



UNIVERSITAT POLITÈCNICA
DE CATALUNYA
BARCELONATECH

→ **UPC**GRAU

Oscil·lacions. Teoria i problemes →

Jaume Calaf Zayas



UNIVERSITAT POLITÈCNICA
DE CATALUNYA
BARCELONATECH



iniciativa
digital politècnica
Publicacions Acadèmiques UPC

→ **UPCGRAU**

Oscil·lacions. Teoria i problemes →

Jaume Calaf Zayas

En col·laboració amb el Servei de Llengües i Terminologia de la UPC

Primera edició: maig de 2012

Disseny i dibuix de la coberta: Jordi Soldevila

Disseny maqueta interior: Jordi Soldevila

Maquetació: Mercè Aicart

© Jaume Calaf Zayas, 2012

© Iniciativa Digital Politècnica, 2012
Oficina de Publicacions Acadèmiques Digitals de la UPC
Jordi Girona Salgado 31,
Edifici Torre Girona, Planta 1, 08034 Barcelona
Tel.: 934 015 885 Fax: 934 054 101
www.upc.edu/idp
E-mail: info.idp@upc.edu

Dipòsit legal: B-17950-2012

ISBN: 978-84-7653-916-3

Qualsevol forma de reproducció, distribució, comunicació pública o transformació d'aquesta obra només es pot fer amb l'autorització dels seus titulars, llevat de l'excepció prevista a la llei. Si necessiteu fotocopiar o escanejar algun fragment d'aquesta obra, us he d'adreçar al Centre Espanyol de Drets Reprogràfics (CEDRO), <<http://www.cedro.org>>.

Índex

Pròleg	9
1. Oscil·lacions harmòniques simples	13
1.1. Cinemàtica i dinàmica del MHS	14
1.2. Sistema molla-massa	19
1.3. Pèndols. MHS angular	22
1.4. Energia potencial elàstica	30
1.5. Oscil·lacions al voltant d'un punt d'equilibri estable	32
1.6. Mètode de la conservació de l'energia	37
1.7. Problemes resolts i problemes proposats	41
2. Oscil·lacions amortides	95
2.1. Força de fricció viscosa	95
2.2. Oscil·lacions harmòniques amortides	97
2.3. Energia de les oscil·lacions amortides	101
2.4. Amortiment crític i sobreamortiment	103
2.5. Problemes resolts i problemes proposats	107
3. Oscil·lacions forçades	125
3.1. Oscil·lacions forçades	125
3.2. Estats transitori i estacionari	126
3.3. Impedància i ressonància	130
3.4. Vibracions produïdes per màquines giratòries	135
3.5. Potència mitjana absorbida per l'oscil·lador	137
3.6. Factor de qualitat Q i amplada de la ressonància	138
3.7. Problemes resolts i problemes proposats	140



4. Superposició de MHS	163
4.1. Linealitat i superposició	163
4.2. Superposició de dos MHS de la mateixa direcció	164
4.3. Superposició de dos MHS de direccions perpendiculars	169
4.4. Problemes resolts i problemes proposats	175
5. Oscil·lacions i sèries de Fourier	189
5.1. Sèries de Fourier (SF)	189
5.2. Sèries de Fourier i estats estacionaris	194
5.3. Integral de Fourier	200
5.4. Anàlisi de Fourier d'un pols harmònic finit	204
5.5. La transformada de Fourier	206
5.6. Problemes resolts i problemes proposats	208
6. Oscil·lacions i transformació de Laplace	217
6.1. Transformació de Laplace (TL)	217
6.2. Aplicacions de la TL a les oscil·lacions	225
6.3. Mètode de Green-Borel	234
6.4. Problemes resolts i problemes proposats	236
7. Oscil·ladors no lineals	247
7.1. Desviacions de la linealitat	247
7.2. El pèndol... per a angles no petits	248
7.3. L'espai fàsic	252
7.4. Mètode de les sèries de pertorbacions	255
7.5. Mètode de Krylov i Bogoliubov	260
7.6. Oscil·ladors no lineals forçats	262
7.7. Problemes resolts i problemes proposats	263
8. Sistemes d'oscil·ladors i ones	277
8.1. Oscil·ladors acoblats. Modes normals	277
8.2. Sistemes d'oscil·ladors acoblats	283
8.3. Oscil·ladors acoblats forçats	287
8.4. Oscil·lacions acoblades transversals: la corda discreta	289
8.5. Pas al continu: ones transversals i longitudinals	294
8.6. Problemes resolts i problemes proposats	298
A. Repàs de matemàtiques	319
A.1. Trigonometria	319
A.2. Sèries de Taylor i aproximacions de funcions	324
A.3. Algunes integrals freqüents	328
A.4. Valor mitjà d'una funció	329
A.5. Integrals el·líptiques	331

B. Equacions diferencials ordinàries (EDO)	335
B.1. EDO lineals a coeficients constants	335
B.2. Equacions homogènies	337
B.3. Equacions no homogènies	340
B.4. Equacions lineals a coeficients variables	343
B.5. Exercicis proposats sobre EDO	344
C. Representació complexa d'oscil·lacions	347
C.1. Nombres complexos	347
C.2. Funcions complexes de variable real	350
C.3. Representació complexa de les oscil·lacions	351
D. Oscil·lacions elèctriques	355
D.1. Oscil·lacions elèctriques harmòniques	355
D.2. Oscil·lacions elèctriques amortides	356
D.3. Oscil·lacions elèctriques forçades: corrent altern	357
E. Bibliografia	361
Índex alfabètic	363



Pròleg

Les oscil·lacions són presents en tot el que ens envolta: en la temperatura del nostre indret, en les variacions del nivell del mar degudes a les marees, en la quantitat de taques solars, en els electrocardiogrames o, centrant-nos més en sistemes menys complexos i més fàcils d'analitzar, en els pèndols dels rellotges, en les vibracions d'un motor rotatori, en les oscil·lacions elèctriques dels aparells electrònics i, és clar, en les ones, en tota mena d'ones, siguin sonores, electromagnètiques, sísmiques, de torsió, etc.

Els temes relacionats amb les oscil·lacions o vibracions es troben tant en les assignatures de física general dels primers cursos universitaris com en les assignatures tècniques d'especialització dels últims cursos d'enginyeria. L'objectiu d'aquest llibre és, doncs, presentar les oscil·lacions partint d'un nivell elemental fins arribar a un nivell mitjà que faci de pont entre els estudis bàsics i els superiors o els tècnics.

La formació física de l'estudiantat el primer any d'estudis universitaris és, sobretot, de mecànica. Encara no sol conèixer bé l'electromagnetisme, ni l'elasticitat, ni la teoria de màquines. Això condiciona que el llibre tracti, fonamentalment, sobre oscil·ladors mecànics relativament simples, constituïts per molles, barres, amortidors, pèndols, etc. Això sí, convé insistir que la majoria de conceptes, mètodes i resultats que es presenten en l'estudi d'aquestes oscil·lacions mecàniques són, d'alguna forma, generalitzables a tota mena d'oscil·ladors. Així, el fenomen de la ressonància és fonamental en les vibracions forçades d'estructures, com també ho és en els circuits elèctrics *LC* —en la sintonització de les emissores de ràdio— i en tants altres casos.

El text s'ha dividit en dos blocs de quatre capítols cadascun i quatre apèndixs. Els quatre primers capítols conformen el bloc bàsic elemental sobre oscil·lacions típic dels cursos de primer any de física a la universitat: 1) oscil·lacions harmòniques simples, el capítol bàsic i al que es dediquen més exemples i problemes; 2) oscil·lacions amortides; 3) oscil·lacions forçades, i 4) superposició d'oscil·lacions. El segon bloc va més enllà de la física elemental i utilitza les matemàtiques amb una mica més de profunditat. Als dos primers capítols s'introdueixen dues eines molt potents: 5) les sèries i l'anàlisi de Fourier, i 6) la transformació de Laplace, per continuar amb 7) els oscil·ladors no lineals i 8) els sistemes d'oscil·ladors acoblats i una introducció a les ones. Aquests últims quatre capítols s'han



redactat perquè siguin pràcticament independents entre si; així, per exemple, es pot passar del capítol 4 directament als sistemes d'oscil·ladors del capítol 8 sense necessitat d'haver vist els anteriors.

Dins de cada capítol se'n poden distingir tres parts. A la primera se'n fa el desenvolupament teòric i se n'exposen els casos més generals, amb els exemples corresponents. A la segona part hi ha un conjunt de problemes resolts, seleccionats especialment per tal de millorar la comprensió de la teoria i, sobretot, l'aplicació als casos pràctics. A la tercera, el capítol acaba amb una col·lecció d'enunciats de problemes perquè l'estudiantat, ara sí, posi a prova l'experiència adquirida i consolidi els seus coneixements aplicant-los per si mateix als casos proposats. Després de cada enunciat es troba la resposta analítica a les qüestions plantejades per facilitar-ne la comprovació. La part més important del temps d'estudi ha de ser la dedicada a pensar i resoldre aquests problemes proposats.

Els coneixements previs que es necessiten per seguir el text són, essencialment, en física: la mecànica elemental, és a dir, les lleis de Newton i els principis de conservació per a les partícules, els sistemes i els sòlids rígids. En cap moment no s'usa la dinàmica de Lagrange, però s'insisteix força en el mètode de la conservació de l'energia, la qual cosa facilita molt el camí a l'aplicació de la mecànica analítica. Tampoc no s'utilitza la representació complexa; en un primer nivell no aporta conceptualment res de nou i, en canvi, pot ser una complicació addicional innecessària. Però és molt còmoda i àmpliament utilitzada en els nivells superiors, per la qual cosa a l'apèndix C s'exposa com es fa i quins avantatges pràctics presenta una descripció de les oscil·lacions amb funcions complexes. Pel que fa al coneixement de matemàtiques, se suposa que l'alumnat està familiaritzat amb les derivades, les integrals i els desenvolupaments de Taylor. Les equacions diferencials, les sèries de Fourier, la transformació de Laplace, els problemes d'autovalors i altres eines i mètodes matemàtics que van sorgint al llarg del text es van explicant des del principi, pas a pas, a mesura que van apareixent.

A l'apèndix A hi ha un recull de fórmules matemàtiques que convé tenir a mà i que permeten seguir el text amb més comoditat. A l'apèndix B es presenta una introducció breu de les equacions diferencials ordinàries, lineals i a coeficients constants. De l'apèndix C, ja n'hem parlat abans i a l'apèndix D, es fa una introducció de les oscil·lacions elèctriques i del corrent altern, insistint en l'analogia formal amb les oscil·lacions mecàniques. En acabar els apèndixs, s'inclou una breu bibliografia sobre textos de mecànica general i, especialment, alguns de més tècnics sobre vibracions que poden ser d'interès per a qui vulgui aprofundir en els problemes pràctics de l'enginyeria. Finalment, s'inclou un índex alfabètic de conceptes i mètodes que facilita la localització dels diferents punts tractats, tant on s'introdueixen per primer cop com on van apareixent posteriorment.

Des d'aquí vull agrair a tots els membres del Departament de Física i Enginyeria Nuclear de l'ETSEIAT de la UPC i, en particular, als professors de Física II dels graus en Tecnologies Industrials, Tecnologies Aeroespacials i Vehicles Aeroespacials, la seva col·laboració i el suport constant que he rebut en l'elaboració d'aquest material.

L'autor



→ 1



Oscil·lacions harmòniques simples

Un *sistema* és un conjunt d'elements simples, relacionats entre si, que constitueixen un tot orgànic sotmès a determinades lleis. Són exemples senzills de sistemes de dos elements una massa lligada a una molla, un circuit *LC* en sèrie o un gas ideal tancat en un èmbol cilíndric rígid amb una paret mòbil. En tots tres sistemes, hi ha una magnitud representativa de l'estat en què es troben; en el de molla-massa és l'elongació de la molla; en el circuit *LC*, la càrrega del condensador, i en el gas tancat pot ser la seva pressió. Un sistema està en *equilibri* quan la seva magnitud característica es manté constant en el temps.

Donada la magnitud característica d'un sistema es diu que fa una *oscil·lació* si, treient el sistema de l'equilibri, durant un temps determinat la magnitud va variant al voltant del seu valor inicial. Si aquesta variació es va repetint de la mateixa manera cada cert interval de temps, llavors es parla d'*oscil·lació periòdica*, essent aquest interval de temps el *període*. L'invers del període s'anomena *frequència* i la diferència entre el valor màxim de la magnitud i el valor en l'equilibri, *amplitud*. Els sistemes en què la magnitud característica que estem considerant oscil·la s'anomenen *oscil·ladors*.

Els oscil·ladors poden ser de naturalesa ben diferent; per exemple, en els sistemes mecànics intervenen masses i acceleracions i oscil·la la posició relativa dels elements del sistema; en els sistemes elèctrics intervenen autoinduccions, capacitats, etc. i, en aquest cas, el que oscil·la és la intensitat del corrent elèctric; els sistemes electromecànics són una combinació dels dos tipus anteriors, etc.

Dintre dels oscil·ladors mecànics, n'hi ha un gran grup que són de tipus *elàstic*, és a dir, aquells en què la causa de l'oscil·lació és la propietat elàstica d'algun element del sistema. Una *estructura* és un sistema de sòlids, cadascun d'ells caracteritzat per la seva massa, la seva forma geomètrica, etc., connectats entre si; per exemple, una cadira, un pont o un avió.

La paraula *vibració* s'empra sovint com a sinònim d'oscil·lació, però es fa servir, sobretot, per parlar d'oscil·lacions mecàniques elàstiques, particularment quan aquestes són de petita amplitud i freqüència alta. L'anàlisi de les vibracions que experimentarà una es-



estructura és tan important que sovint n'acaba determinant el disseny. Doncs bé, de totes les oscil·lacions o vibracions que poden tenir una partícula, un sòlid o una estructura, una de les més senzilles d'estudiar, de les més abundants i la més important de totes és la que correspon a un *moviment harmònic simple* (MHS).

1.1. Cinemàtica i dinàmica del MHS

1.1.1. Cinemàtica del MHS

Una partícula que es desplaça sobre l'eix x fa un *moviment harmònic simple* (MHS) si la seva posició x depèn del temps t en la forma

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi) \quad (1.1)$$

on A , ω i ϕ són les constants següents:

- x és l'*elongació* o el desplaçament de la partícula respecte d'un cert origen del eix x ;
- A és l'*amplitud* del moviment, essent $-A \leq x \leq +A$.
- ω és la *pulsació* o *frequència angular* del moviment. Es mesura en rad/s. L'angle $(\omega t + \phi)$ és la *fase* del moviment; per tant,
- ϕ és la *fase inicial*.

Per trigonometria —vegeu, si cal, l'apèndix §A.1.2—, notem que

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi) = A \sin(\omega t + \phi') \quad \text{si} \quad \phi' = \phi + \pi/2$$

Derivant (1.1), trobem la velocitat i l'acceleració de la partícula

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \phi) = \omega A \cos(\omega t + \phi + \frac{\pi}{2}) \quad (1.2)$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \phi) = \omega^2 A \cos(\omega t + \phi + \pi) = -\omega^2 x \quad (1.3)$$

El MHS és un cas particular d'*oscil·lació* o *moviment oscil·latori periòdic*, ja que després de cada *període* $T = 2\pi/\omega$ la partícula torna a estar en la mateixa posició, amb la mateixa velocitat. És a dir, en qualsevol instant t , se satisfà

$$x(t + T) = x(t) \quad (1.4)$$

L'invers del període s'anomena *frequència*, que representem per f i que es relaciona amb la freqüència angular ω a través d'un factor 2π

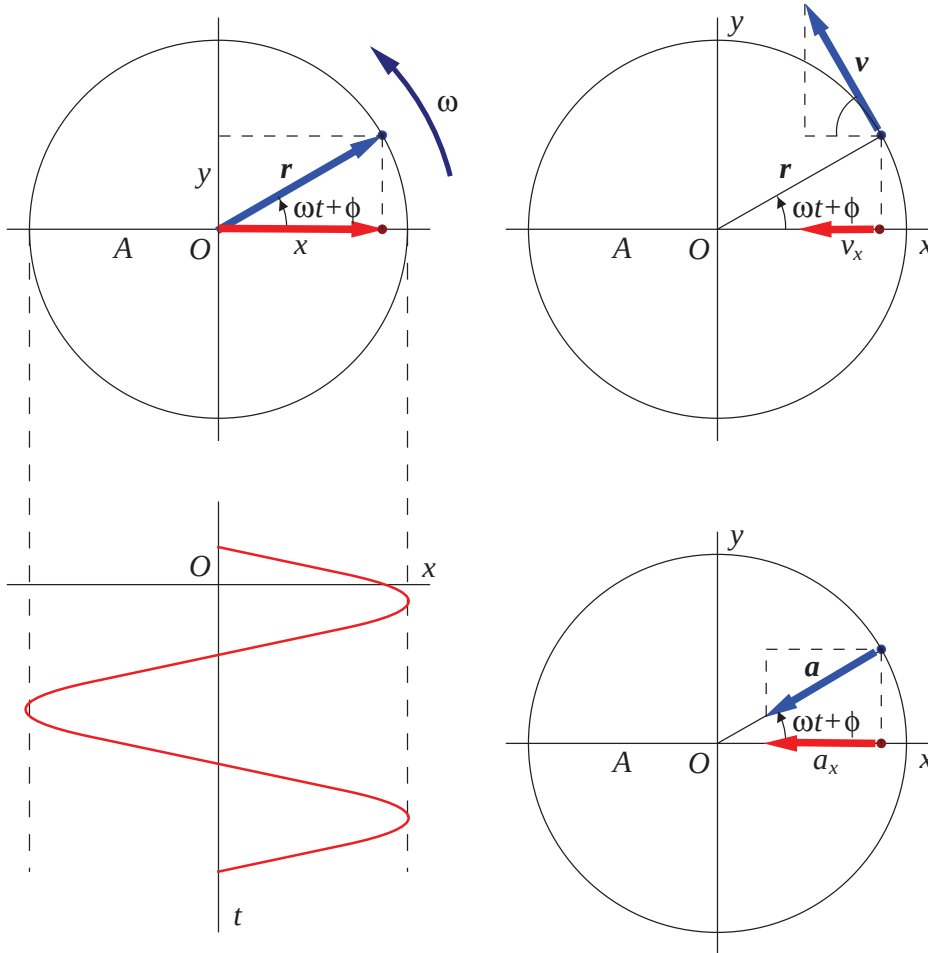
$$\frac{1}{T} = f = \frac{\omega}{2\pi} \quad (1.5)$$

En un MHS, la freqüència f és el nombre d'*oscil·lacions* —anar i tornar— que fa la partícula per unitat de temps. La freqüència es mesura en cicles/s, unitat que coneixem com a Hz, *hertz*.



Com es mostra a la primera de les figures 1.1, el MHS està molt relacionat amb el *moviment circular uniforme* (MCU). En efecte, l'expressió (1.1) és la coordenada x d'una partícula que fa un MCU de radi A a la velocitat angular ω . El vector posició d'aquesta partícula —anomenat *fasor*— forma, en l'instant t , un angle $\omega t + \phi$ amb l'eix x .

Figura 1.1



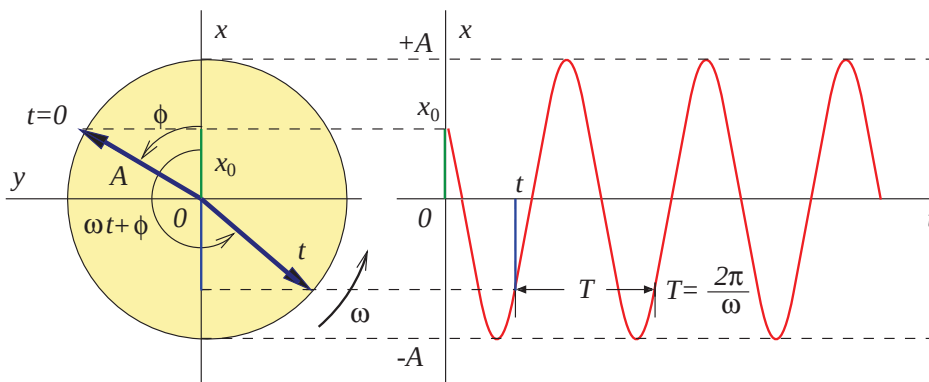
Naturalment, la component y del fasor també descriu un MHS sobre l'eix y , però amb un sinus en lloc d'un cosinus. Les altres dues figures 1.1 indiquen les relacions entre les components x de la velocitat $\mathbf{v}$ i l'acceleració $\mathbf{a}$ de la partícula que fa el MCU i les corresponents de la que fa el MHS.

A la figura 1.2, hi veiem el fasor representat dues vegades:

- en $t = 0$, formant un angle ϕ amb l'eix x i essent x_0 la seva primera component;
- en un determinat instant t , quan l'angle és $\omega t + \phi$ i la primera component és x .



Figura 1.2

**Exemple 1.1. Posició, velocitat i acceleració en un MHS**

D'una partícula que efectua un MHS sabem que, a $t_1 = 16$ s, la seva posició respecte de l'origen, la seva velocitat i la seva acceleració són, respectivament

$$x_1 = 9,80 \text{ cm}, \quad v_1 = 132 \text{ cm/s}, \quad a_1 = -4743,2 \text{ cm/s}^2$$

Trobeu l'expressió de l'elongació x en funció del temps t .

Solució

La posició de la partícula queda determinada per la funció

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi) \quad (1)$$

de la qual hem de calcular els tres paràmetres que hi intervenen: ω , A i ϕ , a partir de les tres dades x_1 , v_1 , a_1 .

- Càlcul de ω

Com que $a = -\omega^2 x$, veiem immediatament que $\omega = \sqrt{\frac{-a_1}{x_1}} = 22,00 \text{ rad/s}$

- Càlcul de A

Si derivem (1) n'obtenim la velocitat

$$v(t) = -\omega A \sin(\omega t + \phi) \quad (2)$$

I per (1) i (2) podem fer

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{v^2}{\omega^2 A^2} = \cos^2(\omega t + \phi) + \sin^2(\omega t + \phi) = 1$$

D'aquí trobem una relació general entre la posició i la velocitat en el mateix instant i l'amplitud A del moviment

$$A = \sqrt{x^2 + \frac{v^2}{\omega^2}} \quad (1.6)$$

Aplicant-hi els valors de x_1 i v_1 de l'enunciat, resulta $A = 11,491 \text{ cm}$



- Càlcul de ϕ

A partir dels valors de x_1 i de l'A acabada de trobar, per (1) tenim

$$\cos(\omega t_1 + \phi) = \frac{x_1}{A} = 0,85285$$

i la fase $\varphi = \omega t_1 + \phi$ resulta ser¹

$$\varphi = \omega t_1 + \phi = \arccos 0,85285 = \begin{cases} \varphi_a = 0,54937 \text{ rad} \\ \varphi_b = 2\pi - \varphi_a = 5,73381 \text{ rad} \end{cases}$$

Quin dels dos angles possibles, φ_a i φ_b , és el que correspon al nostre problema? Com es mostra a la figura 1.3, aquesta qüestió ens la respon el signe de la velocitat, que en aquest cas és positiu ($v_1 = +132 > 0$).

I per (2) tenim

- a) $\sin \varphi_a > 0$ és a dir $v < 0$ i, per tant, no ens interessa.
 b) $\sin \varphi_b < 0$ és a dir $v > 0$ és el que busquem.

Així doncs, $\varphi = \varphi_b = 5,73381 \text{ rad}$. I ϕ valdrà

$$\begin{aligned} \phi = \varphi_b - \omega t_1 &= -346,26619 \text{ rad} \times \frac{1 \text{ volta}}{2\pi \text{ rad}} = -55,109976 \text{ voltes} \\ &\equiv 0,890024 \text{ volta} \times \frac{2\pi \text{ rad}}{1 \text{ volta}} = 5,59219 \text{ rad} \end{aligned}$$

Consegüentment, l'equació del moviment de la partícula, $x(t)$, en cm, és

$$x(t) = 11,491 \cos(22,000 \cdot t + 5,5922)$$

que també podríem escriure com $x(t) = 7,3232 \sin \omega t + 8,8551 \cos \omega t$, i d'altres formes equivalents.

