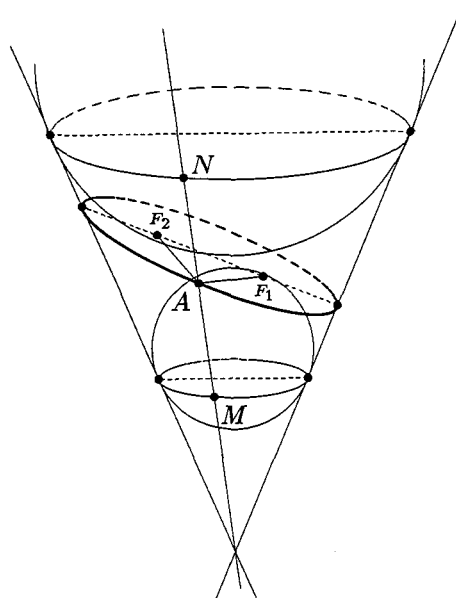
## El·lipse

Quan  $\gamma$  és superior a  $\alpha$ , el pla  $\Pi$  talla a totes les generatrius del con, la intersecció està continguda en un dels dos fulls, i es diu que la cònica és una *el·lipse*. Els punts d'aquesta corba tenen la propietat que

**4.1** *La suma de distàncies a dos punts fixos és constant* (aquests dos punts fixos s'anomenen els *focus* de l'el·lipse).



**Prova:** Aquesta propietat es pot veure fàcilment amb l'ajut de la figura 4.2. En efecte, considerem les dues esferes tangents al pla  $\Pi$  i que són inscrites al con, una en el semiespai de  $\Pi$  que conté el vèrtex del con i l'altra en el semiespai oposat (la primera d'aquestes esferes, per exemple, és la figura generada per la circumferència inscrita al triangle del cas  $\gamma > \alpha$  de la figura 4.1 en fer-la girar al voltant de l'eix del con). Si  $F_1$  i  $F_2$  són els punts de contacte d'aquestes esferes amb el pla  $\Pi$ , i  $A$  és un punt de l'el·lipse, llavors  $AF_1 = AM$  i  $AF_2 = AN$ , ja que les tangents des d'un punt a una esfera tenen la mateixa longitud. Per tant  $AF_1 + AF_2 = MN$ . Però  $MN$  és constant, ja que hem suposat que el con és circular i recte.  $\square$

Figura 4.2: *El·lipse*

Considerem ara un sistema de coordenades rectangulars del pla  $\Pi$  amb origen el punt mitjà del segment  $F_1F_2$  i de manera que l'eix  $Ox$  coincideixi amb la recta  $F_1F_2$ . Així, tindrem  $F_1 = (c, 0)$  i  $F_2 = (-c, 0)$ , on  $c$  denota la *semidistància focal*. Si posem  $2a$  per denotar la longitud del segment  $MN$ , llavors la condició per tal que el punt  $A = (x, y)$  sigui de l'el·lipse és que

$$\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + \sqrt{(x + c)^2 + y^2} = 2a$$

que com és ben sabut equival a l'equació

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ amb } b = \sqrt{a^2 - c^2}. \quad [4.1]$$

Direm que aquesta és l'*equació canònica* de l'el·lipse. Aquesta equació implica que l'el·lipse és simètrica respecte dels dos eixos de coordenades. Per tant, també és simètrica respecte de l'origen, raó per la qual direm que l'origen és el *centre* de l'el·lipse. Com que  $b \leq a$ ,  $(\pm a, 0)$  són els punts de l'el·lipse que estan a major distància del centre i  $(0, \pm b)$  els que estan a distància mínima. Per aquesta raó es diu que  $a$  és el *semieix principal* i  $b$  el *semieix secundari*, i que els punts  $(\pm a, 0)$  són els *vèrtexs principals* i  $(0, \pm b)$  els *vèrtexs secundaris*. Vegeu la figura 4.3, en la qual hem posat  $A$  i  $B$  per indicar els vèrtexs  $(a, 0)$  i  $(0, b)$ , respectivament.

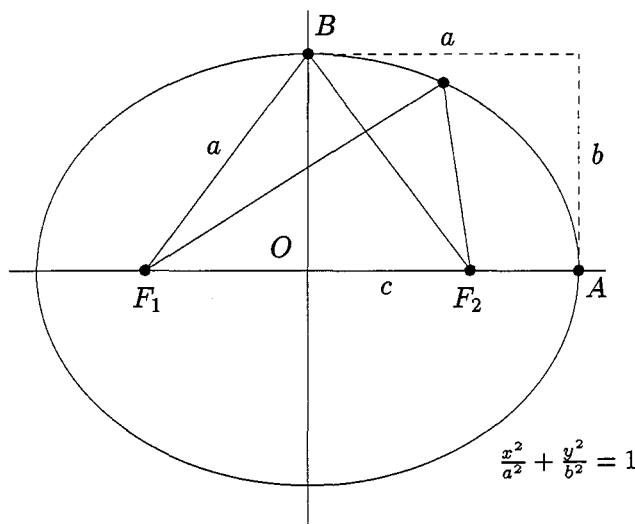


Figura 4.3: *El·lipse*

El quocient  $e = c/a$  s'anomena *excentricitat* de l'el·lipse. És clar que  $0 \leq e < 1$  i que  $e = 0$  si i només si  $c = 0$ , és a dir, si i només si  $b = a$ . En aquest cas, l'equació canònica equival a  $x^2 + y^2 = a^2$ , que és l'equació d'una circumferència de radi  $a$ . Geomètricament, la circumferència s'obté quan  $\gamma = \pi/2$ , és a dir, quan el pla  $\Pi$  és perpendicular a l'eix del con.

**E.4.1.** Si  $a$  i  $b$  són nombres reals positius, i  $(x_0, y_0)$  un punt del pla euclidià, digueu què representa l'equació

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

(coordenades cartesianes rectangulars).

És interessant observar que l'afinitat  $(x, y) \mapsto (x, \frac{b}{a}y)$  transforma la circumferència de radi  $a$  amb centre a l'origen (es diu que és la *circumferència directriu* de l'el·lipse) en l'el·lipse [4.1]. En resulta:

**4.2** *L'àrea de l'el·lipse és  $\pi a^2 \frac{b}{a} = \pi ab$ .*

També és immediat verificar que les relacions

$$x = a \cos(t), \quad y = b \sin(t) \quad (0 \leq t < 2\pi) \quad [4.2]$$

són equacions paramètriques de la mateixa el·lipse, en el sentit que l'aplicació  $t \mapsto (a \cos(t), b \sin(t))$  estableix una bijecció entre  $\mathbb{R}$  i l'el·lipse. Com que les relacions  $x = a \cos(t), y = a \sin(t)$  ( $0 \leq t < 2\pi$ ) són equacions paramètriques de la circumferència de radi  $a$ , veiem que mentre el punt  $P'$  (figura 4.4) descriu la circumferència de radi  $a$ , el punt  $P$  corresponent a  $P'$  per l'afinitat esmentada descriu l'el·lipse de semieixos  $a$  i  $b$ .

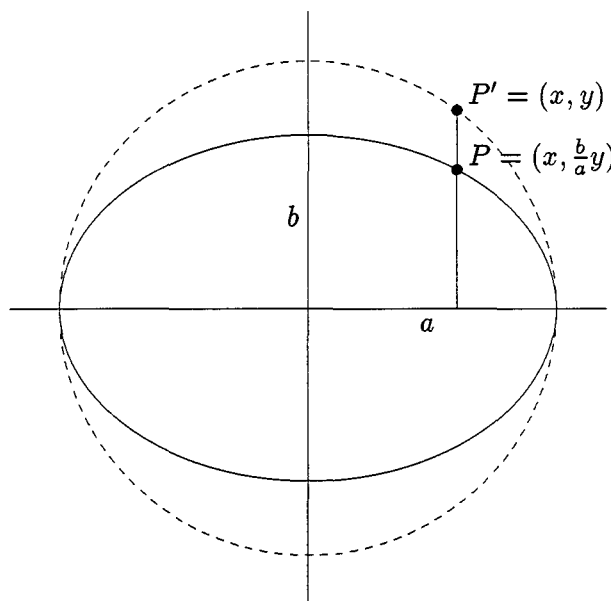


Figura 4.4: *El·lipse com a imatge afí de la circumferència*

Sigui  $P = (x_0, y_0)$  un punt de l'el·lipse [4.1]. Considerem una recta per  $P$  donada per equacions paramètriques  $x = x_0 + \xi t, y = y_0 + \eta t$ , on  $(\xi, \eta) \neq 0$ . Per trobar les interseccions d'aquesta recta amb l'el·lipse, hem de trobar les solucions  $t$  de l'equació

$$\frac{(x_0 + \xi t)^2}{a^2} + \frac{(y_0 + \eta t)^2}{b^2} = 1.$$

Fent operacions, i recordant que  $P$  és un punt de l'el·lipse, aquesta equació resulta ser equivalent a

$$2 \left( \frac{x_0 \xi}{a^2} + \frac{y_0 \eta}{b^2} \right) t + \left( \frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} \right) t^2 = 0.$$

La solució  $t = 0$  ens dona el punt  $P$ . L'altra solució,

$$t = -2 \left( \frac{x_0 \xi}{a^2} + \frac{y_0 \eta}{b^2} \right) / \left( \frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} \right),$$

ens dona un segon punt d'intersecció. Aquest punt coincideix amb  $P$  si i només si

$$\frac{x_0 \xi}{a^2} + \frac{y_0 \eta}{b^2} = 0,$$

és a dir, si i només si la recta coincideix amb la recta que passa per  $P$  amb vector director  $(y_0/b^2, -x_0/a^2)$ . Aquesta recta s'anomena *tangent* a l'el·lipse en el punt  $P$  i és clar que la seva equació cartesiana és

$$\frac{x_0(x - x_0)}{a^2} + \frac{y_0(y - y_0)}{b^2} = 0,$$

que equival a

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1. \quad [4.3]$$

Aquesta discussió es pot resumir, doncs, dient que una recta per un punt  $P$  d'una el·lipse la talla en el punt  $P$  i exactament un altre punt  $P'$ , i que  $P'$  és sempre diferent de  $P$  excepte quan la recta és la tangent a l'el·lipse en el punt  $P$ . En aquest cas, es diu que  $P$  és el *punt de contacte* de la tangent i l'el·lipse.

**4.3 Proposició** (Propietat focal de l'el·lipse). *Si  $P$  és un punt de l'el·lipse [4.1], la tangent en el punt  $P$  coincideix amb la bisectriu exterior de l'angle  $\widehat{F_1 P F_2}$ , on  $F_1$  i  $F_2$  són els focus de l'el·lipse.*

**Prova:** Sigui  $L$  la bisectriu exterior de l'angle  $\widehat{F_1 P F_2}$ . Com que  $L$  passa per  $P$ , per veure que  $L$  és la tangent a l'el·lipse en el punt  $P$  serà suficient demostrar que cap dels punts  $P' \in L - \{P\}$  és de l'el·lipse.

Sigui, doncs,  $P' \in L - \{P\}$ . Considerem el simètric del punt  $F_1$  respecte de  $L$  (figura 4.5). Com que  $L$  és la bisectriu exterior de  $\widehat{F_1 P F_2}$ , el punt  $P$  pertany al segment  $F_2 F'_1$ . Ara tenim

$$2a = PF_1 + PF_2 = PF'_1 + PF_2 = F'_1 F_2 < P'F'_1 + P'F_2 = P'F_1 + P'F_2,$$

de la qual cosa segueix que  $P'$  no és de l'el·lipse. □

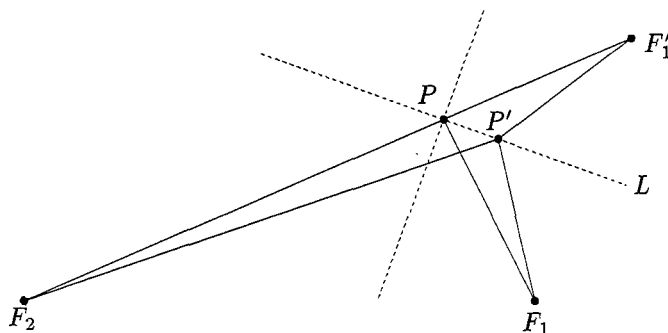


Figura 4.5: Prova de la propietat focal de l'el·lipse

La propietat focal ens diu, per exemple, que « $PF_2$  és el raig reflectit per l'el·lipse del raig  $F_1P$ », de manera que «els rajos que dimanen del focus  $F_1$  són concentrats per l'el·lipse en el focus  $F_2$ ». Per altra banda, la prova anterior mostra que el lloc geomètric de  $F'_1$ , és a dir, del punt simètric de  $F_1$  respecte d'una tangent variable, és la circumferència amb centre al focus  $F_2$  de l'el·lipse i radi  $2a$ . Aquesta circumferència és anomenada *circumferència focal* de l'el·lipse corresponent al focus  $F_2$ .

Un punt  $P$  es diu *interior* o *exterior* respecte de l'el·lipse segons que  $F_1P + F_2P$  sigui inferior o superior a  $2a$ . Per exemple, en la prova de la propietat focal hem vist que tot punt d'una tangent, llevat el de contacte, és un punt exterior. En canvi, el centre i els focus són punts interiors.

**E.4.2.** Proveu que, en termes de l'equació canònica, un punt  $(x, y)$  és interior o exterior segons que  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1$  o  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} > 1$ .

**E.4.3.** Proveu que una recta talla una el·lipse en dos punts diferents si i només si conté punts interiors de l'el·lipse.

**E.4.4.** Donats dos punts  $F_1 = (\alpha_1, \beta_1)$  i  $F_2 = (\alpha_2, \beta_2)$  (coordenades cartesianes rectangulars), i un nombre real positiu  $a$ , expliqueu com es pot trobar, respecte de la mateixa referència, l'equació de l'el·lipse de focus  $F_1, F_2$  i diàmetre principal  $2a$ .

## Hipèrbola

Si  $\gamma < \alpha$ , hi ha dues generatrius del con paral·leles al pla  $\Pi$ : són la intersecció del con amb el pla paral·lel a  $\Pi$  pel vèrtex del con. Els punts d'intersecció amb les altres generatrius pertanyen a un full o altre del con segons que l'angle de la generatriu amb el pla sigui positiu o negatiu (aquest signe es pot definir com el del producte escalar

d'un vector perpendicular al pla pel vector director de la generatriu corresponent a un vector director de  $g$  donat). Es diu que la corba resultant és una *hipèrbola*.

Un raonament similar al fet pel cas de l'el·lipse, i que deixem com a exercici, mostra que els punts de la hipèrbola són els que compleixen que la diferència de distàncies, en valor absolut, a dos punts fixos de  $\Pi$  (anomenats *focus*) és constant (posarem  $2a$  per denotar-la). Prenent un sistema de coordenades rectangulars de forma que el seu origen sigui el punt mitjà del segment d'extremes els focus i que aquests estiguin sobre l'eix  $Ox$  (per això i el que segueix, vegeu la figura 4.6), es troba que els punts de la hipèrbola són els que compleixen l'equació

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad [4.4]$$

on posem  $2c$  per denotar la distància entre els focus ( $c > a$ , necessàriament) i  $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ . La constant  $e = c/a > 1$  s'anomena *excentricitat* de la hipèrbola.

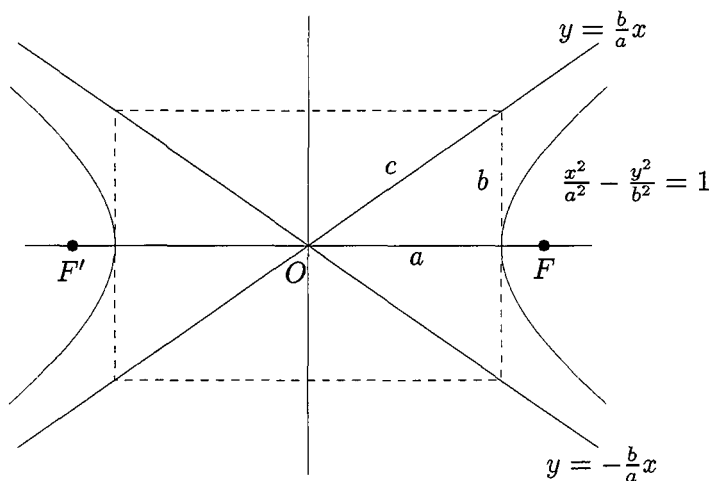


Figura 4.6: Hipèrbola

Direm que [4.4] és l'*equació canònica* de la hipèrbola. Com l'el·lipse, la hipèrbola és simètrica respecte dels dos eixos de coordenades i, per tant, també és simètrica respecte de l'origen. Per això diem que l'origen és el *centre* de la hipèrbola. Els punts  $(\pm a, 0)$  són els que estan a distància mínima del centre i s'anomenen *vèrtexs*. Direm que  $a$  és el *semieix principal* de la hipèrbola. A diferència de l'el·lipse, l'eix  $Oy$  no conté punts de la hipèrbola. No obstant això, seguirem dient que  $b$  és el *semieix secundari*.

**E.4.5.** Si  $a$  i  $b$  són nombres reals positius, i  $(x_0, y_0)$  un punt del pla euclidià, digueu què representa l'equació

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

(coordenades cartesianes rectangulars).

Els punts de la hipèrbola amb  $x > 0$  formen la *branca del focus*  $(c, 0)$ . La branca del focus  $(-c, 0)$  es defineix per la condició  $x < 0$ . Sobre el con, les branques són la intersecció de  $\Pi$  amb els dos fulls. És immediat verificar que les relacions

$$x = a \cosh(t), \quad y = b \sinh(t) \quad (t \in \mathbb{R}) \quad [4.5]$$

són equacions paramètriques de la branca del focus  $(c, 0)$  de la hipèrbola de semieixos  $a$  i  $b$ . Per la branca del focus  $(-c, 0)$ , la parametrització adient és  $x = -a \cosh(t)$ ,  $y = b \sinh(t)$ . La hipèrbola no és, doncs, fitada: hi ha punts a distància arbitràriament gran del centre.

La relació  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$  dóna les rectes per l'origen que tenen vectors directores  $(a, \pm b)$ . Aquestes rectes, que també podem escriure  $y = \pm \frac{b}{a}x$ , s'anomenen *asímtotes* de la hipèrbola. Fixem-nos que la distància d'un punt d'una asímtota a la hipèrbola té límit 0 quan el punt s'allunya indefinidament del centre: per exemple, el punt  $P' = (a \cosh(t), b \cosh(t))$  pertany a l'asímtota  $y/b = x/a$ , la distància de  $P'$  al punt  $P = (a \cosh(t), b \sinh(t))$  de la hipèrbola és  $b(\cosh(t) - \sinh(t)) = be^{-t}$ , i aquest valor tendeix a zero quan  $t$  tendeix a infinit.

**E.4.6.** Comproveu que les asímtotes són les rectes pel centre de la hipèrbola paral·leles a les dues generatrius del con que són paral·leles a  $\Pi$ .

**E.4.7** (Hipèrbola conjugada). Verifiqueu que la hipèrbola d'equació

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \quad [4.6]$$

té les mateixes asímtotes que la hipèrbola [4.4]. Noteu també que els seus focus,  $(0, \pm c)$ , estan sobre la circumferència amb centre el centre comú de les dues hipèrboles i radi  $a$  (en direm *circumferència directriu* de la hipèrbola).

El canvi (afi) de coordenades donat per les relacions

$$\xi = x/a - y/b, \quad \eta = x/a + y/b \quad [4.7]$$

transforma l'equació de la hipèrbola en

$$\xi\eta = 1, \quad \text{o bé} \quad \eta = 1/\xi. \quad [4.8]$$

Relativament a aquestes coordenades, les asímtotes són els eixos. Notem que el canvi de coordenades és una semblança si i només si  $b = a$ , cas en el qual es diu que la hipèrbola és *equilàtera*.

Sigui  $P = (x_0, y_0)$  un punt de la hipèrbola [4.4]. Raonant com en el cas de l'el·lipse es prova que les rectes per  $P$  diferents de la recta

$$\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1 \quad [4.9]$$

tallen la hipèrbola en dos punts i que [4.4] la talla exactament en el punt  $P$ . Direm, doncs, que [4.9] és la tangent en el punt  $P$  a la hipèrbola [4.4], i que  $P$  és llur *punt de contacte*.

La propietat que segueix també es prova de manera anàloga a com s'ha demostrat pel cas de l'el·lipse:

**4.4 Proposició** (Propietat focal de la hipèrbola). *Si  $P$  és un punt de la hipèrbola [4.4], la tangent en el punt  $P$  coincideix amb la bisectriu interior de l'angle  $\widehat{F_1 P F_2}$ . A més, el lloc geomètric del simètric  $F'_1$  del focus  $F_1$  respecte d'una tangent variable és la circumferència de centre l'altre focus,  $F_2$ , i radi  $a$  (aquesta circumferència és diu *circumferència focal* de la hipèrbola relativa al focus  $F_2$ ).*

Els punts de la hipèrbola que compleixen  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} < 1$  direm que són de la *zona central* i els que compleixen  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} > 1$ , de la *zona focal*. Els punts de la zona focal també es diuen *interiors* a la hipèrbola i els de la zona central, *exteriors*. La zona focal es divideix en la *zona del focus*  $(c, 0)$ , els punts de la qual satisfan  $x > a$ , i la *zona del focus*  $(-c, 0)$ , els punts de la qual satisfan  $x < -a$ .

**E.4.8.** Proveu que un punt  $P$  de la hipèrbola de focus  $F_1$  i  $F_2$  és interior si  $|PF_1 - PF_2| > 2a$  i exterior si  $|PF_1 - PF_2| < 2a$ .

**E.4.9.** Proveu que una recta talla una hipèrbola si i només si conté punts interiors d'aquesta. Proveu també que si aquest és el cas, aleshores hi ha exactament un o dos punts d'intersecció segons que la recta sigui o no asimptòtica (una recta es diu *asimptòtica* si és paral·lela a una asimptota).

**E.4.10.** Donats dos punts  $F_1 = (\alpha_1, \beta_1)$  i  $F_2 = (\alpha_2, \beta_2)$  (coordenades cartesianes rectangulars), i un nombre real positiu  $a$ , expliqueu com es pot trobar, respecte de la mateixa referència, l'equació de la hipèrbola de focus  $F_1, F_2$  i diàmetre principal  $2a$ .

## Paràbola

Si  $\gamma = \alpha$ , la cònica s'anomena una *paràbola*. En aquest cas, hi ha una única generatriu del con paral·lela a  $\Pi$ : l'única generatriu continguda en el pla paral·lel a  $\Pi$  pel vèrtex del con. Els punts d'incidència amb les altres generatrius pertanyen tots a un mateix full del con (figura 4.7).

En aquest cas, només tenim una esfera,  $\Sigma$ , tangent al pla  $\Pi$  i inscrita en el con. Si posem  $F$  per denotar el punt de contacte de  $\Sigma$  amb  $\Pi$  (direm que  $F$  és el *focus* de la paràbola) i  $L$  per indicar la recta d'intersecció del pla  $\Pi$  amb el pla  $\Pi'$  que conté la circumferència de contacte del con amb  $\Sigma$  (la recta  $L$  s'anomena *directriu* de la cònica relativa a  $F$ ),



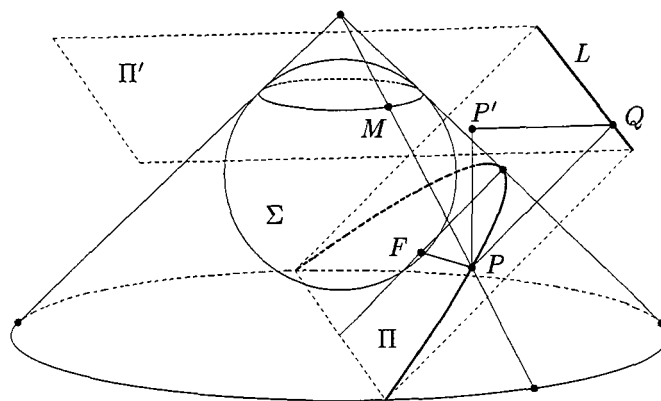


Figura 4.7: Paràbola

4.5 Els punts  $P$  de la paràbola són els punts del pla  $\Pi$  que compleixen

$$d(P, F) = d(P, L). \quad [4.10]$$

**Prova:** Amb les notacions de la figura 4.7,  $PF = PM$ , ja que  $PF$  i  $PM$  són dues tangents a  $\Sigma$  des de  $P$ . Si  $P'$  és la projecció ortogonal de  $P$  sobre  $\Pi'$ ,  $\widehat{MPP'} = \alpha$  i, per tant,  $PM = PP' / \cos(\alpha)$ . També tenim, si  $Q$  és la projecció de  $P$  (i de  $P'$ ) sobre  $L$ , que  $\widehat{QPN'} = \alpha$ , ja que, com a conseqüència de la definició de paràbola,  $PQ$  és paral·lela a una generatriu. Per tant,  $PQ = PP' / \cos(\alpha)$ , que com hem vist és igual a  $PF$ . Com que  $PQ = d(P, L)$ , això acaba la prova de l'afirmació.  $\square$

Prenent, en el pla  $\Pi$ , un sistema de coordenades de manera que l'eix  $Ox$  sigui la perpendicular a  $L$  per  $F$  i que l'origen sigui el punt mitjà del segment d'extremis  $F$  i la projecció  $F'$  de  $F$  sobre  $L$  (vegeu la figura 4.8), l'equació  $d(P, F) = d(P, L)$  esdevé  $(x - p/2)^2 + y^2 = (x + p/2)^2$ , on  $P = (x, y)$  i on  $p$  és la distància de  $F$  a  $L$  (en direm *paràmetre focal* de la paràbola). Ara bé, la darrera relació és equivalent a

$$y^2 = 2px, \quad [4.11]$$

que anomenarem *equació canònica* de la paràbola. El punt  $O = (0, 0)$  està a distància mínima del focus  $F$  i s'anomena el *vèrtex* de la paràbola. L'eix  $Ox$  és l'únic eix de simetria, i l'anomenarem *eix* de la paràbola. Com hem dit abans, l'eix és la recta perpendicular a la directriu que passa pel focus, i és clar que la seva intersecció amb la paràbola és el vèrtex.

**E.4.11.** Si  $p$  és un nombre real positiu, i  $(x_0, y_0)$  un punt del pla euclidià, digueu què representa cada una de les equacions

$$(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0) \text{ i } (y - y_0)^2 = 2p(x - x_0).$$

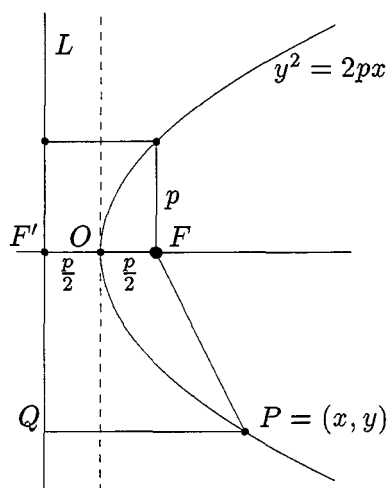


Figura 4.8: Paràbola

**E.4.12.** Demostreu que dues paràboles sempre són semblants.

**E.4.13.** Demostreu que dues el·lipses (hipèrboles) són semblants si i només si tenen la mateixa excentricitat.

**E.4.14.** Proveu que les equacions  $x = t$ ,  $y = t^2/2p$ , amb  $t \in \mathbb{R}$ , donen una parametrització de la paràbola [4.11], és a dir, que l'aplicació  $t \mapsto (t, t^2/2p)$  estableix una bijecció entre  $\mathbb{R}$  i la paràbola.

Si  $P = (x_0, y_0)$  és un punt de la paràbola [4.11], i raonem com ho hem fet per l'el·lipse i la hipèrbola, s'obté que una recta per  $P$  diferent de la recta

$$x_0x - py = py_0 \quad [4.12]$$

talla la paràbola en el punt  $P$  i un altre punt diferent de  $P$ , mentre que [4.12] només la talla en el punt  $P$ . Així, doncs, direm que [4.12] és la *tangent* a la paràbola en el punt  $P$ , i que  $P$  és llur *punt de contacte*.

**4.6 Proposició** (Propietat focal de la paràbola). *Si  $P$  és un punt de la paràbola [4.11], i  $Q$  és la projecció de  $P$  sobre la directriu, la tangent en el punt  $P$  és la bisectriu de l'angle  $\widehat{FPQ}$ , on  $F$  denota el focus de la paràbola.*

**Prova:** Sigui  $T$  la bisectriu exterior de l'angle  $\widehat{FPQ}$ . És suficient veure que si  $P'$  és un punt de  $T$  diferent de  $P$ , llavors  $P'$  no pertany a la paràbola. Sigui  $Q'$  la projecció de  $P'$  sobre la directriu de la paràbola. Com que  $PF = PQ$ , per definició de paràbola,  $F$

i  $Q$  són simètrics respecte de  $T$ . Per tant,  $P'F = P'Q > P'Q' = d(P', L)$ , i això prova el que volíem:  $P'$  no és de la paràbola.  $\square$

Un punt  $P'$  tal que  $d(P', F) > d(P', L)$  ( $d(P', F) > d(P', L)$ ) es diu *exterior* (*interior*) a la paràbola. El focus és un punt interior. Per altra banda, la prova anterior mostra que els punts d'una tangent diferents del punt de contacte són tots exteriors. També mostra que la directriu és el lloc geomètric del simètric del focus respecte d'una tangent variable, o bé que les mediatrises dels segments  $[QF]$  són, quan  $Q$  recorre els punts de la directriu, les tangents de la paràbola.

**E.4.15.** Dibuixeu una recta i un punt no incident amb ella en un full de paper transparent. Doblegueu el full repetidament i de manera que la part doblegada de la recta passi pel punt. Doneu una descripció del resultat que obtingueu.

**E.4.16.** Proveu que una recta talla una paràbola si i només si conté punts interiors. Si aquest és el cas, proveu també que la recta talla a la paràbola en exactament un o dos punts segons que sigui o no paral·lela a l'eix de la paràbola.

**E.4.17.** Donat un punt  $F = (\alpha, \beta)$  exterior a la recta  $L$  definida per l'equació  $ax + by + c = 0$  (coordenades cartesianes rectangulars), expliqueu com podem obtenir, en el mateix sistema de coordenades, l'equació de la paràbola de focus  $F$  i directriu  $L$ .

La propietat focal de la paràbola és la base de l'ús d'aquesta figura en el disseny de projectors i antenes parabòliques. La raó és que el resultat de «reflectir en la paràbola un raig  $FP$ » (figura 4.9), on  $F$  és el focus i  $P$  un punt de la paràbola, és «el raig per  $P$  paral·lel a l'eix de la paràbola»  $[\diamond]$ .

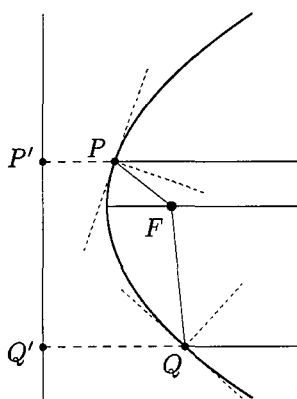


Figura 4.9: Aplicació de la propietat focal de la paràbola

### Casos degenerats

Considerem ara la situació en la qual el pla  $\Pi$  passa pel vèrtex del con.

Si  $\gamma < \alpha$ , obtenim un *parell de rectes no paral·leles*. Escollint una referència de  $\Pi$  amb origen el vèrtex del con i amb eixos les bisectrius del parell de rectes, les equacions d'aquest parell prenen la forma  $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 0$  (compareu amb les asímptotes d'una hipèrbola), o bé  $y^2 = k^2 x^2$  ( $k \in \mathbb{R}$ ).

En el límit, quan  $\gamma$  tendeix a  $\alpha$ , les dues rectes es confonen. Analíticament, aquest límit es pot obtenir fent que el pendent  $\pm k$  de les dues rectes tendeixi a zero (per exemple), amb la qual cosa l'equació quadràtica  $y^2 = k^2 x^2$  dona lloc a una equació de la forma  $y^2 = 0$ . Direm, per tant, que estem en presència d'una *recta doble*.

Si  $\gamma > \alpha$ , la intersecció es redueix al vèrtex, però és fàcil veure que des del punt de vista analític es tracta d'una *parell de rectes imaginàries conjugades*, és a dir, dues rectes de la forma  $y = \pm ikx$ ,  $k \in \mathbb{R}$ .

Notem també que quan el vèrtex del con s'allunya a l'infinit, el con esdevé un cilindre circular recte i que si el tallem per un pla paral·lel a l'eix s'obté una *parella de rectes paral·leles*, possiblement confoses o imaginàries.

### Nota sobre la història i els usos de les còniques

Menecme (IV aC) va iniciar l'estudi de les còniques en un intent de resoldre, amb regla i compàs, el problema de la «duplicació del cub». Euclides (IV aC) va dedicar al tema quatre llibres, malauradament perduts, i Apol·loni de Perga (III aC), va escriure vuit remarcables llibres que, llevat d'un, s'han conservat. Es creu que els tres primers d'aquests llibres recullen la substància dels quatre llibres d'Euclides esmentats.

A partir del Renaixement es van interessar pel tema nombrosos matemàtics, entre els quals cal destacar Descartes, Pascal, Newton, Euler, Monge i, ja en el segle passat, Poncelet, Steiner i Chasles, entre molts d'altres. Això indica l'interès constant que per aquestes figures hi ha hagut durant prop de dos mil cinc-cents anys.

Ultra els usos artístics, arquitectònics o en l'enginyeria, i passant per alt la ubicüitat de les circumferències, les còniques han aparegut en la descripció de lleis fonamentals de la natura. Donem-ne uns quants exemples.

Les paràboles apareixen com les trajectòries dels projectils (Galileu) i també en el disseny de projectors i antenes. Per altra banda, els planetes descriuen una el·lipse amb el Sol ocupant un dels seus focus (primera llei de Kepler). Els cometes periòdics descriuen també òrbites el·líptiques, mentre que els no periòdics descriuen una hipèrbola o una paràbola, segons que la velocitat en allunyar-se indefinidament es mantingui superior a una constant positiva o tendeixi a zero, sempre amb el Sol situat al focus (Newton).

D'acord amb càlculs basats en les lleis de Newton i de Coulomb, i confirmats pels experiments de Rutherford a principis de segle, la trajectòria d'una partícula  $\alpha$  quan es

dispara sobre un nucli atòmic és una branca d'hipèrbola, amb el nucli ocupant el focus corresponent (Rutherford).

## 4.1 Còniques del pla euclidià

A la secció 4.0, hem discutit les equacions canòniques de les còniques, tant les no degenerades (el·lipse, hipèrbola i paràbola) com les degenerades (diverses menes de parelles de rectes). Si prenem una referència arbitrària en lloc d'una referència en la qual l'equació sigui canònica, llavors l'equació adoptarà la forma

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0, \text{ per a certs } a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R} \quad [4.13]$$

(vegeu els exercicis E.4.4, E.4.10 i E.4.17).

**E.4.18.** Comproveu que si fem un canvi afí de coordenades qualsevol, l'equació 4.13 es transforma en una equació del mateix tipus respecte de les noves coordenades.

No totes les equacions que tenen la forma [4.13] representen una cònica en el sentit de la secció 4.0: l'equació  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0$ , per exemple, no té solucions reals. Afortunadament, aquesta mena d'equacions són les úniques excepcions i la tasca més important d'aquesta secció serà establir aquest fet. En altres paraules, veurem que, donada una equació de la forma [4.13], es pot trobar una referència rectangular respecte de la qual l'equació esdevé l'equació canònica d'una cònica, o una equació de la forma  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0$ . D'aquesta darrera, en direm, per analogia amb l'equació de l'el·lipse, una *el·lipse imaginària*.

### Còniques analítiques

Donat un polinomi quadràtic real

$$q(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f \quad [4.14]$$

en les coordenades rectangulars  $(x, y)$ , direm que l'equació  $q(x, y) = 0$  defineix una *cònica analítica*, que denotarem  $C_q$ . Convé dir que aquí convenim que la definició de *quadràtic* inclou la condició que la *part principal* de  $q(x, y)$ ,  $q_2(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ , no és idènticament nul·la.

Un punt  $(\alpha, \beta)$  pertany a la cònica analítica  $C_q$  si i només si  $q(\alpha, \beta) = 0$ . El punt es diu *real* si  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , i es diu *imaginari* si  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ , amb  $\alpha$  imaginari o  $\beta$  imaginari. Si  $(\alpha, \beta)$  és un punt imaginari, direm que  $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$  és el seu *punt conjugat*. Com que el polinomi  $q(x, y)$  és real,  $C_q$  conté, amb cada un dels seus punts imaginaris, el seu conjugat  $[\diamond]$ .

Si  $(x', y')$  és un altre sistema de coordenades rectangulars i

$$q'(x', y') = a'x'^2 + 2b'x'y' + c'y'^2 + 2d'x' + 2e'y' + f'$$

és un polinomi quadràtic en  $(x', y')$ , direm que les equacions  $q(x, y) = 0$  i  $q'(x', y') = 0$  defineixen la *mateixa cònica analítica* si i només si existeix un nombre real no nul  $\rho$  tal que

$$q'(x', y') = \rho q(x, y), \quad [4.15]$$

on considerem  $q(x, y)$  com el polinomi en  $(x', y')$  que s'obté substituint  $(x, y)$  per les fórmules del canvi de les coordenades  $(x, y)$  a les coordenades  $(x', y')$ . En particular, tenim que dos polinomis  $q(x, y)$  i  $q'(x, y)$  en les mateixes coordenades rectangulars defineixen la mateixa cònica si i només si existeix un nombre real no nul  $\rho$  tal que  $q'(x, y) = \rho q(x, y)$ .

**E.4.19.** Sigui  $q(x, y)$  i  $q'(x', y')$  polinomis quadràtics en les coordenades rectangulars  $(x, y)$  i  $(x', y')$ , respectivament. Sigui  $P$  un punt i suposem que  $(\alpha, \beta)$  i  $(\alpha', \beta')$  són les coordenades de  $P$  relatives a les dues referències. Comproveu que si les equacions  $q(x, y) = 0$  i  $q'(x', y') = 0$  defineixen la mateixa cònica analítica, llavors el punt  $(\alpha, \beta)$  pertany a  $C_q$  si i només si el punt  $(\alpha', \beta')$  pertany a  $C_{q'}$ .

Considerem la cònica analítica  $C_q$  definida per l'equació

$$q(x, y) = 0, \quad [4.16]$$

on  $q(x, y)$  és el polinomi quadràtic [4.14]. Si  $(X, Y, Z)$  són les corresponents coordenades projectives, de manera que  $x = X/Z$  i  $y = Y/Z$ , direm que l'equació

$$aX^2 + 2bXY + cY^2 + 2dXZ + 2eYZ + fZ^2 = 0 \quad [4.17]$$

defineix la *cònica projectiva  $\overline{C}_q$  associada* a la cònica  $C_q$ . També direm que un punt  $[\xi, \eta, \zeta]$  pertany a  $\overline{C}_q$  si i només si  $(\xi, \eta, \zeta)$  satisfà l'equació 4.17. La noció de punt real (imaginari) de la cònica projectiva  $\overline{C}_q$ , i la noció de punt conjugat d'un punt imaginari, es defineixen de manera semblant a com hem definit aquestes nocions per la cònica analítica.

**E.4.20.** Verifiqueu que un punt propi  $[\alpha, \beta, 1]$  (real o imaginari) pertany a  $\overline{C}_q$  si i només si  $(\alpha, \beta)$  pertany a  $C_q$ .

Notem que l'equació [4.17] determina l'equació [4.16] fent la substitució  $[X, Y, Z] \rightarrow [x, y, 1]$ .

Els punts de l'infinit de la cònica analítica  $C_q$  són, per definició, els punts de la cònica projectiva  $\overline{C}_q$  que tenen la forma  $[X, Y, 0]$ , és a dir, els punts  $[X, Y, 0]$  tals que

$$aX^2 + 2bXY + cY^2 = 0. \quad [4.18]$$

D'aquesta equació en direm *equació dels punts del l'infinit* de la cònica [4.16], i també *restricció a l'infinit* de la cònica projectiva [4.17]. És clar que  $aX^2 + 2bXY + cY^2 = q_2(X, Y)$ , on  $q_2$  és la part principal de  $q$ .

**4.7 Exemples.** La restricció a l'infinit de l'el·lipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  és  $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 0$ , i aquesta equació defineix el parell de punts imaginaris conjugats  $[a, \pm bi, 0]$ .

En el cas de la hipèrbola  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ , l'equació dels punts de l'infinit,  $\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 0$ , defineix els punts reals  $[a, \pm b, 0]$ , és a dir, els punts de l'infinit de les asímptotes. Aquest fet concorda amb la descripció geomètrica que hem fet a la secció 4.0: les asímptotes eren les rectes pel centre de la cònica paral·leles a les dues generatrius del con que són paral·leles al pla  $\Pi$  i, vist així, és clar que els punts de l'infinit de les asímptotes pertanyen a la completió projectiva de  $\Pi$ .

La restricció a l'infinit de la paràbola  $y^2 = 2px$  és  $Y^2 = 0$ , que només és satisfeta pel punt  $[1, 0, 0]$ . Per analogia amb el comportament de la intersecció d'una recta i una cònica que hem vist a la secció 4.0, direm que la recta de l'infinit és *tangent* a la paràbola i que el punt de contacte és  $[1, 0, 0]$ . També és costum dir que la intersecció de paràbola amb la recta de l'infinit és un punt «doble» (a causa de l'exponent 2 de la  $Y$ ). Per a una discussió més detallada d'aquesta terminologia, vegeu l'apartat «Tangència i polaritat» de la secció 4.2, pàg. 252.

### Matriu i matriu principal d'una cònica

A una matriu simètrica real

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{pmatrix} \quad [4.19]$$

li podem assignar el polinomi  $q^{\overline{A}}(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f$ . Si la *matriu principal de  $\overline{A}$* , això és, la matriu

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}, \quad [4.20]$$

és no nul·la, el polinomi  $q^{\overline{A}}(x, y)$  defineix una cònica analítica  $\mathcal{C}_{\overline{A}}$ : direm que aquesta cònica analítica és la *determinada per la matriu  $\overline{A}$*  referida a les coordenades  $(x, y)$ . Notem que si  $\rho$  és un nombre real no nul,  $\overline{A}$  i  $\rho\overline{A}$  determinen, referides a un mateix sistema de coordenades, la mateixa cònica analítica. Notem també que la part principal del polinomi  $q^{\overline{A}}(x, y)$  és el polinomi  $q^A(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$  corresponent a la matriu principal de  $\overline{A}$ .

Recíprocament, donada la cònica analítica definida per l'equació [4.16], li podem associar la matriu simètrica real [4.19], on ara  $a, b, c, d, e, f$  són els coeficients del polinomi  $q(x, y)$ . Com que aquesta matriu només està definida llevat d'un factor escalar no nul, posarem  $[\overline{A}]$  per denotar-la i direm que és la *matriu de la cònica* relativa a les coordenades  $(x, y)$ . Per tal de poder fer la distinció quan ens calgui, de la matriu  $\overline{A}$  en direm la matriu de l'equació [4.16]. La *part principal* d'aquesta matriu és la matriu  $A$ , on  $A$  està formada amb els coeficients de la part principal de  $q(x, y)$ . Observem que

podem posar

$$\overline{A} = \left( \begin{array}{c|c} A & \mathbf{w}^T \\ \hline \mathbf{w} & c \end{array} \right), \quad \mathbf{w} = (g, h). \quad [4.21]$$

**4.8 Lema.** Donada la matriu simètrica real [4.19], la cònica que determina, referida a les coordenades  $(x, y)$ , és la definida per l'equació

$$(x, y, 1)\overline{A}(x, y, 1)^T = 0.$$

La cònica projectiva associada a aquesta cònica és la definida per l'equació

$$(X, Y, Z)\overline{A}(X, Y, Z)^T = 0,$$

on  $(X, Y, Z)$  són les coordenades projectives corresponents a les coordenades  $(x, y)$ , i la seva restricció a l'infinit és la donada per l'equació

$$(X, Y)A(X, Y)^T = 0,$$

on  $A$  és la matriu principal de  $\overline{A}$ .

**Prova:** És un càlcul elemental comprovar que

$$(X, Y)A(X, Y)^T = aX^2 + 2bXY + cY^2, \quad [4.22]$$

$$(X, Y, Z)\overline{A}(X, Y, Z)^T = aX^2 + 2bXY + cY^2 + 2dXZ + 2eYZ + fZ^2. \quad [4.23]$$

Com que la segona relació implica que

$$(x, y, 1)\overline{A}(x, y, 1)^T = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f,$$

la prova en resulta immediatament.  $\square$

A causa del lema anterior, la matriu  $\overline{A}$  d'una cònica i la seva matriu principal,  $A$ , també s'anomenen *matriu projectiva* i *matriu de l'infinit* de la cònica.

**4.9 Proposició.** Siguin  $\overline{A}$  i  $\overline{A}'$  matrius simètriques reals de dimensió 3. Llavors, la cònica analítica definida per  $\overline{A}$ , referida a les coordenades rectangulars  $(x, y)$ , coincideix amb la cònica analítica definida per la matriu  $\overline{A}'$ , referida a les coordenades  $(x', y')$ , si i només si existeix una matriu  $\overline{M}$  de la forma

$$\overline{M} = \left( \begin{array}{c|c} M & \mathbf{p} \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right), \quad M \in O(2), \quad \mathbf{p} = \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}, \quad r, s \in \mathbb{R},$$

i un nombre real  $\rho$  no nul, tals que

$$\overline{A}' = \rho \overline{M}^T \overline{A} \overline{M}.$$



Si aquest és el cas, llavors també tenim (atès que la matriu principal de  $\overline{M}^T \overline{A} \overline{M}$  és  $M^T A M$ ,  $A$  i  $A'$  les matrius principals de  $\overline{A}$  i  $\overline{A}'$ ), que

$$A' = \rho M^T A M.$$

**Prova:** Pel lema 4.8, la cònica analítica definida per  $\overline{A}$  és la definida per l'equació  $q(x, y) = (x, y, 1) \overline{A} (x, y, 1)^T = 0$ . Anàlogament, la cònica analítica definida per  $\overline{A}'$  és la definida per l'equació  $q'(x', y') = (x', y', 1) \overline{A}' (x', y', 1)^T = 0$ . Per altra banda, les coordenades  $(x, y)$  i les coordenades  $(x', y')$  estan lligades per una relació de la forma

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}, \quad M \in O(2), \quad r, s \in \mathbb{R},$$

i aquesta relació equival a

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \overline{M} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix},$$

on  $\overline{M}$  és la matriu obtinguda a partir de  $M$  i  $\mathbf{p}$  tal com s'ha dit a l'enunciat. Així doncs, el polinomi  $q(x, y)$ , considerat com a polinomi en  $(x', y')$ , és igual a

$$(x', y', 1) \overline{M}^T \overline{A} \overline{M} (x', y', 1)^T.$$

Ara bé, aquest polinomi defineix la mateixa cònica que  $q'(x', y')$  si i només si existeix un nombre real no nul  $\rho$  tal que

$$(x', y', 1) \overline{A}' (x', y', 1)^T = \rho (x', y', 1) \overline{M}^T \overline{A} \overline{M} (x', y', 1)^T,$$

qualssevol que siguin  $x', y' \in \mathbb{R}$ . Però aquesta condició és clarament equivalent a dir que  $\rho \overline{M}^T \overline{A} \overline{M} = \overline{A}'$ , com volíem provar.  $\square$

### Equacions reduïdes i canòniques

Ens proposem el problema de trobar una referència cartesiana rectangular respecte de la qual l'equació de la cònica [4.16] adopti la forma més senzilla possible.

Aquest problema el resolldrem fent successives «reduccions», és a dir, canvis de coordenades escollits de manera que, després de cada un, l'equació de la cònica sigui el resultat de simplificar algun aspecte de l'equació en la referència precedent. En tot cas, l'objecte és veure que existeix un canvi rectangular de coordenades

$$\begin{aligned} x &= \alpha_1 x' + \beta_1 y' + \gamma_1 \\ y &= \alpha_2 x' + \beta_2 y' + \gamma_2 \end{aligned}$$

que transforma el polinomi  $q(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f$  en un polinomi

$$q'(x', y') = q(\alpha_1 x' + \beta_1 y' + \gamma_1, \alpha_2 x' + \beta_2 y' + \gamma_2)$$

que és d'una de les següents formes:

$$a) \quad \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \mu, \quad b) \quad \lambda_1 x'^2 + 2ey', \quad c) \quad \lambda_1 x'^2 + \mu, \quad [4.24]$$

on  $\lambda_1, \lambda_2$  i  $e$  són nombres reals no nuls i  $\mu$  un nombre real arbitrari. D'aquestes expressions en direm *formes reduïdes*. Per raons que quedaran clares posteriorment, ens hi referirem dient que són de tipus *centrat*, *parabòlic* i *de rectes paral·leles*, respectivament.

### Primera reducció

El primer pas consisteix a diagonalitzar la matriu  $A$ , és a dir, a fer un canvi tal que la nova matriu de l'infinít,  $A' = M^T A M$ , sigui diagonal. Com veurem tot seguit, això es pot aconseguir fent un canvi  $(x, y)^T = M(x', y')^T$  amb  $M$  ortogonal (és un canvi, per tant, que deixa l'origen fix). Convé remarcar que la prova d'aquest fet ens dona un procediment efectiu per trobar el canvi de coordenades en qüestió.

**4.10 Proposició.** Si  $A$  no és diagonal (és a dir, si  $b \neq 0$ ) i definim  $\alpha \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$  per la fórmula

$$\tan(2\alpha) = \frac{2b}{a - c}$$

(amb la convenció que  $2\alpha = \frac{\pi}{2}$  si  $a = c$ ) i posem  $M = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$ , llavors  $A' = M^T A M$  és diagonal.

**Prova:** Un càlcul fàcil ens mostra que l'element de la posició (1, 2) de la matriu  $M^T A M$  és

$$b \cos(2\alpha) - \frac{1}{2}(a - c) \sin(2\alpha),$$

i l'anul·lació d'aquest element equival a la relació que hem usat per definir  $\alpha$ . Com que  $M^T A M$  és una matriu simètrica, també s'anul·la l'element de la posició (2, 1) i, per tant,  $M^T A M$  és una matriu diagonal.  $\square$

**4.11 Corol·lari.** Els valors propis de  $A$ , diguem-ne  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$ , són reals i  $A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ .

**Prova:** Com que  $M$  és ortogonal,  $M^T = M^{-1}$ . Per tant,  $A' = M^{-1} A M$  és una matriu conjugada de  $A$ . En resulta que  $A$  i  $A'$  tenen els mateixos valors propis. Com que  $A'$  és real i diagonal, això acaba la prova.  $\square$

Els valors propis  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$  de  $A$  s'obtenen resolent l'equació  $\det(\lambda I_2 - A) = 0$ , és a dir,

$$\lambda^2 - (a + c)\lambda + (ac - b^2) = 0$$

(aquesta equació es coneix amb el nom de *equació secular* de  $A$ ). Així doncs,

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{a + c \pm \sqrt{(a - c)^2 + 4b^2}}{2}, \quad [4.25]$$

ja que  $(a + c)^2 - 4(ac - b^2) = (a - c)^2 + 4b^2$ . Aquesta expressió confirma que  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$  són reals.

### Segona reducció

La proposició 4.10 ens permet reduir l'equació de la cònica a una de la forma

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + 2dx + 2ey + f = 0. \quad [4.26]$$

En relació amb aquesta equació, hi ha dues situacions a considerar: que  $\lambda_1 \lambda_2 \neq 0$  i que  $\lambda_1 \lambda_2 = 0$ . Si es dóna aquest segon cas, hi ha un valor propi nul i un de no nul (recordem que hem suposat  $A \neq 0$ ). Intercanviant els eixos de la referència si calgués, sempre podem suposar que  $\lambda_1 \neq 0$  i  $\lambda_2 = 0$ . A més, canviant l'equació de signe si fos  $\lambda_1 < 0$ , podem suposar, en qualsevol cas, que  $\lambda_1 > 0$ . En resum, suposarem que en l'equació [4.26] es compleix  $\lambda_1 > 0$  i, d'aquesta manera, els dos casos als quals hem alludit es corresponen a les condicions  $\lambda_2 \neq 0$  i  $\lambda_2 = 0$ , respectivament.

En aquest punt, l'eina bàsica per seguir el procés de reducció és la *compleció del quadrat*, és a dir, la identitat  $[\diamond]$

$$\lambda x^2 + 2dx = \lambda x'^2 + k, \quad \text{amb } x = x' - d/\lambda \text{ i } k = -d^2/\lambda.$$

Si estem en el cas  $\lambda_2 \neq 0$ , llavors dues complecions del quadrat, i el corresponent canvi de coordenades (el canvi d'origen  $x = x' - d/\lambda_1$ ,  $y = y' - e/\lambda_2$ ), ens permeten de suposar que  $d = e = 0$ , amb la qual cosa obtenim una equació reduïda de tipus centrat:

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \mu = 0.$$

I si estem en el cas  $\lambda_2 = 0$ , llavors podem fer una compleció del quadrat, amb la qual cosa arribem a una equació sense terme lineal en  $x$ . És a dir, podem suposar que l'equació [4.26] és

$$\lambda_1 x^2 + 2ey + f = 0.$$

Si  $e = 0$ , aquesta equació és de la forma

$$\lambda_1 x'^2 + \mu = 0,$$

que és una equació reduïda de rectes paral·leles, i si  $e \neq 0$ , un canvi d'origen de la forma  $y = y' - \frac{f}{2e}$  ens permet de suposar que  $f = 0$ , amb la qual cosa s'obté una equació de la forma

$$\lambda_1 x'^2 + 2ey' = 0, \quad [4.27]$$

que és una equació reduïda de tipus parabòlic.