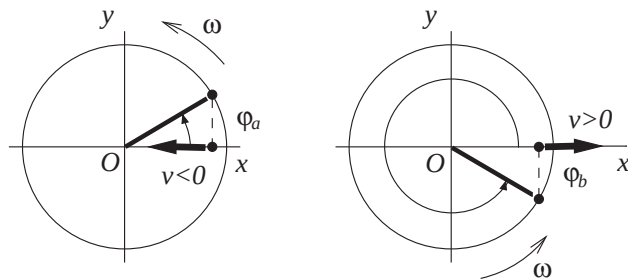


Figura 1.3

¹ Recordem que, donat un nombre x , amb $-1 \leq x \leq +1$, hi ha dos angles $\varphi = \arccos x$, entre 0 i 2π , tals que $\cos \varphi = x$. Si, dels dos, φ_a és el més petit, $0 \leq \varphi_a \leq \pi$, l'altre és $\varphi_b = 2\pi - \varphi_a$, ja que $\cos \varphi_b = \cos(2\pi - \varphi_a)$. Quan un usuari introdueix un nombre en una calculadora i li demana que en trobi l'arccosinus, la calculadora, per sistema, només mostra l'angle φ_a més petit dels dos possibles. I és l'usuari qui ha d'acabar la feina decidint quin dels dos possibles és el que li correspon al seu cas i amb el qual ha de continuar treballant. Notem que, com que $\sin \varphi_a > 0$ i $\sin \varphi_b < 0$, només cal saber el signe del sinus de l'angle que busquem per poder esbrinar quin dels dos és el que ens convé.



1.1.2. Dinàmica del MHS

Com ja hem vist a l'equació (1.3), $a = -\omega^2 x$. La segona llei de Newton, $F = ma$, ens indica quina és la força que produeix un MHS

$$F = -m\omega^2 x = -kx \quad (1.7)$$

on hem definit la *constant de força* k com

$$k = m\omega^2 \quad \text{o, equivalentment,} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (1.8)$$

La força s'anul·la en $x = 0$. Per tant, aquest és un *punt d'equilibri*. A més, $x = 0$ és un *punt d'equilibri estable*: una partícula desplaçada a l'esquerra del punt d'equilibri, $x < 0$, rep una força cap a la dreta, $F > 0$, i a l'inrevés, si la partícula és desplaçada a la dreta, $x > 0$, rep la força cap a l'esquerra, $F < 0$. Així, la partícula mai no s'allunya gaire del punt d'equilibri.

Una força d'aquesta mena s'anomena *força restauradora o recuperadora*.

A més, si el mòdul de la força és proporcional al desplaçament x , com en (1.7), en diem *força restauradora lineal*.

Les forces restauradores donen lloc, en general, als moviments oscil·latoris; les forces restauradores lineals, als MHS. A la secció §1.5 hi insistirem més.

La relació entre l'acceleració a i el desplaçament x , $a = -\omega^2 x$, és una de les característiques més significatives del MHS. Substituint la a per la derivada segona, trobem que

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \quad (1.9)$$

Aquesta igualtat és una *equació diferencial de segon ordre*. Una equació diferencial és una igualtat en què participen una funció i/o algunes de les seves derivades. Aquesta equació en concret s'anomena de *segon ordre* perquè la derivada més alta que hi apareix és la segona.

Les equacions diferencials apareixen en tots els camps de les ciències. Així, per exemple, la segona llei de Newton porta sempre a equacions diferencials com ara la (1.9), en les quals l'acceleració és la responsable que siguin de segon ordre. En l'estudi de les oscil·lacions amortides i en el de les forçades dels pròxims dos capítols tornarem a parlar-ne.

En general, qualsevol magnitud q depenent del temps que satisfaci una equació diferencial semblant a la (1.9) com ara

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \omega^2 q = 0 \quad (1.10)$$

—on ω^2 és una constant positiva— fa una *oscil·lació harmònica simple*, de freqüència angular ω , i amb totes les altres característiques del MHS. El sistema en què la magnitud q satisfà l'equació diferencial anterior s'anomena *oscil·lador harmònic simple*.



Els exemples més típics i senzills d'oscil·lacions no mecàniques són les *oscil·lacions elèctriques*, que s'expliquen breument i es comparen amb les mecàniques a l'apèndix §D.

Tornant a la mecànica, una partícula de massa m sotmesa a una força $F = -kx$ fa un MHS l'expressió del qual depèn dels tres paràmetres A , ω i ϕ :

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

Si les condicions inicials de la partícula a $t = 0$ són $x = x_0$ i $v = v_0$, tenim que

$$x_0 = A \cos \phi \quad \text{i} \quad v_0 = -\omega A \sin \phi$$

d'on, combinant aquestes dues equacions, resulta

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} \quad \text{i} \quad \tan \phi = -\frac{v_0}{\omega x_0} \quad (1.11)$$

Per (1.8) tenim que el període val $T = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{m/k}$. És a dir, al contrari que A i ϕ ,

el període del MHS d'un oscil·lador —mecànic, elèctric o de la mena que sigui— és independent de les seves condicions inicials només depèn dels seus paràmetres k i m .

En general, les oscil·lacions no harmòniques simples degudes a forces restauradores no lineals tenen períodes que sí que depenen de les condicions inicials i, en particular, de l'amplitud de l'oscil·lació.

1.2. Sistema molla-massa

El sistema molla-massa és un dels molts exemples que hi ha de forces recuperadores lineals.

Considerem una molla de massa negligible, amb un dels seus extrems fixat i l'altre unit a un bloc o partícula de massa m , en què està tot el conjunt en un pla horitzontal sense fricció.

Si les variacions de la longitud natural de la molla, diguem-ne x —positives o negatives—, són prou petites que no ultrapassin el límit elàstic de la molla, un fet experimental —*lleï de Hooke* de l'elasticitat— ens assegura que la força que exerceix la molla sobre el bloc ve donada per l'expressió (1.7), $F = -kx$, on k és la *constant de força* característica de la molla.

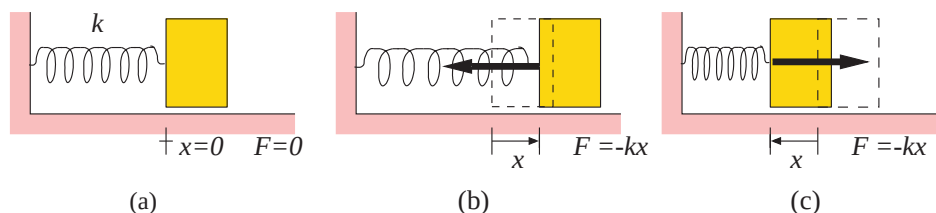
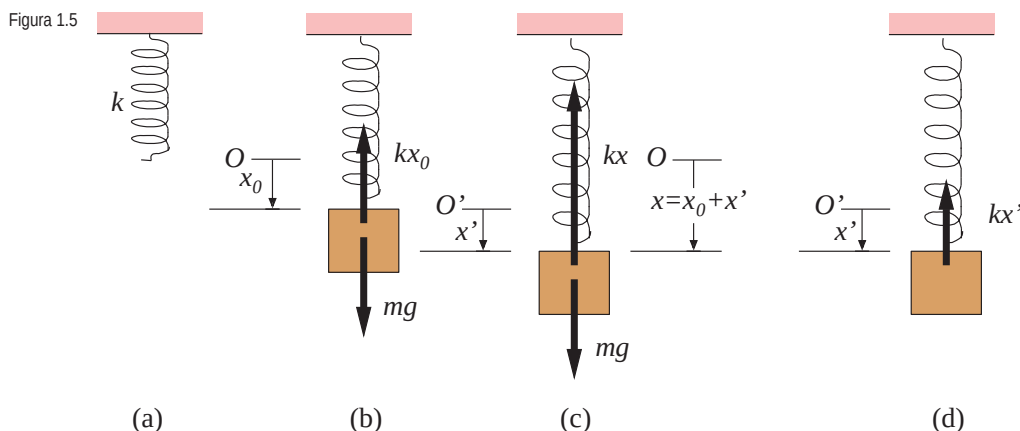


Figura 1.4

Fixem-nos en les figures 1.4. En la (a), el bloc està inicialment en la posició d'equilibri, que prenem com a $x = 0$. Si el retirem d'aquesta posició i el deixem anar —v. figures (b) i (c)— farà un MHS de freqüència angular ω donada per (1.8).

I què succeeix si fixem un extrem d'aquesta mateixa molla al sostre i a l'altre hi pengem el bloc verticalment? Estudiem-ho per etapes —v. figura 1.5.



Pengem la molla del sostre sense el bloc. Com que suposem que la molla no té massa pròpia, no s'allarga gens —v. figura 1.5 (a). L'extrem lliure determina l'origen O de l'eix x , que prenem positiu cap avall. A continuació, hi pengem el bloc i deixem que, molt lentament, per raó del seu pes, mg , la molla es vagi estirant i el bloc baixant. En estirar-se, la molla fa una força amunt sobre el bloc que, després d'haver baixat l'altura x_0 , acaba compensant el seu pes. El bloc està en equilibri en el punt O' —v. figura 1.5 (b)—, i es compleix

$$mg - kx_0 = 0 \quad (1.12)$$

Si el fem baixar encara més fins a x —v. figura 1.5 (c)—, ara la força que fa la molla és kx , i la força resultant sobre el bloc, tenint en compte (1.12), és

$$mg - kx = kx_0 - kx = -k(x - x_0) = -kx' \quad (1.13)$$

és a dir, és la força que faria la molla si s'hagués estirat $x' = x - x_0$, o sigui, si s'estirés només des de la posició d'equilibri O' —v. figura 1.5 (d).

La força neta que actua sobre el bloc penjat, (1.13), continua essent recuperadora lineal de constant k . En conseqüència, si el traiem de l'equilibri, farà un MHS amunt i avall, el període del qual, per (1.8) i (1.12), valdrà

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{x_0}{g}}$$

Com a resum, podem dir que el tractament d'un problema amb un sistema molla-massa penjat verticalment és idèntic al que faríem si el moviment del conjunt fos horitzontal però prenent l'origen d'elongacions en el nou punt d'equilibri O' .



Exemple 1.2. Associacions de dues molles

A la figura 1.6, s'hi han representat tres formes en què podem unir una partícula a dues molles de constants k_1 i k_2 . Estudieu, per als tres casos, quina hauria de ser la constant k d'una sola molla que fes l'efecte de totes dues.

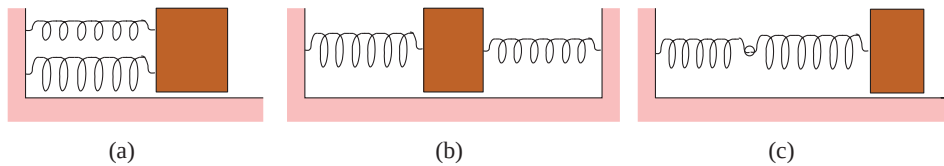


Figura 1.6

Solució

Suposem que els tres blocs de la figura 1.6 estan en els seus punts d'equilibri. Això implica que les molles dels casos (a) i (c) tenen la seva longitud natural. Les dues molles del cas (b) poden mantenir en equilibri el bloc estant-hi totes dues estirades o comprimides, però en aquest exemple suposem que també tenen la seva longitud natural. Bé, doncs, tal com es veu a la figura 1.7 desplaçem els blocs una distància x fora de la posició d'equilibri.

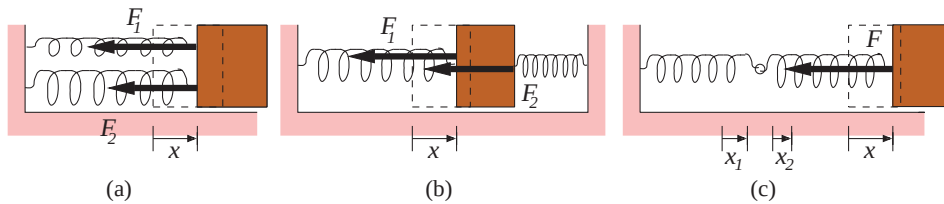


Figura 1.7

Cas (a). Aquestes molles s'han allargat la mateixa longitud x , per la qual cosa fan sobre el bloc les forces $F_1 = -k_1x$ i $F_2 = -k_2x$. La força resultant F sobre el bloc és la suma d'ambdues

$$F = F_1 + F_2 = -k_1x - k_2x = -(k_1 + k_2)x$$

de manera que si hi hagués només una molla i l'allarguéssim x , la força que faria sobre el bloc seria $F = -kx$, amb la constant de força k . Per tant,

$$k = k_1 + k_2 \quad (1.14)$$

Cas (b). En aquest cas, una molla s'allarga x i l'altra es comprimeix $-x$; en conseqüència, totes dues fan força en el mateix sentit, el contrari a l'allargament. La força resultant F val

$$F = F_1 + F_2 = -k_1x - k_2x = -(k_1 + k_2)x$$

que és equivalent en tot al cas anterior.

Cas (c). Aquest és diferent dels casos anteriors. Si desplaçem el bloc la distància x , les molles s'allarguen les longituds x_1 i x_2 , de manera que $x_1 + x_2 = x$. D'altra banda, l'única molla que fa força sobre el bloc és la que està en contacte amb ell. Si —com és habitual— suposem que les molles no tenen massa apreciable, aleshores la força F que fa aquesta

molla l'aplica sobre el bloc i sobre l'altra molla, i és la mateixa força F que fa la primera molla sobre la paret a la qual està lligada. És a dir, si F és la força que rep el bloc pel fet de separar-se x del seu punt d'equilibri, i k és la constant de força de la hipotètica molla equivalent a aquestes dues, tenim les dues igualtats

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = x \\ F = -k_1 x_1 = -k_2 x_2 = -kx \end{cases}$$

d'on surt, $k_1 x_1 = k_2 x_2 = k(x_1 + x_2)$. I, d'aquí, obtenim que

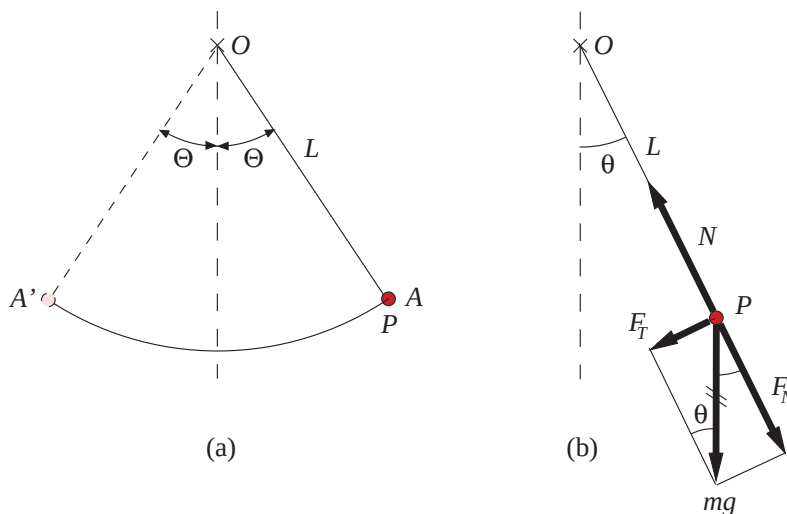
$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \quad (1.15)$$

1.3. Pèndols. MHS angular

1.3.1. Pèndol simple

Com es presenta a la figura 1.8, un *pèndol simple* consisteix en una barra o una corda inextensible, de longitud L però de massa negligible, que té una partícula P —la lentilla—, de massa m , lligada a l'extrem. Pengem la corda del sostre per l'altre extrem O i deixem que, per l'acció del seu pes, oscil·li en un pla vertical. Per la conservació de l'energia, el moviment del pèndol serà simètric al voltant de la vertical, entre les dues posicions extremes A i A' .

Figura 1.8



Les forces que actuen sobre la lentilla són el seu pes, mg , i la tensió de la corda, N . A la figura 1.8 (b), s'indica que, quan la corda fa un angle θ amb la vertical, és a dir, amb la posició d'equilibri, podem descompondre el vector pes en dues components: la normal, de mòdul $F_N = mg \cos \theta$, i la tangencial, de mòdul $F_T = mg \sin \theta$. Quan la partícula està oscil·lant, descriu un moviment circular —no uniforme— de radi constant L ;



precisament per això, la diferència entre la tensió N i la component normal del pes, F_N , no pot ser nul·la sinó que ha de ser igual a la força centrípeta

$$N - mg \cos \theta = m \frac{v^2}{L}$$

si bé, com veurem a continuació, per a l'estudi del pèndol, aquesta última igualtat, que ens proporciona el valor de la tensió N , no és significativa.

Aplicarem la segona llei de Newton a la lentilla relacionant la seva acceleració tangencial amb la component tangencial del pes. Com sabem, en un moviment circular, l'acceleració tangencial és igual al producte de l'acceleració angular $d^2\theta/dt^2$ pel radi L . Quant a la força, molta atenció: la segona llei de Newton és una equació vectorial i hem de tenir en compte, per tant, els sentits dels vectors. En aquest cas, fixem-nos que, quan l'angle θ sigui positiu, la força tangencial serà negativa, i a l'inrevés. Això significa que la força és restauradora. Per tant, cal posar un signe menys davant del mòdul de la força. Així, tindrem

$$mL \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg \sin \theta$$

i, simplificant la massa m , obtenim l'equació diferencial

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L} \sin \theta = 0 \quad (1.16)$$

Malgrat l'aparença innocent d'aquesta equació, el $\sin \theta$ la complica extraordinàriament. Ara bé, si l'angle θ de l'oscil·lació és petit en tot moment, podem aproximar el sinus per l'angle en radians —v. (A.61), apèndix §A.2—

$$\sin \theta \approx \theta \quad (1.17)$$

i així l'equació anterior quedarà com

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L} \theta = 0 \quad (1.18)$$

que és una equació diferencial de l'estil de la (1.9) per a l'angle θ . Com que ambdues equacions són formalment idèntiques, els resultats també han de ser-ho. En conseqüència, l'angle θ depèn del temps t com

$$\theta = \Theta \cos(\omega t + \phi) \quad (1.19)$$

i la lentilla fa un *MHS angular*, amb $\omega = \sqrt{g/L}$, de manera que l'amplitud angular Θ i la fase inicial ϕ són les dues constants que depenen de les condicions inicials. El període de les oscil·lacions val

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \quad (1.20)$$

que, com en tots els MHS, és independent de l'amplitud de les oscil·lacions.

Cal insistir que aquests resultats només són vàlids si les oscil·lacions són d'*amplitud petita*.

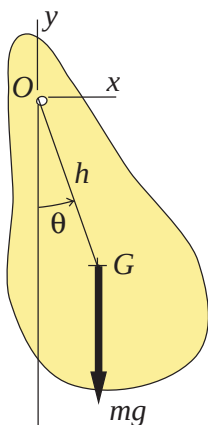
Les aproximacions com ara la (1.17) són molt freqüents en tots els camps de la física, com en l'òptica, l'electrònica, etc. S'en diu que és una *aproximació lineal* perquè l'equació diferencial a què dona lloc, la (1.18), és una *equació diferencial lineal*, és a dir, a tota l'equació la funció θ és elevada a la potència 1. L'equació exacta per a θ , la (1.16), no és lineal a causa del $\sin \theta$; tampoc no seria lineal si hi aparegués en l'equació, per exemple, θ^2 , $e^{-\lambda\theta}$, $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$, $\sqrt{\theta}$, etc.

Les equacions diferencials lineals tenen una propietat que s'anomena *principi de superposició*, que ajuda a resoldre-les. En canvi, l'estudi de les *equacions diferencials no lineals*, a les quals no és aplicable, és molt més complex que el de les lineals. Del principi de superposició, en parlarem, especialment, als capítols 4 i 5; de les oscil·lacions no lineals, al capítol 7.

1.3.2. Pèndol físic

A la figura 1.9, es mostra un *pèndol físic* consistent en un sòlid rígida de forma arbitrària, suspès d'un eix horitzontal —l'eix z — que passa pel punt O , el *punt o centre de suspensió*. El pes del cos, $\mathbf{P} = m\mathbf{g}$, s'aplica al seu *centre de masses*, G , essent h la distància entre els punts O i G . Fora de l'equilibri, l'eix OG forma un angle θ no nul amb la vertical. Per analitzar el moviment del pèndol físic, utilitzem la *segona llei de Newton per a la dinàmica de la rotació*. Com sabem, aquesta diu:

Figura 1.9



La suma $\mathbf{M}$ dels moments de les forces externes que actuen sobre un sòlid és igual al producte del moment d'inèrcia I del sòlid respecte de l'eix de rotació pel vector acceleració angular $\boldsymbol{\alpha}$, és a dir,

$$\mathbf{M} = I\boldsymbol{\alpha}$$

Calculem els moments respecte del punt fix de suspensió O del pèndol. Les úniques forces externes que actuen sobre el pèndol són:

- la reacció de l'eix d'oscil·lació sobre el sòlid, que com que està aplicada en O mateix no fa moment respecte de O —i no està representada a la figura 1.9, i
- el pes, mg , aplicat a G .

Amb el sistema d'eixos adoptats a la figura 1.9, el moment que fa el pes $\mathbf{P} = -mg\mathbf{u}_y$ respecte de O , val

$$\mathbf{M} = \overline{OG} \times \mathbf{P} = -h \sin \theta mg \mathbf{u}_z$$

on el signe menys manifesta el caràcter recuperador del moment: si l'angle θ és positiu, el moment és negatiu, i viceversa. L'acceleració angular és $\boldsymbol{\alpha} = \frac{d^2\theta}{dt^2} \mathbf{u}_z$; llavors, tenim

$$-h \sin \theta mg \mathbf{u}_z = I \frac{d^2\theta}{dt^2} \mathbf{u}_z$$



és a dir,

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgh}{I} \sin \theta = 0 \quad (1.21)$$

Aquesta és l'equació diferencial del moviment angular del pèndol físic, molt semblant a la (1.16), i que, com dèiem abans, el $\sin \theta$ la fa molt complicada. Això sí, si les oscil·lacions del pèndol es limiten a amplituds petites, llavors $\sin \theta \approx \theta$, i, com hem vist per al pèndol simple, l'equació anterior queda linealitzada com

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgh}{I} \theta = 0 \quad (1.22)$$

Si les oscil·lacions són petites, el pèndol físic fa, doncs, un MHS angular de període

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgh}} \quad (1.23)$$

El fet que en aquesta expressió aparegui el quocient I/m ens indica que el període del pèndol físic, anàlogament al cas del pèndol simple, no depèn de la seva massa sinó de la distribució geomètrica de la massa entorn de l'eix de suspensió.

Són moltes les aplicacions del pèndol físic. Històricament, les més importants han estat les dues següents:

- per raó de la independència del període de l'amplitud de l'oscil·lació, els pèndols s'han utilitzat molt com a rellotge o cronòmetre precís per mesurar el temps;
- com que el període del pèndol es pot mesurar amb molta precisió i aquest depèn molt de g , els pèndols s'han utilitzat també molt en la determinació precisa de l'acceleració de la gravetat d'un lloc determinat.

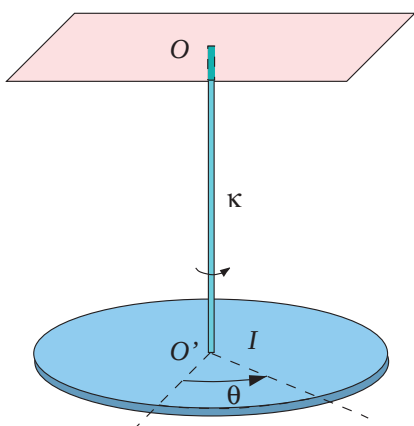
1.3.3. Pèndol de torsió

A la figura 1.10, s'ha representat un *pèndol de torsió*, consistent en un fil vertical $\overline{OO'}$ fixat al sostre, del qual s'ha suspès un disc —o un sòlid rígid, en general. Si el disc es gira en un pla horitzontal al voltant del fil-eix un cert angle i es deixa anar, s'observa que oscil·la en un MHS angular. Notem que l'extrem O' està unit al disc i gira amb aquest, però, en canvi, l'extrem O està unit al sostre i no gira de cap manera. Aleshores, a cada oscil·lació el fil pateix un torçament creixent en un sentit o en l'altre.