### Equacions canòniques

Comencem amb una reduïda de tipus centrat (vegeu 4.24.a) i procedim a discutir els diversos casos possibles. Si  $\mu \neq 0$ , posant

$$a = \sqrt{\frac{|\mu|}{\lambda_1}} \quad \text{i} \quad b = \sqrt{\frac{|\mu|}{|\lambda_2|}}$$

obtenim que l'equació és equivalent a una de les tres formes següents [ $\diamond$ ]:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1, \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

La primera i la tercera són les equacions canòniques d'una el·lipse i d'una hipèrbola, respectivament, amb semieixos  $a$  i  $b$ . De la segona, que no té punts reals, en direm *el·lipse imaginària*. Notem que no hem considerat el cas  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ , que s'origina quan  $\lambda_2 < 0$  i  $\mu > 0$ , perquè és equivalent a  $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ , que és una hipèrbola d'eix principal  $b$  i eix secundari  $a$ .

Si  $\mu = 0$ , llavors podem posar

$$a = \sqrt{1/\lambda_1}, \quad b = \sqrt{1/|\lambda_2|}$$

i obtenim que l'equació [4.24.a] adopta una de les dues formes següents:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0, \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0.$$

La segona ens dona dues rectes reals, i la primera dues rectes imaginàries conjugades.

Pel que fa a la reduïda de tipus parabòlic,  $\lambda_1 x^2 + 2ey = 0$ , és clar que és equivalent a l'equació  $x^2 = 2py$ , amb  $p = e/\lambda_1$ . Com que  $py = (-p)(-y)$ , sempre podem suposar que  $p > 0$  (altrament, es pot canviar l'orientació de l'eix  $Oy$ ). Veiem, doncs, que es tracta d'una paràbola amb paràmetre focal  $p$  i amb eix coincident amb l'eix  $Oy$ .

Finalment, la reduïda de tipus  $\lambda_1 x^2 + \mu = 0$  és equivalent, posant  $k = \sqrt{|\mu|/\lambda_1}$  quan  $\mu \neq 0$ , a una de les tres equacions següents:

$$x^2 = k^2, \quad x^2 = 0, \quad x^2 = -k^2 \quad (k > 0).$$

La primera ens proporciona dues rectes paral·leles ( $x = \pm k$ , on  $k$  és la semidistància entre les dues rectes) i la segona dues rectes coincidents. De la tercera, en direm que dona dues rectes paral·leles imaginàries conjugades (perquè equival a les equacions  $x = \pm ik$ ).

**Remarca.** Atès que les còniques analítiques reals coincideixen amb les còniques definides geomètricament, d'ara endavant, en lloc de *còniques analítiques*, en direm simplement *còniques*. D'aquesta manera, el significat del terme *cònica* queda augmentat fins a incloure, ultra les còniques en el sentit de la secció 4.0, les el·lipses analítiques imaginàries.

### Còniques centrades

Direm que una cònica és *centrada* si  $\det(A) \neq 0$ . Segons el que ja hem dit en aquest apartat, són les còniques que donen lloc a reduïdes de tipus centrat. El motiu d'aquesta nomenclatura és que les còniques centrades tenen un únic centre de simetria:

**4.12 Proposició.** *Suposem que la cònica [4.16] és centrada. Llavors existeix un únic punt  $(x_0, y_0)$  respecte del qual la cònica és simètrica. A més, aquest punt és igual a  $-(d, e)A^{-1}$ .*

**Prova:** Suposem que el punt  $(x_0, y_0)$  és un centre de simetria de la cònica [4.16]. Si fem el canvi d'origen  $x = x' + x_0$ ,  $y = y' + y_0$ , llavors la cònica, referida a les coordenades  $(x', y')$ , ha de ser simètrica respecte de l'origen. Això significa que l'equació

$$(x' + x_0, y' + y_0)A(x' + x_0, y' + y_0)^T + 2(d, e)(x' + x_0, y' + y_0)^T + f = 0$$

ha de ser invariant per la simetria central  $(x', y') \mapsto (-x', -y')$ , és a dir, que no ha de tenir termes lineals en  $x'$  i  $y'$ . Com que els termes lineals en  $x'$  i  $y'$  de l'equació anterior resulten ser

$$2(x_0, y_0)A(x', y')^T + 2(d, e)(x', y')^T, \quad [4.28]$$

veiem que la condició per tal que  $(x_0, y_0)$  sigui centre de simetria és l'equació matricial

$$(x_0, y_0)A + (d, e) = 0. \quad [4.29]$$

Però com que  $A$  és una matriu invertible,  $(x_0, y_0) = -(d, e)A^{-1}$  és la seva única solució.  $\square$

L'únic centre de simetria,  $-(d, e)A^{-1}$ , d'una cònica centrada s'anomena *centre* de la cònica. Notem que l'equació  $(x_0, y_0)A + (d, e) = 0$ , que determina el centre, es pot escriure, separant les dues components, com el sistema

$$\begin{aligned} ax_0 + by_0 + d &= 0 \\ bx_0 + cy_0 + e &= 0. \end{aligned} \quad [4.29']$$

Aquestes equacions, que s'anomenen *equacions del centre*, es poden recordar més fàcilment si observem que  $ax + by + d$  i  $bx + cy + e$  són (la meitat de) les derivades parcials de l'equació de la cònica respecte de  $x$  i  $y$ , respectivament. En general, representen el lloc geomètric dels punts que són centres de simetria de la cònica i per això s'anomenen *equacions dels centres*.

### Definició alternativa de les còniques no degenerades reals

A l'apartat «Paràbola» de la secció 4.0, hem vist que la paràbola és el lloc geomètric dels punts  $P$  que compleixen la condició [4.10]. Remarcablement, l'argument que hem

usat per demostrar aquest fet es pot adaptar fàcilment al cas d'una el·lipse (suposant que no és circumferència), o al cas d'una hipèrbola, per demostrar que, en qualsevol dels dos casos, la cònica és el lloc geomètric dels punts  $P$  tals que

$$d(P, F) = \epsilon \cdot d(P, L), \quad [4.30]$$

on, amb notacions de la secció 4.0,  $\epsilon = \cos(\gamma)/\cos(\alpha)$ , i on  $L$ , la *directriu del focus*  $F$ , es defineix com en el cas de la paràbola (en el raonament del cas de la paràbola, pàg. 235, en lloc de  $PQ = PP'/\cos(\alpha)$ , tindrem  $PQ = PP'/\cos(\gamma)$ , ja que  $\gamma$  és l'angle format per  $PP'$  i  $\Pi$ ).

Ara demostrarem l'enunciat anterior per mitjans analítics, com una il·lustració dels mètodes de l'apartat anterior. Un avantatge d'aquest procediment és que quedarà establert, ensems, que *la constant  $\epsilon$  coincideix, en el cas de l'el·lipse i la hipèrbola, amb l'excentricitat*. Com que  $\epsilon = 1$  en el cas de la paràbola, d'ara endavant considerarem que la paràbola té excentricitat 1.

**4.13 Proposició.** *Sigui  $e$  un nombre real positiu. Sigui, en un pla euclidià,  $L$  una recta i  $F$  un punt exterior a  $L$ . Llavors, el lloc geomètric dels punts  $P$  tals que*

$$d(P, F)/d(P, L) = e \quad [4.31]$$

*és una el·lipse, una paràbola o una d'hipèrbola segons que  $e < 1$ ,  $e = 1$  o  $e > 1$ . En tots el casos,  $F$  és un focus, la recta per  $F$  perpendicular a  $L$  és l'eix principal i  $e$  és l'excentricitat.*

**Prova:** Sigui  $O$  el peu de la perpendicular a  $L$  pel punt  $F$  (figura 4.10) i considerem una referència rectangular amb origen  $O$  i eixos  $OF$  i  $L$ . L'eix  $Ox$ , doncs, coincideix amb la perpendicular a  $L$  per  $F$ . També tenim que  $F = (p, 0)$ , on  $p$  és la distància de  $F$  a  $L$  (en direm *paràmetre focal*).

Si  $P = (x, y)$ , la condició  $d(P, F)/d(P, L) = e$  és equivalent a la relació

$$(x - p)^2 + y^2 = e^2 x^2,$$

és a dir, a

$$(1 - e^2)x^2 + y^2 - 2px + p^2 = 0. \quad [4.32]$$

Si  $e < 1$ , llavors  $1 - e^2 > 0$  i per compleció del quadrat obtenim l'equació

$$(1 - e^2) \left( x - \frac{p}{1 - e^2} \right)^2 + y^2 = \frac{e^2 p^2}{1 - e^2},$$

la qual representa una el·lipse de centre el punt  $O' = (\frac{p}{1 - e^2}, 0)$ , eix principal  $Ox$  i semieixos

$$a = \frac{ep}{1 - e^2}, \quad b = \frac{ep}{\sqrt{1 - e^2}}.$$

Un senzill càlcul mostra que

$$c = \frac{e^2 p}{1 - e^2}, \quad [4.33]$$

d'on resulta que l'excentricitat de l'el·lipse és  $c/a = e$ . Finalment,  $F$  és un focus de l'el·lipse, ja que  $O' - (c, 0) = (p, 0) = F$ .

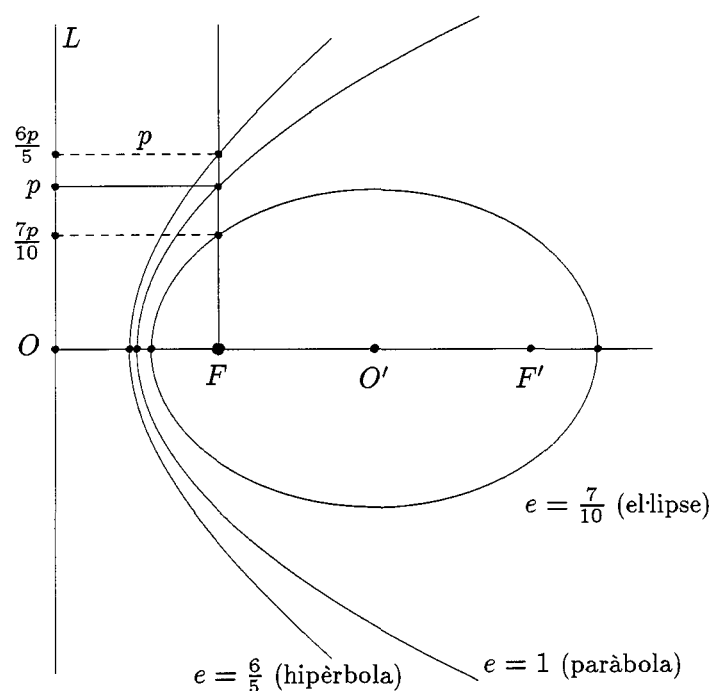


Figura 4.10: Definició alternativa de les còniques

Si  $e = 1$ , l'equació [4.32] del lloc geomètric esdevé

$$y^2 - 2px + p^2 = 0, \quad \text{o bé} \quad y^2 = 2p\left(x - \frac{p}{2}\right).$$

Es tracta d'una paràbola per a la qual el punt  $F = (p, 0)$  és el focus i la recta  $Ox$  és l'eix.

Manca discutir el cas  $e > 1$ . Canviant de signe l'equació [4.32], obtenim l'equació equivalent

$$(e^2 - 1)x^2 - y^2 + 2px - p^2 = 0,$$

que, completant el quadrat, es transforma en

$$(e^2 - 1) \left( x + \frac{p}{e^2 - 1} \right)^2 - y^2 = \frac{e^2 p^2}{e^2 - 1}. \quad [4.34]$$

Es tracta, doncs, d'una hipèrbola amb centre al punt  $(-\frac{p}{e^2-1}, 0)$  i semieixos

$$a = \frac{ep}{e^2-1}, \quad b = \frac{ep}{\sqrt{e^2-1}}.$$

Per càlcul, s'obté que

$$c = \frac{e^2 p}{e^2-1}, \quad [4.35]$$

d'on resulta que  $F = (p, 0)$  és un focus i que  $e$  és l'excentricitat.  $\square$

En una cònica d'excentricitat  $e$  i paràmetre focal  $p$ , el punt  $Q = (p, pe)$  (mateix sistema de coordenades que a la figura 4.10) és de la cònica. Té la propietat que  $FQ$  és perpendicular a l'eix principal de la cònica, ja que  $Q - F = (0, pe)$ . Tenim, a més, que  $d(F, Q) = pe$ . Aquesta distància es denomina *semicostat* de la cònica i posarem  $\lambda$  per denotar-lo (el *costat*, o *latus rectum* en terminologia tradicional, és  $2\lambda = 2pe$ , és a dir,  $d(Q, Q')$ , on  $Q' = (p, -pe)$ ).

Un incís etimològic: els termes *el·lipse*, *hipèrbola* i *paràbola*, encunyats per Apol·loni de Perga, expressen la idea que «no arriba», «supera» i «és comparable», respectivament, en concordança amb les relacions  $\lambda < p$ ,  $\lambda > p$  i  $\lambda = p$  (o  $e < 1$ ,  $e > 1$  i  $e = 1$ ) que les caracteritzen.

**E.4.21.** Comproveu que l'expressió

$$\frac{\pi e^2 p^2}{(1-e^2)^{3/2}} \quad [4.36]$$

dóna l'àrea d'una el·lipse d'excentricitat  $e$  i paràmetre focal  $p$ .

**E.4.22.** Si  $\alpha$  és l'angle que formen les asímptotes d'una hipèrbola d'excentricitat  $e$ , mostreu que

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{e} \quad \text{i} \quad \cos(\alpha) = \frac{2}{e^2} - 1. \quad [4.37]$$

**E.4.23.** Amb les notacions de la proposició 4.13, i les introduïdes en la seva demostració, sabem que el centre i els semieixos s'expressen per les mateixes fórmules, tant en el cas de l'el·lipse com en el cas de la hipèrbola. Proveu que el mateix passa amb els focus, ja que un és  $F = (p, 0)$  i l'altre resulta ser

$$\left(p \frac{1+e^2}{1-e^2}, 0\right).$$

**E.4.24.** Suposant  $0 < e \neq 1$ , mostreu que els vèrtexs principals d'una cònica d'excentricitat  $e$  i paràmetre focal  $p$  són els punts  $(\frac{p}{1+e}, 0)$  i  $(\frac{p}{1-e}, 0)$  (valen les mateixes fórmules per a la hipèrbola que per a l'el·lipse). Adonem-nos també que per a  $e = 1$  el primer punt és el vèrtex de la paràbola i que el segon punt no està definit en el pla euclidià.



**Remarca.** Com que l'expressió  $p/(1-e)$  de l'exercici precedent tendeix a l'infinit quan  $e$  tendeix a 1, el segon punt tendeix, en el pla projectiu, al punt  $[1, 0, 0]$ . Aquesta observació mostra que  $O' = [1, 0, 0]$  s'hauria de poder interpretar com el segon vèrtex (impropi) de la paràbola. Ara bé, això resulta del fet que l'eix de la paràbola, d'equació homogènia  $Y = 0$ , talla a la paràbola  $Y^2 = 2pXZ$  (també escrita amb coordenades homogènies) en els punts  $[0, 0, 1]$  i  $[1, 0, 0]$ , el primer dels quals és el vèrtex  $O$  de la paràbola i el segon és el punt  $O'$ .

**E.4.25.** Expliqueu com podeu trobar l'equació de la cònica d'excentricitat  $e > 0$ , amb un focus a  $F = (\alpha, \beta)$ , i de manera que la directriu d'aquest focus sigui la recta  $ax + by + c = 0$  (coordenades cartesianes rectangulars).

**E.4.26.** Expliqueu com podeu trobar l'equació de la cònica d'excentricitat  $e > 0$  amb un focus a  $F = (\alpha, \beta)$ , amb eix principal la recta  $ax + by + c = 0$ , i de manera que passi pel punt  $(x_0, y_0)$ .

### Parametrització polar d'una cònica

Considerem una cònica d'excentricitat  $e > 0$ , focus  $F$  i directriu  $L$  (respecte de  $F$ ). Sigui  $p = d(F, L) = d(F, F')$ , on  $F'$  és la projecció de  $F$  sobre  $L$ . Donat un punt  $P$ , sigui  $r = d(P, F)$  i  $\theta$  l'angle format pels vectors  $F - F'$  i  $P - F$ . Es diu que  $(r, \theta)$  són les *coordenades polars* de  $P$  respecte de l'origen  $F$  i de l'eix polar  $F'F$  (amb l'orientació donada pel vector  $F - F'$ ). Llavors la relació  $d(P, F) = e \cdot d(P, L)$  equival a

$$r = e(p + r \cos \theta),$$

és a dir, a

$$r = \frac{\lambda}{1 - e \cos \theta} \quad [4.38]$$

(on  $\lambda = pe$  és el semicostat), que anomenarem *equació polar*, o *focal*, de la cònica.

En el cas de la hipèrbola,  $r$  pren valors positius quan  $\cos \theta < 1/e$ , és a dir, quan  $\beta < \theta < 2\pi - \beta$ , on posem  $\beta$  per denotar la meitat de l'angle entre les asímptotes (vegeu l'exercici E.4.22). Quan  $\theta$  varia en aquest interval, el punt corresponent  $(r, \theta)$  recorre la branca de la hipèrbola corresponent al focus  $F$ . Anàlogament,  $r$  pren valors negatius si  $0 \leq \theta < \beta$  o  $2\pi - \beta < \theta < 2\pi$ . En aquest cas, cal interpretar que el punt que correspon a  $(r, \theta)$  és el simètric respecte de  $F$  del punt que correspon a  $(|r|, \theta)$  i així, quan  $\theta$  varia en l'interval esmentat, el punt  $(r, \theta)$  recorre l'altra branca de la hipèrbola.

**E.4.27.** Recíprocament, proveu que si  $(r, \theta)$  són coordenades polars respecte de l'origen  $F$  i de l'eix polar  $\pi$ , i  $e, \lambda$  són nombres reals positius, llavors l'equació [4.38] representa una cònica de focus  $F$ , eix principal  $\pi$ , excentricitat  $e$  i semicostat recte  $\lambda$ .

## 4.2 Invariants euclidians de les còniques

En aquesta secció suposarem que  $\overline{A}$  i  $A$  són la matriu projectiva i la matriu a l'infinit, referides a coordenades rectangulars  $(x, y)$ , de l'equació d'una cònica. Posarem  $\overline{A}'$  i  $A'$  per denotar les matrius projectiva i de l'infinit de l'equació referida a un sistema de coordenades  $(x', y')$ . Tots els sistemes de coordenades se suposaran rectangulars.

### *Invariants relatius i absoluts*

Posarem

$$D_3 = \det(\overline{A}), \quad d_2 = \det(A) = ac - b^2 \quad \text{i} \quad d_1 = \text{Tr}(A) = a + c.$$

Els símbols  $D'_3$ ,  $d'_2$  i  $d'_1$  es defineixen de manera anàloga a partir de  $\overline{A}'$  i  $A'$ . Així doncs,

$$\lambda^2 - d_1\lambda + d_2 = \det(\lambda I_2 - A)$$

és el polinomi característic de  $A$  i  $\lambda^2 - d'_1\lambda + d'_2$ , el de  $A'$ . Direm que  $D_3$  és el *discriminant* de l'equació de la cònica i que  $d_2$  és el *discriminant de la part principal*.

$$4.14 \quad D'_3 = D_3, \quad d'_2 = d_2 \quad \text{i} \quad d'_1 = d_1.$$

**Prova:** Existeix una matriu  $\overline{M}$ , formada tal com s'indica a la proposició 4.9, tal que

$$\overline{A}' = \overline{M}^T \overline{A} \overline{M} \quad \text{i} \quad A' = M^T A M = M^{-1} A M. \quad [4.39]$$

Com que  $\det(\overline{M}) = \det(M) = \pm 1$ , la primera relació ens dona que  $D'_3 = D_3$  i la segona, que  $d'_2 = d_2$  i  $d'_1 = d_1$ .  $\square$

Convé remarcar que si, en lloc de  $\overline{A}$ , uséssim  $\rho \overline{A}$ ,  $\rho$  un escalar no nul, per calcular  $\overline{A}'$ , llavors obtindríem  $D'_3 = D_3(\rho \overline{A}) = \rho^3 D_3$ ,  $d'_2 = d_2(\rho \overline{A}) = \rho^2 d_2$  i  $d'_1 = d_1(\rho \overline{A}) = \rho d_1$ . En resulta que expressions com ara  $D_3/d_1^3$  (suposant  $d_1 \neq 0$ ) o  $D_3^2/d_2^3$  (suposant  $d_2 \neq 0$ ) són independents del sistema de coordenades i de l'equació que emprem per representar la cònica. Aquesta és la raó per la qual expressions com les considerades s'anomenen *invariants euclidians* de les còniques.

Pel que fa a les quantitats  $D_3$ ,  $d_2$  i  $d_1$ , observem que relacions com ara  $D_3 \neq 0$ ,  $d_2 \neq 0$  i  $d_1 \neq 0$  (ó  $D_3 = 0$ ,  $d_2 = 0$  i  $d_1 = 0$ ) són també independents de l'equació de la cònica emprada per verificar-les. El mateix passa amb relacions com ara  $d_2 > 0$  o  $D_3 d_1 > 0$ . Aquestes propietats fan que, per abús de llenguatge, sovint ens referim a  $D_3$ ,  $d_2$  i  $d_1$  dient que són *invariants euclidians relatius*, o *semiinvariants*, de les còniques.

Per raons que es posaran de manifest després, introduïm també el símbol  $D_2$  per denotar la traça de segon ordre de  $\overline{A}$ ,  $\text{Tr}_2(\overline{A})$ , és a dir, la suma dels tres subdeterminants

d'ordre 2 de  $\overline{A}$  la diagonal dels quals és sobre la diagonal de  $\overline{A}$ , o, equivalentment, el coeficient de grau 1 del polinomi característic de  $\overline{A}$  canviat de signe:

$$D_2 = ac + af + cf - (b^2 + d^2 + e^2).$$

El símbol  $D'_2$  es defineix anàlogament mitjançant la matriu  $\overline{A}'$ . Amb les notacions de la prova de 4.14, tenim:

**4.15 Proposició.** *Si les dues referències tenen el mateix origen, llavors  $D'_2 = D_2$ .*

**Prova:** Si les dues referències tenen el mateix origen, la matriu  $\overline{M}$  que dona el canvi de coordenades projectives és tal que  $\mathbf{p} = 0$  (notacions de la proposició 4.9). Així  $\overline{M}$  és ortogonal i la relació  $\overline{A}' = \overline{M}^T \overline{A} \overline{M} = \overline{M}^{-1} \overline{A} \overline{M}$  (proseguim amb les notacions de la prova de 4.14) implica que  $D'_2 = D_2$ , ja que, per invariància del polinomi característic sota conjugació,  $\text{Tr}_2(\overline{A}) = \text{Tr}_2(\overline{M}^T \overline{A} \overline{M})$ .  $\square$

### Classificació de còniques mitjançant invariants

Les *còniques no degenerades*, que per definició són les el·lipses (reals o imaginàries), les hipèrbol·les i les paràboles, es distingeixen de les *còniques degenerades*, que per definició són les parelles de rectes (reals o imaginàries, paral·leles o no, distintes o coincidents), pel fet que les primeres compleixen  $D_3 \neq 0$  i les segones,  $D_3 = 0$ . Aquesta afirmació es dedueix immediatament calculant  $D'_3$  mitjançant les equacions reduïdes i aplicant 4.14.

La proposició que segueix mostra com podem distingir les diverses espècies de còniques mitjançant els invariants.

**4.16 Teorema** (Classificació euclidiana de còniques). *La determinació de l'espècie d'una cònica a partir dels invariants es pot obtenir mitjançant la taula següent:*

$$\left\{ \begin{array}{l} D_3 \neq 0 \\ D_3 = 0 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{ll} d_2 > 0 & \text{el·lipse} \\ d_2 < 0 & \text{hipèrbola} \\ d_2 = 0 & \text{paràbola} \end{array} \right. & \left\{ \begin{array}{l} D_3 d_1 < 0 \quad \text{real (circumferència si } d_1^2 = 4d_2) \\ D_3 d_1 > 0 \quad \text{imaginària} \end{array} \right. \\ & \text{(hipèrbola equilàtera si } d_1 = 0) \\ \left\{ \begin{array}{ll} d_2 > 0 & \text{parell de rectes imaginàries} \\ d_2 < 0 & \text{parell de rectes reals} \end{array} \right. & \left\{ \begin{array}{ll} D_2 < 0 & \text{parell de rectes paral·leles reals} \\ d_2 = 0 & \left\{ \begin{array}{ll} D_2 > 0 & \text{parell de rectes paral·leles imaginàries} \\ D_2 = 0 & \text{parell de rectes coincidents} \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

**Prova:** Suposem primer que  $D_3 \neq 0$ .

Com que  $d_2 > 0$  equival a  $\lambda_1 \lambda_2 > 0$ , és a dir, que  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$  tenen el mateix signe, és clar que estem en presència d'una el·lipse. Atès que, en termes de l'equació reduïda [4.24.a],  $D'_3 = \lambda_1 \lambda_2 \mu = d'_2 \mu$ , i que  $d'_1 = \lambda_1 + \lambda_2$ , resulta que  $D'_3 d'_1 < 0$  si  $\mu$  té signe contrari del de  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$  i que  $D'_3 d'_1 > 0$  si  $\mu$  té el mateix signe que  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$ . El primer cas, que equival a  $D_3 d_1 < 0$ , dóna una el·lipse real, i el segon, que equival a  $D_3 d_1 > 0$ , dóna una el·lipse imaginària. En el cas real, una el·lipse és una circumferència si i només si  $\lambda_1 = \lambda_2$ , i aquesta relació és clarament equivalent a l'anul·lació del discriminant de  $\lambda^2 - d_1 \lambda + d_2$  (el polinomi característic de  $A$ ).

El cas  $d_2 < 0$  ens diu que  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$  tenen signes contraris i, per tant, es tracta necessàriament d'una hipèrbola. Com que una hipèrbola és equilàtera si i només si  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$  són nombres reals amb el mateix valor absolut i de signes contraris, és clar que queden caracteritzades, entre les hipèrboles, per la relació  $d_1 = \lambda_1 + \lambda_2 = 0$ .

Si  $d_2 = 0$ , llavors un valor propi és nul, diguem  $\lambda_2 = 0$ , i com que la cònica és no degenerada, només es pot tractar d'una paràbola (l'equació reduïda només pot ser de la forma [4.24.b]).

Considerem ara les còniques degenerades ( $D_3 = 0$ ).

Si  $d_2 \neq 0$ , l'equació reduïda és necessàriament del tipus [4.24.a] amb  $\mu = 0$ , la qual cosa dóna un parell de rectes imaginàries conjugades si  $d_2 > 0$  i un parell de rectes reals si  $d_2 < 0$ .

Si, a més, és  $d_2 = 0$ , llavors és clar que l'equació reduïda només pot ser de la forma [4.24.c]. Com que  $D'_2 = \lambda_1 \mu = d'_1 \mu$ ,  $\mu/\lambda_1$  té el mateix signe que  $D'_2$ , amb la qual cosa tenim un parell de rectes paral·leles reals si  $D'_2 < 0$ , un parell de rectes paral·leles imaginàries conjugades si  $D'_2 > 0$  i una recta doble si  $D'_2 = 0$ . El resultat es dedueix ara del fet que els canvis que passen de l'equació inicial a la reduïda fan que  $D'_2 = D_2$ . Això és clar si no hi ha canvi d'origen, per [4.15], i per tant podem suposar que l'equació inicial és de la forma  $\lambda_1 x^2 + 2dx + f = 0$  (si fos  $e \neq 0$ , tindriem una paràbola). En tal situació, tenim  $D_2 = -d^2 + \lambda_1 f$ . Si ara completem el quadrat, obtenim l'equació  $\lambda_1 x'^2 + f' = 0$ , amb  $f' = f - d^2/\lambda_1$  i  $x' = x + d/\lambda_1$ . Per tant,  $D'_2 = \lambda_1 f' = D_2$ .  $\square$

### Obtenció de les equacions reduïdes i canòniques a partir dels invariants

La discussió anterior dóna les equacions reduïdes en termes dels invariants. Per exemple, en el cas de les còniques centrades, l'equació reduïda [4.24.a] ens dóna  $D'_3 = d'_2 \mu$  i, per tant,  $\mu = D'_3/d'_2 = D_3/d_2$ , d'on resulta que l'equació reduïda és

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \frac{D_3}{d_2} = 0. \quad [4.40]$$

D'una manera similar, es veu que l'equació canònica d'una paràbola és

$$x^2 + 2\sqrt{-\frac{D_3}{d_1^3}}y = 0. \quad [4.41]$$

Finalment, l'equació reduïda [4.24.c] es pot escriure

$$x^2 + \frac{D_2}{d_1^2} = 0, \quad [4.42]$$

ja que  $D'_2 = \lambda_1 \mu = d'_1 \mu$ .

### Exemples

En aquest subapartat il·lustrem els principis anteriors aplicant-los a diverses situacions.

**Àrea de l'el·lipse.** Suposem que hàgim determinat que una cònica de matriu projectiva  $\overline{A}$  és una el·lipse, és a dir, que  $d_2 > 0$  i  $D_3 d_1 < 0$ . Com podem trobar la seva àrea en funció dels invariants?

En termes de l'equació canònica, l'àrea de l'el·lipse és  $A = \pi ab$ . Sabem, però, que  $a = \sqrt{-\mu/\lambda_1}$  i  $b = \sqrt{-\mu/\lambda_2}$ , on  $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \mu = 0$  és l'equació reduïda. Per tant,  $A = \pi \sqrt{\mu^2/d_2}$ . Tenint en compte que  $\mu = D_3/d_2$ , obtenim finalment la fórmula:

$$A = \pi \sqrt{\frac{D_3^2}{d_2^3}} \quad [4.43]$$

**Angle de les asímptotes d'una hipèrbola.** D'una manera similar, es pot veure que l'angle  $\alpha$  que formen les asímptotes d'una hipèrbola, o un parell de rectes, es pot determinar per la fórmula

$$\cos^2(\alpha) = \frac{d_1^2}{d_1^2 - 4d_2}. \quad [4.44]$$

En efecte, l'equació canònica d'un parell de rectes reals és

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0.$$

Com que aquestes rectes tenen equacions  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$  i  $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$ , veiem que  $(-b, a)$  i  $(b, a)$  són vectors directores d'elles. Per tant,  $\cos(\alpha) = (a^2 - b^2)/(a^2 + b^2)$ . Però  $a^2 = 1/\lambda_1$  i  $-b^2 = 1/\lambda_2$ , d'on inferim que

$$\cos(\alpha) = (\lambda_1 + \lambda_2)/(\lambda_1 - \lambda_2) = d_1/(\lambda_1 - \lambda_2).$$

Elevant al quadrat, i tenint en compte que

$$(\lambda_1 - \lambda_2)^2 = (\lambda_1 + \lambda_2)^2 - 4\lambda_1\lambda_2 = d_1^2 - 4d_2,$$

queda establerta la relació anunciada.

**E.4.28.** Proveu que la semidistància focal,  $c$ , d'una el·lipse o una hipèrbola es pot expressar per la fórmula

$$c^2 = \frac{|D_3|}{d_2^2} \sqrt{d_1^2 - 4d_2}.$$

**La definició alternativa de les còniques de nou.** Apliquem el teorema 4.16 a l'equació [4.32] —oblidem ara com es va obtenir allí aquesta equació. Naturalment, no arribarem pas a conclusions diferents que les que hem trobat en la prova de la proposició 4.13, però les obtindrem d'una manera més ràpida, i això ens dona una bona il·lustració del teorema de classificació.

La matriu projectiva de l'equació en qüestió és

$$\begin{bmatrix} 1 - e^2 & 0 & -p \\ 0 & 1 & 0 \\ -p & 0 & p^2 \end{bmatrix},$$

d'on obtenim

$$D_3 = (1 - e^2)p^2 - p^2 = -e^2p^2, \quad d_2 = 1 - e^2 \quad \text{i} \quad d_1 = 2 - e^2.$$

Com que  $ep \neq 0$  (vegeu 4.13), tenim que  $D_3 \neq 0$ , i la cònica és no degenerada.

Si  $e < 1$ , llavors  $d_2 > 0$  i es tracta d'una el·lipse. L'el·lipse és real, ja que  $D_3d_1 = -e^2p^2(2 - e^2) < 0$ . L'àrea d'aquesta el·lipse és, usant la fórmula [4.43],  $\pi \frac{e^2p^2}{\sqrt{(1-e^2)^3}}$ .

Si  $e = 1$ , llavors  $d_2 = 0$  i es tracta d'una paràbola. Notem que en aquest cas  $D_3 = -p^2$ ,  $d_1 = 1$  i  $\sqrt{-D_3/d_1^3} = p$ , de manera que  $p$  és paràmetre focal de la paràbola (en concordança amb la definició donada en la demostració de la proposició 4.13).

Si  $e > 1$ , llavors  $d_2 < 0$  i es tracta d'una hipèrbola. L'angle  $\alpha$  que formen les dues asímptotes es pot calcular mitjançant la fórmula [4.44]: com que  $d_1 = 2 - e^2$  i  $d_2 = 1 - e^2$ , tenim que  $d_1^2 - 4d_2 = e^2$  i

$$\cos(\alpha) = \frac{2 - e^2}{e^2} = \frac{2}{e^2} - 1.$$

Per tant,

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos(\alpha)}{2} = \frac{1}{e^2} \quad \text{i} \quad \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{e}.$$

### Determinació dels elements geomètrics d'una cònica

El teorema de classificació ens permet trobar, calculant els invariants apropiats, l'espècie d'una cònica. Tot seguit podem resoldre l'equació secular de  $A$  (vegeu [4.25]) i escriure, tal com ho hem discutit en el subapartat precedent, l'equació reduïda i, per tant, l'equació canònica. Però això no és suficient per obtenir, en termes de la referència inicial, els diversos elements geomètrics de la cònica que ens puguin interessar, com per exemple els focus, el centre o les asímptotes.

Vegem com es pot procedir per resoldre aquestes qüestions en el cas de les còniques centrades. El cas de les paràboles es tractarà més endavant. Donada una cònica centrada, podem determinar primer el centre de la cònica, plantejant i resolent les equacions del centre [4.29']. Després podem trobar els *eixos principals*, és a dir, els eixos  $O'x'$  i

$O'y'$  de la referència reduïda. Això és fàcil si tenim en compte que un eix principal és una recta que passa pel centre amb vector director un vector propi no nul de  $A$ . Per tant, el problema dels eixos principals es resol calculant vectors propis no nuls de  $A$  de valors propis  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$ . Aquests vectors s'anomenen *direccions principals* de la cònica. Finalment, coneguts els eixos principals i l'equació reduïda, és immediat calcular els altres elements que ens puguin interessar, com ara els focus i vèrtexs en el cas de l'el·lipse i la hipèrbola o les asímptotes en el cas d'una hipèrbola.

### ***Polaritat i tangència***

Considerem una cònica no degenerada i sigui  $\overline{A}$  la seva matriu projectiva en una certa referència. Donat un punt  $Q = [\eta]$ , l'equació

$$\eta \overline{A} \xi^T = 0$$

representa una recta: és la recta que té coordenades projectives  $(\eta)\overline{A}$ . Aquesta recta s'anomena *polar de Q* respecte de la cònica.

**E.4.29.** Proveu que la recta polar d'un focus d'una el·lipse (d'una hipèrbola) és la corresponent directriu. El mateix resultat val per a la paràbola: la recta polar del seu focus és la directriu.

**E.4.30.** Sigui  $\mathcal{C}$  una cònica no degenerada i  $P$  un punt no pertanyent a  $\mathcal{C}$ . Sigui  $L$  la recta polar de  $P$  respecte de  $\mathcal{C}$ . Donat un punt  $Q$  de la cònica  $\mathcal{C}$ , la recta  $PQ$  talla a  $\mathcal{C}$  en el punt  $Q$  i en un altre punt  $Q' \in \mathcal{C}$ . Proveu que el quart harmònic de  $P$  respecte del parell  $\{Q, Q'\}$  és el punt d'intersecció de  $PQ$  amb  $L$ .

A més dels exercicis precedents, l'interès del concepte de polar prové, en bona part, del resultat que segueix.

**4.17 Teorema.** *Sigui  $Q$  un punt d'una cònica no degenerada i  $L$  la seva polar. Llavors,*

- 1)  *$L$  passa per  $Q$  i  $Q$  és l'únic punt de la cònica incident amb  $L$ .*
- 2) *Tota recta  $L'$  per  $Q$  diferent de  $L$  talla la cònica, exactament, en el punt  $Q$  i un altre punt  $Q' \neq Q$ .*

**Prova:** Sigui  $Q = [\eta]$  un punt de la cònica  $[\overline{A}]$ . Tenim, així, que

$$\eta \overline{A} \eta^T = 0,$$

i, és clar, aquesta relació equival a dir que  $Q$  és un punt de  $L$ .

Per veure que  $L$  no conté cap altre punt de la cònica, raonarem per reducció a l'absurd: veurem que si  $Q' = [\eta'] \neq Q$  fos un punt de  $L$  i de la cònica, llavors  $L$  estaria

continguda a la cònica, i això contradiu el fet que la cònica és no singular. En efecte, els punts de la recta  $QQ'$  diferents de  $Q$  tenen la forma  $[t\eta + \eta']$  i

$$(t\eta + \eta')\overline{A}(t\eta + \eta')^T = 0$$

per a tot  $t$ , ja que  $\eta\overline{A}\eta = 0$  i  $\eta'\overline{A}\eta' = 0$ , per ser  $Q$  i  $Q'$  punts de la cònica, i  $(\eta)\overline{A}(\eta') = 0$  perquè suposem que  $Q'$  és de la polar de  $Q$ . Amb això hem demostrat el punt 1.

Per veure el punt 2, sigui  $L'$  una recta diferent de  $L$  i sigui  $Q' = [\eta']$  un punt de  $L$  no pertanyent a la cònica (un tal  $Q'$  existeix perquè la cònica és no degenerada). Llavors  $L = QQ'$  i, per trobar les interseccions de  $L$  amb la cònica, cal trobar les solucions  $t$  de l'equació

$$(\eta + t\eta')\overline{A}(\eta + t\eta')^T = 0,$$

és a dir, de l'equació  $t(\alpha_0 + t\alpha_1) = 0$ , on  $\alpha_0 = 2\eta\overline{A}\eta'^T$  i  $\alpha_1 = \eta'\overline{A}\eta'^T$ . La solució  $t = 0$  ens dóna el punt  $Q$ . Per altra banda,  $\alpha_1 \neq 0$ , ja que  $Q'$  no és un punt de la cònica, i  $\alpha_0 \neq 0$ , perquè  $Q'$  no és de la polar de  $Q$  (altrament,  $L' = QQ'$  coincidiria amb  $L$ ), d'on en resulta que l'altra solució és  $t = -\alpha_0/\alpha_1$ . Això acaba la prova, atès que a  $t \neq 0$  li correspon un punt de  $L'$  diferent de  $Q$ .  $\square$

Definim la *tangent* en un punt d'una cònica no degenerada com la polar d'aquest punt. El teorema anterior mostra que totes les rectes diferents de la tangent tallen la cònica projectiva en dos punts diferents i que la tangent la talla en exactament un punt, dit *punt de contacte* de la tangent i la cònica.

**4.18 Corol·lari.** *La tangent en un punt  $(x_0, y_0)$  d'una cònica no degenerada, referida a coordenades rectangulars  $(x, y)$ , té equació*

$$(ax_0 + by_0 + d)x + (bx_0 + cy_0 + e)y + (dx_0 + ey_0 + f) = 0.$$

**Prova:** És suficient adonar-se que els coeficients d'aquesta equació són les components del producte  $(x_0, y_0, 1)\overline{A}$ .  $\square$

Notem que casos particulars del corol·lari han estat considerats anteriorment: ens referim al càlcul de l'equació de la tangent en el cas de l'el·lipse, la hipèrbola i la paràbola referides a coordenades canòniques.

**E.4.31.** Donada una cònica no degenerada  $C$  i una recta  $L$ , demostreu que la intersecció de  $L$  i  $C$  és un parell de punts diferents (reals o imaginaris conjugats) si  $L$  no és tangent a  $C$ , i un únic punt si  $L$  és tangent a  $C$  (el punt de contacte de  $L$  amb  $C$ ; en aquest cas, es diu que la intersecció de  $L$  amb  $C$  és un punt doble).

**E.4.32.** Comproveu que la tangent en el punt impropri d'una paràbola és la recta de l'infinit.

Per una cònica no degenerada, l'aplicació de  $\mathbb{P}^2$  a  $\check{\mathbb{P}}^2$  que transforma un punt en la seva polar és una projectivitat. Donada una recta, es defineix el seu *pol* (respecte de la cònica) com l'únic punt la polar del qual és la recta.



**E.4.33.** Comproveu que el centre d'una cònica no degenerada centrada és el pol de la recta de l'infinit. Com que, en el cas de la paràbola, el seu punt de l'infinit és el pol de la recta de l'infinit, d'ara endavant considerarem que aquest punt (impropi) és el centre de la paràbola.

Donada una cònica  $\mathcal{C}$  projectiva no singular, dos punts  $Q = [\eta]$  i  $Q' = [\eta']$  de  $\overline{\mathcal{A}}$  s'anomenen *conjugats respecte de  $\mathcal{C}$*  si i només si

$$(\eta)\overline{A}(\eta')^T = 0.$$

Notem que un punt és de la cònica si i només si és *autoconjugat*.

**4.19** La relació de conjugació respecte d'una cònica no degenerada  $\mathcal{C}$  és simètrica.

**Prova:** La relació de conjugació

$$(\eta)\overline{A}(\eta')^T = 0$$

equivale a

$$(\eta')\overline{A}^T(\eta)^T = 0,$$

i com que  $\overline{A}$  és una matriu simètrica, això estableix l'afirmació.  $\square$

És per altra banda clar, directament a partir de la definició, que

**4.20** Els punts de la polar d'un punt  $Q$  són els punts conjugats amb  $Q$ . Per tant, la polar d'un punt  $Q$  passa per un punt  $Q'$  si i només si la polar de  $Q'$  passa per  $Q$ .

**E.4.34.** Proveu que les polars dels punts d'una recta  $L$  respecte d'una cònica no degenerada formen el feix de rectes el focus del qual és el pol de  $L$ .

**E.4.35.** Sigui  $\mathcal{C}$  una cònica no degenerada i  $Q$  un punt que no pertany a  $\mathcal{C}$ . Sigui  $L$  la polar de  $Q$  respecte de  $\mathcal{C}$ . Proveu que  $L$  no és tangent a  $\mathcal{C}$ . Així, la intersecció de  $L$  i  $\mathcal{C}$  és un parell de punts diferents, diguem-ne  $P_1$  i  $P_2$ . Proveu també que les rectes  $QP_1$  i  $QP_2$  són les úniques rectes per  $Q$  que són tangents a  $\mathcal{C}$ .

El *con tangent* a la cònica projectiva  $\overline{\mathcal{C}}$  des d'un punt  $Q$  que no li pertany és el lloc geomètric format per  $Q$  i pels punts  $X \neq Q$  tals que  $QX$  és una recta tangent a  $\overline{\mathcal{C}}$ . Amb les notacions de l'exercici anterior, és la unió de les rectes  $QP_1$  i  $QP_2$ .

**4.21 Proposició.** Si  $Q = [\eta]$ , un punt  $X = [\xi]$  és del con tangent a  $\overline{\mathcal{C}}$  des de  $Q$  si i només si

$$(\eta\overline{A}\xi^T)^2 - (\eta\overline{A}\eta^T)(\xi\overline{A}\xi^T) = 0.$$

**Prova:** Els punts de la recta  $QX$  diferents de  $Q$  tenen la forma  $[t\eta + \xi]$ . Per tant, els punts d'intersecció de  $QX$  amb  $\bar{C}$  es corresponen a les solucions  $t$  de l'equació  $(t\eta + \xi)\bar{A}(t\eta + \xi)^T = 0$ , és a dir, de l'equació

$$(\eta\bar{A}\eta^T)t^2 + 2(\eta\bar{A}\xi^T)t + \xi\bar{A}\xi^T = 0.$$

Ara la condició per tal que la recta  $QX$  sigui tangent és que la darrera equació tingui una arrel doble, això és, que el seu discriminant sigui 0. Com que el discriminant de l'equació esmentada és (un quart de) l'expressió de l'esquerra de l'equació que volem establir, això acaba la demostració.  $\square$

**E.4.36.** Mostreu que el con de les tangents a una hipèrbola des del seu centre està format per les dues asímptotes.

### Càlcul de l'eix i el vèrtex d'una paràbola

Suposem que hem determinat que una cònica [4.16] és una paràbola. Llavors, coneixem el paràmetre focal,  $p = \sqrt{-D_3/d_1^3}$ , però ens manca conèixer l'eix i el vèrtex per tal de tenir una determinació completa de la figura.

La direcció de l'eix és immediata: com que l'eix de la paràbola és  $O'y'$  (en coordenades canòniques), tot vector propi no nul  $v$  de valor propi 0 ( $= \lambda_2$ ) és un vector director de l'eix de la paràbola. Per determinar el vèrtex, sigui  $v'$  un vector no nul perpendicular a  $v$  i considerem el punt  $[v']$  de la recta de l'infinit. Atès que l'eix de la paràbola és perpendicular a la tangent, diguem-ne  $L$ , el punt  $[v']$  és de  $L$ . Per tant,  $[v']$  és un punt de la recta polar del vèrtex. Per la reciprocitat de la polar, en resulta que el vèrtex és incident amb la polar de  $[v']$ . Com que la recta de l'infinit és tangent a la paràbola en el punt  $[v]$  (el punt de l'infinit de l'eix), la polar de  $[v']$  també passa per  $[v]$ . En resulta que el vèrtex de la paràbola és el punt d'intersecció diferent de  $[v]$  de la polar de  $[v']$  amb la paràbola.

## 4.3 Quàdriques

Per analogia amb les còniques d'un pla, que es defineixen mitjançant polinomis quadràtics de les coordenades  $(x, y)$ , les quàdriques de l'espai de dimensió 3 són figures definides per polinomis quadràtics en les coordenades  $(x, y, z)$ .

En aquesta secció, primer estudiarem diverses quàdriques donades per «equacions canòniques» i després veurem, per un procés de «reducció» anàleg al de les còniques, que tota quàdrica és, referida a una certa referència «canònica», de la mateixa espècie que una de les considerades.

### El·lipsoïdes i hiperboloides

Considerarem primer les quàdriques donades per una equació de la forma

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = \pm 1, \quad [4.45]$$

on  $(x, y, z)$  són coordenades cartesianes rectangulars. És clar que aquesta mena de quàdriques són simètriques respecte dels plans de coordenades. En particular, són invariants per les simetries axials respecte dels eixos i per la simetria central de centre l'origen. Per aquestes raons, l'origen s'anomena *centre* de la quàdrica i els eixos  $Ox$ ,  $Oy$  i  $Oz$ , *eixos principals*. Els nombres reals  $a$ ,  $b$  i  $c$  s'anomenen *semieixos principals*.

Notem que si  $a = b$ , la quàdrica és invariant per rotacions al voltant de l'eix  $Oz$ . Es diu en aquest cas que la quàdrica és *de revolució* respecte de l'eix  $Oz$ , i també que  $Oz$  és *eix de revolució*.

Si ara el signe del terme  $\frac{z^2}{c^2}$  és positiu, la quàdrica és un *el·lipsoïde*, i si és negatiu, un *hiperboloides*. Els el·lipsoïdes són els anàlegs en dimensió 3 de les el·lipses. De la mateixa manera, els hiperboloides són anàlegs de les hipèrboles, però cal tenir en compte que n'hi ha de dues menes: els d'un full (o *reglats*, perquè contenen rectes) i els de dos fulls (o *no reglats*, perquè no contenen rectes).

#### El·lipsoïdes

L'el·lipsoïde  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$  no té punts reals, i per això diem que és un *el·lipsoïde imaginari*. És anàleg a l'el·lipse imaginària. En canvi, l'el·lipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad [4.46]$$

té punts reals, com per exemple  $(\pm a, 0, 0)$ , i s'anomena *el·lipsoïde real*. És anàleg a l'el·lipse real.

Per veure quina mena de figura geomètrica és un el·lipsoïde real, estudiarem les figures que s'obtenen tallant-lo amb una família de plans paral·lels a un pla de coordenades qualsevol. Considerem, per exemple, el pla  $z = k$ , on  $k$  és un nombre real arbitrari. La intersecció està formada pels punts  $(x, y, k)$  tals que

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{k^2}{c^2}.$$

Si  $k^2/c^2 < 1$ , és a dir, si  $-c < k < c$ , es tracta d'una el·lipse amb centre el punt  $(0, 0, k)$ , eixos paral·lels a  $Ox$  i  $Oy$ , i semieixos  $a\sqrt{1 - k^2/c^2}$  i  $b\sqrt{1 - k^2/c^2}$  (vegeu la figura 4.11). És, doncs, una el·lipse semblant a l'el·lipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , i com que la raó de semblança,  $\sqrt{1 - k^2/c^2}$ , tendeix a 0 quan  $k$  tendeix a  $c$  (en valor absolut), les dimensions de la corresponent el·lipse també tendeixen a zero.

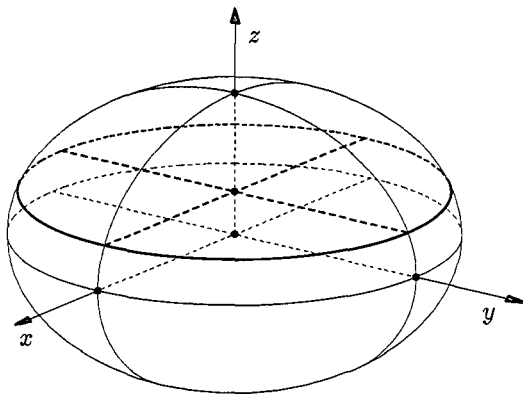


Figura 4.11: El·lipsoide

Si  $k^2/c^2 = 1$ , és a dir, si tallem per un dels plans  $z = \pm c$ , la figura que obtenim és un parell de rectes imaginàries conjugades. L'únic punt real d'aquesta intersecció és  $(0, 0, \pm c)$ . Finalment, si  $k^2/c^2 > 1$ , la secció és una el·lipse imaginària.

Una anàlisi semblant mostra que les seccions de l'el·lipsoide real per plans de la forma  $y = k$  (o  $x = k$ ) són el·lipses reals si  $-b < k < b$  (si  $-a < k < a$ ), el·lipses imaginàries si  $k > b$  o  $k < -b$  (si  $k > a$  o  $k < -a$ ), i un parell de rectes imaginàries conjugades si  $k = \pm b$  (si  $k = \pm a$ ).

Si en l'el·lipsoide [4.46] es compleix  $a = b$  (per exemple), llavors és un el·lipsoide de revolució respecte de l'eix  $Oz$ . En el cas  $a = b = c$ , l'el·lipsoide és una *esfera* de radi  $a$  i centre a l'origen.

**E.4.37.** Mostreu que una equació amb la forma

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2px + 2qy + 2rz + s = 0,$$

on  $p, q, r, s \in \mathbb{R}$  satisfan  $p^2 + q^2 + r^2 - s \geq 0$ , representa una esfera de centre  $(-p, -q, -r)$  i radi  $\sqrt{p^2 + q^2 + r^2 - s}$  (si  $p^2 + q^2 + r^2 - s < 0$ , es diu que l'equació representa una *esfera imaginària*).

**E.4.38.** Proveu que per quatre punts independents passa una única esfera, i expliqueu com se'n pot trobar l'equació.

**E.4.39.** Donats dos punts  $A = (a, b, c)$  i  $A' = (a', b', c')$ , comproveu que l'equació

$$(x - a)(x - a') + (y - b)(y - b') + (z - c)(z - c') = 0$$

representa l'esfera que té el segment  $AA'$  com a diàmetre.

### Hiperboloide d'un full (o reglat)

Té per equació

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad [4.47]$$

Les secció amb el pla  $z = k$ ,  $k \in \mathbb{R}$ , és una el·lipse amb centre  $(0, 0, k)$ , eixos principals paral·lels a  $Ox$  i  $Oy$ , i amb semieixos  $a\sqrt{1 + \frac{k^2}{c^2}}$  i  $b\sqrt{1 + \frac{k^2}{c^2}}$ . Són el·lipses semblants entre elles (circumferències si  $a = b$ ) i que creixen indefinidament quan  $|k|$  creix indefinidament. La més petita d'aquestes el·lipses s'obté per  $k = 0$ : l'el·lipse que en resulta s'anomena *el·lipse de gola* de l'hiperboloide (vegeu la figura 4.12).

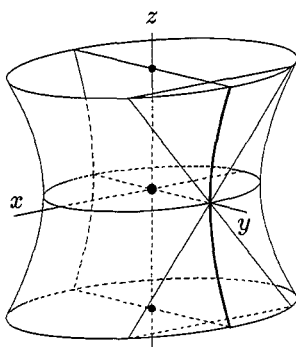


Figura 4.12: Hiperboloide d'un full, o reglat

Les seccions pels plans  $y = k$  ( $x = k$ ),  $k \in \mathbb{R}$ , són hipèrboles quan  $|k| \neq b$  ( $|k| \neq a$ ), amb eix principal paral·lel a l'eix  $Oz$  o a l'eix  $Ox$  ( $Oy$ ), segons que  $|k| < b$  ( $|k| < a$ ) o  $|k| > b$ , ( $|k| > a$ ), i un parell de rectes reals quan  $|k| = b$  ( $|k| = a$ ) —vegeu la figura 4.12, en la qual hem inclòs una representació de la hipèrbola que s'obté tallant pel pla  $x = 0$  i del parell de rectes que s'obté tallant pel pla  $y = b$ .