La posició d'equilibri del sistema fil-disc correspon a aquella orientació del disc per a la qual el fil no està torçat. Si θ és l'angle girat pel disc respecte de la seva posició d'equilibri, es troba que, mentre no es depassi el límit elàstic de torsió del fil, el torçament d'aquest exerceix un moment M recuperador sobre el disc proporcional a θ —un altre cop la *lleï de Hooke*— $M = -\kappa \theta$, on κ és la *constant de torsió* del fil.

Aquesta constant depèn de les característiques elàstiques de cada fil i fa el mateix paper en el pèndol de torsió que la constant de força k en el sistema molla-massa. Igual que succeeix en aquest sistema, podem determinar experimentalment la κ d'un fil concret

Figura 1.10



amb una sola mesura. En efecte, només cal veure quin angle ha girat el disc després d'haver-hi aplicat un moment conegut.

Si I és el moment d'inèrcia del disc o sòlid respecte de l'eix-fil, aplicant la segona llei de Newton per a les rotacions, com hem fet amb el pèndol físic, tindrem

$$-\kappa \theta = I \frac{d^2 \theta}{dt^2}$$

és a dir, l'equació diferencial

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{\kappa}{I} \theta = 0$$

Les oscil·lacions del sistema fil-disc són, per tant, MHS angulars de període

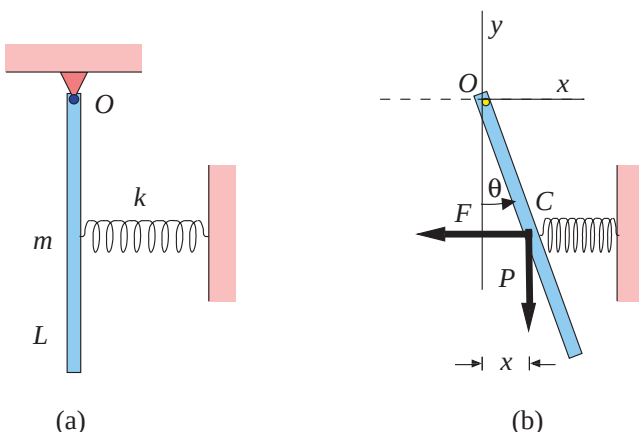
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{\kappa}} \quad (1.24)$$

Així com una aplicació molt directa de la llei de Hooke en relació amb les molles és el dinamòmetre, també l'aplicació més habitual dels pèndols de torsió és la *balança de torsió*. En aquestes balances, els fils dels pèndols de torsió són calibrats per poder mesurar forces, com en el dinamòmetre, però, en aquest cas, molt més petites.

Exemple 1.3. Pèndol físic amb molla

Tenim un pèndol físic que consisteix en una barra homogènia de longitud $L = 1$ m i de massa $m = 1$ kg, penjada del sostre per un extrem. Per tal d'escurçar el període d'aquest pèndol, unim el centre de la barra a una molla horitzontal. Quina constant de força k ha de tenir la molla si volem que el període del sistema pèndol-molla sigui la meitat que el del pèndol sol?

Figura 1.11





Solució

A la figura 1.11 (a) anterior, es mostren la barra i la molla en l'equilibri; a la figura 1.11 (b), s'han representat barra i molla fora de l'equilibri i, a més, el sistema de referència Oxy que utilitzarem en la resolució del problema.

Desplacem la barra un angle petit θ de la posició d'equilibri. Les forces que hi actuen i que fan moment respecte de l'extrem fix O són la F que fa la molla i, naturalment, el propi pes P de la barra.

Ara fem les consideracions següents sobre el pes $\mathbf{P}$ de la barra i sobre la força $\mathbf{F}$ que fa la molla.

- El pes de la barra és $\mathbf{P} = -mg\mathbf{u}_y$ i, com que la barra és homogènia, s'aplica al seu centre C . El moment del pes respecte de O val, doncs, considerant θ petit,

$$\mathbf{M}_P = \overline{OC} \times m\mathbf{g} = -\frac{L}{2} \sin \theta mg \mathbf{u}_z \approx -\frac{L}{2} \theta mg \mathbf{u}_z$$

- Si θ és petit, la força F que fa la molla també s'aplica al centre C de la barra i val

$$\mathbf{F} = -kx\mathbf{u}_x = -k\frac{L}{2} \sin \theta \mathbf{u}_x \approx -k\frac{L}{2} \theta \mathbf{u}_x$$

ja que $x = L \sin \theta / 2 \approx L \theta / 2$ és l'escurçament de la molla. Com que $\cos \theta \approx 1$, el moment d'aquesta força respecte de O valdrà

$$\mathbf{M}_F = \overline{OC} \times \mathbf{F} = -k\frac{L}{2} \theta \frac{L}{2} \cos \theta \mathbf{u}_z \approx -\frac{L^2}{4} k \theta \mathbf{u}_z$$

Com que el moment resultant és la suma dels dos moments, podem plantejar l'equació de la dinàmica de la rotació de la forma

$$-\left(\frac{L}{2} mg + \frac{L^2}{4} k\right) \theta = I \frac{d^2 \theta}{dt^2}$$

on I és el moment d'inèrcia de la barra respecte de O , és a dir, $I = mL^2/3$. Substituint I i reordenant els termes, trobem l'equació diferencial del moviment

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \left(\frac{3}{2} \frac{g}{L} + \frac{3}{4} \frac{k}{m}\right) \theta = 0$$

I el període del sistema pèndol-molla valdrà, doncs,

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{3}{2} \frac{g}{L} + \frac{3}{4} \frac{k}{m}}} \quad (1)$$

Si la molla no hi fos, només tindríem el pèndol; aquest cas equival a posar $k = 0$ a l'expressió anterior

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{2}{3} \frac{L}{g}} \quad (2)$$

A l'enunciat, ens demanen el valor de k que faci $T = T_0/2$. Així doncs, per (1) i (2), prenent $g = 9,81 \text{ m/s}^2$, trobem que la molla que hem de col·locar ha de tenir una constant k de

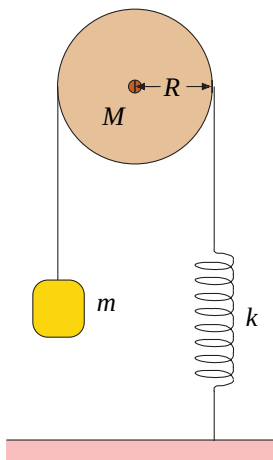
$$k = \frac{6mg}{L} = 58,86 \text{ N/m}$$

Exemple 1.4. Sistema molla-massa-politja

Per una politja fixa hi passa una corda de massa negligible que té un extrem lligat a terra a través d'una molla de constant de força $k = 250 \text{ N/m}$ i, a l'altre, un cos de massa $m = 2 \text{ kg}$, tal com es mostra a la figura 1.12. La massa i el radi de la politja són, respectivament, $M = 3 \text{ kg}$ i $R = 0,12 \text{ m}$, i la corda, en el seu moviment, arrossega la politja sense relliscar. Determineu el període de les oscil·lacions que farà el sistema si el traiem de l'equilibri.

Solució

Figura 1.12



Tal com s'assenyala a la figura 1.13 (a), en la situació d'equilibri la molla ja ha d'estar estirada respecte de la seva longitud natural, ja que ha de compensar el pes mg del cos. Si anomenem x_0 l'allargament inicial de la molla, en l'equilibri del sistema es compleix que

$$kx_0 = mg \quad (1)$$

ja que la tensió F que equilibra el cos és la mateixa que actua en ambdós costats de la politja i la que estira la molla.

D'altra banda, prenguem com a origen de la x , posició vertical del cos, el punt d'equilibri anterior, amb el sentit positiu cap avall. Un cop ja està oscil·lant el sistema, tenim que:

- Sobre el cos actuen el pes mg i la tensió F_1 que, per la segona llei de Newton, donen

$$mg - F_1 = m \frac{d^2x}{dt^2} \quad (2)$$

on $a = d^2x/dt^2$ és l'acceleració del cos, positiva si és cap avall i negativa si és cap amunt.

- Sobre la politja actuen les dues tensions F_1 i F_2 . La politja gira amb una certa acceleració angular α perquè aquestes tensions són diferents. En efecte, si calculem els moments de les tensions F_1 i F_2 respecte del centre de la politja, i I n'és el moment d'inèrcia també respecte del seu centre, la segona llei de Newton per a les rotacions ens diu que

$$RF_1 - RF_2 = I \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (3)$$

on hem pres, per als moments i $\frac{d^2\theta}{dt^2} = \alpha$, com a positiu el sentit antihorari.

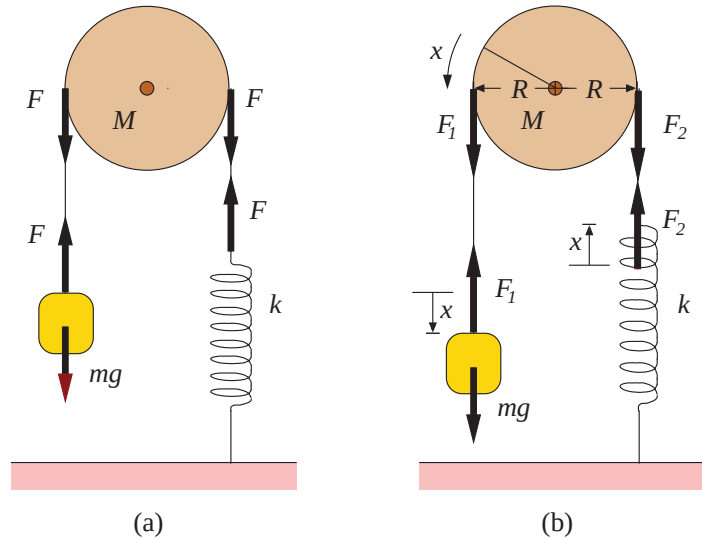


Figura 1.13

- La corda que lliga el cos amb la molla a través de la politja és inextensible; per tant, la x que baixa el cos és l'allargament de la molla. Aleshores, obtindrem que

$$F_2 = k(x_0 + x) \quad (4)$$

- Fins ara tenim quatre incògnites —les dues tensions i les dues acceleracions, a i α — i tres equacions. Ara només ens falta una relació entre l'acceleració lineal a del cos i l'acceleració angular α de la politja. Com que l'enunciat ens assegura que la corda arrossega perfectament la politja sense que rellisqui per sobre d'ella, llavors l'acceleració de la corda, que és la mateixa que la del cos, a , és la mateixa que la lineal de la perifèria de la politja, és a dir, $R\alpha$. Per tant,

$$R \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2} \quad (5)$$

Substituint ara la F_1 de (2), la F_2 de (4) i la α de (5) en (3), i considerant la relació (1), arribem a l'equació

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \left(\frac{k}{m + I/R^2} \right) x = 0$$

d'on resulta ω . Si ara considerem la politja com un cilindre homogeni de radi R , aleshores el moment d'inèrcia valdrà $I = MR^2/2$. Per tant, podem concloure finalment que

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m + \frac{I}{R^2}}}} = 2\pi \sqrt{\frac{2m + M}{2k}}$$

Substituint els valors numèrics, en resulta $T = 0,7434$ s.



1.4. Energia potencial elàstica

La força $F = -kx$ que dóna lloc al MHS d'una partícula és *conservativa*, ja que deriva de l'energia potencial elàstica U donada per

$$-kx = -\frac{dU}{dx} \quad \text{d'on} \quad U = \int kx dx = \frac{1}{2}kx^2 + C \quad (1.25)$$

on C és una constant d'integració. Si, com és habitual, prenem $U = 0$ en $x = 0$, aleshores $C = 0$. Amb aquest conveni, la funció energia potencial U és

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2 \quad (1.26)$$

Per tant, sempre serà positiva o zero. I, en funció del temps t , per (1.1) la tenim com

$$U(t) = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t + \phi) \quad (1.27)$$

D'altra banda, per (1.2) podem posar l'energia cinètica com

$$K(t) = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \phi) \quad (1.28)$$

i la suma de la potencial (1.27) i la cinètica (1.28), tenint en compte (1.8), resulta

$$E = U + K = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t + \phi) + \frac{1}{2}kA^2 \sin^2(\omega t + \phi) = \frac{1}{2}kA^2 \quad (1.29)$$

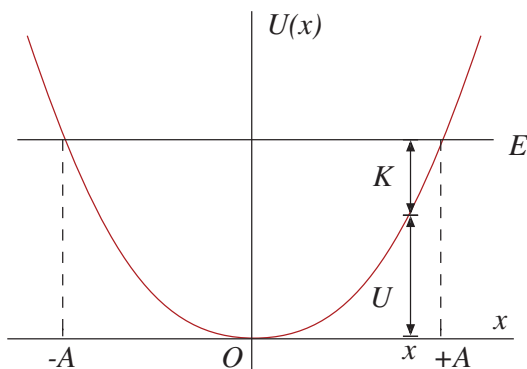
Acabem de comprovar que, certament, l'energia mecànica E és constant.

Sigui una partícula de massa m que està fent un MHS de freqüència angular ω i tal que, en un determinat instant es troba en la posició x_0 , amb la velocitat v_0 . Llavors, la seva energia mecànica val, per (1.29) i (1.8)

$$E = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x_0^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \quad (1.30)$$

Fixem-nos que hem tornat a obtenir el resultat (1.11) per a l'amplitud.

Figura 1.14





Com a resum de tot això i, per tal de comprendre bé les relacions energètiques relacionades amb el MHS, és molt interessant representar gràficament l'energia potencial $U(x)$ en funció de x , tal com s'ha fet a la figura 1.14.

Per exemple, per a una partícula unida a una molla, per (1.26) veiem que és la constant k d'aquesta molla la que dóna la forma de la paràbola. I, per (1.30), també comprovem que les condicions inicials de la partícula en determinen l'energia E . Per la gràfica, ens adonem que el nivell d'energia E —la intersecció de la recta $U = E$ amb la paràbola $U(x)$ — determina l'amplitud del moviment, com, de fet, ja hem vist a (1.29).

Igual com l'energia potencial, notem que l'energia cinètica K també es pot expressar fàcilment en funció de x . Efectivament, per (1.29) i per (1.26) tenim

$$K = E - U = \frac{1}{2}k(A^2 - x^2)$$

Exemple 1.5. Xocs i molles

Un projectil de massa $m = 10$ g, que va a la velocitat $v_0 = 500$ m/s, acaba impactant contra un bloc de fusta de massa $M = 2$ kg i s'incrusta dintre del bloc. El bloc està unit a una molla de constant de força $k = 100$ N/m, fixada a una paret, tal com es mostra a la figura 1.15.

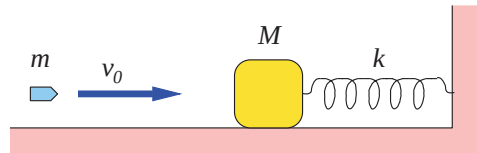


Figura 1.15

Tant el bloc com la molla es troben sobre una superfície horitzontal llisa. Si prenem com a $t = 0$ l'instant de l'impacte i com $x = 0$ la posició inicial del bloc, en repòs i en equilibri, estudeu:

- quin serà el moviment posterior del bloc i
- la força màxima que fa la molla sobre la paret.

Solució

- Suposem que l'impacte és instantani. El moviment del bloc posterior a l'impacte serà un MHS com el (1.1)

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi) \quad (1)$$

en què la posició d'equilibri coincideix amb l'origen de x . Ara només cal esbrinar quant valen A , ω i ϕ .

- Comencem per ω . Després de l'impacte, oscil·larà el conjunt bloc més bala, de massa $M + m$; per tant, la ω corresponent serà

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{M + m}}$$



resultat independent de qualsevol altra consideració. Substituint les dades de l'enunciat, obtenim $\omega = 7,053 \text{ rad/s}$.

- Pel que fa a l'amplitud, la trobarem aplicant els principis de conservació. Després de l'impacte, el conjunt bloc més bala surt llançat a la velocitat v_1 , donada per la conservació de la quantitat de moviment $mv_0 = (M + m)v_1$, i d'aquí

$$v_1 = \frac{m}{M + m}v_0$$

És a dir, $v_1 = 2,488 \text{ m/s}$. A $t = 0$, el conjunt té una energia cinètica que s'anirà transformant en potencial elàstica a mesura que la molla es vagi comprimint. A l'instant en què el conjunt arriba al repòs, la molla ja no es comprimeix més. Aleshores, tota l'energia cinètica inicial del conjunt —no la del projectil— s'ha transformat en energia potencial. Per tant, tindrem

$$\frac{1}{2}(M + m)v_1^2 = \frac{1}{2}kA^2$$

D'aquí i de l'equació anterior surt

$$A = \frac{mv_0}{\sqrt{k(M + m)}} \quad (2)$$

i, substituint, $A = 0,3527 \text{ m}$. Podem comprovar aquests resultats verificant que el producte ωA val, en efecte, la velocitat màxima del conjunt, és a dir, la inicial v_1 .

- La fase inicial ϕ . Per a $t = 0$, tenim $x = 0$ i $v = v_1$; per tant, d'(1)

$$0 = A \cos \phi \quad \text{i} \quad v_1 = -\omega A \sin \phi > 0$$

d'on resulta $\phi = 3\pi/2$ i, finalment,

$$x(t) = A \sin \omega t \quad (3)$$

amb la A i la ω anteriors.

- b) Pel que fa a la força F que fa la molla sobre la paret —i aquesta sobre l'extrem de la molla—, val $F = -kx$, amb la x donada per (3). Consegüentment, per (2) la força màxima, en valor absolut, valdrà

$$F_{\max} = kA = mv_0 \sqrt{\frac{k}{M + m}}$$

d'on, substituint, resulta $F_{\max} = 35,27 \text{ N}$.

1.5. Oscil·lacions al voltant d'un punt d'equilibri estable

Considerem una partícula en un camp de forces conservatiu del qual coneixem l'energia potencial $U(x)$. Sigui E l'energia mecànica que posseeix. Molt sovint es presenten casos semblants als que ess representen a la figura 1.16.



Recordem que, com fèiem en (1.25), la força $F(x)$ que actua sobre la partícula és la derivada de $U(x)$ —o sigui, el pendent de la funció representada— canviada de signe

$$F(x) = -\frac{dU(x)}{dx} \quad (1.31)$$

Això vol dir que, tant en el mínim com en el màxim relatiu de U , $x = x_0$ i $x = x_3$, respectivament, la força sobre la partícula és nul·la. Aquests dos punts són *punts d'equilibri*.

Suposem ara que tenim la partícula en el punt d'equilibri corresponent a x_0 , el mínim de U . Si desplacem lleugerament la partícula de x_0 a x , amb $x > x_0$, per (1.31) veiem que la força que actua sobre ella és $F < 0$, i al contrari, si el desplaçament és de x_0 cap a x , ara amb $x < x_0$, la força és $F > 0$. En tots dos casos, la força tracta de retornar la partícula al punt d'equilibri. A aquest punt x_0 es diu que és d'*equilibri estable*, i aquest tipus de forces que apareixen prop dels punts d'equilibri estable són forces restauradores.

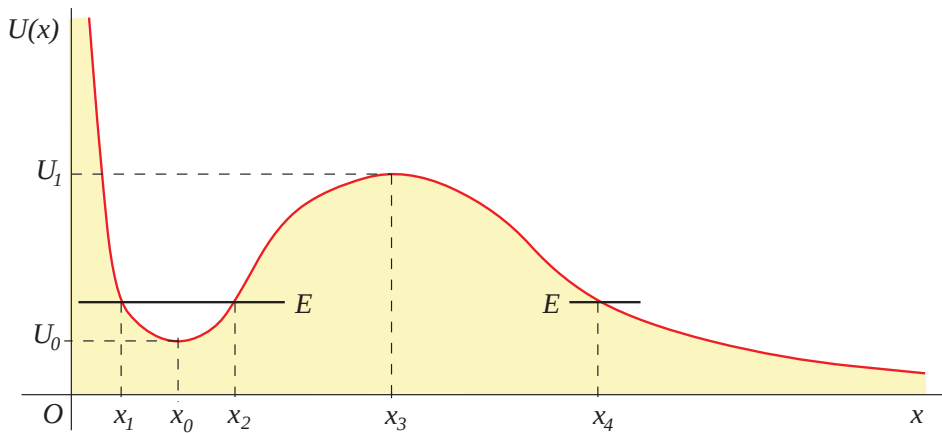


Figura 1.16

Els punts que corresponen a màxims relatius d'energia potencial es diu que són punts d'*equilibri inestable*. És el cas del x_3 de la gràfica 1.16 representada. Al contrari del que passa amb els d'equilibri estable, la força que actua sobre la partícula des del moment en què la separem del punt exacte d'equilibri és una força que l'allunya.

Continuem en el cas que es representa a la figura següent. Suposem que tenim una partícula inicialment en x_0 . Per tal que no retorni mai més al punt d'equilibri, aquesta partícula necessita tenir —o que se li comuniqui— una energia cinètica superior a $U_1 - U_0$, de tal manera que l'energia mecànica E sigui superior al màxim U_1 . En cas contrari, és a dir, si l'energia mecànica E és inferior a U_1 —que és el cas que s'il·lustra a la gràfica— la partícula estarà anant i tornant, oscil·lant entre x_1 i x_2 .

Aquest *moviment oscil·latori* no és pas, en general, un MHS, però sí té moltes de les seves característiques. Vegem-les: als extrems x_1 i x_2 del moviment, la velocitat és nul·la —canvia de sentit— i l'acceleració, en valor absolut, és màxima; al punt d'equilibri, l'acceleració és nul·la i la celeritat és màxima. Tots dos tipus de moviment són periòdics.



1.5.1. Període d'un moviment oscil·latori aproximat a un MHS

Continuem amb l'energia potencial $U(x)$ anterior. Desenvolupem la funció $U(x)$ en sèrie de Taylor al voltant del punt x_0 ; tenim, doncs,

$$U(x) = U(x_0) + \left(\frac{dU}{dx} \right)_{x_0} (x - x_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2U}{dx^2} \right)_{x_0} (x - x_0)^2 + \dots \quad (1.32)$$

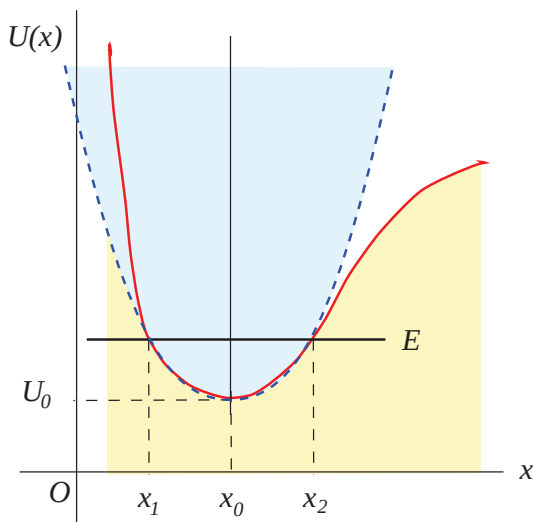
Si, de tot el desenvolupament, ens quedem només amb aquests tres primers termes, estem aproximant la funció $U(x)$ per una paràbola. Aproximació força bona, en general, si l'energia E és molt poc superior a $U_0 = U(x_0)$ o, dit d'una altra manera, si les posicions extremes del moviment x_1 i x_2 són pròximes a x_0 .

A la gràfica de la figura 1.17, s'ha representat el mínim d'energia potencial en x_0 i —en línia discontinua— la paràbola esmentada que s'ajusta al mínim de $U(x)$.

A més, podem fer les simplificacions següents:

- si a x_0 hi ha un mínim de $U(x)$, llavors $\left(\frac{dU}{dx} \right)_{x_0} = 0$,
- triem l'origen de potencial de manera que sigui nul a x_0 , és a dir: $U_0 = U(x_0) = 0$,
- traslladem l'origen de l'eix x de manera que $x_0 = 0$.

Figura 1.17



Així, el desenvolupament (1.32) anterior queda reduït a

$$U(x) \approx \frac{1}{2} \left(\frac{d^2U}{dx^2} \right)_0 x^2 \quad (1.33)$$

És a dir, hem aproximat l'energia potencial $U(x)$ al voltant del seu mínim a x_0 per l'energia potencial d'un oscil·lador harmònic simple. Comparant (1.33) amb (1.26), veiem que l'equivalent a la constant de força k val



$$k = \left(\frac{d^2U}{dx^2} \right)_0 \quad (1.34)$$

I a partir de k recordem que, per (1.8), tenim

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\left(\frac{d^2U}{dx^2} \right)_0}} \quad (1.35)$$

1.5.2. Període d'un moviment oscil·latori qualsevol

Ja sabem que el període d'un MHS és independent de les condicions inicials o, el que és el mateix, de la seva energia E . Però el període d'un moviment oscil·latori no MHS, en general, sí que depèn de E . Vegem com es pot calcular el període en el cas d'un moviment oscil·latori qualsevol.

Si coneixem $U(x)$ i l'energia mecànica E d'una partícula de massa m , per la conservació de l'energia tenim

$$E = U + K = U(x) + \frac{1}{2}m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2$$

D'aquí aïllem la derivada i ens queda

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}} \quad (1.36)$$

Ara integrem l'expressió (1.36) prenent com a límits d'integració els límits del moviment x_1 i x_2 . Aquesta integral ens donarà l'interval de temps que dura una semioscil·lació. Consegüentment, el període T valdrà

$$T = 2 \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}} \quad (1.37)$$

Si, per exemple, en el cas particular del MHS, posem $U(x) = kx^2/2$ a l'expressió anterior i prenem $x_1 = -A$ i $x_2 = A$, fem la integral i simplifiquem arribem al resultat ja ben conegut de $T = 2\pi\sqrt{m/k}$, independent de A .

1.5.3. Equació d'un moviment oscil·latori qualsevol

L'equació (1.36), integrada ara amb els límits inferiors corresponents a la condició inicial —en $t = 0$, $x = x_0$ — i, com a límits superiors, els corresponents a t i x , proporciona la inversa de l'equació de moviment de la partícula

$$t = \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}} \quad (1.38)$$



Novament, si posem, per exemple, l'energia potencial $U(x) = kx^2/2$ de l'oscil·lador harmònic i fem la integral, obtenim

$$t = \sqrt{\frac{m}{k}} \arccos \left(\sqrt{\frac{k}{2E}} x \right) + C$$

La constant C depèn de x_0 i, com que té dimensions de temps, podem denotar-la per t_0 . En aquest exemple, és fàcil invertir la funció $t(x)$ anterior; trobem

$$x = \sqrt{\frac{2E}{k}} \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m}} (t - t_0) \right)$$

que correspon al MHS (1.1).

Exemple 1.6. Moviment entorn d'un punt d'equilibri estable

Una partícula de massa $m = 2$ kg es troba sotmesa a un camp de forces unidireccional l'energia potencial del qual ve donada per l'expressió

$$U(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x \quad (1)$$

on la U és en J i la x en m.

- Trobeu els punts d'equilibri i comproveu que només un és d'equilibri inestable.
- Aproximeu la funció $U(x)$ al voltant del punt d'equilibri estable per una paràbola. Esbrineu el període de les petites oscil·lacions de la partícula entorn del mínim.

Solució

Per trobar els punts d'equilibri, derivem l'energia potencial (1)

$$\frac{dU}{dx} = 6x^2 - 6x - 12$$

Igualant ara la funció resultant a zero, ens queda l'equació

$$6x^2 - 6x - 12 = 0$$

Les dues solucions, $x_1 = -1$ i $x_2 = +2$, són els dos punts d'equilibri que té la $U(x)$. Per veure si són d'equilibri estable o inestable, els substituïm a la segona derivada de $U(x)$

$$\frac{d^2U}{dx^2} = 12x - 6$$

$$\left(\frac{d^2U}{dx^2} \right)_{x=-1} = -18 < 0 \quad \text{per tant, màxim: equilibri inestable}$$

$$\left(\frac{d^2U}{dx^2} \right)_{x=+2} = +18 > 0 \quad \text{per tant, mínim: equilibri estable}$$



L'aproximació de l'energia potencial $U(x)$ per una paràbola al voltant del punt d'equilibri estable que hi ha a $x = 2$ és

$$U(x) \approx U_{x=2} + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2U}{dx^2} \right)_{x=2} (x-2)^2$$

és a dir,

$$U(x) \approx -20 + 9(x-2)^2 \quad (2)$$

i, en conseqüència, per (1.35)

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\left(\frac{d^2U}{dx^2} \right)_{x=2}}} = \frac{2\pi}{3} = 2,094 \text{ s}$$

A la figura 1.18, s'ha representat l'energia potencial $U(x)$ en línia contínua i, en discontinua, l'aproximació parabòlica (2) al voltant del mínim corresponent a $x = 2$.

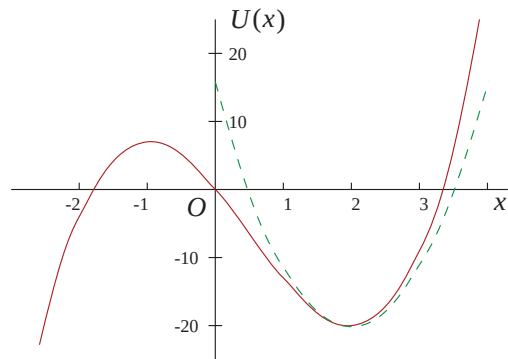


Figura 1.18

1.6. Mètode de la conservació de l'energia

En aquesta secció, veurem, amb diversos exemples, com podem dirigir l'estudi de les oscil·lacions d'un sistema aplicant-hi la conservació de l'energia mecànica. Aquest nou enfocament o *mètode de l'energia* té, sovint, diversos avantatges davant de l'aplicació de la segona llei de Newton:

- les energies potencial i cinètica són magnituds escalars bastant més manejables que les forces i els moments, que són vectorials;
- amb el mètode energètic, no cal preocupar-se per les forces de lligament que no fan treball.

Mètode de Rayleigh. És una variació del mètode de la conservació de l'energia molt útil i ràpida quan només ens interessa trobar el període de les oscil·lacions, sense necessitat de passar per l'equació del moviment. Aquest mètode consisteix en el raonament següent: l'energia cinètica del sistema és màxima en el punt o estat d'equilibri i 0 en l'estat d'elongació màxima; l'energia potencial del sistema és màxima en l'estat d'elongació

màxima i és mínima —que prendrem 0— en l'estat d'equilibri. Per la conservació de l'energia, podem igualar aquest dos màxims

$$K_{\max} = U_{\max} \quad (1.39)$$

D'aquesta igualtat se sol trobar fàcilment la freqüència angular.

Vegem com s'apliquen ambdós mètodes a dos casos senzills ja coneguts; després, ja en podrem considerar més complexos.

• Primer exemple

Una partícula s'està movent sobre l'eix x sota la influència de l'energia potencial $U(x) = kx^2/2$. Quin moviment fa?

En coneixem l'energia potencial. Movent-se rectilíneament sobre l'eix x , l'energia cinètica serà $K = mv_x^2/2$. Per la conservació de l'energia, la suma següent

$$\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = E \quad (1.40)$$

ha de ser constant. Si derivem respecte del temps, obtenim

$$kx \frac{dx}{dt} + m \frac{dx}{dt} \frac{d^2x}{dt^2} = 0$$

Ara, simplificant la velocitat dx/dt , arribem a l'equació diferencial del moviment de la partícula

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

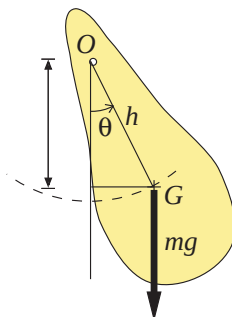
que és l'equació del MHS de període $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$.

Amb el mètode de Rayleigh: igualem l'energia potencial màxima, $U_{\max} = 1/2kx_{\max}^2$, a l'energia cinètica màxima, $K_{\max} = 1/2mv_{\max}^2 = 1/2m(\omega x_{\max})^2$, d'on es dedueix ω directament.

• Segon exemple

En aquest segon cas, estudiem el pèndol físic, ja vist a la secció §1.3.

Figura 1.19



El pèndol, com tornem a veure a la figura 1.19, és un sòlid rígido que gira amb una velocitat angular $\frac{d\theta}{dt}$ entorn d'un eix horitzontal que passa pel punt de suspensió O.

La seva energia cinètica val, doncs,

$$K = \frac{1}{2}I \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2$$

essent I el moment d'inèrcia respecte de l'eix horitzontal que passa per O.



Pel que fa a la seva energia potencial, si prenem l'origen d'energia en el nivell del punt de suspensió O , aleshores $U = -mgh \cos \theta$, on h és la distància entre O i el centre de gravetat G del pèndol. Així, la constant energia mecànica val

$$\frac{1}{2}I \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 - mgh \cos \theta = E$$

La derivada d'aquesta expressió ens dona

$$I \frac{d\theta}{dt} \frac{d^2\theta}{dt^2} + mgh \sin \theta \frac{d\theta}{dt} = 0$$

i, simplificant $d\theta/dt$, retrobem l'equació diferencial (1.21)

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgh}{I} \sin \theta = 0$$

Tot seguit, l'aproximació $\sin \theta \approx \theta$ per a oscil·lacions petites ens porta a l'equació diferencial del MHS angular del pèndol i al període

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgh}{I} \theta = 0$$

Amb el mètode de Rayleigh: en aquest cas, la igualtat (1.39) ens proporciona

$$\frac{1}{2}I \left(\frac{d\theta}{dt} \right)_{\max}^2 = mgh(1 - \cos \theta_{\max}) \quad (1.41)$$

D'altra banda, sabem que $\left(\frac{d\theta}{dt} \right)_{\max} = \omega \theta_{\max}$, així com que, si l'angle $\theta_{\max}$ és petit, per (A.57), $\cos \theta_{\max} \approx 1 - \theta_{\max}^2/2$. Substituint tot això en (1.41), queda com

$$\frac{1}{2}I(\omega \theta_{\max})^2 = mgh \frac{\theta_{\max}^2}{2}$$

d'on aïllem la freqüència angular ω .

Exemple 1.7. Oscil·lacions dintre d'una esfera

Un sòlid està constituït per dues partícules iguals de massa m , unides per una barra de longitud $2L$ de massa negligible. Si el col·loquem dintre d'una esfera buida de radi R —v. figura 1.20— i el desplaçem de la posició d'equilibri trobem el període de les oscil·lacions que farà. Suposeu que són d'amplitud petita, contingudes en un pla vertical fix i que no hi ha fricció.

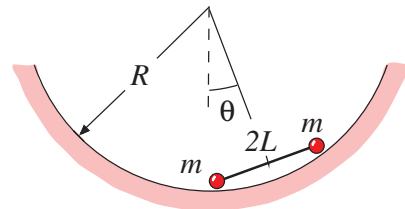
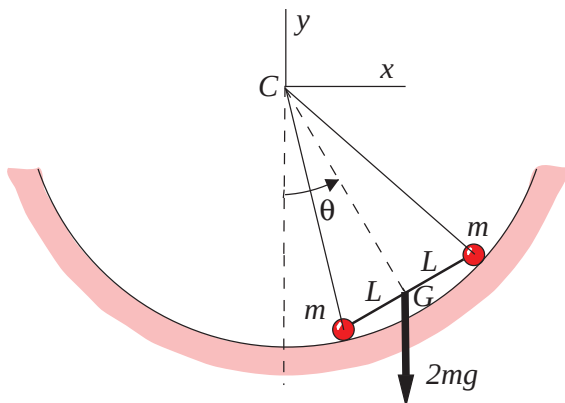


Figura 1.20

Solució

Primer en calcularem el període considerant forces i moments i, després, per conservació de l'energia. A la figura 1.21 s'ha representat el sòlid fora de l'equilibri. Tenim les dues partícules, de massa m ; el seu centre de gravetat G , on apliquem el pes del sòlid, $2mg$, i el centre de rotació del conjunt, C , que és el centre de l'esfera. L'angle θ que formen la vertical amb el segment $\overline{CG}$ determina la posició del sòlid.

Figura 1.21



I) Per forces i moments

A més del pes, les altres dues forces que actuen són les reaccions normals de la superfície esfèrica sobre les partícules, però com que aquestes forces estan dirigides cap al centre C , el càlcul del moment de les forces respecte de C , M_C , es limita al moment del pes. Amb el sistema d'eixos indicats a la figura anterior, aquest moment val

$$M_C = \overline{CG} \times 2mg = -2mg\sqrt{R^2 - L^2} \sin \theta \mathbf{u}_z \quad (1)$$

I el moment d'inèrcia de les dues partícules respecte de l'eix horitzontal que passa per C val

$$I_C = 2 \cdot mR^2 \quad (2)$$

Per tant, per (1) i (2), l'equació fonamental de la dinàmica de la rotació, $M_C = I_C \frac{d^2\theta}{dt^2}$, aplicada a aquest cas queda com

$$-g\sqrt{R^2 - L^2} \sin \theta = R^2 \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

d'on, suposant oscil·lacions petites tals que $\sin \theta \approx \theta$, resulta

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g\sqrt{R^2 - L^2}}{R^2} \theta = 0 \quad (3)$$

i un període de $T = 2\pi \sqrt{\frac{R^2}{g\sqrt{R^2 - L^2}}}$.



II) Per conservació de l'energia

Calculem l'energia mecànica que té el sòlid —les dues partícules unides—, suma de la potencial gravitatòria U més la cinètica K , en un instant en què el segment $\overline{CG}$ forma l'angle θ amb la vertical. Prenent l'origen d'energia potencial a l'altura del centre C , tenim

$$U = -2mg\sqrt{R^2 - L^2} \cos \theta \quad (4)$$

Fixem-nos que les dues partícules es mouen sempre cadascuna a la mateixa celeritat de l'altra, ja que el seu centre comú de masses, G , i elles mateixes, giren al voltant del centre C . Per tant, tenim que l'energia cinètica de les dues val

$$K = 2 \cdot \frac{1}{2}mv^2 = mR^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \quad (5)$$

L'energia mecànica és la suma de (4) més (5)

$$E = -2mg\sqrt{R^2 - L^2} \cos \theta + mR^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2$$

Derivant aquesta expressió, trobem

$$\frac{dE}{dt} = 0 = +2mg\sqrt{R^2 - L^2} \sin \theta \frac{d\theta}{dt} + 2mR^2 \frac{d\theta}{dt} \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

i, simplificant $d\theta/dt$ i suposant angles θ petits, retrobem l'equació (3) i, en definitiva, el període de les oscil·lacions. Es deixa per al lector tornar a trobar el període aplicant el mètode de Rayleigh.

Per acabar, notem que aquest sistema és totalment equivalent a un pèndol físic constituït per les dues masses m , dues barres sense massa de longitud R i una tercera de longitud $2L$. Aplicant (1.23), amb $I \rightarrow 2 \cdot mR^2$, $m \rightarrow 2m$, $h \rightarrow \sqrt{R^2 - L^2}$, resulta immediat trobar-ne el període.

1.7. Problemes resolts i problemes proposats

1.7.1. Problemes resolts

Problema 1.1. Cinemàtica d'un MHS

L'equació de moviment d'una partícula ve donada per

$$x(t) = 10 \cos \pi \left(\frac{2}{3}t + \frac{1}{7} \right) \quad (1)$$

on totes les magnituds estan expressades en unitats SI. Determineu:

- l'amplitud, la freqüència i el període;
- la velocitat i l'acceleració màximes que experimentarà la partícula;



- c) la posició, la velocitat i l'acceleració en $t = 18$ s;
 d) en quin instant $t > 18$ s la partícula es trobarà a l'origen movent-se amb velocitat positiva?

Solució

- a) Comparant (1) amb l'expressió general (1.1) d'un MHS: $x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$, veiem que $A = 10$ m, $\omega = \frac{2}{3}\pi$ rad/s, $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{3}$ Hz, i $T = \frac{1}{f} = 3$ s.

- b) Derivant (1), trobem

$$v(t) = -\frac{20\pi}{3} \sin \pi \left(\frac{2}{3}t + \frac{1}{7} \right) \quad (2)$$

la velocitat màxima val, doncs, $v_{\max} = \frac{20\pi}{3} = 20,9440$ m/s;

i, com que $a = -\omega^2 x$, obtenim $a_{\max} = \omega^2 A = \frac{40\pi^2}{9} = 43,865$ m/s²

- c) Per a $t = 18$ s, la fase $\varphi = \omega t + \phi$ de la partícula val

$$\begin{aligned} \varphi &= \pi \left(\frac{2}{3}t + \frac{1}{7} \right) = 38,14791079 \text{ rad} = 6,071428572 \text{ voltes} \\ &\equiv 0,071428572 \text{ voltes} = 0,4487989541 \text{ rad} \end{aligned}$$

d'on surten

$$x(18) = A \cos \varphi = +9,0097 \text{ m}, \quad v(18) = -v_{\max} \sin \varphi = -9,0872 \text{ m/s i}$$

$$a(18) = -\omega^2 x = -39,521 \text{ m/s}^2.$$

- d) Per l'equació (1), veiem que la partícula serà a l'origen, $x = 0$, en tots els instants t que satisfacin

$$\cos \pi \left(\frac{2}{3}t + \frac{1}{7} \right) = 0$$

que és com dir que t compleixi $\pi \left(\frac{2}{3}t + \frac{1}{7} \right) = \left(n + \frac{1}{2} \right) \pi$, és a dir,

$$\frac{2}{3}t - \frac{5}{14} = n \quad \text{amb} \quad n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots \quad (3)$$

D'aquesta equació trobem que, si $t = 18$ s, llavors $n = 11,64$. Prenent, doncs, $n = 12$, és a dir, $t_{12} = 18,5357$ s, la partícula passarà per l'origen. Però, amb quina velocitat? Positiva o negativa? Substituint t_{12} a (2), tenim $v(t_{12}) < 0$. En quin instant posterior



passarà de nou la partícula per l'origen però amb velocitat positiva? Al cap de mig període: $t = t_{12} + \frac{T}{2} = 20,0357 \text{ s}$.

Notem que a (3), entre n i $n + 1$ passa un interval de temps $\Delta t = 3/2 = T/2$, mig període. Per (2) podem comprovar que, si a (3) prenem n senar, la velocitat en els t corresponents és positiva i, si n és parella, la velocitat és negativa. A la figura 1.22, relacionem aquest comentari amb el moviment circular uniforme lligat al MHS.

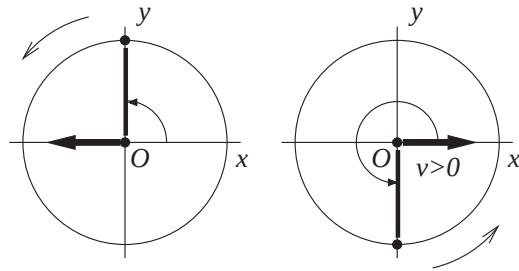


Figura 1.22

Problema 1.2. Un moviment periòdic que no és un MHS

Una partícula es troba sobre una estructura constituïda per dos plans inclinats un angle α —v. figura 1.23.

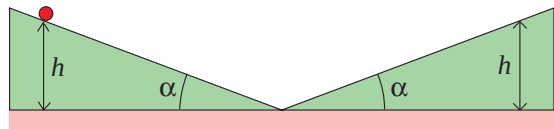


Figura 1.23

La partícula es deixa anar des d'una altura h i baixa lliscant. Si no hi ha fricció, la partícula farà un moviment periòdic oscil·latori; però, serà un MHS? Determineu-ne el període en funció de l'amplitud horitzontal A de l'oscil·lació.

Solució

La partícula fa un moviment oscil·latori perquè la força que hi actua —la component tangencial del pes, $|F| = mg \sin \alpha$ — és recuperadora:

$$F(x) = \begin{cases} +mg \sin \alpha, & \text{si } x < 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \\ -mg \sin \alpha, & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Però el moviment no pot ser harmònic simple, ja que aquesta força és constant i no proporcional a l'elongació x .

Pel que fa al període, el podem trobar calculant el temps t_1 que tarda la partícula a baixar pel pla inclinat. Per la simetria del moviment, el període serà quatre vegades aquest temps. Així doncs, com que l'acceleració és $a = g \sin \alpha$, tenim

$$\frac{h}{\sin \alpha} = \frac{1}{2} g \sin \alpha t_1^2$$



Considerant que $T = 4t_1$ i que $h = A \tan \alpha$ i $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$, resulta

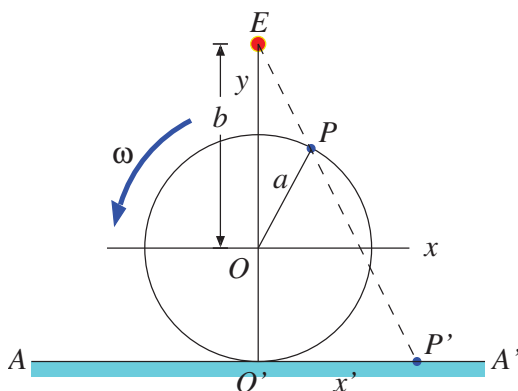
$$T = \frac{4}{\sin \alpha} \sqrt{\frac{2h}{g}} = \frac{8}{\sqrt{g \sin 2\alpha}} \sqrt{A}$$

Fixem-nos que el període depèn, efectivament, de l'amplitud A . A més, encara que l'amplitud es faci molt petita, la força continuarà essent constant i el moviment no serà mai un MHS.

Problema 1.3. Moviment oscil·latori no MHS

Al pla $z = 0$ —v. figura 1.24—, hi ha la partícula P que descriu un moviment circular uniforme de radi a i centrat a l'origen, amb velocitat angular ω de sentit antihorari. Al pla $y = -a$, hi ha una pantalla sobre la qual es projecta l'ombra de P donada per una font lluminosa puntual que es troba al punt $E(0, b)$, amb $b > a$.

Figura 1.24



Sabent que a $t = 0$ la partícula es troba a $(a, 0)$:

- Esbrineu l'equació del moviment $x'(t)$ de l'ombra P' sobre la pantalla AA' .
- Segui $b = 11a/10$. Feu una representació gràfica aproximada de $x'(t)$ per aquest cas.
- Trobeu la màxima elongació de $x'(t)$ i la fracció del període que tarda l'ombra P' a anar de l'elongació màxima a la mínima.

Solució

Segui x' la posició de P' sobre la pantalla i siguin (x, y) les coordenades de P .

- Amb la notació de les figures 1.24 i 1.25, per semblança de triangles, tenim que

$$\frac{x'}{b+a} = \frac{x}{b-y} \quad (1)$$

Com que $x = a \cos \varphi$ i $y = a \sin \varphi$, i, per la condició inicial que ens indica l'enunciat, tenim que $\varphi = \omega t$, de (1) deduïm que



$$x'(t) = \frac{b+a}{b-a} x = \left(\frac{b+a}{b-a \sin \omega t} \right) a \cos \omega t \quad (2)$$

De la funció (2) veiem que el moviment serà oscil·latori, de període $T = 2\pi/\omega$, però no harmònic simple. Seria un MHS si l'interior del parèntesi fos constant, la qual cosa passa, aproximadament, si $b \gg a$, que significa que el punt E estigués molt allunyat de la partícula i , en conseqüència, $x' \approx x$.