En particular, veiem que l'hiperboloide d'un full conté rectes, propietat que s'evoca usualment dient-ne un *hiperboloide reglat*. En general, les rectes contingudes en una quàdrica s'anomenen *generatrius*.

**E.4.40.** Siguin  $a, b, c$  nombres reals positius fixats. Donat un nombre real  $k$ , sigui  $\ell_k$  la recta donada per les equacions

$$k\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) + \frac{y}{b} - 1 = 0, \quad \frac{x}{a} + \frac{z}{c} - k\left(\frac{y}{b} + 1\right) = 0, \quad [4.48]$$

i  $\ell_\infty$  la recta donada per les equacions

$$\frac{x}{a} - \frac{z}{c} = 0, \quad \frac{y}{b} + 1 = 0, \quad [4.48']$$

Proveu que la recta  $\ell_k$  està continguda a l'hiperboloide [4.47] per a tot  $k \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  (d'aquestes rectes en direm *generatrius de tipus  $\ell$* ). Anàlogament, la recta  $\ell'_k$  donada per les equacions

$$k\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) + \frac{y}{b} - 1 = 0, \quad \frac{x}{a} - \frac{z}{c} - k\left(\frac{y}{b} + 1\right) = 0, \quad [4.49]$$

amb  $\ell'_\infty$  definida per

$$\frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 0, \quad \frac{y}{b} + 1 = 0. \quad [4.49']$$

està continguda a l'hiperboloide [4.47] (d'aquestes rectes, en direm *generatrius de tipus  $\ell'$* ).

**E.4.41.** Amb les mateixes notacions que en l'exercici anterior, proveu que:

- 1) Per un punt de l'hiperboloide [4.47] passa exactament una generatriu de tipus  $\ell$  i una generatriu de tipus  $\ell'$ .
- 2) Dues generatrius diferents de tipus  $\ell$  (de tipus  $\ell'$ ) es creuen.
- 3) Les rectes  $\ell_k$  i  $\ell_{-1/k}$  són paral·leles per a tot  $k \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  (aquí convenim que  $-1/0 = \infty$  i  $-1/\infty = 0$ ).
- 4) Si  $kk' + 1 \neq 0$ , la intersecció de la recta  $\ell_k$  i la recta  $\ell'_{k'}$  ( $k, k' \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ ) és el punt

$$\left( \frac{a(k+k')}{1+kk'}, \frac{b(1-kk')}{1+kk'}, \frac{c(k-k')}{1+kk'} \right).$$

### Hiperboloide de dos fulls (o no reglat)

És la figura

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1.$$

Les seccions per  $z = k$  són el·lipses reals (imaginàries) si  $|k| > c$  (si  $|k| < c$ ) i dues rectes imaginàries conjugades per  $|k| = c$ . Si  $|k| > c$ , el centre de l'el·lipse que resulta de tallar pel pla  $z = k$  és  $(0, 0, k)$ , els seus eixos principals són paral·lels a  $Ox$  i  $Oy$ , i el valor dels seus semieixos és  $a\sqrt{k^2/c^2 - 1}$  i  $b\sqrt{k^2/c^2 - 1}$ , respectivament.

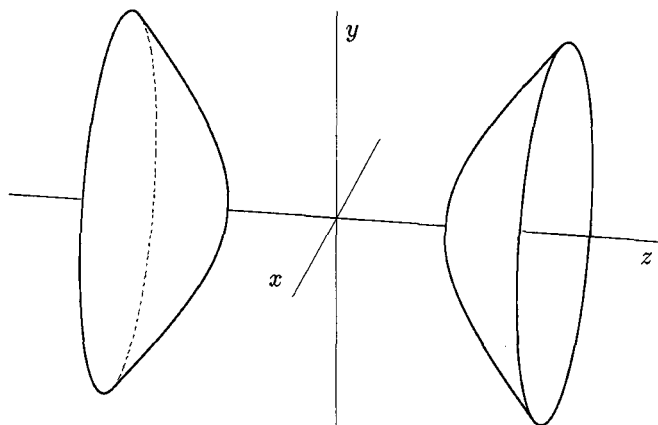


Figura 4.13: Hiperboloide de dos fulls, o no reglat

Aquests fets són els que justifiquen que ens referim a aquesta figura dient que té dos fulls (figura 4.13). Les seccions per  $x$  constant, i per  $y$  constant, són hipèrboles amb eix principal paral·lel a l'eix  $Oz$ .

### Paraboloides

Hi ha dues menes de quàdriques anàlogues a les paràboles del pla: els *paraboloides el·líptics* i els *paraboloides hiperbòlics*.

#### Paraboloide el·líptic (o no reglat)

Té l'equació

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z,$$

amb  $a$  i  $b$  nombres reals positius. La secció amb el pla  $x = k$  (el pla  $y = k$ ),  $k$  constant, és la paràbola  $y^2 = 2b^2(z - k^2/2a^2)$  (la paràbola  $x^2 = 2a^2(z - k^2/2b^2)$ ). En canvi, la secció per  $z = k$  és una el·lipse real si  $k > 0$ , una el·lipse imaginària si  $k < 0$ , i dues rectes imaginàries conjugades si  $k = 0$  (figura 4.14).

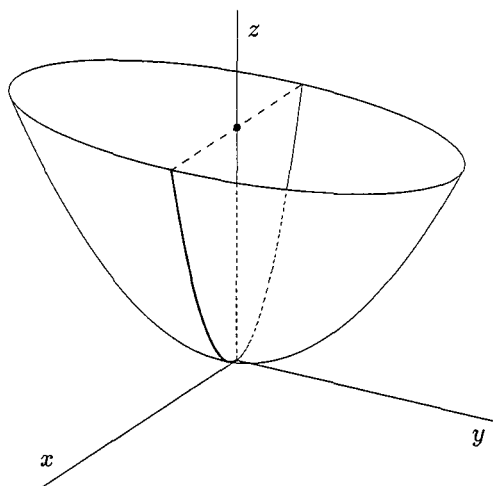


Figura 4.14: *Paraboloide el·líptic, o no reglat*

Si es compleix que  $a = b$ , el paraboloide el·líptic és de revolució respecte de l'eix  $Oz$ .

#### Paraboloide hiperbòlic (o reglat)

És la quàdrica donada per l'equació

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z. \quad [4.50]$$

Les seccions per  $z = k$  són hipèrbol·les si  $k \neq 0$ . Més precisament, si  $k > 0$  (si  $k < 0$ ), la secció pel pla  $z = k$  és una hipèrbola amb eix principal paral·lel a  $Ox$  (a  $Oy$ ), eix secundari paral·lel a  $Oy$  (a  $Ox$ ), i amb semieixos  $a\sqrt{2k}$  i  $b\sqrt{2k}$  ( $b\sqrt{-2k}$  i  $a\sqrt{-2k}$ ). La secció pel pla  $z = 0$  és un parell de rectes reals. Les seccions per  $x = k$  o  $y = k$  són

paràboles amb eix paral·lel a  $Oz$ , en el primer cas amb orientació contrària (paràbola amb les «branques» avall) i en el segon amb orientació coincident (paràbola amb les «branques» amunt).

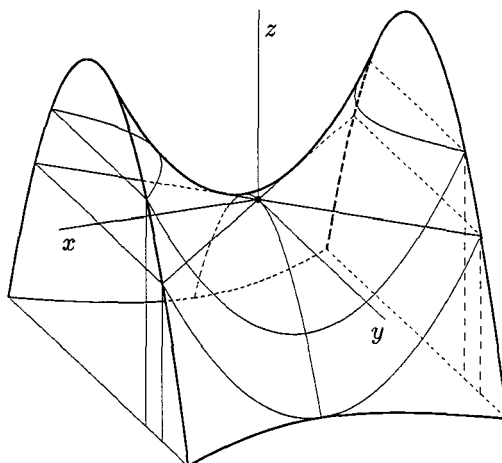


Figura 4.15: Paraboloides hiperbòlics, o reglats

**E.4.42.** Siguin  $a$  i  $b$  dos nombres reals positius fixats. Per a tot nombre real  $k$ , sigui  $\ell_k$  la recta definida per les equacions

$$k\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = z, \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 2k \quad [4.51]$$

i  $\ell'_k$  la recta definida per les equacions

$$k\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = z, \quad \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 2k. \quad [4.51']$$

Proveu que:

- 1) Les rectes  $\ell_k$  i  $\ell'_k$  estan contingudes en el paraboloides [4.50].
- 2) Per qualsevol punt del paraboloides [4.50] passa exactament una recta de tipus  $\ell$  i una recta de tipus  $\ell'$ .
- 3) Dues rectes distintes de tipus  $\ell$  (de tipus  $\ell'$ ) es creuen.
- 4) Si  $k, k' \in \mathbb{R}$ , la intersecció de les rectes  $\ell_k$  i  $\ell'_{k'}$  és el punt

$$(a(k + k'), b(k - k'), 2kk').$$

**Cons**

La quàdrica

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad [4.52]$$



és anàloga a un parell de rectes reals i, atès que està formada, com veurem, per rectes que passen per l'origen, en direm *con real*.

És clar que la secció pel pla  $z = k$ , amb  $k \in \mathbb{R}$  no nul, és una el·lipse amb centre en el punt  $(0, 0, k)$ , eixos principals paral·lels a  $Ox$  i  $Oy$ , i amb semieixos  $a|k|/c$  i  $b|k|/c$  (vegeu la figura 4.16). La secció pel pla  $z = 0$  és un parell de rectes imaginàries conjugades.

Les dimensions de l'el·lipse  $C_k$  obtinguda tallant el con amb el pla  $z = k$  creixen proporcionalment al valor absolut de  $k$ . Aquest fet es pot precisar més amb l'observació següent: si  $P = (x, y, z)$  és un punt del con diferent de l'origen  $O$ , llavors la recta  $OP$  està continguda en el con. En particular, l'homotècia de centre  $O$  i raó  $\rho > 0$  transforma  $C_k$  en  $C_{\rho k}$ . També és clar que el con és la unió de les rectes  $OP$ , quan  $P$  recorre els punts de  $C_k$ , per un  $k$  no nul donat. Direm que  $O$  és el *vèrtex* del con i que  $C_k$  és, per un  $k$  no nul qualsevol, una *directriu*.

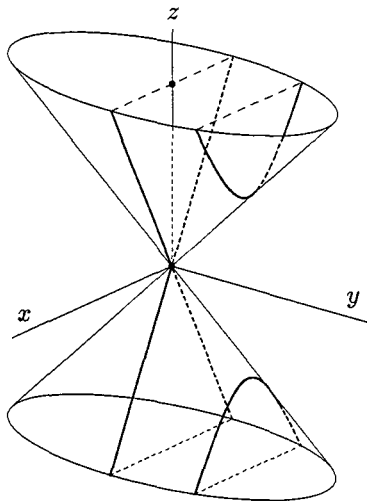


Figura 4.16: Con real

Les secció del con [4.52] amb el pla  $y = k$  (el pla  $x = k$ ),  $k \in \mathbb{R}$  no nul, és una hipèrbola amb eixos principals paral·lels a  $Oz$  i  $Ox$  ( $Oz$  i  $Oy$ ) i amb semieixos  $c|k|/b$  i  $a|k|/b$  (semieixos  $c|k|/a$  i  $b|k|/a$ ). En canvi, la secció amb el pla  $y = 0$  (el pla  $x = 0$ ) és un parell de rectes. A la figura 4.16 hem representat la secció amb el pla  $y = 1/2$  i el parell de rectes que s'obté tallant amb el pla  $y = 0$ .

Les rectes contingudes en un con s'anomenen *generatrius*. En l'exercici que segueix s'estableix, d'una manera més explícita, com són les generatrius del con [4.52].

**E.4.43.** Siguin  $a, b, c$  nombres reals positius fixats. Per a tot  $s \in \mathbb{R}$ , sigui  $\ell_s$  la recta donada per les equacions

$$s\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = \frac{y}{b}, \quad \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = -s\frac{y}{b}, \quad [4.53]$$

i  $\ell_\infty$  la donada per les equacions

$$\frac{x}{a} - \frac{z}{c} = 0, \quad y = 0. \quad [4.53']$$

Proveu que  $s \mapsto \ell_s$  estableix una bijecció entre  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$  i el conjunt de generatrius de [4.52]. Deduïu-ne que l'aplicació

$$s \mapsto \left( a \frac{1-s^2}{1+s^2}, \frac{2bs}{1+s^2}, c \right)$$

si  $s \in \mathbb{R}$ ,  $\infty \mapsto (-a, 0, c)$ , estableix una bijecció entre  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$  i l'el·lipse  $C_c$  (secció de [4.52] amb el pla  $z = c$ ).

La quàdrica donada per l'equació

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad [4.54]$$

només conté un punt real: l'origen. Per analogia amb el con real [4.52], en direm *con imaginari*. Per a tot nombre real no nul  $k$ , la secció d'aquesta quàdrica pel pla  $z = k$  (o  $x = k$ , o  $y = k$ ) és una el·lipse imaginària, mentre que la secció per  $z = 0$  (o  $x = 0$ , o  $y = 0$ ) és un parell de rectes imaginàries conjugades.

Els cons apareixen quan estudiem el comportament a l'infinit de la quàdrica [4.45]. En efecte, si  $(X, Y, Z, W)$  són les coordenades projectives corresponents a les coordenades  $(x, y, z)$ , de manera que  $x = X/W$ ,  $y = Y/W$  i  $z = Z/W$ , l'equació [4.45] és equivalent, per a  $W \neq 0$ , a l'equació

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} \pm \frac{Z^2}{c^2} = \pm W^2.$$

Els punts de l'infinit que compleixen aquesta equació són els punts  $[X, Y, Z, 0]$  tals que

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} \pm \frac{Z^2}{c^2} = 0.$$

És clar, però, que aquest conjunt coincideix amb el conjunt de punts de l'infinit de les generatrius del con

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = 0. \quad [4.55]$$

Aquest con és real si la quàdrica [4.45] és un hiperboloide (vegeu les figures 4.17 i 4.18) i és imaginari si l'esmentada quàdrica és un el·lipsoide (real o imaginari). En qualsevol cas, aquest con s'anomena *con asimptòtic* de la quàdrica.

### Cilindres

Si  $q(x, y)$  és un polinomi quadràtic en les coordenades  $x, y$ , sabem que la figura de  $\mathbb{A}^2$  representada per l'equació  $q(x, y) = 0$  és una cònica  $\mathcal{C}$ . Ara bé, si mirem el polinomi  $q(x, y)$  com un polinomi en les coordenades  $(x, y, z)$  de  $\mathbb{A}^3$ , llavors la quàdrica  $\mathcal{C}'$  de  $\mathbb{A}^3$  representada per l'equació  $q(x, y) = 0$  és la unió de les rectes paral·leles a l'eix  $Oz$  que passen per un punt variable de  $\mathcal{C}$ . Per exemple, si  $\mathcal{C}$  és un parell de rectes (reals o

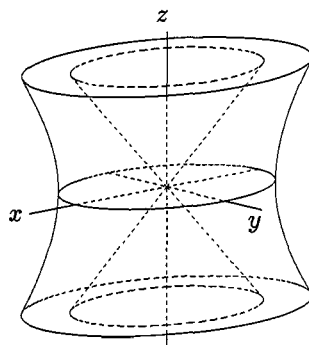


Figura 4.17: Con asimptòtic d'un hiperboloide d'un full

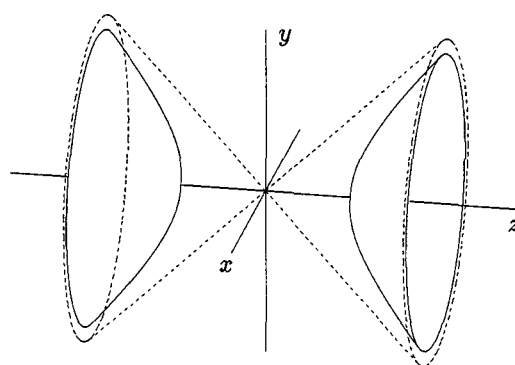


Figura 4.18: Con asimptòtic d'un hiperboloide de dos fulls

imaginàries, diferents o coincidents), llavors  $C'$  és un *parell de plans* (reals o imaginaris, diferents o coincidents).

En el cas en què  $C$  és no degenerada, es diu que la quàdrica  $C'$  és un *cilindre* de base  $C$ , i que les rectes per un punt de  $C$  paral·leles a  $Oz$  són les seves *generatrius*. Com que les generatrius d'un cilindre són concurrents en un punt impropri, els cilindres són *cons amb el vèrtex a l'infinit*. Un cilindre es diu *el·líptic* (real o imaginari), *hiperbòlic* o *parabòlic* segons que la seva base sigui una el·lipse (real o imaginària), una hipèrbola o una paràbola.

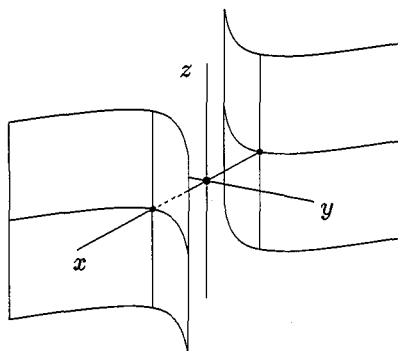


Figura 4.19: Cilindre hiperbòlic

### Quàdrica general i equacions reduïdes

Donat un polinomi quadràtic real

$$\phi(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fxy + 2gxz + 2hyz + 2px + 2qy + 2rz + d \quad [4.56]$$

en les coordenades rectangulars  $(x, y, z)$ , direm que l'equació  $\phi(x, y, z) = 0$  defineix una quàdrica, que denotarem  $\mathcal{Q}_\phi$ . Recordem que convenim que la definició de *quadràtic* inclou la condició que la *part principal* de  $\phi(x, y, z)$ ,

$$\phi_2(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fxy + 2gxz + 2hyz, \quad [4.57]$$

no és idènticament nula.

Un punt  $(\alpha, \beta, \gamma)$  pertany a la quàdrica  $\mathcal{Q}_\phi$  si i només si  $\phi(\alpha, \beta, \gamma) = 0$ . El punt es diu *real* si  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ , i es diu *imaginari* si  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$  amb  $\alpha$  imaginari o  $\beta$  imaginari o  $\gamma$  imaginari. Si  $(\alpha, \beta, \gamma)$  és un punt imaginari, direm que  $(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma})$  és el seu *punt conjugat*. Com que  $\phi(x, y, z)$  és un polinomi real,  $\mathcal{Q}_\phi$  conté, amb cada un dels seus punts imaginaris, el seu conjugat.

Si  $(x', y', z')$  és un altre sistema de coordenades rectangulars i

$$\phi'(x', y', z') = a'x'^2 + b'y'^2 + c'z'^2 + 2f'x'y' + 2g'x'z' + 2h'y'z' + 2p'x' + 2q'y' + 2r'z' + d'$$

és un polinomi quadràtic real en  $(x', y', z')$ , direm que  $\mathcal{Q}_\phi$  coincideix amb  $\mathcal{Q}_{\phi'}$ , o que les equacions  $\phi(x, y, z) = 0$  i  $\phi'(x', y', z') = 0$  defineixen la *mateixa* quàdrica, si i només si existeix un nombre real no nul  $\rho$  tal que és

$$\phi'(x', y', z') = \rho \tilde{\phi}(x', y', z'), \quad [4.58]$$

on  $\tilde{\phi}(x', y', z')$  denota el polinomi en  $(x', y', z')$  que s'obté substituint les coordenades  $(x, y, z)$  del polinomi  $\phi(x, y, z)$  per les expressions del canvi a les coordenades  $(x', y', z')$ . En particular, dos polinomis  $\phi(x, y, z)$  i  $\phi'(x, y, z)$  en les mateixes coordenades rectangulars defineixen la mateixa quàdrica si i només si existeix un nombre real no nul  $\rho$  tal que  $\phi'(x, y, z) = \rho\phi(x, y, z)$  (i en aquest cas direm que els polinomis són *equivalents*).

**E.4.44.** Siguin  $\phi(x, y, z)$  i  $\phi'(x', y', z')$  polinomis quadràtics en les coordenades rectangulars  $(x, y, z)$  i  $(x', y', z')$ , respectivament. Sigui  $P$  un punt i suposem que  $(\alpha, \beta, \gamma)$  i  $(\alpha', \beta', \gamma')$  són les coordenades de  $P$  relatives a les dues referències. Comproveu que si les equacions  $\phi(x, y, z) = 0$  i  $\phi'(x', y', z') = 0$  defineixen la mateixa quàdrica, llavors el punt  $(\alpha, \beta, \gamma)$  pertany a  $\mathcal{Q}_\phi$  si i només si el punt  $(\alpha', \beta', \gamma')$  pertany a  $\mathcal{Q}_{\phi'}$ .

### Matrius associades

Posem

$$A = \begin{pmatrix} a & f & g \\ f & b & h \\ g & h & c \end{pmatrix} \quad [4.59]$$

i diem que és la *matriu principal* del polinomi [4.56]. Anàlogament, definim

$$\overline{A} = \left( \begin{array}{c|c} A & w^T \\ \hline w & d \end{array} \right), \quad w = (p, q, r), \quad [4.60]$$

i diem que és la *matriu* del polinomi [4.56]. També diem que  $A$  és la *matriu principal* de  $\overline{A}$ . Per raons que esdevindran clares a la secció 4.5, les matrius  $\overline{A}$  i  $A$  també s'anomenen *matriu projectiva* i *matriu a l'infinit* del polinomi [4.56].

El coneixement de  $A$  equival al de la part principal de  $\phi(x, y, z)$ , ja que

$$\phi_2(x, y, z) = (x, y, z)A(x, y, z)^T. \quad [4.61]$$

Anàlogament, el coneixement de  $\overline{A}$  equival al de  $\phi(x, y, z)$ , ja que

$$\phi(x, y, z) = (x, y, z, 1)\overline{A}(x, y, z, 1)^T. \quad [4.62]$$

Notem, però, que la quàdrica  $\mathcal{Q}_\phi$  només determina  $\overline{A}$  llevat d'un factor real no nul i és per aquesta raó que, quan ens calgui tenir en compte aquesta indeterminació en referir-nos a  $\overline{A}$  (o a  $A$ ), escriurem  $[\overline{A}]$  (o  $[A]$ ).

Vegem com canvien les matrius  $A$  i  $\overline{A}$  quan fem un canvi de coordenades. Siguin  $x = (x, y, z)$  i  $x' = (x', y', z')$  dos sistemes de coordenades rectangulars i  $\bar{x} = (x, y, z, 1)$ ,  $\bar{x}' = (x', y', z', 1)$  les corresponents coordenades projectives. Siguin

$$x^T = Mx'^T + p^T, \quad M \in O(3), \quad p \in \mathbb{R}^3$$

les equacions del canvi de coordenades, que es poden escriure, equivalentment,

$$\bar{x}^T = \overline{M} \bar{x}'^T, \quad \overline{M} = \left( \begin{array}{c|c} M & p^T \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right).$$

**4.22 Proposició.** Donat un polinomi quadràtic  $\phi(x) = \phi(x, y, z)$  en les coordenades  $x = (x, y, z)$ , amb matriu  $\overline{A}$  i matriu principal  $A$ , el polinomi  $\tilde{\phi}(x') = \tilde{\phi}(x', y', z')$  definit per la fórmula  $\tilde{\phi}(x') = \phi(x'M^T + p)$  té matriu  $\overline{A}' = \overline{M}^T \overline{A} \overline{M}$  i matriu principal  $A' = M^T A M$ .

**Prova:** En efecte, com que  $\phi(x) = \bar{x} \overline{A} \bar{x}^T$ , tenim

$$\tilde{\phi}(x') = \bar{x}' \overline{M}^T \overline{A} \overline{M} \bar{x}'^T.$$

Si ara posem  $\overline{A}'$  per indicar la matriu de  $\tilde{\phi}(x')$ , també tenim que

$$\tilde{\phi}(x') = \bar{x}' \overline{A}' \bar{x}'^T.$$

Per tant,  $\bar{x}' \overline{A}' \bar{x}'^T = \bar{x}' \overline{M}^T \overline{A} \overline{M} \bar{x}'^T$ , i com que aquesta igualtat és vàlida per a tot  $x'$ , en podem deduir que  $\overline{A}' = \overline{M}^T \overline{A} \overline{M}$ .

La segona igualtat de l'enunciat segueix de la primera pel fet que la matriu principal de  $\overline{A}'$  és  $A'$  i la de  $\overline{M}^T \overline{A} \overline{M}$  és  $M^T A M$ .  $\square$

**4.23 Proposició.** Donat un sistema de coordenades rectangulars  $x = (x, y, z)$  i un polinomi quadràtic  $\phi(x, y, z)$ , existeix un sistema de coordenades rectangulars  $x' = (x', y', z')$  tal que la part principal del polinomi  $\tilde{\phi}(x', y', z')$  té la forma

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2, \quad \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$$

(en direm *forma diagonal*). A més,  $\lambda_1, \lambda_2$  i  $\lambda_3$  són els valors propis de la matriu principal de  $\phi(x, y, z)$ .

**Prova:** Si  $A$  és la matriu principal de  $\phi(x, y, z)$ , la matriu principal de  $\tilde{\phi}(x', y', z')$  és  $A' = M^T A M$ , per a una certa  $M \in O(3)$ . Com que  $M^T = M^{-1}$ , tenim  $A' = M^{-1} A M$ . D'això segueix que  $A$  i  $A'$  tenen el mateix polinomi característic i, per tant, els mateixos valors propis. Si, a més,  $A' = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ , llavors és clar que  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  són, necessàriament, els valors propis de  $A$ . Així, doncs, només ens resta demostrar la primera part de l'enunciat.