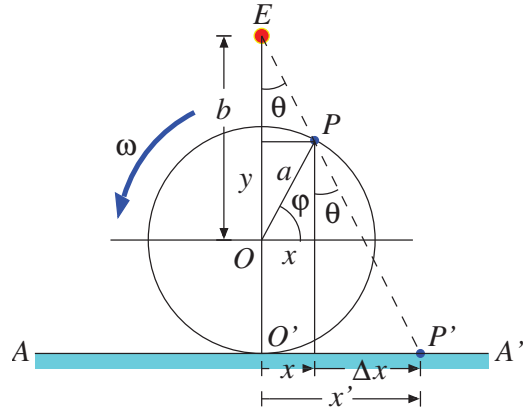
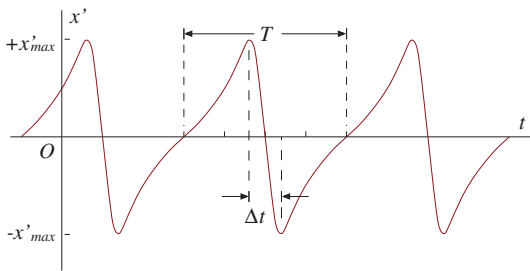
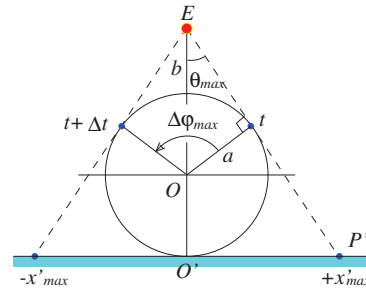


Figura 1.25

- b) A la figura 1.26 (a), s'ha representat la $x'(t)$ per al cas en què $b/a = 11/10$. Observeu-ne les simetries i que el moviment és semblant al MHS només quan la partícula P passa pels voltants del punt $O'(0, -a)$. En aquesta figura també es mostra el període T del moviment i quant val l'interval de temps Δt que tarda la partícula en anar des d'una de les posicions extremes fins a l'altre.



(a)



(b)

Figura 1.26

- c) A partir de la figura 1.26 (b), és fàcil demostrar que:

- l'elongació màxima de P' val, en general,

$$x'_{max} = \frac{1 + b/a}{\sqrt{(b/a)^2 - 1}}$$

Si $b/a = 11/10$ —que no és el cas representat a la figura 1.26 (b)—, $x'_{max} = a\sqrt{21} = 4,58 \cdot a$;

- l'interval de temps entre la màxima i la mínima x' és proporcional a l'angle

$$\Delta\varphi_{\max} = 2\left(\frac{\pi}{2} - \theta_{\max}\right) \quad \text{essent} \quad \sin\theta_{\max} = \frac{a}{b}$$

Per tant,

$$\Delta t = T \frac{\Delta\varphi_{\max}}{2\pi} = \frac{1}{\omega} \left(\pi - 2\arcsin\frac{a}{b}\right) = 0,1368 \cdot T$$

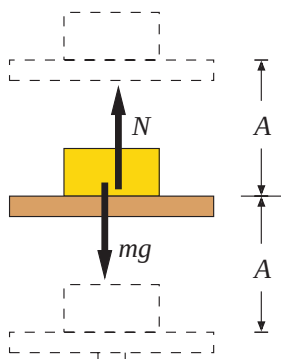
Problema 1.4. Plataforma que fa un MHS vertical

Col·loquem una partícula sobre una plataforma. Si aquesta efectua un MHS vertical d'amplitud $A = 20$ cm i període $T = 0,70$ s:

- Quina condició han de satisfer l'amplitud la freqüència angular ω del MHS a fi que la partícula es mantingui, en tot moment, en contacte amb la plataforma?
- En cas que no es compleixi la condició anterior, en quin moment t_a la partícula deixa d'estar en contacte amb la plataforma? Supposeu que a $t = 0$ la plataforma estava en el punt més baix del recorregut.
- Quina altura màxima x_m assolirà la partícula?

Solució

Figura 1.27



- Sobre la partícula actuen dues forces: el seu pes mg i la normal N que fa la plataforma sobre el cos —v. figura 1.27. En l'equilibri, aquestes dues forces són, en mòdul, iguals. Fora de l'equilibri, si a és l'acceleració que té la plataforma —i, per tant, l'acceleració de la partícula quan aquesta es manté sobre ella—, per la segona llei de Newton tenim

$$N - mg = ma \quad (1)$$

on hem pres el sentit positiu cap amunt.

Ara bé, la partícula deixa d'estar en contacte amb la plataforma quan la normal N s'anul·la, és a dir, per (1), quan $a = -g$. Si, d'altra banda, considerem la relació entre l'acceleració a i l'elongació x , $a = -\omega^2 x$, observem que la partícula deixa d'estar en contacte en l'instant en què la posició x val

$$x = \frac{g}{\omega^2} \quad (2)$$

I com que el valor de x màxim és l'amplitud A —v. figura 1.27 anterior—, podem concloure que

- si $A\omega^2 < g$, la partícula es mantindrà, en tot moment, sobre la plataforma.
- si $A\omega^2 \geq g$, la partícula deixarà d'estar-hi en contacte quan la x compleixi (2).



En el cas particular de l'aplicació, com que $\omega = 2\pi/T = 8,9760 \text{ rad/s}$, llavors $A\omega^2 = 16,1 > g$. La partícula deixarà d'estar en contacte amb la plataforma quan $x = x_a$ donada per

$$x_a = \frac{g}{\omega^2} = 0,122 \text{ m}$$

és a dir, un cop passat el punt d'equilibri.

- b) i c) En quin instant t_a la partícula abandona la plataforma? Segons ens diu l'enunciat, l'equació de moviment de la plataforma és $x(t) = -A \cos \omega t$, perquè a $t = 0$ tenim $x = -A$, el punt més baix. Així doncs, l'instant t_a el trobem de la relació

$$x_a = -A \cos \omega t_a$$

d'on surt $t_a = 0,2479 \text{ s}$. I la velocitat v_a amb què deixa la plataforma val

$$v_a = v(t_a) = +\omega A \sin \omega t_a = 1,424 \text{ m/s}$$

A partir de $t = t_a$, la partícula fa un moviment vertical amb acceleració constant $-g$. I, si t és un temps posterior a t_a , llavors $x(t)$ —mesurada des del punt d'equilibri de la plataforma— valdrà

$$x(t) = x_a + v_a(t - t_a) - \frac{1}{2}g(t - t_a)^2$$

i la velocitat

$$v(t) = v_a - g(t - t_a)$$

L'altura màxima l'assolirà la partícula a l'instant $t = t_m$ en què la velocitat s'anul·li, és a dir, quan $t - t_a = v_a/g$. Substituint aquest valor en la $x(t)$, dona

$$x_m = x_a + \frac{1}{2} \frac{v_a^2}{g} = 0,225 \text{ m}$$

Com que $x_m > A$, comprovem que, com era d'esperar, la partícula puja una mica més que la plataforma.

Problema 1.5. Plataforma que fa un MHS horitzontal

Sobre una superfície horitzontal llisa hi ha una plataforma de massa $M = 4 \text{ kg}$ unida a una molla de constant de força $k = 100 \text{ N/m}$ —v. figura 1.28. Un bloc de massa $m = 1 \text{ kg}$ reposa al damunt de la plataforma. Entre la plataforma i la base no hi ha fricció, però sí que n'hi ha entre el bloc i la plataforma, essent $\mu_s = 0,20$ el corresponent coeficient de fricció estàtica.

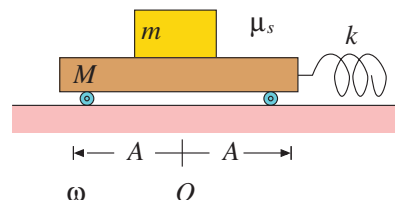


Figura 1.28



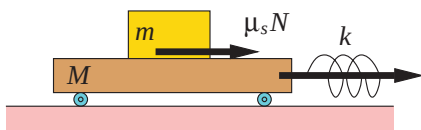
Esbrineu la màxima amplitud d'oscil·lació que pot tenir la plataforma per tal que el bloc no llisqui.

Solució

Mentre no llisqui el bloc damunt de la plataforma, tots dos es mouran amb la mateixa acceleració a . Com es mostra a la figura 1.29, la plataforma es mou per efecte de la força que fa la molla; el bloc ho fa per la força de fricció estàtica F_f entre la plataforma i el bloc. La segona llei de Newton aplicada al bloc ens diu $F_f = ma$.

D'altra banda, la màxima força de fricció estàtica entre el bloc i la plataforma val, com sabem: $F_{f_{\max}} = \mu_s N = \mu_s mg$. D'aquí veiem que la màxima acceleració horitzontal que es pot aplicar al conjunt sense que llisqui el bloc val, doncs, $a_{\max} = \mu_s g$.

Figura 1.29



En un MHS de freqüència angular ω i amplitud A , l'acceleració màxima val $a_{\max} = \omega^2 A$. D'aquest resultat i de l'anterior resulta que la condició per tal que no llisqui el bloc superior és

$$\omega^2 A \leq \mu_s g$$

En el nostre cas és la molla arrossegant les dues masses la que origina el MHS; en conseqüència, la freqüència ω del MHS valdrà $\omega^2 = k/(M + m)$. Així, finalment,

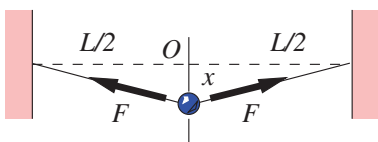
$$A_{\max} = \frac{\mu_s g}{\omega^2} = \frac{\mu_s}{k} (M + m)g$$

Substituint els valors numèrics de l'enunciat trobem $A_{\max} = 9,81$ cm.

Problema 1.6. Partícula sobre corda tensa

Una corda de longitud $L = 60$ cm lleugerament elàstica, de massa negligible, està sotmesa a la tensió $F = 100$ N. Al punt mitjà de la corda, hi ha fixada una partícula de massa $m = 50$ g. Si, com es pot observar a la figura 1.30, apliquem un petit desplaçament transversal x a la partícula i la deixem anar, demostreu què farà un MHS i trobeu-ne la freqüència f . Negligiu el pes de la partícula.

Figura 1.30



Solució

Sigui θ l'angle que forma la corda en un cert instant amb la direcció de l'equilibri. Considerant que θ és petit i que, per tant, podem aproximar $\sin \theta \approx \tan \theta \approx \theta$, la component x de la tensió F val



$$F_x = F \sin \theta \approx F \theta \approx F \frac{x}{L/2}$$

Tenint en compte que hi ha dues tensions i que, per simetria, la component y de la tensió d'una meitat de la corda s'anul·la amb la component y de la tensió de l'altra meitat, deduïm que la força resultant $\mathcal{F}$ que actua sobre la partícula té la direcció de l'eix x i val

$$\mathcal{F}(x) = -\frac{4F}{L}x$$

És, doncs, una força lineal i recuperadora. Per tant, el moviment de la partícula serà un MHS de període

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{mL}{4F}}$$

d'on, substituint els valors numèrics, resulta $f = 1/T = 18,38 \text{ Hz}$.

Problema 1.7. Principi d'Arquimedes i MHS

Un bloc de fusta de densitat ρ_0 , secció recta uniforme i longitud L està surant en un estany d'aigua de densitat ρ —v. figura 1.31. Demostreu que, negligint la fricció, si el desplaçem lleugerament amunt o avall, farà un MHS, i trobeu-ne el període.

Solució

En primer lloc, recordem que el *principi d'Arquimedes* diu que *tot cos submergit en un fluid experimenta una força ascensional igual al pes del fluid desallotjat*. Consegüentment, un cos amb una densitat més petita que la de l'aigua hi sura en ella perquè la força ascensional d'Arquimedes contraresta el seu pes.

A la figura 1.32 (a), es mostra el bloc surant en equilibri i, a la (b), el bloc desplaçat una distància x de la posició d'equilibri. Siguen L_1 i L_2 les longituds de les parts del bloc fora de l'aigua i de la part submergida, respectivament, en la situació d'equilibri. Si anomenem m la massa del bloc, S la seva secció recta, i ρ la densitat de l'aigua, tenim que, en l'equilibri, se satisfà l'equació

$$0 = mg - SL_2\rho g \quad (1)$$

Fora de l'equilibri, amb el bloc desplaçat x avall, agafant aquest sentit com a positiu, si $h = L_2 + x$, la força neta F sobre el bloc val

$$F = mg - Sh\rho g \quad (2)$$

Substituint (2) en (1), ens dóna

$$F = mg - S(L_2 + x)\rho g = -S\rho g x$$

La força neta és, per tant, de la forma típica del MHS, $F = -kx$, on $k = S\rho g$. Queda demostrat, en conseqüència, que el moviment serà un MHS. I, pel que fa al període, com

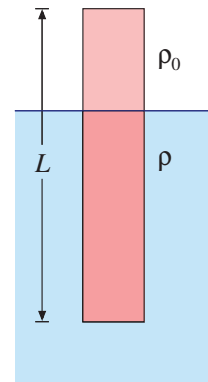
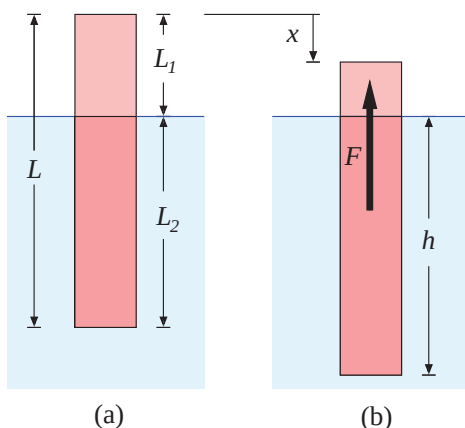


Figura 1.31

que $m = SL\rho_0$, tindrem

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{S\rho g}} = 2\pi\sqrt{\frac{L\rho_0}{g\rho}}$$

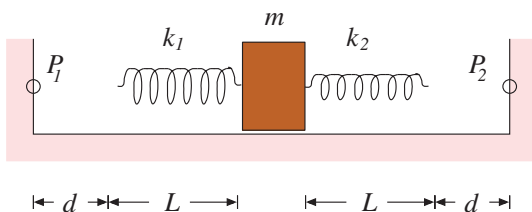
Figura 1.32



Problema 1.8. Partícula lligada a dues molles

Dues molles, cadascuna d'elles de longitud natural $L = 30$ cm, però de constants k diferents, estan unides a les dues cares oposades d'un bloc de massa $m = 100$ g, que està sobre una superfície horitzontal llisa. Els altres dos extrems de les molles s'uneixen als claus P_1 i P_2 , situats a $d = 15$ cm de les posicions inicials dels extrems de les molles —v. figura 1.33.

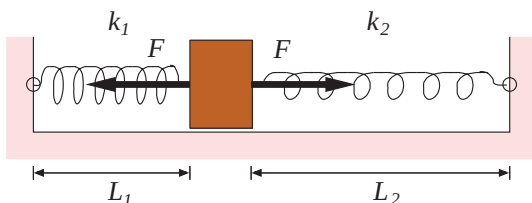
Figura 1.33



- Si $k_1 = 9$ N/cm i $k_2 = 5$ N/cm, esbrineu quines seran les longituds finals de les molles després que el bloc es trobi en la seva nova posició d'equilibri.
- Demostreu que, si, des d'aquesta nova posició del bloc, el desplaçem lleugerament en la direcció de les molles, farà un MHS. Esbrineu el període del moviment.

Solució

Figura 1.34





- a) El bloc es trobarà en la posició d'equilibri —v. figura 1.34— quan les forces que li facin les dues molles siguin d'igual mòdul F i de sentits contraris.

Siguin L_1 i L_2 les longituds de les dues molles amb el bloc en equilibri. Prenent cap a la dreta com a sentit positiu, podem plantejar les dues equacions següents:

$$\begin{cases} -k_1(L_1 - L) + k_2(L_2 - L) = 0 \\ L_1 + L_2 = 2(d + L) \end{cases}$$

d'on podem aïllar L_1 i L_2

$$L_1 = \frac{k_2(2d + L) + k_1L}{k_1 + k_2} \quad \text{i} \quad L_2 = \frac{k_1(2d + L) + k_2L}{k_1 + k_2}$$

Substituint els valors numèrics, resulten $L_1 = 40,71$ cm i $L_2 = 49,29$ cm.

- b) Si, des d'aquesta posició d'equilibri, desplaçem el bloc una distància x , les molles 1 i 2 faran, respectivament, les forces F_1 i F_2 , i la força resultant sobre el bloc serà $F_R = F_1 + F_2$ —v. figura 1.35.

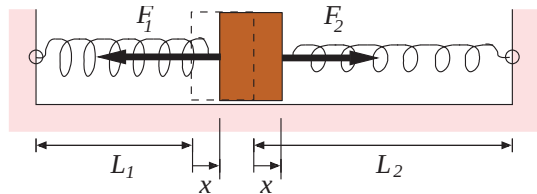


Figura 1.35

Tindrem, doncs,

$$\begin{aligned} F_1 &= -k_1(L_1 + x - L) = -F - k_1x \\ F_2 &= +k_2(L_2 - x - L) = +F - k_2x \\ F_R &= F_1 + F_2 = -(k_1 + k_2)x \end{aligned}$$

Per tant, un desplaçament x fora de l'equilibri comporta una força resultant recuperadora lineal $F_R = -kx$, per la qual cosa les dues molles són equivalents a una de sola de constant k

$$k = k_1 + k_2$$

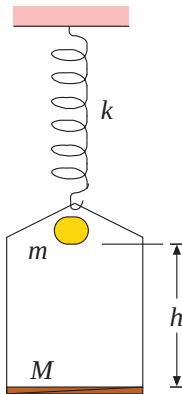
Aleshores, el període de l'oscil·lació valdrà $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}} = 0,05310$ s.

Problema 1.9. Allargament màxim d'una molla.

Sigui una molla de constant $k = 105$ N/m que penja verticalment del sostre i que té un suport ample de massa $M = 0,55$ kg, tal com es mostra a la figura 1.36. Un cos petit de massa $m = 0,30$ kg es deixa caure sobre el suport des d'una altura $h = 0,75$ m. Suposant que el cos no reboti —xoc completament inelàstic—, esbrineu l'allargament màxim que assolirà la molla.

Solució

Figura 1.36



Comencem estudiant el xoc entre el cos i el suport. Com ja sabem, la velocitat que portarà el cos en el moment del xoc contra el suport val

$$v_1 = \sqrt{2gh}$$

Sigui v_2 la velocitat del conjunt suport més cos immediatament després de la col·lisió. Com que aquesta és completament inelàstica, la conservació de la quantitat de moviment ens assegura que

$$mv_1 = (m + M)v_2$$

d'on se segueix que

$$v_2 = \frac{m}{m + M} \sqrt{2gh}$$

Quant al suport, inicialment està en la seva posició d'equilibri, amb la molla allargada respecte de la seva longitud natural la longitud $\Delta x_1 = Mg/k$. Sabem que, en afegir-hi el cos de massa m , la posició d'equilibri del conjunt es desplaça cap avall la distància $\Delta x_2 = mg/k$. Per tant, en el moment del contacte del cos amb el suport, tenim que el conjunt suport més cos es mou cap avall a la velocitat v_2 i està fora de la nova posició d'equilibri la distància Δx_2 . L'allargament màxim de la molla respecte a la seva longitud natural serà, doncs, $\Delta x_1 + \Delta x_2 + A$, essent A l'amplitud del moviment del conjunt.

Podem trobar l'amplitud A a partir de l'expressió que la vincula a la posició x i la corresponent velocitat v

$$A = \sqrt{x^2 + \frac{v^2}{\omega^2}}$$

En el nostre cas, la posició és $x = \Delta x_2$ i la velocitat, $v = v_2$, essent $\omega^2 = k/(m + M)$, ja que oscil·laran el cos i el suport. Així doncs, substituint i simplificant, podem afirmar que

$$A = \sqrt{(\Delta x_2)^2 + \frac{v_2^2}{\omega^2}} = \frac{mg}{k} \sqrt{1 + \frac{2kh}{(m + M)g}}$$

I, finalment, l'allargament total màxim de la molla valdrà

$$\Delta x_{\max} = \frac{g}{k} \left[M + m \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2kh}{(m + M)g}} \right) \right]$$

Substituint els valors numèrics així com $g = 9,81 \text{ m/s}^2$, resulta $\Delta x_{\max} = 0,2044 \text{ m}$.

Problema 1.10. El problema dels dos cossos, 1

Per mitjà d'una molla de longitud natural L_0 i constant recuperadora k , connectem un primer bloc de massa m_1 a un segon de massa m_2 , estant el conjunt sobre una superfície



horizontal llisa. Donem una velocitat inicial v_0 al segon bloc i tots dos comencen a desplaçar-se i a oscil·lar. Siguin x_1 i x_2 les coordenades respectives dels dos blocs, tal com es mostra a la figura 1.37.

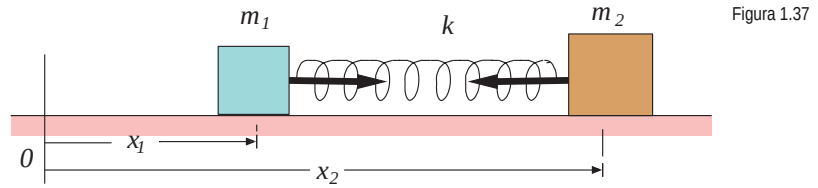


Figura 1.37

Estudieu el moviment d'ambdós blocs i, en particular, trobeu l'equació de moviment $x_1(t)$ del primer.

Solució

Siguin, també, $x' = x_2 - x_1$ la coordenada relativa del segon bloc respecte del primer, i $x = x' - L_0$ l'allargament de la molla, si $x > 0$, o l'escurçament, si $x < 0$. Amb aquesta notació, si F_1 i F_2 són les forces que actuen sobre el primer bloc i el segon, respectivament, degudes a l'acció de l'altre, tenim

$$F_1 = +k(x_2 - x_1 - L_0) = +kx = m_1 a_1$$

$$F_2 = -k(x_2 - x_1 - L_0) = -kx = m_2 a_2 \quad (1)$$

on a_1 i a_2 són les acceleracions respectives dels blocs, que valen

$$a_1 = +\frac{k}{m_1}x \quad a_2 = -\frac{k}{m_2}x \quad (2)$$

Si restem $a_2 - a_1$ per trobar l'acceleració relativa del segon bloc respecte del primer, obtenim

$$a = a_2 - a_1 = -k \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) x \quad (3)$$

Definim la *massa reduïda* μ de dues partícules de masses m_1 i m_2 com

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \quad (4)$$

de manera que podem tornar a escriure (3) de la forma

$$\mu a = -kx \quad (5)$$

Així doncs, tenim una relació entre la posició i l'acceleració relatives x i a , respectivament, per mitjà d'una equació formalment idèntica a la segona llei de Newton aplicada a una sola partícula de massa μ sobre la qual actua la força $-kx$, que podem rescriure com

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{\mu}x = 0 \quad (6)$$



Per comparació a l'equació diferencial del MHS, deduïm que la freqüència angular de l'oscil·lació dels dos blocs és

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{\mu}} = \sqrt{k \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right)} \quad (7)$$

Aquesta freqüència és la mateixa que tindria un sol bloc de massa μ , unit per una molla de constant k a una paret, o un altre bloc de massa molt gran. Fixem-nos que, si $m_1 \gg m_2$, aleshores $\mu \approx m_2$.

A partir de (5) i (2), tenim la relació entre l'acceleració relativa a i les acceleracions a_1 i a_2

$$a_1 = -\frac{\mu}{m_1}a \quad a_2 = +\frac{\mu}{m_2}a$$

Podem integrar aquestes equacions per trobar les velocitats dels blocs en funció de la velocitat relativa $v = v_2 - v_1$

$$v_1 = -\frac{\mu}{m_1}v + C'_1 \quad v_2 = +\frac{\mu}{m_2}v + C'_2 \quad (9)$$

on C'_1 i C'_2 són les constants arbitràries de la integració. Tornant a integrar, obtenim

$$x_1 = -\frac{\mu}{m_1}x + C'_1t + C''_1 \quad x_2 = +\frac{\mu}{m_2}x + C'_2t + C''_2 \quad (10)$$

on C''_1 i C''_2 són dues constants arbitràries més. Aquestes quatre constants es poden determinar a partir de les condicions inicials que, d'acord amb l'enunciat, prendrem com

- $x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = L_0$
- $v_1(0) = 0, \quad v_2(0) = v_0$

d'on també surt

$$x(0) = x_2 - x_1 - L_0 = 0 \quad v(0) = v_2 - v_1 = v_0 \quad (11)$$

i, per (9) i (10), resulten

$$C''_1 = 0 \quad C''_2 = L_0 \quad C'_1 = C'_2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}v_0 \quad (12)$$

Aquesta última velocitat $C'_1 = C'_2$, comuna als dos blocs, és, precisament, la velocitat del centre de masses v_{cm} , que es manté constant per raó de la conservació de la quantitat de moviment, ja que no hi intervé cap força externa al sistema. En efecte, si calculem v_{cm} a l'instant inicial $t = 0$, tenim

$$v_{cm} = \frac{m_1 \cdot 0 + m_2 v_0}{m_1 + m_2} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}v_0 \quad (13)$$

Respecte del moviment relatiu, ja sabem que la solució de l'equació diferencial (6) és un MHS, de forma que fem



$$x(t) = A \sin(\omega t + \phi) \quad (14)$$

on $\omega^2 = k/\mu$, que ja hem vist a (7), i A i ϕ depenen de les condicions inicials (11). Aplicant aquestes condicions inicials a (14), trobem $\phi = 0$ i l'amplitud A

$$A = \frac{v_0}{\omega} = v_0 \sqrt{\frac{\mu}{k}} \quad (15)$$

D'aquí ens queda

$$x = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t \quad \text{amb} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{\mu}} \quad (16)$$

i, finalment, podem posar les equacions (9) i (10) com

$$x_1 - v_{cm}t = -\frac{\mu}{m_1}x = -\frac{\mu}{m_1} \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t$$

$$x_2 - L_0 - v_{cm}t = -\frac{m_1}{m_2}(x_1 - v_{cm}t)$$

En resum, el moviment resultant és la superposició de

- un moviment uniforme amb la velocitat del centre de masses, més
- un MHS d'ambdós blocs al voltant del centre de masses comú.

A la figura 1.38, hi ha representades, per $m_2 = 2m_1$, les oscil·lacions $x'_1(t)$ i $x'_2(t)$ dels dos blocs respecte del centre de masses: $x'_1 = x_1 - v_{cm}t$, $x'_2 = x_2 - v_{cm}t$. Fixeu-vos que el centre de masses roman sobre l'eix temporal, l'origen de les x .

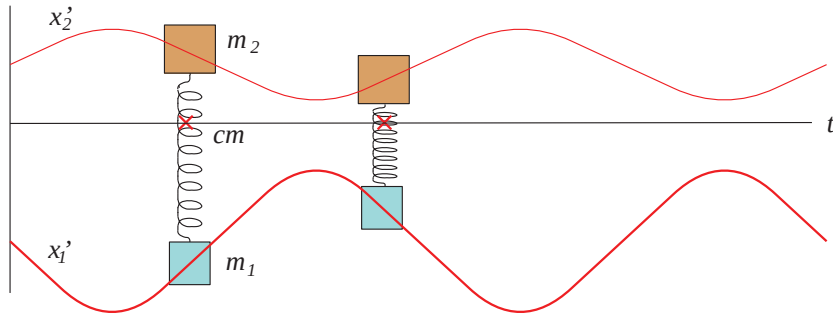


Figura 1.38

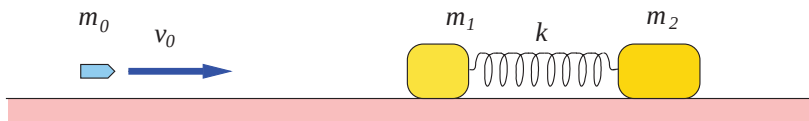
El problema proposat 1.52, és una continuació d'aquest. El problema 3.9 també té trets comuns amb aquest.

Problema 1.11. Aplicació del problema dels dos cosos

Dos blocs de masses m_1 i m_2 , units per una molla de constant de força k , estan en repòs sobre una superfície llisa horitzontal —v. figura 1.39.



Figura 1.39



Un projectil de massa m_0 , que es desplaça a la velocitat v_0 en la direcció dels dos blocs, xoca amb el primer bloc i quedant incrustat a l'interior. Esbrineu:

- la freqüència i
- l'amplitud de les seves oscil·lacions.

Solució

- Apliquem el que acabem de veure en el problema anterior. La freqüència de les oscil·lacions dels dos blocs vindrà donada per l'expressió (7); això sí, ara la massa reduïda μ val

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1 + m_0} + \frac{1}{m_2}$$

i, per tant, la freqüència angular de les oscil·lacions és

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{\mu}}$$

- L'amplitud del moviment, la calculem aplicant la conservació de l'energia. Com ja hem vist en el problema anterior, l'impacte del projectil en el bloc comunica una quantitat de moviment i una energia al sistema que es tradueixen en un moviment uniforme del centre de masses, superposat a una oscil·lació dels dos blocs entorn d'ell amb freqüència ω .

Què és l'amplitud A de les oscil·lacions? És l'allargament màxim de la molla; s'assoleix en el moment en què els blocs s'aturen respecte del centre de masses del sistema. Consegüentment, la podem calcular directament per mitjà de l'expressió (15) del problema anterior o aplicant la conservació de l'energia. En aquest cas, tindrem que l'energia cinètica del bloc de massa m_1 —amb el projectil dintre— immediatament després del xoc, ha de ser igual a la suma de l'energia cinètica del centre de masses més l'energia elàstica de la molla en la seva màxima expansió o compressió. Si anomenem v_1 la velocitat inicial del bloc amb el projectil dintre, v_{cm} la velocitat del centre de masses i A l'amplitud, obtindrem

$$\frac{1}{2}(m_0 + m_1)v_1^2 = \frac{1}{2}(m_0 + m_1 + m_2)v_{cm}^2 + \frac{1}{2}kA^2 \quad (1)$$

Calculem ara v_1 i v_{cm} . Igualant la quantitat de moviment del projectil abans del xoc amb la del bloc més projectil després del xoc es compleix

$$m_0v_0 = (m_0 + m_1)v_1$$



d'on treiem v_1 . La velocitat v_{cm} val

$$v_{cm} = \frac{m_0 v_0}{m_0 + m_1 + m_2}$$

Ara, substituint en (1) s'obté com a resultat l'amplitud

$$A = m_0 v_0 \sqrt{\frac{m_2}{k(m_0 + m_1)(m_0 + m_1 + m_2)}}$$

Problema 1.12. Variació del període d'un pèndol simple

Demostreu que la variació relativa del període T d'un pèndol simple deguda a les variacions relatives en la seva longitud L i en l'acceleració de la gravetat g ve donada per

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{1}{2} \frac{\Delta L}{L} - \frac{1}{2} \frac{\Delta g}{g}$$

Solució

Apliquem logaritmes neperians a l'expressió del període d'un pèndol simple

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \quad \text{d'aquí} \quad \ln T = \ln(2\pi) + \frac{1}{2} \ln L - \frac{1}{2} \ln g$$

Diferenciem aquesta última igualtat. Per fer això, observem que

$$d(\ln T) = \frac{d(\ln T)}{dT} dT = \frac{dT}{T}$$

i anàlogament amb els termes amb L i g . Com que $\ln(2\pi)$ és una constant, la seva derivada dóna zero. Obtenim, doncs, la relació

$$\frac{dT}{T} = \frac{1}{2} \frac{dL}{L} - \frac{1}{2} \frac{dg}{g}$$

Ara només cal substituir els diferencials per increments finits —petits— en l'expressió anterior i n'obtenim el resultat demanat.

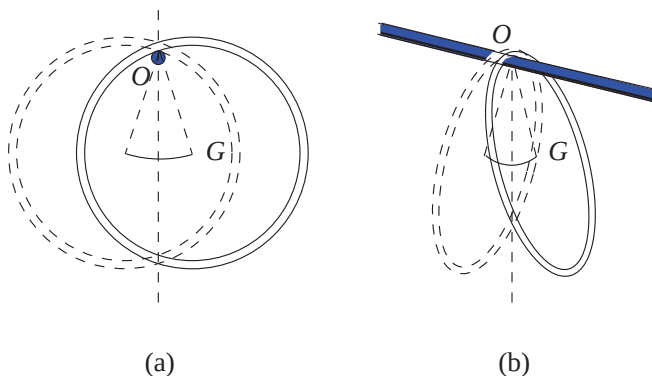
Problema 1.13. Dues formes d'oscil·lar

Tal com es mostra a la figura 1.40, un cercle de radi R se suspèn d'un eix horitzontal que passa per dintre seu i se'l deixa oscil·lar. Esbrineu el període de les seves oscil·lacions petites:

- a) si són transversals a l'eix —v. figura 1.40 (a)— i
- b) si són paral·leles a l'eix —v. figura 1.40 (b).

Nota: El moment d'inèrcia d'un cercle respecte d'un diàmetre seu val $I = 1/2 mR^2$.

Figura 1.40



Solució

a) Oscil·lacions transversals. Apliquem la fórmula (1.23) del període del pèndol físic

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgh}} \quad (1)$$

en què, en aquest cas, h és el radi R i, pel teorema de Steiner, $I = I_G + mR^2 = 2mR^2$. En conseqüència,

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{2R}{g}}$$

b) Oscil·lacions longitudinals. En la mateixa expressió (1), tornem a tenir $h = R$. D'altra banda, sabem que el moment d'inèrcia del cercle respecte d'un diàmetre seu qualsevol val $I'_G = mR^2/2$. Aplicant de nou el teorema de Steiner, trobem que $I' = I'_G + mR^2 = 3/2mR^2$ i el període resulta, doncs,

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{3R}{2g}}$$

Problema 1.14. Període mínim d'un pèndol físic

Tenim una barra estreta homogènia de longitud L , que volem convertir en un pèndol físic —v. figura 1.41. A quina distància h del centre de gravetat G hauria de passar l'eix horitzontal de rotació per tal que el període de les oscil·lacions fos el mínim possible?

Solució

El període T del pèndol ve donat per l'expressió (1.23)

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgh}} \quad (1)$$



en què la h , la distància del centre de gravetat G al punt de suspensió O , és, com s'assenyala a la figura 1.41, precisament la distància que busquem. Notem que, en aquest problema la h només pot variar des de $h = 0$ fins a $h = L/2$. En el primer cas, $h = 0$, la barra no oscil·la —està en equilibri indiferent—, que és com dir que el període és infinit. Evidentment, per a $h > 0$, el període ja és finit. Podríem sospitar que el període mínim el trobarem per al punt més allunyat de G , $h = L/2$, però, com veurem, això no és pas així.

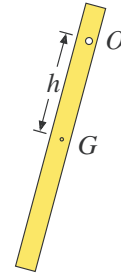


Figura 1.41

A l'equació (1) també hi intervé el moment d'inèrcia I de la barra respecte de O . Sabem que el moment d'inèrcia d'una barra com aquesta respecte d'un eix perpendicular a ella mateixa que passi pel seu centre val $I_G = mL^2/12$. Pel *teorema de Steiner*, el moment d'inèrcia respecte d'un eix paral·lel traslladat a la distància h de G val

$$I_O = I_G + mh^2 = \frac{1}{12}mL^2 + mh^2$$

Consegüentment, el període (1) quedarà com la funció de h

$$T(h) = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{1}{12}L^2 + h^2}{gh}} \quad (2)$$

de la qual hem de trobar el mínim. Per això, igualarem a zero la seva derivada.

Fixem-nos que és més còmode treballar amb la funció $T^2(h)$ que amb la $T(h)$ i que ambdues funcions tenen el màxims i mínims a les mateixes posicions, ja que les funcions arrel quadrada i quadrat són monòtones creixents. Fent-ho així arribem a

$$\frac{d(T^2)}{dh} = \frac{2\pi}{g} \left(\frac{h^2 - \frac{1}{12}L^2}{h^2} \right) = 0$$

d'on resulta $h_{\min} = \frac{L}{\sqrt{12}}$. Podem creure que aquesta $h_{\min}$ correspon a un mínim —i que no és un màxim relatiu—, ja que el període donat per (2) corresponent a aquesta posició $h_{\min}$ és més petit que el corresponent a $h = L/2$.

Observem, finalment, que aquest resultat es pot generalitzar. Si deixem I_G en lloc de $1/12 mL^2$ en els raonaments anteriors, arribem a la distància $h_{\min} = \sqrt{I_G/m}$ que fa mínim el període en qualsevol pèndol físic.

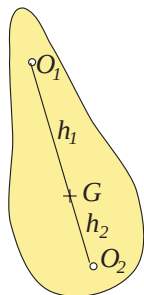
Problema 1.15. Pèndol reversible i mesura de g

El *pèndol reversible* o de Kater és una aplicació del pèndol físic que s'utilitza per mesurar amb precisió l'acceleració de la gravetat g . El pèndol acostuma a ser una barra amb un primer punt de suspensió O_1 fix i un segon punt O_2 desplaçable al llarg de la barra, més enllà del centre de gravetat G —v. figura 1.42. El procediment consisteix a mesurar el període T del pèndol quan aquest està suspès de O_1 i, després, anar provant fins a trobar el punt O_2 per al qual el període torna a ser el mateix T d'abans. Demostreu que, en aquest cas, si d és la distància entre O_1 i O_2 , g ve donada per

$$g = \frac{4\pi^2 d}{T^2}$$

Solució

Figura 1.42



La font d'incertesa més gran que presenta la determinació precisa de l'acceleració de la gravetat simplement mesurant el període T d'un pèndol físic és la dificultat de determinar amb exactitud la posició del centre de masses G del pèndol. El gran avantatge del mètode de Kater és que no s'ha de trobar experimentalment G ni el moment d'inèrcia del pèndol sinó la distància d , definida abans a l'enunciat, bastant més fàcil de determinar amb exactitud. Això sí, O_1GO_2 han d'estar alineats.

Siguin I_1 el moment d'inèrcia del pèndol respecte del punt O_1 i h_1 la distància entre O_1 i G , i siguin I_2 i h_2 els corresponents, però respecte de O_2 . La distància d entre O_1 i O_2 val $d = h_1 + h_2$. Anomenem també m la massa del pèndol i I_G el seu moment d'inèrcia respecte de G .

Pel teorema de Steiner, la relació entre aquestes magnituds és

$$I_1 = I_G + mh_1^2 \quad I_2 = I_G + mh_2^2 \quad (1)$$

Com que, en aquests dos punts de suspensió O_1 i O_2 , els períodes són iguals, per l'expressió del període del pèndol físic $T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgh}}$ i les dues (1) tenim

$$\frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{mgh_1}{I_G + mh_1^2} = \frac{mgh_2}{I_G + mh_2^2}$$

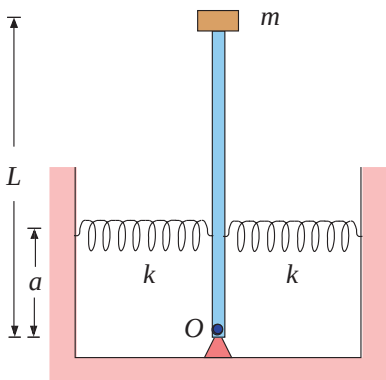
Restant els numeradors i els denominadors de la segona igualtat, descomponent el denominador resultant, una diferència de quadrats, com el producte d'una suma per una resta, i recordant que $d = h_1 + h_2$, tenim

$$\frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{mg(h_1 - h_2)}{m(h_1^2 - h_2^2)} = \frac{g}{h_1 + h_2} = \frac{g}{d}$$

d'on resulta l'expressió de l'enunciat.

Problema 1.16. Oscil·larà o no oscil·larà?

Figura 1.43



Tenim una barra rígida de longitud L i massa negligible, disposada verticalment i que pot oscil·lar al voltant del seu extrem inferior O , tal com es mostra a la figura 1.43. La barra porta unida a l'extrem superior un bloc petit pesant de massa m . Dues molles iguals horitzontals de constant elàstica k estan unides a la barra a la distància a de O . Esbrineu quina condició ha de complir la massa del bloc per tal que el sistema pugui oscil·lar i calculeu el període de les petites oscil·lacions.



Solució

Desplacem la barra un angle θ petit fora de l'equilibri i veiem quines forces actuen sobre el sistema barra-bloc. Hi actua el pes mg del bloc i les dues forces que fan les dues molles. També hi ha la reacció de l'articulació sobre el punt O de la barra, però el moment d'aquesta força respecte de O és zero, per la qual cosa la reacció en O no és significativa i ja no està representada en el diagrama de forces de la figura 1.44. D'altra banda, tant si les molles estan estirades en la situació d'equilibri de la barra com si no ho estan, les forces degudes a cadascuna de les dues molles són iguals i valen $F = -kx$, on x és l'allargament d'una de les molles i l'escurçament de l'altra.

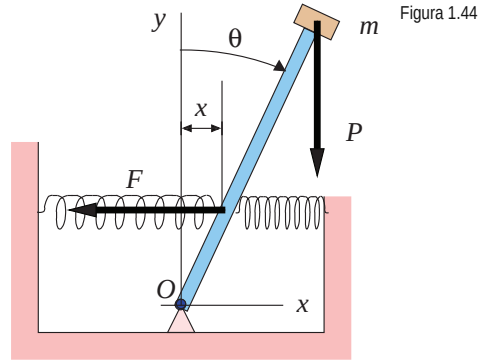


Figura 1.44

Si l'angle θ és petit, les forces que fan les molles són pràcticament horitzontals i podem fer l'aproximació $x = a \sin \theta \approx a\theta$, $\cos \theta \approx 1$. Prenent el sistema d'eixos Ox i Oy que es mostra a la figura 1.44, la força resultant $\mathbf{F}$ que fan les dues molles i el pes $\mathbf{P}$ del bloc val

$$\mathbf{F} = -2ka \sin \theta \mathbf{u}_x \approx -2ka\theta \mathbf{u}_x, \quad \mathbf{P} = -mg \mathbf{u}_y \quad (1)$$

aplicades als punts $A(x, a \cos \theta) \approx A(a\theta, a)$ i $B(L \sin \theta, L \cos \theta) \approx B(L\theta, L)$, respectivament.

El moment resultant d'aquestes dues forces respecte de O és, per (1)

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{OA} \times \mathbf{F} + \mathbf{OB} \times \mathbf{P} \approx (2ka^2\theta - mgL\theta) \mathbf{u}_z \quad (2)$$

Coneixent el moment $\mathbf{M}_O$, podem aplicar la segona llei de Newton per a les rotacions, que, per (2), donarà

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} (-\mathbf{u}_z) = \mathbf{M}_O = (2ka^2\theta - mgL\theta) \mathbf{u}_z \quad (3)$$

on I és el moment d'inèrcia, respecte de O , del sistema barra-bloc. El signe menys del $(-\mathbf{u}_z)$ s'explica perquè l'angle θ , amb aquest sistema d'eixos que hem pres, es mesura en sentit negatiu —v. figura 1.44. Com que la barra és de massa nul·la, no contribueix al moment d'inèrcia i només ho fa el bloc: és una partícula de massa m a la distància L de O ; per tant $I = mL^2$. L'equació (3) queda, doncs, com

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \left(\frac{2ka^2 - mgL}{mL^2} \right) \theta = 0 \quad (4)$$

Aquesta equació diferencial correspon a l'equació d'un MHS si i només si el coeficient que multiplica θ és positiu, és a dir, si

$$2ka^2 - mgL > 0 \quad (5)$$

En cas contrari, la barra no farà un MHS: si la desplacem fora de la seva posició d'equilibri, és a dir, de la vertical, “caurà” cap al costat del desplaçament i allà es quedarà sense

oscil·lar; haurà “guanyat” el moment del pes al moment de les molles. En aquest cas, la vertical, és a dir, $\theta = x = 0$, és un punt d’equilibri, però d’equilibri *inestable*.

Així doncs, per tal que se satisfaci (5), la massa m del bloc ha de ser inferior a una massa màxima:

$$m < m_{\max} = \frac{2ka^2}{gL}$$

En aquest cas, el conjunt barra-bloc sí que oscil·larà, estant el període determinat per (4)

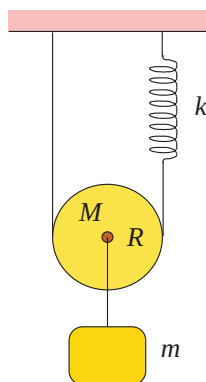
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{mL^2}{2a^2k - mgL}}$$

Problema 1.17. Sistema molla-massa-politja

Tenim una politja per la qual passa una corda molt lleugera que té un extrem unit directament al sostre i l’altre a una molla de constant k , que també està unita al sostre, tal com es mostra a la figura 1.45. De la politja penja un cos de massa m . Esbrineu el període de les oscil·lacions del sistema si la politja gira sense relliscar tot seguint el moviment de la corda. El moment d’inèrcia de la politja és I .

Solució

Figura 1.45

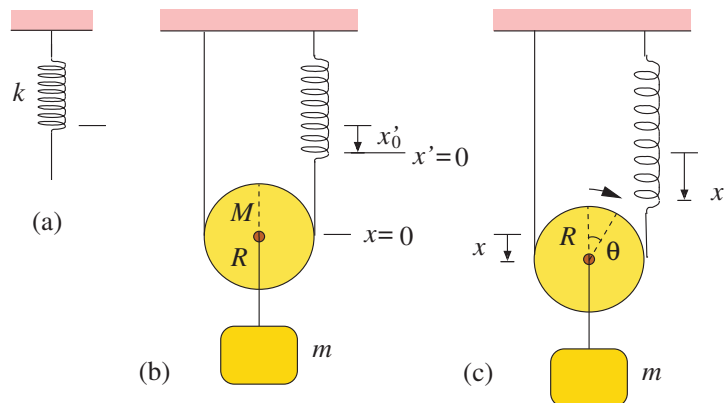


A la figura 1.46 (a) es mostra la molla penjada del sostre, sense estirar; a la (b), la molla estirada la longitud x'_0 per tal de mantenir en equilibri el conjunt politja i cos i a la figura 1.46 (c) es representa tot el sistema en un instant fora de l’equilibri.

Prenem l’eix x vertical, amb el sentit positiu cap avall i els angles i els moments positius en el sentit horari. Distingirem també entre el desplaçament vertical x del conjunt politja-cos i l’allargament x' de la molla des de la posició d’equilibri —v. figura 1.46 (c). La relació entre ambdues variables és, per simple geometria

$$x = \frac{1}{2}x' \quad (0)$$

Figura 1.46





Per arribar a l'equilibri, la molla ja s'ha d'haver estirat un allargament inicial x'_0 donat per la condició de l'equilibri —v. figura 1.46 (b)—

$$(M + m)g = 2F_0 = 2kx'_0 \quad (1)$$

on $2F_0$ són les dues tensions que equilibren el pes total del conjunt.

Fora de l'equilibri, les dues tensions F_1 i F_2 —aquesta última, la de la molla— no són, en general, iguals. Aleshores, amb la politja baixada una distància x respecte del nivell corresponent a l'equilibri i girada un angle θ , tenim que:

- Per la segona llei de Newton aplicada al moviment vertical del conjunt, se satisfà l'equació

$$(M + m)g - (F_2 + F_1) = (M + m)\frac{d^2x}{dt^2} \quad (2)$$

- Pel que fa a la rotació de la politja, se satisfà la segona llei de Newton per a la rotació

$$R(F_1 - F_2) = I\frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (3)$$

- La tensió F_2 de la molla, quan aquesta s'ha estirat una longitud x' , val

$$F_2 = k(x' + x'_0) \quad (4)$$

- La relació entre l'angle θ girat per la politja i el moviment vertical dels dos cossos és $R\theta = x$. Per tant,

$$R\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2} \quad (5)$$

Combinant aquestes equacions, resulta

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \left(\frac{4k}{M + m + I/R^2} \right) x = 0$$

d'on surt el període corresponent

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{M + m + I/R^2}{4k}}$$

Problema 1.18. Oscil·lacions de mig cilindre

Tenim mig cilindre buit de radi R sobre un pla horitzontal, com es mostra a la figura 1.47. Quant val el període de les oscil·lacions que efectuarà si el desplaçem lleugerament de l'equilibri i rodola sense lliscar?