Com que el polinomi característic de  $A$  és un polinomi real de grau 3, veiem que  $A$  té un valor propi real. Sigui  $\lambda_1$  un tal valor propi. Si posem  $\varphi = \varphi_A$  per indicar l'endomorfisme que té matriu  $A$  respecte dels eixos  $e_1, e_2, e_3$  de la referència, llavors existeix un vector propi no nul de  $\varphi$  de valor propi  $\lambda_1$ . Si  $u_1$  és un tal vector, sense pèrdua de generalitat podem suposar que és unitari. Siguin  $u_2$  i  $u_3$  vectors unitaris tals

que  $u_1, u_2, u_3$  formen una base ortonormal i posem  $M \in O(3)$  per indicar la matriu d'aquesta base respecte de  $(e_1, e_2, e_3)$ . Llavors la matriu de  $\varphi$  respecte de  $(u_1, u_2, u_3)$ , que és  $M^{-1}AM = M^TAM = A'$ , té la forma

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & b' & h' \\ 0 & h' & c' \end{pmatrix}.$$

Això significa que la part principal de  $\tilde{\phi}(x', y', z')$  té la forma  $\lambda_1 x'^2 + b' y'^2 + c' z'^2 + 2h' y' z'$ . Si  $h' = 0$ , la part principal de  $\tilde{\phi}(x', y', z')$  ja és diagonal. Altrament, el canvi de coordenades definit per

$$x' = \bar{x}, \quad (y', z')^T = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} (\bar{y}, \bar{z})^T,$$

amb  $\tan(2\alpha) = 2h'/(b' - c')$ , té l'efecte de convertir la matriu  $A'$  en diagonal, i això acaba la prova (vegeu la matisació que es fa a la proposició 4.10 sobre la determinació de l'angle  $\alpha$ ).  $\square$

### Equacions reduïdes

Direm que el polinomi quadràtic  $\phi'(x', y', z')$  és *reduït*, o que la quàdrica  $\mathcal{Q}_{\phi'}$  és *reduïda*, si la seva forma és una de la taula que segueix:

| Tipus                  | Formes reduïdes de les quàdriques                                                   |
|------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. Centrat             | $\mu_1 x'^2 + \mu_2 y'^2 + \mu_3 z'^2 + \mu \quad (\mu_1, \mu_2 > 0, \mu_3 \neq 0)$ |
| 2. Parabòlic           | $\mu_1 x'^2 + \mu_2 y'^2 - 2z' \quad (\mu_1 > 0, \mu_2 \neq 0)$                     |
| 3. Cilíndric centrat   | $\mu_1 x'^2 + \mu_2 y'^2 + \mu \quad (\mu_1 > 0, \mu_2 \neq 0)$                     |
| 4. Cilíndric parabòlic | $\mu_1 x'^2 - 2y' \quad (\mu_1 > 0)$                                                |
| 5. Plans paral·lels    | $\mu_1 x'^2 + \mu \quad (\mu_1 > 0)$                                                |

**4.24 Remarca.** En el tipus cilíndric centrat, es pot excloure el cas en què  $\mu < 0$  i  $\mu_2 < 0$ , ja que, si es compleixen aquestes condicions, la forma reduïda equivalent  $-\mu_2 y'^2 - \mu_1 x'^2 - \mu$  compleix  $-\mu_2, -\mu > 0$  i  $-\mu_1 < 0$ .

**4.25 Proposició.** Donat un polinomi quadràtic  $\phi(x, y, z)$  en les coordenades rectangulars  $(x, y, z)$ , existeix un sistema de coordenades rectangulars  $(x', y', z')$  i un polinomi reduït  $\phi'(x', y', z')$  tals que les equacions  $\phi(x, y, z) = 0$  i  $\phi'(x', y', z') = 0$  defineixen la mateixa quàdrica.

**Prova:** Suposem que  $\phi(x, y, z)$  és el polinomi [4.56]. La proposició 4.23 ens permet suposar, després de fer un canvi de coordenades rectangular, que la part principal de  $\phi(x, y, z)$  és diagonal, amb la qual cosa

$$\phi(x, y, z) = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^3 + 2px + 2qy + 2rz + d.$$

Si  $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \neq 0$ , tres complecions del quadrat i, si cal, un canvi de signe i una reordenació de les coordenades, ens porten a una forma reduïda de tipus centrat.

Si hi ha exactament dues  $\lambda_i$  no nul·les, podem suposar que és  $\lambda_3 = 0$  i  $\lambda_1 \lambda_2 \neq 0$ . Completant, a més, el quadrat respecte de  $x$  i  $y$ , s'arriba a un polinomi de la forma

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + 2rz + d.$$

Si  $r = 0$ , és clar que es tracta, potser després de reordenar les coordenades i de canviar de signe, d'una forma reduïda de tipus cilíndric centrat. Si  $r \neq 0$ , el canvi de  $z$  per  $z - d/2r$  ens porta a una equació que té la forma  $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + 2rz$ , amb  $r \neq 0$ , que òbviament és equivalent a una forma reduïda de tipus parabòlic.

Finalment, si hi ha un únic valor propi no nul, és clar que podem suposar que aquest valor propi és  $\lambda_1$ . Completant el quadrat respecte d'aquest valor propi, podem suposar que

$$\phi(x, y, z) = \lambda_1 x^2 + 2qy + 2rz + d.$$

Si  $q = r = 0$ , el polinomi és clarament equivalent a la forma reduïda d'un parell de plans paral·lels. Altrament, primer podem eliminar  $d$  fent el canvi  $y \mapsto y - d/2q$  si  $q \neq 0$  o el canvi  $z \mapsto z - d/2r$  si  $r \neq 0$ . Finalment, podem fer el canvi de coordenades rectangulars tal que

$$\left(x, \frac{1}{\rho}(qy + rz), \frac{1}{\rho}(-ry + qz)\right) \mapsto (x', y', z'), \text{ on } \rho = (q^2 + r^2)^{1/2},$$

que porta a una forma reduïda de tipus cilíndric parabòlic. Noteu que si  $e_1, e_2, e_3$  són els eixos de les coordenades  $x, y, z$  i  $e'_1, e'_2, e'_3$ , els de les coordenades  $x', y', z'$ , aleshores  $e'_1 = e_1$ ,  $e'_2 = \frac{1}{\rho}(qe_2 + re_3)$  i  $e'_3 = \frac{1}{\rho}(-re_2 + qe_3)$ , de manera que  $e'_1, e'_2$  i  $e'_3$  és efectivament una base ortonormal.  $\square$

### Equacions canòniques

Tota quàdrica coincideix amb una de les formes canòniques que hem estudiat als quatre primers apartats d'aquesta secció. Per veure-ho, és suficient considerar el cas de les quàdriques especificades per una equació reduïda. Ho farem considerant els diversos casos separatament. Per simplificar les expressions de les equacions reduïdes a les que arribem, escriurem  $x, y, z$  en lloc de  $x', y', z'$ .



**Quàdriques de tipus centrat.** Si  $\mu \neq 0$ , i definim nombres reals positius  $a, b, c$  per les fórmules

$$a = \sqrt{|\mu|/\mu_1}, \quad b = \sqrt{|\mu|/\mu_2}, \quad c = \sqrt{|\mu|/|\mu_3|},$$

l'equació reduïda adopta la forma

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2} \pm 1 = 0,$$

i les quatre possibilitats per als signes donen lloc a quàdriques conegudes: l'elecció  $(+, +)$ , a un el·lipsoide imaginari;  $(+, -)$ , a un el·lipsoide real;  $(-, +)$ , a un hiperboloide no reglat; i  $(-, -)$ , a un hiperboloide reglat.

Si  $\mu = 0$ , definim nombres reals positius  $a, b, c$  per les fórmules

$$a = \sqrt{1/\mu_1}, \quad b = \sqrt{1/\mu_2}, \quad c = \sqrt{1/|\mu_3|},$$

amb la qual cosa l'equació reduïda s'escriu

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

L'elecció del signe positiu dona lloc a un con imaginari i la del signe negatiu a un con real.

**Quàdriques de tipus parabòlic.** Definim nombres reals  $a$  i  $b$  per les fórmules

$$a = 1/\sqrt{\mu_1}, \quad b = 1/\sqrt{|\mu_2|}.$$

D'aquesta manera, l'equació reduïda adopta la forma

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} - 2z = 0.$$

L'elecció del signe  $+$  dona lloc a un paraboloides el·líptic, i la del signe  $-$ , a un paraboloides hiperbòlic.

**Cilindres centrats.** Suposem primer que  $\mu \neq 0$ . En aquest cas, si definim nombres reals positius  $a$  i  $b$  per les fórmules

$$a = \sqrt{|\mu|/\mu_1}, \quad b = \sqrt{|\mu|/|\mu_2|},$$

l'equació reduïda adopta la forma

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} \pm 1 = 0.$$

L'elecció  $(+, +)$  dels signes dona lloc a un cilindre el·líptic imaginari;  $(+, -)$ , a un cilindre el·líptic real;  $(-, +)$  i  $(-, -)$ , a cilindres hiperbòlics (podríem prescindir de la combinació  $(-, -)$ : vegeu la remarca 4.24).

Si  $\mu = 0$ , podem definir nombres reals positius  $a$  i  $b$  per les fórmules

$$a = 1/\sqrt{\mu_1}, \quad b = 1/\sqrt{|\mu_2|},$$

amb la qual cosa l'equació reduïda adopta la forma

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 0.$$

L'elecció del signe  $+$  dóna un parell de plans imaginaris conjugats, i la del signe  $-$ , un parell de plans reals.

**Cilindres parabòlics.** Si posem  $p = 1/\mu_1$ , l'equació reduïda s'escriu

$$x^2 - 2py = 0,$$

que és un cilindre parabòlic.

**Parell de plans paral·lels.** Suposem, primer, que  $\mu \neq 0$ . Si posem  $k = \sqrt{|\mu|/\mu_1}$ , l'equació reduïda adopta la forma

$$x^2 \pm k^2 = 0, \quad k > 0.$$

L'elecció del signe  $-$  dóna un parell de plans paral·lels, i la del signe  $+$ , a un parell de plans paral·lels imaginaris conjugats.

Si  $\mu = 0$ , l'equació reduïda és equivalent a una equació de la forma  $x^2 = 0$ , que representa un pla doble (dos plans paral·lels coincidents).

## 4.4 Invariants de les quàdriques

Els coeficients del polinomi característic de la matriu d'una quàdrica, i del polinomi característic de la seva matriu principal, permeten decidir fàcilment a quina espècie pertany i, també, escriure'n l'equació reduïda.

### Invariants

Donat un polinomi quadràtic [4.56], sigui  $\overline{A}$  la seva matriu i  $A$  la seva matriu principal. Definim nombres reals  $D_i = D_i(\overline{A})$ ,  $1 \leq i \leq 4$ ,  $d_i = d_i(A)$ ,  $1 \leq i \leq 3$ , per les fórmules següents:

$$\det(\lambda I_4 - \overline{A}) = \lambda^4 - D_1\lambda^3 + D_2\lambda^2 - D_3\lambda + D_4, \quad \det(\lambda I_3 - A) = \lambda^3 - d_1\lambda^2 + d_2\lambda - d_3.$$

L'expressió  $D_4 = \det(\bar{A})$  s'anomena *discriminant* de  $\phi(x, y, z)$  (o *discriminant de la quàdrica*  $\mathcal{Q}_\phi$  relativament a les coordenades  $x, y, z$ ). Anàlogament, l'expressió  $d_3 = \det(A)$  s'anomena *discriminant* de la part principal de  $\phi(x, y, z)$ . Remarquem que

$$d_1 = a + b + c, \quad d_2 = ab + ac + bc - (f^2 + g^2 + h^2).$$

Si  $(x', y', z')$  és un altre sistema de coordenades rectangulars, i  $\bar{A}'$  i  $A'$  són la matriu i la matriu principal de  $\tilde{\phi}(x', y', z')$ , respectivament, posarem  $D'_i = D_i(\bar{A}')$ ,  $1 \leq i \leq 4$ , i  $d'_i = d_i(A')$ ,  $1 \leq i \leq 3$ .

**4.26 Proposició.** *Es compleixen les identitats  $D'_4 = D_4$ ,  $d'_3 = d_3$ ,  $d'_2 = d_2$  i  $d'_1 = d_1$ . Si, a més a més, les dues referències tenen el mateix origen, llavors també es compleixen les identitats  $D'_3 = D_3$ ,  $D'_2 = D_2$  i  $D'_1 = D_1$ .*

**Prova:** És anàloga a la demostració de les relacions 4.14 i de la proposició 4.15, i es deixa com a exercici per al lector.  $\square$

Convé remarcar que si, en lloc de  $\bar{A}$ , uséssim  $\rho\bar{A}$ ,  $\rho$  un escalar no nul, per calcular  $\bar{A}'$ , llavors obtindríem  $D'_4 = D_4(\rho\bar{A}) = \rho^4 D_4$ ,  $d'_i = d_i(\rho\bar{A}) = \rho^i d_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ . En resulta que expressions com ara  $D_4/d_1^4$  (suposant  $d_1 \neq 0$ ) o  $D_4^3/d_3^4$  (suposant  $d_3 \neq 0$ ) són independents del sistema de coordenades i de l'equació que emprem per representar la quàdrica. Aquesta és la raó per la qual expressions com les considerades s'anomenen *invariants euclidians* (absoluts) de les quàdriques.

Observem també que l'anul·lació o no de  $D_4$ ,  $d_3$ ,  $d_2$  i  $d_1$  tampoc no depèn de l'equació de la cònica emprada per verificar-les. El mateix passa amb relacions com ara  $D_4 > 0$ ,  $d_3 d_1 > 0$  o  $d_2 > 0$ . Com que aquesta mena de relacions són les que apareixen en els enunciats, sovint, per abús de llenguatge, també ens referim a  $D_4$ ,  $d_3$ ,  $d_2$  i  $d_1$  dient que són *invariants euclidians* de les quàdriques.

Propietats similars es poden afirmar de les expressions  $D_3$ ,  $D_2$  i  $D_1$  si les dues referències tenen el mateix origen, però no en general. És per aquesta raó que, d'aquestes expressions, en direm *semiinvariants euclidians* de les quàdriques.

### Índex principal d'una quàdrica

En la classificació efectiva de les quàdriques hi intervé encara una noció més, que anomenarem *índex*, o *índex de la part principal* per ser més precisos, i que per definició és 0 o 1 segons que les arrels no nul·les del polinomi característic de  $A$  tinguin totes el mateix signe o que passi el contrari, és a dir, qui hi hagi almenys una arrel positiva i una arrel negativa.

**4.27 Lema.** *L'índex principal de  $\phi(x, y, z)$  és 1 si  $d_1 d_3 < 0$  o  $d_2 < 0$ , i és 0 altrament.*

**Prova:** Siguin  $\lambda_1, \lambda_2$  i  $\lambda_3$  els valors propis de  $A$ . El seu producte és  $d_3$  i la seva suma és  $d_1$ . Si els no nuls tenen el mateix signe, és clar que  $d_2$  i  $d_1 d_3$  són no negatius. Recíprocament, si  $d_2 \geq 0$  i  $d_1 d_3 \geq 0$ , vegem que els valors propis no nuls de  $A$  han de tenir el mateix signe. Això és obvi si només hi ha un valor propi no nul. Si hi ha exactament dos valors propis no nuls, llavors  $d_2$  és el producte d'ells i, atès que suposem  $d_2 \geq 0$ , han de tenir el mateix signe.

Manca examinar el cas en què els tres valors propis són no nuls. Com que les relacions  $d_2 \geq 0$  i  $d_1 d_3 \geq 0$  no depenen de l'ordre dels valors propis i, a més, romanen les mateixes condicions si canviem tots tres valors de signe, podem suposar que  $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ . Si aquest és el cas, es tracta de veure que  $\lambda_3 > 0$ . Ara bé, la relació  $d_2 \geq 0$  ens dona  $\lambda_1 \lambda_2 \geq -\lambda_3(\lambda_1 + \lambda_2)$ , i la relació  $d_1 d_3 \geq 0$  ens dona  $\lambda_3(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) \geq 0$ . Si fos  $\lambda_3 < 0$ , tindríem  $-\lambda_3 \geq \lambda_1 + \lambda_2$  i, per tant,  $\lambda_1 \lambda_2 \geq (\lambda_1 + \lambda_2)^2$ , la qual cosa és clarament absurda.  $\square$

Com que les relacions  $d_2 \geq 0$  i  $d_1 d_3 \geq 0$  no depenen de la referència rectangular en la qual les mirem, ni d'un factor escalar arbitrari del polinomi  $\phi(x, y, z)$ , podem definir l'*índex principal* d'una quàdrica com l'índex d'una qualsevol de les seves equacions. En el que segueix, posarem  $j$  per denotar-lo.

### Classificació de quàdriques mitjançant invariants

Els cons, els cilindres i els parells de plans (reals o imaginaris conjugats, distints o coincidents) formen les quàdriques dites *degenerades*, per contrast amb el·lipsoïdes, hiperboloides i paraboloides, que són les *no degenerades*.

**4.28** Una quàdrica és no degenerada si  $D_4 \neq 0$ , i és degenerada si  $D_4 = 0$ .

**Prova:** En termes de les equacions reduïdes de la taula de la pàgina 273, en el cas del tipus centrat tenim  $D'_4 = \mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu$ , que és nul si es tracta d'un con i és no nul altrament. En el cas del tipus parabòlic,  $D'_4 = -\mu_1 \mu_2 \neq 0$ . En tots els altres casos,  $D'_4 = 0$ . Ara l'enunciat és una conseqüència directa de la proposició 4.26.  $\square$

### Quàdriques no degenerades

En el cas de les quàdriques no degenerades, raonant d'una manera similar a com ho hem fet en la prova de l'enunciat 4.28, s'obté que la quàdrica és un paraboloides si  $d_3 = 0$ , i un el·lipsoide o un hiperboloides si  $d_3 \neq 0$ . A més, aquests dos darrers casos es poden distingir per la condició  $j = 0$  i  $j = 1$ , respectivament.

**4.29** La condició  $D_4 < 0$  caracteritza els el·lipsoïdes reals entre els el·lipsoïdes ( $j = 0$ ) i els hiperboloides de dos fulls entre els hiperboloides ( $j = 1$ ).

**Prova:** En termes d'una equació reduïda,  $D'_4 = \mu_1\mu_2\mu_3\mu$ . En el cas dels el·lipsoides,  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$  tenen el mateix signe, i la condició  $D'_4 < 0$  equival a dir que  $\mu$  té el signe contrari, la qual cosa correspon als el·lipsoides reals.

En el cas dels hiperboloides, dues de les  $\mu_i$  tenen un signe (diguem-ne *signe dominant*) i la tercera té el signe contrari, de manera que la condició  $D'_4 < 0$  equival a dir que el signe de  $\mu$  coincideix amb el signe dominant, que és la condició per tal que la quàdrica sigui un hiperboloide de dos fulls.  $\square$

El signe de  $D_4$  també ens distingeix, en el cas dels paraboloides, entre els el·líptics i els hiperbòlics. De fet, sabem que  $D'_4 = -\mu_1\mu_2$  (emprant l'equació reduïda) i és clar que  $D'_4 < 0$  ( $D'_4 > 0$ ) equival a dir que  $\mu_1$  i  $\mu_2$  tenen el mateix signe (signe contrari), és a dir, a que el paraboloides és el·líptic (hiperbòlic).

### Quàdriques degenerades

Per a les quàdriques degenerades ( $D_4 = 0$ ), és clar que la condició  $d_3 \neq 0$  equival a dir que la quàdrica és un con, real si  $j = 0$  i imaginari si  $j = 1$ .

Les quàdriques degenerades tals que  $d_3 = 0$  corresponen, doncs, a quàdriques en l'equació reduïda de les quals hi apareixen dues o menys coordenades. El seu tractament és, doncs, del tot paral·lel al de les còniques d'un pla (teorema 4.16, pàg. 253). Deixem la comprovació dels detalls al lector.

### Algorisme de classificació euclidiana de les quàdriques

La taula de la pàgina següent és un quadre sinòptic del que hem dit amb relació a la classificació de les quàdriques mitjançant els invariants, però ensems es pot mirar com un algorisme de classificació.

**4.30 Exemple.** Considerem la quàdrica  $2xy - 2xz + 2yz - 4x + 1 = 0$ . El seu discriminant  $D_4$  és 2. Per tant, és no degenerada. Per altra banda, el discriminant  $d_3$  de la part principal és  $-2$ . Per seguir la classificació, hem de calcular l'índex  $j$ . Tenim  $d_1 = 0$  i  $d_2 = -3$ , de manera que el lema 4.27 ens diu que  $j = 1$ . Es tracta, doncs, d'un hiperboloide. Com que  $D_4 > 0$ , l'hiperboloide és reglat.

**4.31 Exemple.** Considerem la quàdrica

$$4x^2 + 9y^2 + 16z^2 + 12xy + 16xz + 24yz + 2x + 4y + 6z + 1 = 0.$$

Calculem  $D_4$  i trobem  $D_4 = 0$ : és una quàdrica degenerada. Calculem  $d_3$  i també trobem  $d_3 = 0$ : la quàdrica no és un con. Calculem  $d_2$  i també resulta que  $d_2 = 0$ . Per seguir, hem de calcular  $D_3$ , que és  $-6 \neq 0$ : la quàdrica és un cilindre parabòlic.

$$\left\{ \begin{array}{l} D_4 \neq 0 \\ \\ D_4 = 0 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} d_3 \neq 0 \\ \\ d_3 = 0 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} j = 0 \text{ el·lipsoide} \\ j = 1 \text{ hiperboloide} \\ \text{paraboloide} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} D_4 < 0 \text{ real} \\ D_4 > 0 \text{ imaginari} \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} D_4 < 0 \text{ dos fulls} \\ D_4 > 0 \text{ un full} \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} D_4 < 0 \text{ el·líptic} \\ D_4 > 0 \text{ hiperbòlic} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} D_4 = 0 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} d_3 \neq 0 \\ \\ d_3 = 0 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} j = 0 \text{ con imaginari} \\ j = 1 \text{ con real} \\ \\ \left\{ \begin{array}{l} d_2 \neq 0 \\ \\ d_2 = 0 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} d_2 > 0 \\ d_2 < 0 \\ \left\{ \begin{array}{l} D_3 \neq 0 \\ D_3 = 0 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} d_1 D_3 < 0 \text{ cilindre el·líptic real} \\ d_1 D_3 > 0 \text{ cilindre el·líptic im.} \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} D_3 \neq 0 \\ D_3 = 0 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{parell de plans imaginaris conjugats} \\ \text{cilindre hiperbòlic} \\ \text{parell de plans reals} \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} D_3 \neq 0 \\ D_3 = 0 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{cilindre parabòlic} \\ \left\{ \begin{array}{l} D_2 < 0 \text{ parell de plans paral·lels reals} \\ D_2 > 0 \text{ parell de plans paral·lels im. conj.} \\ D_2 = 0 \text{ pla doble} \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

**E.4.45.** Proveu que la quàdrica

$$9x^2 + 4y^2 + z^2 - 6xy - 8yz - 4x - 6y + 4z + a = 0,$$

on  $a$  és un paràmetre real, representa un hiperboloide d'un full si  $a < 2$ , un con real si  $a = 2$  i un hiperboloide de dos fulls si  $a > 2$ .

**E.4.46.** Suposem que la quàdrica  $\mathcal{Q}_\phi$  és un el·lipsoide real. Demostreu que el seu volum és igual a

$$\frac{4}{3}\pi \sqrt{\frac{D_4^3}{d_3^4}}.$$

Useu que el volum d'un el·lipsoide de semieixos  $a, b, c$  és  $\frac{4}{3}\pi abc$ . Noteu que aquesta fórmula es pot deduir a partir del volum de l'esfera de radi  $a$ ,  $\frac{4}{3}\pi a^3$ , amb un raonament similar al que hem usat per obtenir l'àrea de l'el·lipse de semieixos  $a, b$  a partir de l'àrea d'una circumferència de radi  $a$ .

### Obtenció de les equacions reduïdes a partir dels invariants

Suposem que tenim una quàdrica especificada per una equació  $\phi(x, y, z) = 0$  en unes certes coordenades rectangulars  $(x, y, z)$ . Suposem també que hem determinat l'espècie

d'aquesta quàdrica mitjançant la taula de l'apartat anterior i que hem calculat els valors propis  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  de la matriu principal de  $\phi(x, y, z)$ . Amb aquesta informació es pot escriure fàcilment la forma de l'equació reduïda. Per simplificar l'escriptura, posarem  $x, y, z$  en lloc de les coordenades  $x', y', z'$  de l'equació reduïda. A més, canviant de signe l'equació inicial, si cal, podem suposar que  $\lambda_1 > 0$  i que  $\lambda_2 > 0$  si  $\lambda_3 \neq 0$ .

### Quàdriques de tipus centrat

Si la quàdrica és de tipus centrat, la forma reduïda

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + \frac{D_4}{d_3} = 0,$$

referida a un sistema de coordenades rectangulars convenient, defineix una quàdrica que coincideix amb  $Q_\phi$ .

En efecte, en termes de l'equació reduïda de tipus centrat, tindrem  $\mu_i = \rho \lambda_i$ , per a un cert nombre real  $\rho > 0$ . Per tant,  $d'_3 = \rho^3 d_3$  i  $d'_3 \mu = D'_4 = \rho^4 D_4$ , d'on  $\mu = \rho D_4 / d_3$ .

**Exemple.** Per obtenir l'equació reduïda de l'hiperboloide reglat de l'exemple 4.30, hem de trobar els valors propis de la seva matriu principal. Com que l'equació secular d'aquesta matriu és  $\lambda^3 - 3\lambda + 2 = 0$ , veiem que els valors propis són 1, 1, -2. Com que  $D_4 = 2$  i  $d_3 = -2$ , l'equació reduïda té la forma  $x^2 + y^2 - 2z^2 - 1 = 0$ . És clar, doncs, que l'hiperboloide reglat en qüestió és de revolució.

### Quàdriques de tipus parabòlic

Hi ha dos valors propis no nuls,  $\lambda_1 > 0$  i  $\lambda_2$ . La quàdrica definida per la forma reduïda

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 - 2\sqrt{\frac{-D_4}{d_2}}z,$$

referida a un sistema de coordenades convenient, coincideix amb  $Q_\phi$ .

En efecte, en termes de l'equació reduïda de tipus parabòlic, tindrem  $\mu_i = \rho \lambda_i$ , per a un cert nombre real  $\rho > 0$ . Per tant,  $\rho^4 D_4 = D'_4 = -\mu_1 \mu_2 = -d'_2 = -\rho^2 d_2$ , d'on  $\rho = \sqrt{\frac{-d_2}{D_4}}$ , amb la qual cosa veiem que l'equació de l'enunciat s'obté multiplicant la reduïda per  $\sqrt{-D_4/d_2} = 1/\rho$ .

**E.4.47.** Comproveu que la quàdrica

$$2x^2 - y^2 - z^2 - 8xy + 2yz + 8xz + 2y + 4z = 0$$

representa un paraboloid hiperbòlic. Trobeu també la seva equació reduïda.

### Quàdriques degenerades

Els cons ja han estat considerats. Pel que fa a les altres degenerades, l'obtenció d'una equació reduïda a partir dels invariants és anàloga a l'obtenció de les equacions reduïdes de les còniques feta en la secció 4.2.

Per a les quàdriques de tipus cilíndric centrat, per exemple, la forma reduïda és

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \frac{D_3}{d_2},$$

i per a les de tipus cilíndric parabòlic, la forma reduïda és (proporcional a)

$$\lambda_1 x^2 - 2\sqrt{\frac{-D_3}{d_1}}y.$$

Finalment, la forma reduïda d'un parell de plans paral·lels és

$$\lambda_1 x^2 + \frac{D_2}{d_1}.$$

**E.4.48.** Troben l'equació reduïda del cilindre parabòlic de l'exemple 4.31.

**E.4.49.** Comproveu que la quàdrica

$$27x^2 - 4y^2 + 36z^2 + 12xy + 72xz - 6x + 4y - 1 = 0$$

és un parell de plans reals i trobeu la seva equació reduïda.