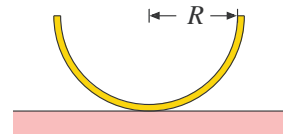
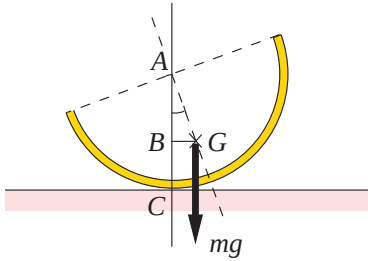


Figura 1.47

Solució

Figura 1.48



Resoldrem el problema per forces i moments.

A la figura 1.47, s'observa el mig cilindre en equilibri i a la figura 1.48 el tenim girat un angle θ fora d'ell. Sobre el cos actuen dues forces: el seu pes mg , aplicat al centre de gravetat G , representada a la figura, i la reacció normal que fa el terra sobre el cilindre, aplicada al punt de contacte C i que, per no complicar la figura, no hem representat.

D'altra banda, recordem que, en un sòlid rígid que rodola sense lliscar, el *centre instantani de rotació* es troba en el punt de contacte entre el sòlid i la superfície sobre la qual rodola, en el nostre cas el punt C .

Això vol dir que, a cada instant, el mig cilindre està girant al voltant del punt C i que, momentàniament, aquest punt està en repòs. Apliquem, doncs, l'equació fonamental de la dinàmica del sòlid rígid, calculant els moments de les dues forces i el moment d'inèrcia del sòlid respecte al punt C

$$M_C = I_C \frac{d^2 \theta}{dt^2} \quad (1)$$

D'entrada, fixem-nos que la reacció del terra, a l'estar aplicada en C , no fa moment i només fa moment el pes mg . Prenguem un sistema de referència en què l'eix y és vertical cap amunt i l'eix x horitzontal cap a la dreta. A més dels punts ja esmentats G i C , a la figura 1.48 també hi ha senyalat el punt A , centre del cilindre, i el B , sobre la vertical de A a l'altura del centre de masses G . L'angle θ és el format per $\overline{AG}$ amb la vertical $\overline{AC}$ quan el mig cilindre està fora de l'equilibri; la longitud del segment $\overline{AC}$ val el radi R del mig cilindre. I anomenem d la longitud del segment $\overline{AG}$, és a dir, la distància del centre del cilindre A al centre de masses G . Aquesta distància, que es pot calcular fàcilment per mitjà del *teorema de Pappus-Guldin* sobre la posició dels centres de masses de figures planes, val: $d = 2R/\pi$. Aleshores, el moment del pes respecte de C ve donat per

$$M_C = m(\overline{CG} \times \mathbf{g}) = -\overline{BG} \cdot mg \mathbf{u}_z = -mgd \sin \theta \mathbf{u}_z \quad (2)$$

Fixem-nos que, amb el conveni de signes que estem utilitzant, a un angle girat θ positiu li correspon un moment negatiu i que, en conseqüència, el moment del pes és recuperador.

Calculem ara quant val el moment d'inèrcia I_C del mig cilindre respecte d'un eix paral·lel al z que passa per C . Siguin I_A i I_G els moments d'inèrcia corresponents als punts A i G , respectivament. Pel teorema de Steiner, tenim que

$$I_A = I_G + m \cdot \overline{GA}^2 \quad \text{i} \quad I_C = I_G + m \cdot \overline{GC}^2$$

d'on tenim

$$I_C = I_A + m \cdot (\overline{GC}^2 - \overline{GA}^2) \quad (3)$$

Com que tota la massa del mig cilindre és a la mateixa distància R de l'eix que passa pel centre A , tenim que $I_A = mR^2$, i, per trigonometria, també tenim que



$$\overline{GC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AG}^2 - 2 \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AG} \cdot \cos \theta = R^2 + d^2 - 2Rd \cos \theta$$

d'on I_C de (3) queda com

$$I_C = 2mR(R - d \cos \theta) \quad (4)$$

Amb el moment M_C donat per (2) i I_C per (4) ja podem tornar a l'equació (1). Amb aquests valors de M_C i de I_C aquesta equació diferencial no és lineal, però si suposem que l'angle θ és petit i, en conseqüència, en primera aproximació, $\sin \theta \approx \theta$ i $\cos \theta \approx 1$, l'equació (1) quedarà com

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{gd}{2R(R-d)} \theta = 0$$

i si, com hem dit abans, $d = 2R/\pi$, aleshores, $\omega^2 = g/(\pi-2)R$ i el període valdrà

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{(\pi-2)R}{g}}$$

Problema 1.19. Pèndol de torsió bifilar

Com es mostra a la figura 1.49, fixem al sostre dos fils iguals AB i CD de longitud L , separats la distància $2a$. Als extrems inferiors dels fils, unim un cos que, respecte d'un eix vertical OP equidistant dels dos fils, té un radi de gir ρ . Si girem una mica el cos horitzontalment respecte d'aquest eix i el deixem anar, aleshores comença a oscil·lar com una mena de pèndol de torsió. Amb quin període ho fa?

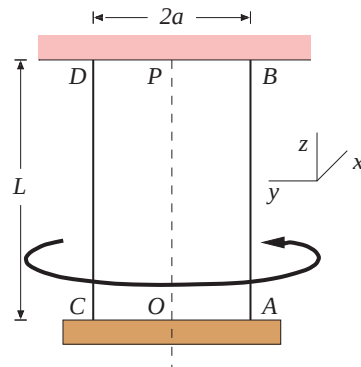


Figura 1.49

Solució

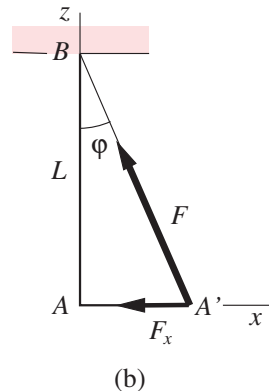
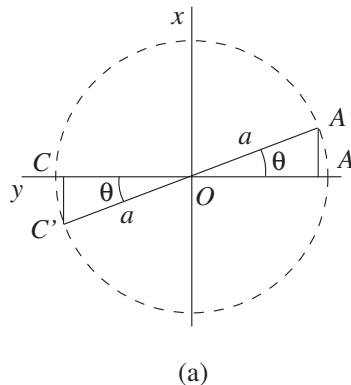


Figura 1.50



La figura 1.50 (a) representa el pla xy horitzontal amb un angle θ girat pel cos; A' i C' són els extrems A i C de la corda en la nova posició. La figura 1.50 (b) representa el pla xz vertical amb el fil AB abans i després del gir, la $A'B$. En aquesta última figura, F és la tensió del fil; F_x , la component horitzontal de la tensió, i φ és l'angle petit que s'inclina el fil respecte de la vertical.

Sigui m la massa del cos penjat. Les dues tensions que fan ambdós fils són pràcticament iguals i, en conseqüència, iguals a la meitat del pes del cos, $F = mg/2$. Si considerem que les oscil·lacions són d'amplitud petita, els angles θ i φ seran petits, i la component x de la tensió valdrà

$$F_x = F \sin \varphi \approx \frac{mg}{2} \varphi \quad (1)$$

D'altra banda, la distància $\overline{AA'}$ —i la $\overline{CC'}$, ja que els dos fils són equivalents— relaciona aquests dos angles

$$\overline{AA'} \approx a\theta \approx L\varphi \quad \text{d'on} \quad \varphi = \frac{a}{L}\theta \quad (2)$$

Les úniques forces que fan moment $\mathbf{M}_0$ respecte de O són les dues components F_x . Amb el sistema d'eixos representat a les figures anteriors, per (1) i (2), tenim

$$\mathbf{M}_0 \approx -2a \cdot \frac{mg}{2} \varphi \mathbf{u}_z \approx -\frac{a^2 mg}{L} \theta \mathbf{u}_z$$

Si I és el moment d'inèrcia del cos respecte de l'eix vertical que passa per O , podem escriure l'equació fonamental de la dinàmica de la rotació $M_0 = I \frac{d^2\theta}{dt^2}$ com

$$-\frac{a^2 mg}{L} \theta = I \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (3)$$

i en resulta l'equació diferencial del MHS. Segons l'enunciat, el radi de gir del cos al voltant de l'eix de rotació és ρ ; això vol dir que $I = m\rho^2$. Per tant, l'equació diferencial (3) quedarà

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{a^2 g}{\rho^2 L} \theta = 0$$

d'on veiem que el període valdrà, finalment

$$T = 2\pi \frac{\rho}{a} \sqrt{\frac{L}{g}}$$

Així, per exemple, si el cos fos una barra centrada de longitud $2a$, aleshores, $\rho/a = 1/\sqrt{3}$.

Problema 1.20. Acumulació d'energia elàstica

Tenim una molla de constant de força k i de longitud natural L_0 , col·locada verticalment i unida a terra —v. figura 1.51. Li posem damunt un primer bloc de massa m i, damunt d'aquest, un segon bloc pesant de massa M , amb $M > m$. Quan el conjunt es troba en



equilibri es retira horitzontalment el segon bloc per tal que el primer surti llançat cap amunt. Prenent aquest instant com a $t = 0$ i el terra com a origen de l'altura h , esbrineu l'altura màxima a què arribarà el primer bloc i la seva posició pujant en funció del temps.

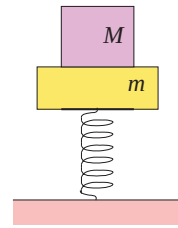


Figura 1.51

Solució

La molla arriba inicialment fins a l'altura L_0 —v. figura 1.52 (a). Impedint que oscil·li, li col·loquem al damunt el primer bloc. Buscant l'equilibri, l'extrem superior de la molla s'ensorra la longitud Δx_1 —v. figura (b)— donada per

$$k\Delta x_1 = mg$$

Aquesta posició d'equilibri es troba a l'altura $h_0 = L_0 - \Delta x_1$. Anàlogament, col·loquem el segon bloc al damunt i s'ensorra la Δx_2 —v. figura (c)—

$$k\Delta x_2 = Mg$$

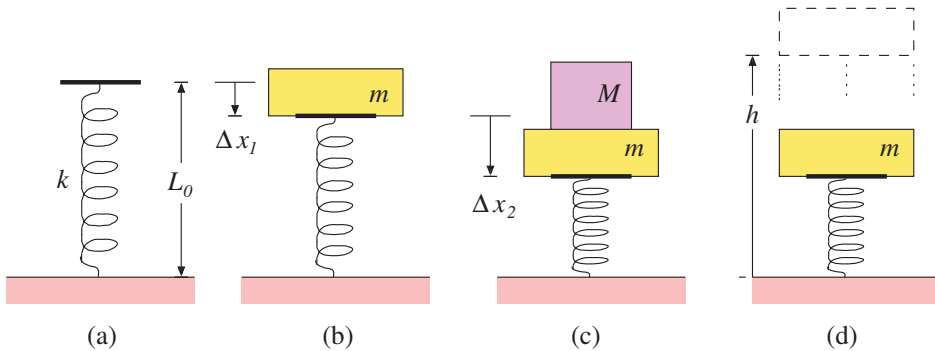


Figura 1.52

A l'altura $L_0 - \Delta x_1 - \Delta x_2$ tots dos blocs estan en equilibri i en repòs. Però si traiem el segon bloc, ara, només amb el primer damunt de la molla la posició d'equilibri correspon una altra vegada a l'altura h_0 . Per tant, a $t = 0$, el primer bloc està en repòs, desplaçat una distància Δx_2 de la posició d'equilibri. Així doncs, en el moviment de pujada empès per la molla, aquest bloc farà una part de MHS d'amplitud $A = \Delta x_2$ i període $T = 2\pi\sqrt{m/k}$ i, en conseqüència, assolirà la màxima velocitat ascensional quan passi pel punt d'equilibri corresponent a l'altura $L_1 = L_0 - \Delta x_1$, que serà a l'instant $t_0 = T/4$. Com hem vist en el problema 1.4, equació (2), el bloc continuarà pujant sobre la molla fins a l'altura h_a tal que satisfaci la condició

$$g = \omega^2(h_a - h_0) = \frac{k}{m}(h_a - L + \frac{mg}{k})$$

és a dir, $h_a = L_0$. A partir d'aquest moment, el bloc deixarà d'estar en contacte amb la molla i pujarà per la seva inèrcia. Resumint, el bloc pujarà en un moviment de dues parts:

- Primera. Des de $t = 0$ fins a $t = t_a$ fa un MHS sobre la molla, on la seva altura h val

$$h(t < t_a) = L_0 - \Delta x_1 + \Delta x_2 \cos(\omega t + \pi) = L_0 - \frac{g}{k} \left(m + M \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t \right) \quad (1)$$



A l'instant t_a , tenim $h = h_a = L_0$ i, per l'expressió anterior (1), veiem que es compleix

$$t_a = \sqrt{\frac{m}{k}} \arccos\left(-\frac{m}{M}\right) \quad (2)$$

Dels dos t_a possibles tals que $0 < t_a < T$, el més petit, $t'_a < T/2$, correspon al moviment de pujada, mentre que el més gran, $t''_a > T/2$, al de baixada. És clar que, en el nostre cas, ens interessa el petit. Fixem-nos també per (2) que, per tal que el bloc s'aixequi per sobre de la molla, només cal que $M > m$, com ja ens deia l'enunciat.

- Segona. A partir de l'instant t_a anterior continua pujant per inèrcia, ara sense contacte amb la molla, frenat, això sí, pel seu propi pes mg . La velocitat de partida la podem calcular derivant la $h(t)$ donada per (1) i substituint-hi $t = t_a$ de (2). Fent-ho així aconseguim

$$v(t_a) = \frac{g}{k} M \sqrt{\frac{k}{m}} \sin \sqrt{\frac{k}{m}} t_a = g \sqrt{\frac{M^2 - m^2}{km}}$$

i, per consegüent,

$$h(t \geq t_a) = L_0 + g \sqrt{\frac{M^2 - m^2}{km}} (t - t_a) - \frac{1}{2} g (t - t_a)^2 \quad (3)$$

Finalment, trobarem l'altura màxima que assolirà el bloc derivant (3) i igualant a zero. L'equació resultant ens proporciona l'instant en què això passarà, que és

$$t_b = t_a + \sqrt{\frac{M^2 - m^2}{km}}$$

Avaluant en (3), ens dona l'altura màxima

$$h_{\max} = L_0 + \frac{1}{2} g \frac{M^2 - m^2}{km} \quad (4)$$

Fixeu-vos que aquesta altura màxima $h_{\max}$ a la qual arribarà el bloc que acabem de calcular també es pot determinar —més ràpid i fàcilment— considerant la conservació de l'energia: l'energia potencial inicial, abans de sortir el bloc disparat cap amunt, ha de ser igual a l'energia potencial gravitatòria del bloc en el punt de màxima altura. És a dir,

$$mg(L_0 - \Delta x_1 - \Delta x_2) + \frac{1}{2} k (\Delta x_1 + \Delta x_2)^2 = mgh_{\max}$$

on, fent les substitucions corresponents, resulta la $h_{\max}$ anterior (4).

Problema 1.21. Sistema molla-cilindre

Una molla de constant de força k té un extrem unit a una paret fixa i l'altre a l'eix d'un cilindre homogeni de radi R i massa m , que és damunt d'una superfície horitzontal sobre la qual rodola sense lliscar —v. figura 1.53. Determineu el període de les oscil·lacions del cilindre.

Canviarà aquest període si fem oscil·lar el sistema sobre un pla inclinat en lloc d'un horitzontal?



Solució

Aquest problema, com molts d'altres, es pot resoldre tant aplicant la segona llei de Newton com aplicant la conservació de l'energia. Aquí ho farem d'aquesta segona manera.

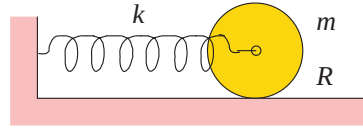


Figura 1.53

Sigui E l'energia mecànica del cilindre si el desplaçem x de la seva posició d'equilibri i el seu centre es mou a la velocitat v rodolant a la velocitat angular ω . L'energia cinètica del cilindre rodolant té una part de translació i una part deguda a la rotació. Si $I = \frac{1}{2}mR^2$ és el moment d'inèrcia del cilindre respecte del seu eix de simetria, tindrem

$$E = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \quad (1)$$

Com que el cilindre rodola sense relliscar, tenim que $v = \omega R$, per la qual cosa (1) queda com

$$E = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{3}{4}mv^2$$

Derivant aquesta expressió respecte del temps t tenim

$$0 = 2 \frac{1}{2}kx \frac{dx}{dt} + 2 \frac{3}{4}mv \frac{dv}{dt}$$

és a dir,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{2k}{3m}x = 0$$

d'on veiem que el moviment del cilindre serà un MHS de període

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{3m}{2k}}$$

Com es podia esperar aquest període és més gran que el corresponent a un bloc que no roda sinó que només llisca.

Finalment, és immediat comprovar que, si el cilindre rodola sense lliscar, no importa que la superfície per la que ho fa sigui horitzontal o estigui inclinada: el període és el mateix.

Problema 1.22. Oscil·lacions d'una boleta

Trobeu el període de les petites oscil·lacions que fa una esfera massissa homogènia de radi r , col·locada dintre d'un cilindre buit de radi R , amb $R > r$ —v. figura 1.54. Supposeu que, en tot moment, l'esfera rodola en un pla vertical sense lliscar.

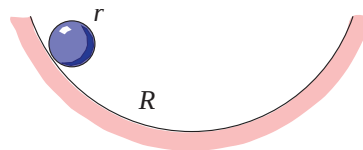


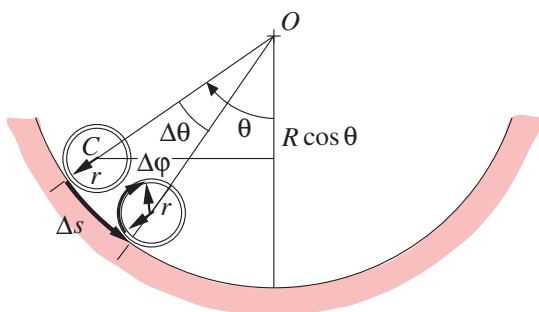
Figura 1.54

Solució

Aquest problema es resol més fàcilment aplicant la conservació de l'energia que fent consideracions de forces i moments.

Siguin m la massa de l'esfera i E la seva energia mecànica en un instant en què el seu centre C forma un angle θ amb la vertical —v. figura 1.55— i el centre O del cilindre.

Figura 1.55



L'energia E és la suma de l'energia potencial gravitatòria U més la cinètica de translació K_T i més la cinètica de rotació K_R al voltant de l'eix que passa per C . Si prenem l'origen de l'energia potencial a l'altura del centre O del cilindre, se segueix que

$$U = -mg(R - r) \cos \theta \quad (1)$$

Anomenem I el moment d'inèrcia de l'esfera entorn d'un eix que passi pel seu centre C , v_c la velocitat del seu centre i ω la seva velocitat angular. Aleshores, tindrem

$$K = K_T + K_R = \frac{1}{2}mv_c^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \quad (2)$$

Ara la qüestió és: com es relacionen v_c i ω amb θ ? Vegem-ho. D'entrada, si l'esfera rodola sense relliscar, la relació entre la velocitat lineal del seu centre i l'angular és, com ja sabem, $v_c = \omega r$. D'altra banda, com s'indica a la figura 1.55, per tal que l'esfera baixi un angle $\Delta\theta$ respecte de O ha de girar sobre si mateixa un angle $\Delta\varphi$. Si Δs és la longitud baixada sobre el cilindre, llavors la condició de rodolar sense lliscar ens torna a indicar que

$$\Delta s = R\Delta\theta = r(\Delta\varphi + \Delta\theta)$$

Derivant aquesta igualtat respecte del temps, obtenim la relació entre les diferents velocitats angulars

$$R\frac{d\theta}{dt} = r\left(\omega + \frac{d\theta}{dt}\right)$$

d'on resulta, de tot plegat, que

$$\omega = \frac{v_c}{r} = \left(\frac{R-r}{r}\right) \frac{d\theta}{dt}$$



Si tenim en compte, a més, que el moment d'inèrcia d'una esfera homogènia de massa m i radi r respecte del seu eix val $I = 2/5 mr^2$, l'expressió de l'energia cinètica (2) queda com

$$K = \frac{1}{2} m(R-r)^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{2}{5} mr^2 \left(\frac{R-r}{r} \right)^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = \frac{7}{10} m(R-r)^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \quad (3)$$

i l'energia mecànica total és (1) més (3), és a dir,

$$E = -mg(R-r) \cos \theta + \frac{7}{10} m(R-r)^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2$$

Derivant aquesta equació respecte de t i simplificant, podem concloure que

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{5g}{7(R-r)} \sin \theta = 0$$

Si les oscil·lacions són d'amplitud petita, aproximant $\sin \theta \approx \theta$, ens queda l'equació diferencial típica del MHS, per la qual cosa el període val

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{7}{5} \left(\frac{R-r}{g} \right)} \quad (4)$$

Abans d'acabar la solució fem una reflexió. El període d'una partícula oscil·lant dintre d'un cilindre de radi R és el mateix que el d'un pèndol simple de la mateixa longitud R que el radi. Ambdós casos són equivalents i tenen període $T = 2\pi \sqrt{R/g}$. Per contra, si a l'expressió (4) fem $r = 0$, el període que n'obtenim no és el del pèndol simple sinó que és més gran. Això, a primer cop d'ull, pot resultar sorprenent, però, pensant-ho bé, no ho és: una boleta que *rodola* sense reliscar, per molt petita que sigui, mai no és equivalent a una partícula. En efecte, com podem veure a (3), la energia cinètica de rotació de la bola és 2/7 de l'energia cinètica total, i queden només 5/7 per a l'energia de translació, que és, en definitiva, la que determina la celeritat de la bola. I aquestes proporcions són independents del valor de r !

Problema 1.23. Oscil·lacions d'un líquid

Considerem una columna de líquid de longitud L , continguda en un tub en U, de secció recta uniforme col·locat verticalment com es mostra a la figura 1.56. Negligint les forces de fricció, esbrineu el període de les oscil·lacions del líquid que es produeixen després d'haver-lo tret de l'equilibri.

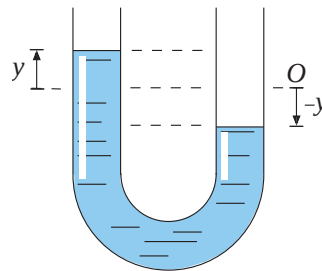


Figura 1.56

Solució

Prenguem l'eix y vertical, positiu cap amunt, amb l'origen en el nivell de l'equilibri del líquid. Si y és el nivell del líquid en una de les branques, per la conservació del volum,



el nivell a l'altra branca serà $-y$ —v. figura 1.56. Siguiu ara S la secció recta del tub i ρ la densitat del líquid.

Si U_0 és l'energia potencial gravitatòria que té tot el líquid en l'equilibri, l'energia potencial que tindrà fora d'ell valdrà, en funció de y ,

$$U(y) = U_0 + \rho S y \cdot g \cdot \frac{y}{2} + \rho S(-y) \cdot g \cdot \left(\frac{-y}{2}\right) = U_0 + \rho S g y^2$$

Quan la columna líquida estigui fora de l'equilibri, es desplaçarà com un cos de massa $\rho S L$ a una certa velocitat $v = dy/dt$, per la qual cosa la seva energia cinètica serà

$$K = \frac{1}{2} \rho S L \left(\frac{dy}{dt} \right)^2$$

Si ara suposem que no hi ha cap mena de fricció, es conservarà l'energia mecànica, $U + K$, i tindrem, doncs

$$\rho S g y^2 + \frac{1}{2} \rho S L \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 = E'$$

essent E' una constant. Derivant ara aquesta equació i simplificant $\dot{y}$, tenim

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{2g}{L} y = 0$$

és a dir, l'equació d'un MHS per a l'altura y de la columna de líquid. I d'aquí veiem que el període de les oscil·lacions val

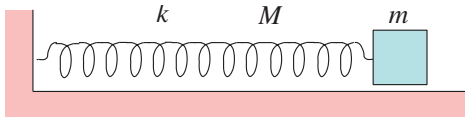
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{2g}}$$

Notem que, de manera anàloga a la d'un pèndol físic, el període és independent de la densitat del líquid.