### Determinació del centre i els eixos principals de les quàdriques centrades

Es diu que un punt  $P$  és *centre* d'una quàdrica si aquesta és invariant per la simetria  $\sigma_P$ . Les quàdriques centrades tenen un únic centre: en termes de les coordenades de l'equació reduïda, és l'origen de coordenades  $[\diamond]$ .

En termes de coordenades arbitràries, les coordenades  $c = (x_0, y_0, z_0)$  del centre de la quàdrica  $\mathcal{Q}_\phi$  es determinen per la fórmula

$$c = -wA^{-1}, \quad [4.63]$$

on  $A$  és la matriu principal de  $\phi$  i on, amb les notacions de [4.56],  $w = (p, q, r)$ .

La prova d'aquest fet és anàloga a la que hem exposat per determinar les coordenades del centre d'una cònica centrada i la deixem al lector com a exercici.

Igual que en el cas de les còniques, el sistema d'equacions lineals (en les incògnites  $x_0, y_0, z_0$ ) que correspon a la relació matricial

$$cA + w = 0$$

s'anomena *sistema d'equacions del centre*. Formalment, aquestes equacions són (la meitat de) les derivades parcials de  $\phi(x, y, z)$  respecte de  $x, y, z$  (substituint-hi, és clar,  $x, y, z$  per  $x_0, y_0, z_0$ , respectivament).



**Exemple.** Les equacions del centre de l'hiperboloide reglat estudiat en l'exemple 4.30 són

$$\begin{aligned}y - z - 2 &= 0 \\x + z &= 0 \\-x + y &= 0,\end{aligned}$$

d'on resulta que el centre és el punt  $(1, 1, -1)$ .

Les rectes pel centre d'una quàdrica es diuen *diàmetres*. Un diàmetre és un *eix principal* si el seu vector director és una *direcció principal*, és a dir, un valor propi de l'endomorfisme  $\varphi_A$  que en la referència en la qual hem referit la quàdrica té matriu  $A$ . Atesa la manera com canvia la matriu principal en canviar de referència, és immediat comprovar que  $\varphi_A$  no depèn de la referència. El problema de trobar els eixos principals, doncs, és reduït a resoldre un problema de valors i vectors propis.

Si els tres valors propis de  $A$  són diferents dos a dos, hi ha exactament tres eixos principals, i aquests són els eixos de la referència reduïda. Si els tres valors propis coincideixen, tots els vectors són direccions principals i qualsevol referència rectangular amb origen en el centre és reduïda. En el cas intermedi en què exactament dos valors propis coincideixen, la quàdrica és de revolució, amb eix de revolució l'eix principal que correspon al vector propi diferent. Els altres dos eixos de la referència reduïda no estan unívocament determinats, ja que qualsevol eix perpendicular a l'eix de revolució és principal.

**E.4.50.** Proveu que una quàdrica és una esfera real si i només si  $d_1^2 - 4d_2 = 0$  i  $D_4 < 0$ .

## 4.5 Aspectes projectius de les quàdriques

A tota quàdrica de l'espai euclidià li associem una «quàdrica projectiva», de manera similar a com assignàvem una cònica projectiva a una cònica del pla euclidià. A més de poder, així, considerar els punts de l'infinit d'una quàdrica, la quàdrica projectiva ens permet donar un tractament adequat, mitjançant la noció de conjugació de punts, a la qüestió de determinar les rectes i plans tangents a una quàdrica donada. La noció de conjugació de punts permet també explicar altres propietats de les quàdriques, com ara les propietats projectives del centre i dels diàmetres.

### Quàdrica projectiva i punts de l'infinit

Si  $\bar{A}$  és la matriu de [4.56], i  $\xi = (X, Y, Z, W)$  són les coordenades projectives corresponents a les coordenades  $x = (x, y, z)$ , direm que l'equació

$$\xi \bar{A} \xi^T = 0 \tag{4.64}$$

defineix la *quàdrica projectiva*  $\overline{\mathcal{Q}}_\phi$  associada a la quàdrica  $\mathcal{Q}_\phi$ . L'equació [4.64] determina la quàdrica  $\mathcal{Q}_\phi$ , ja que si fem la substitució  $\xi \rightarrow \bar{x} = (x, y, z, 1)$  tenim  $\bar{x}\overline{A}\bar{x}^T = \phi(x)$ . Notem que si definim

$$\bar{\phi}(\xi) = aX^2 + bY^2 + cZ^2 + 2fXY + 2gXZ + 2hYZ + 2pXW + 2qYW + 2rZW + dW^2$$

(direm que aquest polinomi quadràtic homogeni és el resultat d'*homogeneïtzar*  $\phi(x, y, z)$ ), llavors

$$\bar{\phi}(\xi) = \xi\overline{A}\xi^T.$$

Els punts de l'*infinít* de la quàdrica  $\overline{\mathcal{Q}}_\phi$  són els punts  $[X, Y, Z, 0]$  tals que

$$(X, Y, Z, 0)\overline{A}(X, Y, Z, 0)^T = 0,$$

és a dir,  $(X, Y, Z)A(X, Y, Z)^T = 0$ . Direm que aquesta equació determina la *cònica de l'infinít* de la quàdrica  $\overline{\mathcal{Q}}_\phi$  (o de  $\mathcal{Q}_\phi$ ).

Vegem-ne alguns exemples. La cònica de l'infinít d'una quàdrica centrada, diguem  $\mu_1x^2 + \mu_2y^2 + \mu_3z^2 + \mu = 0$ , té equació  $\mu_1X^2 + \mu_2Y^2 + \mu_3Z^2 = 0$ . Aquesta cònica no té punts reals si la quàdrica és un elipsoide o un con imaginari, i té punts reals si la quàdrica és un hiperboloide o un con real.

En el cas d'un paraboloid  $\mu_1x^2 + \mu_2y^2 - 2z = 0$ , la cònica de l'infinít té equació  $\mu_1X^2 + \mu_2Y^2 = 0$ , és a dir, un parell de rectes imaginàries si el paraboloid és el·líptic, i un parell de rectes reals si és hiperbòlic.

### Conjugació de punts

Dos punts  $[\xi]$  i  $[\eta]$  es diuen *conjugats respecte de*  $\overline{\mathcal{Q}}_\phi$  si i només si

$$\xi\overline{A}\eta^T = 0.$$

Per exemple, un punt és conjugat d'ell mateix (direm *autoconjugat*) si i només si és un punt de la quàdrica projectiva.

Atès que  $\overline{A}$  és una matriu simètrica, tenim que dos punts  $P$  i  $Q$  són conjugats si i només si  $Q$  i  $P$  són conjugats. Direm que la *relació de conjugació és simètrica*.

### Punts dobles

Un punt es diu *doblet* si és conjugat de tot altre punt. Els punts dobles són, en particular, autoconjugats i, per tant, pertanyen a la quàdrica projectiva. Els punts de la quàdrica que no són dobles es diuen *simples*.

És immediat verificar que un punt  $[\xi]$  és doble si i només si

$$\xi\overline{A} = 0.$$

Per tant, els punts dobles formen una varietat lineal de dimensió  $3 - r$ , on  $r$  és el rang de la matriu  $\overline{A}$ . Veiem, així, que la varietat lineal de punts dobles és buida si i només si la quàdrica és no degenerada.

### Pla polar

Sigui  $Q = [\eta]$  un punt i suposem que no és un punt doble de la quàdrica projectiva. Llavors, els punts  $P = [\xi]$  que són conjugats amb  $Q$  són els que compleixen la relació

$$\eta \bar{A} \xi^T = 0.$$

Com que  $\eta \bar{A} \neq 0$ , ja que altrament  $Q$  seria un punt doble, veiem que el conjunt de punts  $P$ , que són conjugats amb un punt donat  $Q$ , formen el pla que té coordenades  $\eta \bar{A}$ . D'aquest pla en direm *pla polar* de  $Q$  respecte de la quàdrica projectiva. Si  $Q$  és un punt doble, el pla polar no està definit.

Atesa la simetria de la relació de conjugació, notem que si  $Q_1$  i  $Q_2$  són punts que no són punts dobles de la quàdrica, llavors el pla polar de  $Q_1$  passa per  $Q_2$  si i només si el pla polar de  $Q_2$  passa per  $Q_1$ .

**E.4.51.** Mostreu que el pla polar del centre d'una quàdrica centrada no degenerada és el pla de l'infinit.

Per una quàdrica no degenerada, l'aplicació de  $\mathbb{P}^3$  a  $\check{\mathbb{P}}^3$  que transforma un punt en el seu pla polar és una projectivitat. Donat un pla, es defineix el seu *pol* (respecte de la quàdrica) com l'únic punt el pla polar del qual és el pla. Per exemple, segons l'exercici anterior, el pol del pla de l'infinit, respecte d'una quàdrica centrada, és el centre d'aquesta quàdrica.

**E.4.52.** Proveu que els plans polars dels punts d'un pla  $\Pi$ , respecte d'una quàdrica no degenerada, formen el feix de plans el focus del qual és el pol de  $\Pi$ .

**E.4.53.** Donada una quàdrica no degenerada i una recta  $L$ , comproveu que el conjunt dels plans polars dels punts de  $L$  formen una recta dual. L'eix d'aquesta recta dual s'anomena *polar* de  $L$ . Mostreu que aquesta recta polar és la intersecció dels plans polars de qualssevol dos punts diferents de  $L$ .

### Tangència

Direm que una recta  $L$  és *tangent a la quàdrica projectiva en un punt*  $P$ , si  $L$  passa per  $P$  i la intersecció de  $L$  amb la quàdrica es redueix al punt  $P$  o tota ella està continguda en la quàdrica. En altres paraules, una recta continguda en la quàdrica es considera que és tangent a la quàdrica en tots els punts de la recta, mentre que per una recta no continguda en la quàdrica la condició de tangència és que talli la quàdrica en un sol punt i, en aquest cas, aquest punt és el punt on la recta i la quàdrica són tangents, del qual també en direm *punt de contacte* entre la recta i la quàdrica.

### Pla tangent en un punt simple

El resultat que segueix carateritza les rectes que són tangents a la quàdrica projectiva en un punt donat. Com veurem, això ens permetrà donar una definició natural del pla tangent a la quàdrica en el punt.

**4.32 Teorema.** *Sigui  $Q$  un punt simple de la quàdrica i  $P$  un punt diferent de  $Q$ . Llavors, la recta  $PQ$  és tangent a la quàdrica si i només si  $P$  i  $Q$  són conjugats, és a dir, si i només si  $P$  és del pla polar de  $Q$ .*

**Prova:** Sigui  $Q = [\eta]$  i  $P = [\xi]$ . Els punts de la recta  $PQ$  diferents de  $P$  tenen la forma  $[\eta + t\xi]$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Per tant, els punts d'intersecció de  $PQ$  amb la quàdrica, diferents de  $P$ , es corresponen amb les solucions  $t$  de l'equació

$$(\eta + t\xi)\overline{A}(\eta + t\xi)^T = 0.$$

Com que  $\eta\overline{A}\eta^T = 0$ , per ser  $Q$  un punt de la quàdrica, l'equació anterior equival a

$$t(2\eta\overline{A}\xi^T + t\xi\overline{A}\xi^T) = 0.$$

La solució  $t = 0$  correspon al punt  $Q$ . Ara hem de distingir dues possibilitats: que  $P$  sigui de la quàdrica projectiva o que no ho sigui.

Si  $P$  és de la quàdrica projectiva, és a dir, si  $\xi\overline{A}\xi^T = 0$ , llavors la recta conté dos punts diferents de la quàdrica i, per tant, només pot ser tangent si està continguda en la quàdrica. Però això només pot passar si  $\eta\overline{A}\xi^T = 0$  (altrament,  $P$  i  $Q$  serien els dos únics punts d'intersecció de  $PQ$  amb la quàdrica, i  $PQ$  no seria tangent), és a dir, si  $P$  és conjugat de  $Q$ .

Si  $P$  no és de la quàdrica projectiva, llavors veiem que  $PQ$  talla la quàdrica en el punt  $Q$  i el punt corresponent a  $t = -2\eta\overline{A}\xi^T/\xi\overline{A}\xi^T$ . Per tal que la recta  $PQ$  sigui tangent, aquest darrer punt ha de coincidir amb  $Q$ , és a dir, ha de ser  $\eta\overline{A}\xi^T = 0$ , que és de nou la condició que  $P$  sigui conjugat de  $Q$ .  $\square$

Si  $Q$  és un punt simple de la quàdrica projectiva  $\overline{Q}$ , definim el *pla tangent* a  $\overline{Q}$  com el pla polar de  $Q$ . El teorema anterior ens diu que tota recta per  $Q$  continguda en el pla tangent és tangent a la quàdrica en el punt  $Q$  (i només en el punt  $Q$  si la recta no està continguda en la quàdrica) i que tota recta per  $Q$  no continguda en el pla tangent talla la quàdrica, exactament, en el punt  $Q$  i un altre punt  $Q' \neq Q$ .

**E.4.54.** Mostreu que si  $Q$  és un punt doble d'una quàdrica, tota recta per  $Q$  és tangent a la quàdrica en el punt  $Q$ . Això mostra que el teorema anterior és vàlid per a tot punt  $Q$  (simple o doble) de la quàdrica projectiva.

### Con de tangents des d'un punt

Sigui  $P$  un punt que no pertany a la quàdrica projectiva. Ens plantegem trobar totes les rectes per  $P$  que són tangents a la quàdrica. Com que  $P$  no pertany a la quàdrica, aquestes rectes són les que passen per  $P$  i que tallen la quàdrica en un únic punt.

**4.33 Corol·lari.** *Si  $Q$  és un punt de la quàdrica projectiva, aleshores la recta  $PQ$  és tangent a la quàdrica (necessàriament en el punt  $Q$ ) si i només si  $Q$  és un punt de la intersecció del pla polar de  $P$  amb la quàdrica  $\overline{Q}$ .*

**Prova:** Si  $PQ = QP$  és tangent, llavors  $P$  és conjugat de  $Q$ . Per la simetria de la relació de conjugació,  $Q$  és conjugat de  $P$ . És a dir,  $Q$  pertany al pla polar de  $P$ . Recíprocament, si  $Q$  pertany al pla polar de  $P$ , llavors  $P$  és conjugat de  $Q$  i la recta  $PQ$  és tangent a la quàdrica en el punt  $Q$ .  $\square$

El con tangent a la quàdrica projectiva  $\overline{Q}$  des d'un punt  $P$  que no li pertany és el lloc geomètric format per  $P$  i pels punts  $X \neq P$  tals que  $PX$  és una recta tangent a  $\overline{Q}$ .

**4.34 Proposició.** *Si  $P = [\eta]$ , un punt  $X = [\xi]$  és del con tangent a  $\overline{Q}$  des de  $P$  si i només si*

$$(\eta \overline{A} \xi^T)^2 - (\eta \overline{A} \eta^T)(\xi \overline{A} \xi^T) = 0.$$

**Prova:** És idèntica a la del con de tangents a una cònica des d'un punt que no li pertany (proposició 4.21) i la deixem com a exercici per al lector.  $\square$

Si el punt  $P = [\bar{p}]$  és propi, l'equació del con de tangents és l'equació projectiva d'un con amb vèrtex el punt  $P$ . L'equació en les coordenades rectangulars  $\mathbf{x} = (x, y, z)$  és

$$(\bar{p} \overline{A} \bar{\mathbf{x}}^T)^2 - (\bar{p} \overline{A} \bar{p}^T)(\bar{\mathbf{x}} \overline{A} \bar{\mathbf{x}}^T) = 0.$$

**E.4.55.** Mostreu que el con de les tangents a una quàdrica centrada no degenerada des del seu centre coincideix amb el con asimptòtic.

**E.4.56.** El perfil d'una quàdrica des d'un punt  $P$  es defineix com els punts de contacte de les rectes per  $P$  que són tangents a la quàdrica. Mostreu que els punts d'aquest perfil coincideixen amb els de la intersecció del pla polar de  $P$  amb la quàdrica.

La propietat de l'exercici anterior és la que hem usat per obtenir els perfils dels gràfics de quàdriques d'aquest capítol, on el punt  $P$  és, en cada cas, el punt que hem escollit per «mirar», des d'ell, la quàdrica.

## 4.6 Problemes

**P.4.1.** Siguin  $r$  i  $s$  el rang de la matriu i de la matriu principal d'una cònica. Proveu que els possibles valors de  $(r, s)$ , i les còniques corresponents, són:

(3,2) Cònica centrada no degenerada.

(3,1) Paràbola.

(2,2) Parell de rectes no paral·leles.

(2,1) Parell de rectes paral·leles diferents.

(1,1) Recta doble.

**P.4.2** (Teorema 2/3 d'Arquimedes). Siguin  $AB$  dos punts diferents d'una paràbola. Proveu que existeix una única tangent paral·lela a  $AB$ . Formem ara el paral·lelogram  $ABCD$  tal que  $CD$  és la tangent paral·lela a  $AB$  i de manera que  $AD$  i  $BC$  són paral·leles a l'eix de la paràbola. Proveu que l'àrea del segment de paràbola determinat per la corda  $AB$  és  $2/3$  de l'àrea de  $ABCD$ .

**P.4.3** (Teorema de Chasles). Sigui  $\mathcal{C}$  una cònica no degenerada i  $A, B$ , dos punts diferents de  $\mathcal{C}$ . Considerem els feixos de rectes per  $A, A^*$ , i per  $B, B^*$ . Sigui  $\pi: A^* \rightarrow B^*$  l'aplicació definida de manera que si  $P \in \mathcal{C}$ , llavors  $\pi(AP) = BP$ , entenent que  $AA$  i  $BB$  són les rectes tangents a  $\mathcal{C}$  en el punt  $A$  i en el punt  $B$ , respectivament. Proveu que  $\pi$  és una projectivitat. Remarqueu que  $\pi(AA) = BA$  i  $\pi(AB) = BB$ . En particular,  $\pi$  no és una perspectivitat (és a dir, la recta  $AB$  no és fixa per  $\pi$ ).

**P.4.4** (Teorema de Steiner). Siguin  $A$  i  $B$  dos punts diferents del pla. Sigui  $\pi: A^* \rightarrow B^*$  una projectivitat i suposem que  $\pi$  no és una perspectivitat. Proveu que el lloc geomètric del punt d'intersecció  $\ell \cap \pi(\ell)$ , on  $\ell \in A^*$ , és una cònica no degenerada que passa per  $A$  i  $B$ , i tal que les seves tangents en els punts  $A$  i  $B$  són  $\pi^{-1}(BA)$  i  $\pi(AB)$ , respectivament.

En el problema anterior, si  $\pi$  fos una perspectivitat entre  $A^*$  i  $B^*$ , llavors el lloc geomètric dels punts d'intersecció  $\ell \cap \pi(\ell)$  està format per la recta  $v$  que forma el vèrtex de la perspectivitat i per la recta  $AB$ . Interpretarem, doncs, que el lloc geomètric és la cònica degenerada formada pel parell de rectes  $AB$  i  $v$ .

**P.4.5** (Teorema de Pascal). Les tres parelles de costats oposats d'un hexàgon inscrit en una cònica no degenerada es tallen en tres punts alineats.

**P.4.6** (Teorema de Brianchon). Les tres parelles de vèrtexs oposats d'un hexàgon circumscrit a una cònica no degenerada determinen tres rectes concurrents.

**P.4.7.** Demostreu que els punts mitjans de totes les cordes d'una cònica no degenerada que són paral·leles a una recta donada,  $L$ , estan sobre una recta  $L'$  ( $L'$  és la recta polar del punt de l'infinit de  $L$ , de manera que  $L'$  és un diàmetre).

**P.4.8.** Suposem que  $\mathcal{C}$  és una cònica no degenerada. Les rectes pel centre es diuen *diàmetres* de  $\mathcal{C}$  i dos diàmetres es diuen *conjugats* si i només si els seus punts de l'infinit són conjugats. Proveu que si l'equació de la cònica és  $ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$ , llavors el diàmetre conjugat del diàmetre de pendent  $m$  té equació

$$ax + by + d + m(bx + cy + e) = 0.$$

Especialitzeu aquesta fórmula pel cas d'una el·lipse, una hipèrbola i una paràbola en forma canònica.

**P.4.9.** Sigui  $\mathcal{Q}$  un quàdrica i  $\pi$  un pla tal que la seva recta de l'infinit no està continguda a  $\overline{\mathcal{Q}}$ . Proveu que la intersecció de  $\pi$  amb  $\mathcal{Q}$  és una cònica del pla  $\pi$ .

**P.4.10.** Sigui  $\mathcal{Q}$  una quàdrica no degenerada i  $P$  un punt no pertanyent a  $\mathcal{Q}$ . Sigui  $\pi$  el pla polar de  $P$  respecte de  $\mathcal{Q}$ . Donat un punt  $Q$  de la quàdrica  $\mathcal{Q}$ , la recta  $PQ$  talla a  $\mathcal{Q}$  en el punt  $Q$  i en un altre punt  $Q' \in \mathcal{Q}$ . Proveu que el quart harmònic de  $P$  respecte del parell  $\{Q, Q'\}$  és el punt d'intersecció de  $PQ$  amb  $\pi$ .

**P.4.11.** Siguin  $r$  i  $s$  el rang de la matriu i de la matriu principal d'una quàdrica. Proveu que els possibles valors de  $(r, s)$ , i les quàdriques corresponents, són:

(4,3) Quàdrica no degenerada centrada.

(4,2) Paraboloides.

(3,3) Con.

(3,2) Cilindre el·líptic o hiperbòlic.

(3,1) Cilindre parabòlic.

(2,2) Parell de plans no paral·lels.

(2,1) Parell de plans paral·lels diferents.

(1,1) Pla doble.

**P.4.12.** Demostreu que el pla  $z = ax + by + r\sqrt{a^2 + b^2 + 1}$ , on  $a, b \in \mathbb{R}$ , és tangent a l'esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ .

**P.4.13.** Trobeu l'equació del pla tangent, en termes de l'equació reduïda, en un punt de: a) Una quàdrica centrada; b) Un paraboloides.

**P.4.14.** Trobeu els plans de la forma  $z = kx$ ,  $k \in \mathbb{R}$ , que tallen l'el·lipsoide  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  ( $a > b > c$ ) en circumferències.

**P.4.15.** Proveu que el lloc geomètric dels punts que equidisten de dues rectes que es creuen és un paraboloid hiperbòlic.

**P.4.16.** Sigui  $\mathcal{Q}$  una quàdrica reglada i  $L$  una recta continguda en  $\mathcal{Q}$ . Proveu que les rectes perpendiculars a  $\mathcal{Q}$  en els punts de  $L$  generen un paraboloid hiperbòlic.

**P.4.17.** Proveu que un paraboloid és tangent al pla de l'infinit. Per analogia amb el tractament de les paràboles, direm que el centre d'un paraboloid és el punt de l'infinit el pla polar del qual és el pla de l'infinit. Proveu que aquest centre és el punt de l'infinit de l'eix del paraboloid (l'eix del paraboloid és, en coordenades reduïdes, la recta  $O'z'$ , és a dir, l'eix principal corresponent al valor propi 0). Demostreu, finalment, que el vèrtex del paraboloid (que en coordenades reduïdes és l'origen) és l'únic punt propi que és conjugat dels punts de l'infinit dels altres dos eixos principals.

**P.4.18.** Comproveu, suposant  $\cos \alpha \neq 0$ , que l'equació  $x^2 + (y \cos \alpha + z \sin \alpha)^2 + 2z = 1$  defineix un paraboloid i trobeu-ne el vèrtex.

**P.4.19.** Proveu que per un punt  $P$  diferent del centre d'una quàdrica centrada no degenerada passa un únic pla que talla la quàdrica en una cònica centrada tal que el seu centre és  $P$ .



## Bibliografia

- [1] H. S. M. COXETER, *Fundamentos de geometría*. Limusa-Wiley, 1971.
- [2] D. PEDOE, *Geometry, a comprehensive course*. Dover, 1988.
- [3] P. PUIG ADAM, *Curso de geometría métrica* (2 vol.). Gómez Puig Ediciones, Madrid, 1979.
- [4] J. ROE, *Elementary geometry*. Oxford University Press, 1993.
- [5] BERGER M., *Geometry* (2 vols.). Springer-Verlag, 1987.
- [6] J. DE BURGOS, *Curso de lgebra y geometría*. Alhambra, 1977.
- [7] M. CASTELLET, I. LLERENA, *Àlgebra lineal i geometria*. Manuals de la Universitat Autònoma de Barcelona, 1, 1990 (2a edició). Amb la col·laboració de C. Casacuberta.
- [8] L. A. SANTALÓ, *Geometría proyectiva*. EUDEBA, 1966.
- [9] O. SCHREIR, E. SPERNER, *Projective geometry*. Chelsea Publ. Co., 1961.
- [10] J. G. SEMPLER, G. T. KNEEBONE, *Algebraic projective geometry*. Oxford University Press, 1952.
- [11] J.-C. SIDLER, *Géométrie projective. Cours, problèmes classiques et exercices résolus*. InterEditions, Paris, 1993.
- [12] A. REVENTÓS, *Geometria projectiva*. Materials 85, Departament de Matemàtiques, Universitat Autònoma de Barcelona.
- [13] P. M. NEUMANN, G. A. STOY, E. C. THOMPSON, *Groups and geometry*. Oxford University Press, 1994.
- [14] G. CASTELNUOVO, *Lezioni dei geometria analitica*. Società Editrice Dante Alighieri, 1969 (sedicesima edizione).

- [15] F. KLEIN, *Le programme d'Erlangen*. Collection «Discours de la Méthode», Gauthier-Villars, 1974.
- [16] R. BAER, *Linear Algebra and Projective Geometry*. Pure and Applied Mathematics 2, Academic Press, 1952.
- [17] D. HILBERT, *Fundamentos de Geometría*. Textos Universitarios, Consejo Superior de Investigaciones Científicas, 1991.
- [18] B. SEGRE, *Lectures on Modern Geometry*. Edizioni Cremonese, 1961.
- [19] J. GÓMEZ, J. COLL, J. C. MELERO, M. C. BURRY, *La Sagrada Família. De Gaudí al CAD*. Edicions UPC, 1996.
- [20] GUZMÁN, M., *Mirar y ver*. Alhambra.
- [21] P. PRUSINKIEWICZ, *The algorithmic beauty of plants*. The virtual laboratory, Springer-Verlag, 1990.
- [22] J. TRIAS, *Laboratori de geometria computacional*. Edicions UPC, 1996.
- [23] J. H. VAN LINT, R. M. WILSON *A Course in Combinatorics*. Cambridge University Press, 1992.
- [24] V. VILLORIA SAN MIGUEL, *Curvas planas y dibujo por ordenador*. Dossat, 1992.
- [25] P. B. YALE *Geometry and Symmetry*. Dover Publ., 1988.
- [26] M. KLINE, *Mathematical thought from ancient to modern times*, Oxford University Press, 1972.
- [27] J. L. COOLIDGE, *A history of the conic sections and quadric surfaces*, Dover Publications, 1968.
- [28] D. J. STRUIK, *A Concise History of Mathematics*. Dover, 1967.
- [29] I. M. YAGLOM, *Felix Klein and Sophus Lie*. Birkhäuser, 1988.
- [30] *Composició de textos científics amb L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X*. Edicions UPC, 1996.
- [31] S. WOLFRAM, *Mathematica: A system for doing mathematics by computer*. Addison-Wesley, 1991.

## Índex alfabètic

- \*-afí, 91
- \*-lineal, 91
- afinitat, 81
  - estensió projectiva d'una, 196
- afinitats d'una recta afí, 87
- altura
  - d'un paral·lelepípede, 123
  - d'un paral·lelogram, 123
- anàlisi, procés de, 27, 41
- angle
  - agut, 108
  - entre dos vectors, 106
  - exterior (a una circumferència), 10
  - inscrit (en una circumferència), 9
  - interior (a una circumferència), 10
  - orientat, 125
- angles
  - additivitat, 106
  - complementaris, 108
  - d'un triangle, 108
  - suplementaris, 106
- antiautomorfisme, 134
- aplicació
  - additiva, 91
  - afí, 80
    - conserva punts mitjans, 89
    - conserva raons simples, 89
  - antilineal, 91
  - bilineal
    - no degenerada, 154
    - simètrica, 99
  - estructural d'un espai afí, 58
  - lineal associada, 81
  - multilineal, 119
  - multilineal alternada, 119
  - semiafí, 91
  - semilineal, 91
- Apol·loni de Perga, 238, 250
- arc, 27
- arc capaç, 11
- àrea d'un paral·lelogram, 123
- arestes
  - d'un símplex, 179
  - d'un tetràedre, 71
- asímptotes (d'una hipèrbola), 233
- automorfisme, 91
- homogeneïtat, 58
- axiomatització, 92
- baricentre, 17
- base
  - $\alpha$ -orientada, 119
  - adaptada a una referència projectiva, 182
  - d'un paral·lelogram, 123
  - d'un paral·lelepípede, 123
  - ortonormal, 104, 110
- bases
  - amb igual orientació, 118
  - amb orientació oposada o contrària, 118
- bisector, 108
  - hiperplà
    - de dos hiperplans, 116
    - de dos punts, 114
    - de dos vectors, 108
- bisectriu, 7
- cares
  - complementàries o oposades (d'un símplex), 180
  - d'un símplex, 179

- d'un tetràedre, 71
- catet, 108
- centre
  - del cos dels quaternions, 134
  - d'una cònica
    - centrada, 247
    - interpretació projectiva, 259
  - d'una homologia, 192
    - especial, 192
  - d'una homotècia, 15
  - d'una inversió, 24
  - d'una quàdrica, 282
    - centrada, 261
- centre radical, 20
- cercle
  - d'Euler, 30, 54
  - dels nou punts, 30, 54
- ceviana, 4
- Chasles, 238
- cilindre, 269
  - el·líptic, 269
  - hiperbòlic, 269
  - parabòlic, 269
- circumcentre, 6
- circumferència
  - circumscripita, 2, 7
    - radi, 23
  - directriu
    - d'una el·lipse, 229
    - d'una hipèrbola, 233
  - exinscripita, 22
  - focal
    - d'una el·lipse, 231
    - d'una hipèrbola, 234
  - inscripita, 7
- classificació euclidiana
  - de les còniques, 253
  - de les quàdriques, 280
- clausura projectiva, 164, 176
  - d'una recta, 164
  - d'una varietat lineal, 177
- col·lineació, 92
- compleció del quadrat, 245
- compleció projectiva, 176
- con
  - asimptòtic, 268
  - circular recte, 225
  - fulls, 226
  - generatriu, 226
  - imaginari, 268
  - real, 267
  - tangent
    - a una cònica des d'un punt, 259
    - a una quàdrica des d'un punt, 287
  - vèrtex d'un, 267
- configuració, 179
  - subordinada, 179
  - tipus, 180
  - vèrtexs, 179
- configuracions projectivament equivalents, 200
- cònica, 246
  - analítica, 239, 240, 246
  - centrada, 247
    - centre, 247
    - equacions del centre, 247
  - costat, 250
  - de l'infinit (d'una quàdrica), 284
  - definició, 226, 239
  - determinada per la matriu  $\overline{A}$ , 241
  - directriu del focus, 248
  - equació focal, 251
  - equació polar, 251
  - matriu, 241
    - de l'infinit, 242
  - matriu principal, 241
  - matriu projectiva, 242
  - projectiva, 240
  - punts de l'infinit, 240
  - restricció a l'infinit, 240
- còniques
  - com a seccions d'un con, 226
  - definició, 239
  - definició alternativa, 247, 256
  - degenerades, 253
  - eixos principals, 256
  - equacions canòniques, 246
  - invariants euclidians, 252
  - invariants euclidians relatius, 252
  - no degenerades, 253
  - nota històrica, 238
  - primera reducció, 244
  - segona reducció, 245
  - semiinvariants, 252
  - usos, 238

- còniques
  - definició, 226
- conjugació
  - de dos parells de punts alineats, 207
  - simetria de la relació de, 284
- conjugats
  - punts respecte d'una cònica, 259
  - punts respecte d'una quàdrlica, 284
- coordenada absoluta, 184
- coordenades
  - afins, 71
  - canvi de, 73
  - baricèntriques, 188
  - polars, 251
    - eix, 251
    - origen, 251
  - projectives, 182
  - sistema de, 181
  - trimètriques, 189
- costat
  - d'un triangle, 171
  - oposat a un vèrtex, 171
  - d'una cònica, 250
- costats
  - d'un quadrangle, 180
  - oposats, 180
  - d'un triangle, 108, 171, 180
- Coulomb, 238
- criteri
  - AA, 13
  - ACA, 3
  - CAA, 12
  - CAC, 2, 13
  - CCC, 3, 13
  - de positivitat, 125
- definit positiu, producte escalar, 99
- Desargues, 162, 164, 166
- Descartes, 58, 238
- desigualtat
  - de Schwarz, 100
  - triangular de la distància, 102
  - triangular de la norma, 101
- desplaçament, 2, 13, 136
  - directe, 13, 141
  - impropi, 141
  - invers, 13, 141
  - propi, 141
- desplaçaments
  - d'un pla euclidià, 144
  - de l'espai, 147
- diàmetres
  - d'una cònica, 289
  - conjugats, 289
  - d'una quàdrlica, 283
- diferència de punts, 62
- dimensió, 170
  - d'un espai afi, 58
  - d'una configuració, 179
  - d'una varietat lineal, 170
- direcció d'una varietat lineal, 65
- direccions principals
  - d'una cònica, 257
  - d'una quàdrlica, 283
- directa, semblança, 15
- directriu del focus d'una cònica, 248
- discriminant
  - d'una cònica, 252
  - d'una quàdrlica, 277
  - de la part principal d'una cònica, 252
  - de la part principal d'una quàdrlica, 277
- distància, 97
  - d'un punt a un hiperplà, 115
  - d'un punt a un subconjunt, 115
  - d'un punt a una varietat lineal, 115
  - en un conjunt, 103
  - entre dos punts, 100
  - entre dos subconjunts, 115
  - entre dues rectes, 117
  - entre dues varietats lineals, 116
- dual
  - d'un enunciat, 216
  - d'un espai projectiu, 215
  - d'un espai vectorial, 213
- Einstein, 58, 61, 62
- eix
  - d'un con circular recte, 226
  - d'un feix de plans, 215
  - d'una homologia, 192
  - d'una simetria, 13
  - de les coordenades polars, 251
  - de revolució d'una quàdrlica, 261
  - principal d'una quàdrlica, 256, 283
  - radical, 20
- eixos

- d'una homologia biaxial, 221
- principals d'una quàdrica, 261
- principals de les còniques, 256
- el·lipse
  - focus, 226
  - propietat focal, 230
- el·lipse, 226, 250
  - àrea d'una, 255
  - centre, 228
  - circumferència directriu, 229
  - circumferència focal, 231
  - de gola (d'un hiperboloide reglat), 263
  - equació canònica, 228
  - excentricitat, 228
  - imaginària, 239, 246
  - punt exterior, 231
  - punt interior, 231
  - recta tangent en un punt, 230
  - semieix principal, 228
  - semieix secundari, 228
  - vèrtexs principals, 228
  - vèrtexs secundaris, 228
- el·lipsoide, 261
  - imaginari, 261
  - real, 261
- el·líptica, homologia, 193
- equació
  - continua de la recta, 78
  - dels punts de l'infinit d'una cònica, 240
  - dels punts fixos d'una afinitat, 87
  - focal d'una cònica, 251
  - paramètrica vectorial (d'una varietat lineal), 67
  - polar d'una cònica, 251
  - secular, 245
- equacions
  - canòniques
    - de les quàdriques, 274
  - canòniques de les còniques, 246
  - cartesianes, 76
    - afins (d'una varietat lineal), 186
    - projectives (d'una varietat lineal), 185
  - cartesianes (d'una varietat lineal), 77
  - de la recta (en forma contínua), 78
  - del centre
    - d'una cònica, 247
  - del centre d'una quàdrica, 282
  - dels centres (d'una cònica), 247
  - paramètriques
    - afins (d'una varietat lineal), 75
    - projectives (d'una varietat lineal), 186
  - reduïdes
    - de les còniques, 244
    - de les quàdriques, 273
- equipol·lència, 60
- equivalents, polinomis quadràtics, 271
- esdeveniment, 61
- esfera, 262
- esfera imaginària, 262
- espai
  - afi, 58
    - associat (a un espai vectorial), 61
    - com a complementari d'un hiperplà, 198
    - complex, 59
    - numèric, 61
    - ordinari, 59
    - real, 59
  - dual
    - d'un espai projectiu, 215
    - d'un espai vectorial, 213
  - euclidià, 99
  - projectiu, 169
    - dual, 215
  - vectorial associat (a un espai afi), 58
- espai-temps, 62
- estel (d'una varietat lineal), 215
- extensió projectiva d'una afinitat, 196
- Euclides, vii, 238
- Euler, 30, 32, 54, 238
- Euler, cercle de, 30, 54
- Euler, recta de, 32
- excentre, 8
- excentricitat, 248
- extrem d'un segment, 60
- extrems d'un segment, 102
- Fagnano, 32
- feix d'hiperplans, 205, 215
- Fermat, punt de, 32
- focus
  - d'un hiperplà dual, 216
  - d'una cònica, interpretació projectiva, 257
  - d'una el·lipse, 226

- d'una hipèrbola, 232
  - d'una paràbola, 234
- forma diagonal, 272
- formes lineals, 214
- formes reduïdes, 244
- fórmula
  - d'Heron, 23
  - de les dimensions, 70, 174
  - del producte mixt, 127
- fulls d'un con, 226
- Galileu, 238
- generatrius
  - d'un cilindre, 269
  - d'un con, 226, 267
  - d'un hiperboloide reglat, 263
  - d'una quàdrlica, 263
- geometria
  - analítica, 93
  - sintètica, 93
- gir, 145
- Gram-Schmidt, 112
- grup
  - afí, 85
  - d'una recta afí, 87
  - de canvis de coordenades afins, 73
  - de desplaçaments, 141
  - de semblances, 141
  - de translacions, 141
  - ortogonal, 105, 140
    - especial, 105
  - projectiu, 189
- hipèrbola, 232, 250
  - angle format per les asímptotes, 255
  - asímtotes, 233
  - branca d'un focus, 233
  - centre, 232
  - circumferència directriu, 233
  - circumferència focal, 234
  - equació canònica, 232
  - equilàtera, 233
  - excentricitat, 232
  - focus, 232
  - propietat focal, 234
  - punts exteriors, 234
  - punts interiors, 234
  - recta asimptòtica, 234
  - semieix principal, 232
  - semieix secundari, 232
  - vèrtexs, 232
  - zona central, 234
  - zona focal, 234
- hiperbòlica, homologia, 193
- hiperboloide, 261
  - no reglat, 261
  - reglat, 261, 263
- hiperplà, 66, 174
  - bisector
    - de dos hiperplans, 116
    - de dos punts, 114
    - de dos vectors, 108
  - de l'infinit (o de punts impropis), 176
  - polar harmònic d'un punt, 219
- hiperplans, feix de, 205
- hipotenusa, 108
- homogeneïtzar (un polinomi quadràtic), 284
- homografia, 189
  - expressió en coordenades, 198
- homologia, 192
  - biaxial, 221
  - biaxial harmònica, 221
  - centre, 192
    - d'una homologia especial, 192
  - eix, 192
  - el·líptica, 193
  - especial, 192
  - general, 192
  - harmònica, 207
  - hiperbòlica, 193
  - involutiva, 207
  - mòdul, 192
  - parabòlica, 193
- homotècia, 15, 82, 144, 149
  - centre, 15
  - estensió projectiva, 198
  - mòdul, 15
- identitat de Jacobi, 156
- incentre, 7
- incident
  - d'un subespai vectorial, 214
  - d'un subespai vectorial de formes, 214
- incidents, un vector i una forma lineal, 214
- índex (principal) d'una quàdrlica, 277, 278
- intersecció

- d'un hiperplà amb una varietat lineal, 174
- d'una recta i un hiperplà, 174
- de varietats lineals
  - afins, 68
  - varietats lineals projectives, 170
- invariant
  - projectiu (de configuracions de punts), 200
  - varietat lineal, 147
- invariants euclidians
  - de les còniques, 252
  - relatius, 252
  - de les quàdriques, 277
- invers d'un punt respecte d'una circumferència, 24
- inversa d'una semblança, 15
- inversió
  - caràcter involutiu, 24
  - centre, 24
  - conservació dels angles, 27
  - d'una circumferència, 25
  - d'una recta, 25
  - potència, 24
- inversions, 24, 223
- involució, 139, 191
- isometria, 113, 139
- Kepler, 238
- Klein, viii
- latitud, 153
- latus rectum* (d'una cònica), 250
- lleï d'addició, 58
- longitud, 97, 100, 153
  - d'un segment, 123
- matriu
  - d'una aplicació lineal, 81
  - d'una cònica, 241
  - d'una mètrica, 103
  - d'una projectivitat, 190
  - d'una quàdrica, 271, 272
  - d'una referència projectiva respecte d'una altra, 183
  - de l'infinit
    - d'una cònica, 242
    - d'una quàdrica, 271
  - ortogonal, 105
  - principal
    - d'una cònica, 241
    - d'una quàdrica, 271, 272
    - valors propis, 272
  - projectiva
    - d'una cònica, 242
    - d'una quàdrica, 271
- mediatriu, 6
- Menecme, 238
- mètode de Gram-Schmidt, 112
- mètrica, 99
- mitjanes, 5
- mòdul
  - d'una homologia, 192
  - d'una homologia biaxial, 221
  - d'una homotècia, 15
- Monge, 238
- moviment
  - helicoidal, 149
  - rígid, 136
- multilineal alternada, aplicació, 119
- multilineal, aplicació, 119
- Newton, 58, 61, 238
- nombres complexos, 16
- norma, 97, 100
  - d'un espai vectorial, 103
- orientació, 118
  - mateixa, 118
  - oposada, 118
- orientacions (d'un espai vectorial), 118
- origen
  - d'un segment, 60
  - d'una referència, 71
  - de les coordenades polars, 251
- ortocentre, 7
- ortogonal
  - matriu, 105
  - projecció
    - d'un punt sobre una varietat, 112
    - lineal, 110
- ortogonals, subconjunts, 109
- ortonormal, base, 104
- paràbola, 234, 250



- directriu, 234
- eix, 235, 260
- equació canònica, 235
- focus, 234
- paràmetre focal, 235
- propietat focal, 236
- punt exterior, 237
- punt interior, 237
- recta tangent en un punt, 236
- vèrtex, 235, 260
- parabòlica, homologia, 193
- paraboloide
  - el·líptic, 265
  - hiperbòlic, 265
- paral·lelepípede, 123
- paral·lelogram, 123
- paràmetre focal, 248
  - d'una el·lipse, 248
  - d'una hipèrbola, 248
  - d'una paràbola, 235
- parell
  - de plans, 269
  - de rectes, 238
    - imaginàries conjugades, 238
  - paral·leles, 238
- part principal
  - d'un polinomi quadràtic, 239, 270
  - de la matriu d'una cònica, 241
  - discriminant
    - d'una cònica, 252
    - d'una quàdrica, 277
  - índex, 277
- Pascal, 238
- pedal, triangle, 29
- perfil d'una quàdrica des d'un punt, 287
- perspectiva, triangles en, 171
- perspectivitat, 193
  - centre d'una, 193
- pla
  - afí, 59
  - polar (d'un punt respecte d'una quàdrica), 285
  - polar harmònic, 219
  - projectiu, 169
  - tangent (a una quàdrica en un punt), 286
- plans, 66, 170
- pol
  - d'un pla, 285
  - d'una recta, 258
- polar
  - d'una recta de l'espai, 285
  - pla (d'un punt respecte d'una quàdrica), 285, 289
  - recta (d'un punt respecte d'una cònica), 257
- polinomi quadràtic, 239
- polinomi quadràtic reduït, 273
- Poncelet, 238
- potència
  - d'un punt respecte d'una circumferència, 19
  - d'una inversió, 24
- principi de dualitat, 216
- problema de Fagnano, 32
- producte escalar, 99
  - definit positiu, 99
- Programa d'Erlangen, viii
- projecció
  - d'un punt
    - sobre una varietat lineal, 193
  - d'un punt sobre un pla, 162
  - estereogràfica, 223
  - ortogonal, 98
    - d'un punt sobre una varietat, 112
    - lineal, 110
- projecció i secció, 162, 193
- projectant
  - d'un punt (des d'una varietat), 193
  - d'un punt des d'un altre, 162
- projectivitat, 189
  - de Poncelet, 194
  - de von Staudt, 224
- projectivitats, teorema fonamental, 191
- Puig-Adam, viii
- punt
  - autoconjugat
    - respecte d'una cònica, 259
    - respecte d'una quàdrica, 284
  - conjugat complex, 239, 270
  - d'una cònica, 239
  - d'una quàdrica, 270
  - de contacte, 230
    - d'una recta tangent a una cònica, 258

- d'una recta tangent a una quàdrica, 285
- de Fermat, 32
- de l'infinit d'una recta, 164
- de Lemoine (d'un triangle), 222
- de Nagel (d'un triangle), 222
- doble
  - d'una quàdrica, 284
  - per una inversió, 25
- exterior
  - d'una el·lipse, 231
  - d'una hipèrbola, 234
  - d'una paràbola, 237
- exterior a una varietat lineal, 170
- imaginari
  - d'una cònica, 239
  - d'una quàdrica, 270
- impropi d'una recta, 164
- independent d'una varietat lineal, 170
- interior
  - d'una el·lipse, 231
  - d'una hipèrbola, 234
  - d'una paràbola, 237
- mitjà, 88
- real
  - d'una cònica, 239
  - d'una quàdrica, 270
- simple d'una quàdrica, 284
- unitat (d'una referència projectiva), 181
- punts, 66
  - alineats, 171
  - concíclics, 19
  - conjugats
    - respecte d'una cònica, 259
    - respecte d'una quàdrica, 284
  - d'un espai afí, 58
  - de l'infinit
    - d'un espai afí, 164, 176
    - d'una cònica afí, 240
    - d'una quàdrica afí, 284
  - dependents, 178
  - diferència, 62
  - fixos, 86
    - equació, 87
    - equació en una referència, 87
    - per una homografia, 191
  - impropis, 164
  - independents, 67, 178
    - no alineats, 67
  - quàdrica
    - centre, 261
    - de revolució, 261
    - definició, 270
    - eixos principals, 261
    - projectiva (associada a una quàdrica afí), 284
    - reduïda, 273
    - semieixos principals, 261
  - quàdriques
    - de tipus centrat, 281
    - de tipus parabòlic, 281
    - degenerades, 278, 282
    - equacions
      - canòniques, 274
      - reduïdes, 280
    - invariants euclidians, 277
    - no degenerades, 278
    - reduïdes, 273
    - semiinvariants euclidians, 277
  - quadràtic, polinomi, 239, 270
  - quadrangle, 180
    - costats d'un, 180
  - quadrivèrtex, 180
  - quart harmònic, construcció, 209
  - quaterna
    - de punts, 179
    - equianharmònica, 209
    - harmònica, 207
    - harmònica d'hiperplans, 207
  - quaternió, 133
    - conjugat, 134
    - mòdul, 134
    - part real, 133
    - part vectorial, 133
    - pur, 133
  - quaternions, 132, 157
    - cos dels, 133
  - raó
    - doble, 201, 202
      - de quatre hiperplans d'un feix, 206
      - indeterminada, 202
      - invariança projectiva, 204
      - propietat multiplicativa, 204

- simple, 73
- $(r + 1)$ -vèrtex  $s$ -dimensional, 180
- $\mathcal{R}$ -coordenades, 71
- $r$ -símplex, 123, 179
- raó
  - àuria, 16
  - d'una homotècia, 15, 82
  - d'una semblança, 136
- recta
  - afí, 59
  - afí del temps, 60
  - asimptòtica, 234
  - d'Euler, 32
  - doble, 238
  - polar harmònica, 219
  - projectiva, 169
  - tangent
    - a una cònica, 258
    - a una quàdrica, 285
- rectangle auri, 16
- rectes, 66, 170
  - coplanàries, 175
  - que es creuen, 175
- referència, 71
  - afí, 71
  - baricèntrica, 188
  - dual, 217
  - projectiva, 181
    - associada a una base, 182
    - associada a una referència afí, 182
    - base adaptada, 182
    - punt unitat, 181
    - símplex, 181
    - vèrtexs, 181
  - rectangular, 113
- relacions de Hamilton, 133
- representació projectiva
  - d'un pla, 164
  - d'una recta, 163
- representant d'un punt projectiu, 169
- rotació, 145
- Rutherford, 238, 239
- Schmidt, 112
- Schwarz, desigualtat de, 100
- seccions còniques, 225
- segment, 102
  - auri, 16
  - construcció de Descartes, 28
  - orientat, 60
- segments equipol·lents, 60
- semblança, 136
  - directa (o pròpia), 15, 141
  - inversa (o impròpia), 15, 141
  - lineal, 139
  - raó de, 136
- semblances
  - construcció, 141
  - d'un pla euclidià, 144
  - d'una recta euclidiana, 141
  - de l'espai, 147
- semiafinat, 91
- semicostat d'una cònica, 250
- semidistància focal, 227
- semieixos principals
  - d'una cònica, 228, 232, 246, 248, 250
  - d'una quàdrica, 261
- semiespai
  - obert, 79
  - tancat, 79
- semiinvariants euclidians
  - de les còniques, 252
  - de les quàdriques, 277
- semiperímetre d'un triangle, 21
- sempià, 79
- semiprojectivitat, 224
- semirecta, 79
- separació harmònica, 207
- signe dominant (d'una equació reduïda), 279
- simetria, 13
  - amb lliscament, 13
  - axial, 144
    - amb lliscament (o amb translació paral·lela), 144, 149
  - central, 139, 144, 149
  - eix, 13
  - especular, 139
  - especular amb lliscament (o amb translació paral·lela), 148
  - respecte d'un subespai vectorial, 138
- simètric
  - d'un punt respecte d'una varietat lineal, 138
  - d'un vector respecte d'un subespai, 138
- símplex, 123

- arestes d'un, 179
- cares d'un, 179
- d'una referència projectiva, 181
- síntesi, procés de, 27, 41
- sistema
  - d'equacions cartesianes d'una varietat lineal, 185
  - de vectors directors, 67
- Steiner, 238
- subespai director, 65
- subgrup
  - normal (o invariant), 86
- suma
  - de varietats lineals afins, 69
  - varietats lineals projectives, 174
- suport d'un feix de plans, 215
- tangent
  - pla (a una quàdrica), 286
  - recta
    - a una cònica, 241
    - a una quàdrica, 285
- teorema
  - 2/3 d'Arquimedes, 288
  - Erdős-Mordell, 33
  - de Brianchon, 288
  - de Ceva, 4
  - de Chasles, 288
  - de classificació euclidiana de les còniques, 253
  - de classificació euclidiana de les quàdriques, 279
  - de Desargues, 166, 168, 171
    - recíproc, 211
  - de Dieudonné-Cartan, 155
  - de dualitat, 215
  - de l'altura, 17
  - de Morley, 29
  - de Pappus, 172
  - de Pascal, 288
  - de Pitàgores, 4, 19, 102, 108
  - de Poncelet, 194
  - de Ptolomeu, 32
  - de Steiner, 288
  - de Steiner-Lehmus, 21
  - de Tales, 13, 14, 74
  - de von Staudt, 224
  - del catet, 18
  - del cosinus, 5
  - del quadrangle complet, 208
  - del sinus, 5
  - fonamental
    - de la geometria afí, 92
    - de la geometria projectiva, 224
    - de les aplicacions afins, 84
    - de les projectivitats, 191
  - terna (de punts), 179
  - tetràedre, 71, 123, 179
  - tetràedre, volum d'un, 124
  - tipus
    - centrat
      - quàdriques, 273
    - cilíndric centrat, 273
    - cilíndric parabòlic, 273
    - d'una configuració, 180
    - de plans paral·lels, 273
    - de rectes paral·leles, 244
    - parabòlic
      - còniques, 244
      - quàdriques, 273
  - transformació
    - afí, 81
    - ortogonal, 139
    - semiafí, 91
  - translació, 63, 82, 144
    - extensió projectiva, 198
  - triangle, 108, 179
    - òrtic, 7
    - costats, 171
    - diagonal (d'un quadrangle), 180
    - ordenat, 171
    - pedal, 29
    - rectangle, 108
    - semiperímetre, 21
    - vèrtexs, 171
  - triangles
    - congruents, 2
    - criteris d'igualtat (o congruència), 2
    - criteris de semblança, 12
    - en perspectiva, 171
    - iguals, 2
  - varietat lineal, 65, 169
    - clausura projectiva, 177

- de l'infinit, 177
- determinada per punts, 68, 179
- determinada per un sistema d'equacions, 185
- dimensió, 170
- direcció, 65
- equacions cartesianes, 76
- estel, 215
- generada per dues varietats lineals afins, 69
- incident amb, 170
- invariant, 147
- paralela a una altra per un punt, 67
- passa per, 170
- perpendicular a una altra per un punt, 110
- real, 220
- varietats lineals
  - afins
    - intersecció, 68
    - suma, 69
  - ortogonals, 110
  - paraleles, 67
  - perpendiculars, 110
  - suma projectiva, 174
- vector
  - de posició, 62
  - lliure, 60
  - unitari, 100
- vectors
  - ortogonals, 102, 108
  - perpendiculars, 102, 108
- vèrtex
  - d'un con, 267
  - d'un con circular recte, 226
- vèrtexs
  - d'un tetràedre, 71
  - d'un triangle, 108, 171
  - d'una configuració, 179
  - d'una referència projectiva, 181
- volum, 119
  - absolut, 119
  - d'una base, 119
- Weyl, 58