Problema 1.24. Molla de massa no negligible

Un bloc de massa m es lliga a una molla uniforme de massa no negligible M i constant k .

Figura 1.57



Si el conjunt comença a oscil·lar, trobeu:

- l'expressió de l'energia cinètica del sistema molla-bloc i,
- aplicant la conservació de l'energia, el període de les oscil·lacions.

Nota. Considereu que les elongacions dels punts de la molla són proporcionals a les distàncies a què estan de l'extrem fix d'aquesta.



Solució

- a) En aquest cas, l'energia cinètica del conjunt, K , consta de la part deguda al bloc, K_m , més l'altra deguda a l'energia cinètica de la molla, K_M —i que és on hi ha la novetat d'aquest problema. La K_m es calcula de la forma habitual, $mv^2/2$, mentre que la K_M requereix una mica més d'elaboració.

La figura 1.58 (a) representa la molla sense deformar, en la seva longitud natural L . A la figura 1.58 (b), es mostra la molla allargada una longitud x .

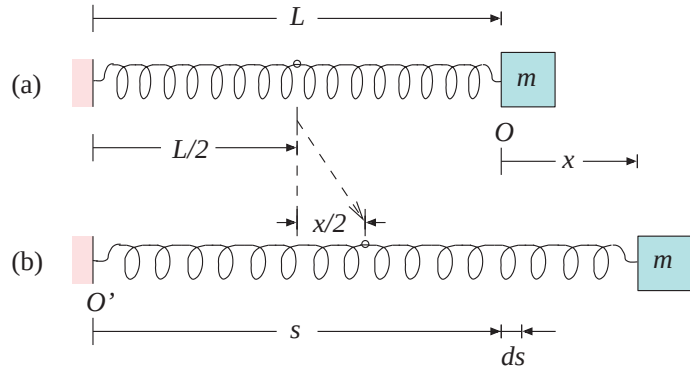


Figura 1.58

L'enunciat ens diu que els allargaments parcials de cada part de la molla són proporcionals a la distància a l'extrem fix O' ; així, per exemple, com es mostra a la mateixa figura, el punt de la molla que és a la meitat d'aquesta s'ha desplaçat la distància $x/2$. I, en general, els punts a la distància s de O' s'han desplaçat xs/L , de forma que, quan la partícula, és a dir, l'extrem mòbil O de la molla, tingui una velocitat v , els punts de la molla a la distància s tindran la velocitat

$$v_s = \frac{d}{dt} \left(\frac{s}{L} x \right) = \frac{s}{L} v$$

D'altra banda, si la molla és uniforme, un longitud ds de molla tindrà una massa dM , que valdrà $dM = M/L \cdot ds$. Doncs bé, un diferencial de molla de longitud ds situat a la distància s de l'extrem fixe O' tindrà una energia cinètica dK_M

$$dK_M = \frac{1}{2} \cdot dM \cdot v_s^2 = \frac{1}{2} \frac{M}{L} ds \frac{s^2}{L^2} v^2 = v^2 \cdot \frac{1}{2} \frac{M}{L^3} s^2 ds$$

I tota la molla, a l'instant en què el bloc es desplaça a la velocitat v , té

$$K_M = v^2 \int_0^L \frac{1}{2} \frac{M}{L^3} s^2 ds = \frac{1}{2} \frac{M}{3} v^2$$

Per tant, l'energia cinètica del sistema molla-bloc valdrà

$$K = K_m + K_M = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} \frac{M}{3} v^2 = \frac{1}{2} \left(m + \frac{M}{3} \right) v^2 \quad (1)$$

que, com veiem, és la que tindríem si la molla no tingués massa i la massa del bloc s'incrementés en $M/3$.

- b) Per trobar el període de les oscil·lacions, només ens queda ara aplicar la conservació de l'energia al sistema. Per (1) tindrem

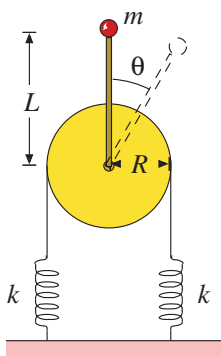
$$E = \frac{1}{2} \left(m + \frac{M}{3} \right) v^2 + \frac{1}{2} kx^2$$

que és equivalent a l'equació de la conservació de l'energia d'una partícula de massa $m + M/3$. En conseqüència, el període del sistema valdrà

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m + M/3}{k}}$$

Problema 1.25. Petites oscil·lacions angulars al voltant d'un punt d'equilibri estable

Figura 1.59



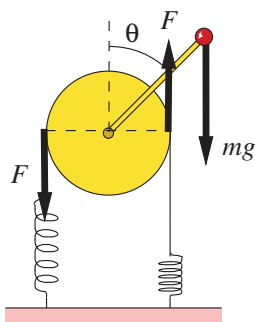
Tenim una politja de radi R per la qual passa una corda que té ambdós extrems lligats a dues molles iguals de constant k , tal com es mostra a la figura 1.59. Una barra primeta de longitud L solidària amb la politja té a l'extrem una partícula de massa m . En la posició vertical inicial, en què $\theta = 0$, les molles tenen la seva longitud natural i, a mesura que el sistema va girant, una molla es va comprimint i l'altra es va estirant. Considerant les masses de la politja, la barra i la corda negligibles, trobeu per a quin angle θ_0 hi ha equilibri, si aquest és estable o no, i, en el cas que ho sigui, el període de les oscil·lacions petites al voltant seu.

Apliqueu els resultats obtinguts a les dades:

$R = 0,20$ m, $k = 100$ N/m, $L = 0,5$ m, $m = 2$ kg.

Solució

Figura 1.60



a) Resolució per consideracions sobre forces i moments

La situació inicial $\theta = 0$ és, clarament, un punt d'equilibri, però d'equilibri inestable, com confirmarem després. Desplaçant lleugerament cap a la dreta la barra, se'ns gira tot el conjunt, barra i politja —v. figura 1.60—, de manera que la molla de la dreta queda comprimida la mateixa longitud que la molla de l'esquerra queda allargada, i així es pot arribar a una nova posició d'equilibri determinada per l'angle $\theta = \theta_0$. En la situació d'equilibri, el moment del pes mg de la partícula a l'extrem de la barra equilibra el moment de les forces que fan les dues molles, $F = kR\theta$.

Per tant, igualant el mòdul dels dos moments, tenim

$$2R \cdot kR\theta_0 = L \sin \theta_0 \cdot mg$$

d'on resulta

$$\frac{\sin \theta_0}{\theta_0} = \frac{2kR^2}{mgL} \quad (1)$$



L'angle θ_0 de l'equilibri queda determinat per aquesta última igualtat. Ara, sabent que $\sin \theta < \theta$ per a qualsevol $\theta > 0$, de (1) veiem que una condició necessària i suficient per tal que aquest sistema tingui una posició d'equilibri —llevat de $\theta = 0$ — és que

$$\frac{2kR^2}{mgL} < 1 \quad (2)$$

Imagem ara que la barra està ja en la situació d'equilibri i la desplacem un angle φ . Una molla està comprimida i l'altra, allargada la mateixa longitud, $R(\theta_0 + \varphi)$. Calculant els moments que fan el pes i les dues tensions de les molles respecte del centre de la politja, la segona llei de Newton per a les rotacions ens diu

$$-2R \cdot kR(\theta_0 + \varphi) + L \sin(\theta_0 + \varphi) \cdot mg = mL^2 \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2} \quad (3)$$

on mL^2 és el moment d'inèrcia del conjunt respecte del centre de gir. Suposant que l'angle φ és petit, podem fer les aproximacions habituals $\sin \varphi \approx \varphi$ i $\cos \varphi \approx 1$. Amb aquestes aproximacions, i tenint en compte (1), l'equació (3) queda, finalment, com

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \left(\frac{2kR^2 - mgL \cos \theta_0}{mL^2} \right) \varphi = 0 \quad (4)$$

d'on resulta el període

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{mL^2}{2kR^2 - mgL \cos \theta_0}} \quad (5)$$

Aquest resultat només té sentit si el radicand és positiu; si no ho és això vol dir que la posició corresponent a l'angle θ_0 determinat per (1) és d'equilibri, però no d'equilibri estable que permeti oscil·lacions. Consegüentment, la condició d'equilibri estable és

$$\frac{2kR^2}{mgL \cos \theta_0} > 1 \quad (6)$$

Observem que la posició vertical, $\theta_0 = 0$, compleix la condició (1), però no la (6). Es tracta, com ja intuïem, d'un punt d'equilibri inestable.

b) Resolució considerant la conservació de l'energia

Prenent l'origen de l'energia potencial al centre de la politja, l'energia potencial del sistema, quan la barra està girada un angle θ , val la suma de la potencial gravitatòria més la potencial elàstica

$$U(\theta) = mgL \cos \theta + 2 \cdot \frac{1}{2} kR^2 \theta^2 \quad (7)$$

A partir d'aquesta expressió, localitzarem els punts d'equilibri θ_0 derivant-la i igualant-la a zero

$$\frac{dU(\theta)}{d\theta} = -mgL \sin \theta_0 + 2kR^2 \theta_0 = 0 \quad (8)$$

D'aquí resulta la mateixa equació que la (1). Podem comprovar si aquesta posició —donada per l'angle θ_0 solució de l'equació anterior— correspon a un punt d'equili-



bri estable o inestable substituint l'angle θ_0 a la segona derivada de (7) i veient el signe que en resulta. Recordem que un signe positiu vol dir punt d'equilibri inestable i un signe negatiu —un mínim en l'energia potencial—, punt d'equilibri estable. Així doncs, la condició perquè la θ_0 correspongui a equilibri estable és

$$\left[\frac{d^2 U(\theta)}{d\theta^2} \right]_{\theta=\theta_0} = -mgL \cos \theta_0 + 2kR^2 < 0$$

d'on resulta la mateixa desigualtat (6) que hem vist abans.

Apliquem ara la conservació de l'energia. L'energia total E del sistema és la suma de l'energia potencial (7) més la cinètica K . Com que la partícula descriu una trajectòria circular, l'energia cinètica ve donada per

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m \left(L \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \quad (9)$$

Com dèiem, la suma de (7) i (9) dona la constant energia total. Si derivem aquesta suma i simplifiquem, trobem l'equació diferencial

$$mL^2 \frac{d^2 \theta}{dt^2} + 2kR^2 \theta - mgL \sin \theta = 0$$

que és una equació equivalent a l'anterior (3). Si posem ara $\theta = \theta_0 + \varphi$, amb l'angle θ_0 solució de (8) i φ un angle petit, retrobem l'equació (4) i, finalment, el període (5).

c) Aplicació numèrica

Per comoditat, denotem $a = 2kR^2/mgL$. Amb les dades de l'enunciat, $a = 0,815494$. Com que $a < 1$, hi ha un punt d'equilibri corresponent a un angle θ_0 solució de l'equació (1), que ara escrivim com a l'*equació transcendent*

$$\theta_0 = \frac{\sin \theta_0}{a} \quad (10)$$

Amb aquest valor de a veiem, per tempteig, que l'angle θ_0 solució de l'equació (10) és proper a 1 rad. Prenem, doncs, $\theta_0 = 1$ i substituïm aquest valor en el membre de la dreta de la igualtat (10). El resultat que n'obtenim, 1,03, és un nou valor aproximat de θ_0 millor que l'1 inicial. Si aquest nou valor el tornem a introduir a la dreta de (10), n'aconseguim un altre valor de θ_0 millor encara. I així anem repetint el procés fins que els valors de θ_0 que vagin sortint pràcticament no variïn els uns dels anteriors. El resultat final², és, com podem verificar, $\theta_0 = 1,08354 \text{ rad} = 62,0823^\circ$. A més, vist que $a/\cos \theta_0 = 1,74 > 1$, per (6) comprovem que aquesta posició és d'equilibri estable. Amb les dades de l'enunciat, si fem oscil·lar la barra al voltant d'aquesta posició el període valdrà, per (5), $T = 2,407 \text{ s}$.

² Aquest mètode iteratiu per resoldre l'equació (10) és molt senzill d'aplicar però de convergència bastant lenta. S'han de fer moltes iteracions per arribar a tenir cinc o sis xifres exactes. El mètode de Newton-Raphson, que s'explica en els textos de càlcul numèric, és molt més ràpid.



A la figura següent hem representat l'energia potencial $U(\theta)$ donada per (7) amb les dades de l'enunciat. Fixem-nos com hi ha el màxim a $\theta = 0$ i el mínim —per a $\theta > 0$ — en $\theta = 1,08$ rad, i observem la forma aproximadament parabòlica que presenta la funció al voltant del mínim.

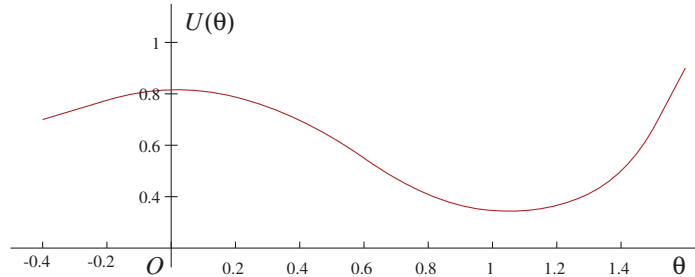


Figura 1.61

Problema 1.26. Pèndol cicloïdal isòcron

Una partícula es deixa caure lliscant sense fricció per la corba *cicloide*³ —v. figura 1.62— donada per les equacions paramètriques següents

$$x = R(\theta - \sin \theta) \quad (1)$$

$$y = -R(1 - \cos \theta) \quad (2)$$

on R és una constant.

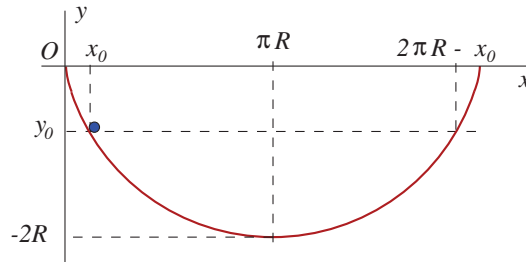


Figura 1.62

Demostreu que les oscil·lacions de la partícula sobre aquesta corba són isòcrones, és a dir, el seu període és independent de la posició inicial x_0 des d'on es deixar anar —i, per tant, de la seva amplitud— i que val

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{4R}{g}}$$

Solució

Suposant que la massa de la partícula és m , la seva energia potencial U en un instant determinat vindrà donada per

$$U = mgy = -mgR(1 - \cos \theta) \quad (3)$$

³ La cicloide és la corba engendrada per un punt fix en una circumferència que roda, sense lliscar, damunt una recta. En aquest cas, la circumferència té radi R i roda sobre la recta $y = -2R$.



on hem pres l'origen d'energia potencial en $y = 0$. Pel que fa a la seva energia cinètica, per (1) i (2) tenim que

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = R(1 - \cos \theta) \frac{d\theta}{dt} \quad (4)$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = -R \sin \theta \frac{d\theta}{dt} \quad (5)$$

Així doncs,

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2) = mR^2(1 - \cos \theta) \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \quad (6)$$

Com que es conserva l'energia mecànica, $E = U + K$, per (3) i (6) obtenim la igualtat

$$R(1 - \cos \theta) \left[R \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 - g \right] = \frac{E}{m} \quad (7)$$

Suposem que a $t = 0$ la partícula estava sobre la cicloide en repòs en el punt (x_0, y_0) , corresponent al paràmetre $\theta = \theta_0$. Per (4) i (5) veiem que estar en repòs vol dir $d\theta/dt = 0$; l'energia mecànica E val, llavors, $E = -mgR(1 - \cos \theta_0)$. Per tant, la igualtat (7) queda com

$$(1 - \cos \theta) \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = \frac{g}{R} (\cos \theta_0 - \cos \theta)$$

D'aquí podem aïllar la $\frac{d\theta}{dt}$ i posar

$$dt = \sqrt{\frac{R}{g}} \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{\cos \theta_0 - \cos \theta}} d\theta \quad (8)$$

A la figura 1.62, hem representat la cicloide donada per (1) i (2) entre $\theta = 0$ i $\theta = 2\pi$. Fixem-nos que, com podem veure per l'equacions esmentades, la gràfica és simètrica respecte de la recta $x = \pi R$, punt on té el mínim, i que correspon a $\theta = \pi$. A la figura 1.62, també s'hi indica el punt inicial (x_0, y_0) , corresponent a θ_0 , i el punt oposat fins on arribarà la partícula, a la mateixa altura y_0 , el $(2\pi R - x_0, y_0)$ corresponent a $2\pi - \theta_0$.

Com que el moviment és simètric al voltant del mínim, el període serà quatre vegades l'interval de temps d'anar del punt inicial, θ_0 , al mínim, $\theta = \pi$. Consegüentment, per (8) tindrem

$$T = 4 \sqrt{\frac{R}{g}} \int_{\theta_0}^{\pi} \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{\cos \theta_0 - \cos \theta}} d\theta$$

Utilitzant les igualtats trigonomètriques (A.25) i (A.26),

$$\sqrt{1 - \cos \theta} = \sqrt{2} \sin \frac{\theta}{2} \quad \text{i} \quad \cos \theta = 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} - 1$$

i, fent el canvi de variable,

$$u = \cos \frac{\theta}{2} \quad \text{amb} \quad du = -\frac{1}{2} \sin \frac{\theta}{2} d\theta$$



que comporta fer $u_0 = \cos \frac{\theta_0}{2}$, arribem a una integral com ara la (A.71)

$$T = 8 \sqrt{\frac{R}{g}} \cdot \int_0^{u_0} \frac{du}{\sqrt{u_0^2 - u^2}} = 8 \sqrt{\frac{R}{g}} \cdot \left[\arcsin \frac{u}{u_0} \right]_0^{u_0} = 8 \sqrt{\frac{R}{g}} \left[\frac{\pi}{2} - 0 \right] = 2\pi \sqrt{\frac{4R}{g}}$$

Comprovem, doncs, que el període resulta ser independent de la posició inicial (x_0, y_0) i, per tant, de l'amplitud, sense haver de fer cap mena d'aproximació.

1.7.2. Problemes proposats

En els càlculs de tots els problemes d'aquest text s'ha pres $g = 9,81 \text{ m/s}^2$.

Problema 1.27. Cinemàtica del MHS

Una partícula que fa un MHS estava a l'origen a $t = 0$. Si té un període de 24 s, a) quant de temps ha de passar perquè l'elongació sigui, per primera vegada, la meitat de l'amplitud? b) I quant perquè la celeritat sigui meitat de la màxima?

Resp.: a) $\Delta t = 2 \text{ s}$, b) $\Delta t = 4 \text{ s}$

Problema 1.28. Cinemàtica del MHS

D'una partícula que efectua el MHS $x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$ només sabem que l'amplitud del moviment és $A = 5 \text{ m}$ i que a $t = 0$ la seva posició era $x_0 = -3 \text{ m}$ i la seva velocitat, positiva. Quant val la fase inicial ϕ ?

Resp.: $\phi = 4,069 \text{ rad}$

Problema 1.29. Dos MHS

Esbrineu l'amplitud i la freqüència dels MHS de dues partícules de les quals se saben les dades següents:

- a) De la primera, que la velocitat màxima és 80 cm/s i la seva acceleració màxima, 90 cm/s^2 .
- b) De la segona, que té la velocitat $v_1 = 12\sqrt{6} = 29,39 \text{ cm/s}$ a l'instant en què la seva posició és a $2,0 \text{ cm}$ del punt d'equilibri O i $v_2 = 15\sqrt{3} = 25,98 \text{ cm/s}$ quan està a $5,0 \text{ cm}$ de O .

Resp.: a) $A = 71,1 \text{ cm}$, $f = 0,179 \text{ Hz}$, b) $A = 10,0 \text{ cm}$, $f = \frac{3}{2\pi} = 0,478 \text{ Hz}$

Problema 1.30. MHS i condicions inicials

Sigui una partícula que fa un MHS tal que a $t = t_0$ la seva posició és x_0 , la velocitat v_0 i l'acceleració a_0 . Demostreu que la seva posició en qualsevol instant t pot posar-se com

$$x(t) = x_0 \cos(\omega(t - t_0)) + \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega(t - t_0)), \quad \text{on} \quad \omega = \sqrt{\frac{-a_0}{x_0}}$$



Problema 1.31. Expressió d'un MHS

A l'instant $t_1 = 14$ s, la posició, la velocitat i l'acceleració d'una partícula que descriu un MHS són, respectivament, $x_1 = -16,94$ cm, $v_1 = 159,5$ cm/s i $a_1 = 3811$ cm/s². Expressen el moviment de la partícula en la forma: $x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$.

Resp.: $x(t) = 20,0 \cos(15,0t + 1,06)$ cm

Problema 1.32. Cinemàtica del MHS

Del moviment d'una partícula sabem que és un MHS i que a l'instant $t_1 = 10$ s la posició, la velocitat i l'acceleració valien, respectivament,

$$x_1 = -5,8438 \text{ mm}, v_1 = 61,199 \text{ mm/s}, a_1 = 11834 \text{ mm/s}^2$$

- Quant val el període del moviment?
- Trobeu l'equació del MHS de la partícula.
- En quin instant t_2 posterior a $t > 20$ s tornarà a estar a x_1 amb la velocitat v_1 ?
- La mateixa qüestió anterior, però en aquest cas la velocitat no ha de ser necessàriament v_1 .
- En quin instant t_3 anterior a $t > 30$ s passarà per l'origen amb velocitat positiva?

Resp.: a) $T = 0,139624$ s, b) $x(t) = 6,0 \cos(45t + 5,7596)$, c) $t_2 = 20,0529$ s,
d) $t'_2 = 20,0428$ s, e) $t_3 = 29,9964$ s

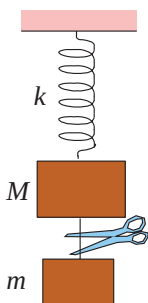
Problema 1.33. MHS a partir de dues posicions

Un objecte oscil·la unit a una molla vertical de manera que a $t_1 = 10$ s la seva posició és $x_1 = -11,46$ cm i a $t_2 = 20$ s és $x_2 = 11,96$ cm. Sabem que, quan es va penjar l'objecte a la molla, aquesta va patir un allargament de 3,83 cm. Quina és l'equació de moviment de l'objecte?

Resp.: $\tan \phi = \frac{x_2 \cos \omega t_1 - x_1 \cos \omega t_2}{x_2 \sin \omega t_1 - x_1 \sin \omega t_2}$, $x(t) = 12,0 \cos(16,0t + 0,523)$

Problema 1.34. Oscil·lacions d'una molla vertical

Figura 1.63



D'una molla agafada al sostre de constant de força $k = 10$ N/m penja un primer bloc de massa $M = 0,20$ kg. Un segon bloc de massa $m = 0,30$ kg està unit al primer per un fil —v. figura 1.63. Inicialment, tot el conjunt està en repòs i en equilibri. En un instant determinat es talla el fil que uneix els dos blocs, el segon bloc cau a terra i el primer comença a oscil·lar. Prenent l'origen d'energia potencial en el punt d'equilibri, amb quina energia començarà a oscil·lar aquest bloc? I amb quina amplitud? Quina velocitat màxima arribarà a tenir durant les oscil·lacions si no hi ha cap amortiment?

Resp.: $E_0 = \frac{1}{2} \frac{m^2 g^2}{k} = 0,433$ J, $A_0 = \frac{mg}{k} = 0,294$ m,
 $v_{\max} = \frac{m}{\sqrt{kM}} g = 2,08$ m/s


Problema 1.35. Força sobre el terra

Per mitjà d'una molla vertical de constant $k = 648 \text{ N/m}$, un bloc de massa $m_1 = 2 \text{ kg}$ és unit a un altre bloc de massa $m_2 = 4 \text{ kg}$ que es troba sobre el terra —v. figura 1.64. En un determinat moment es dóna un cop al primer bloc, de forma que comença a oscil·lar fent un MHS vertical d'amplitud $A = 2 \text{ cm}$.

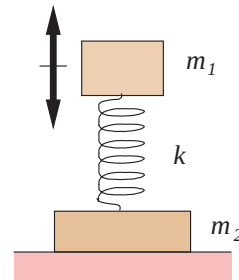


Figura 1.64

- Esbrineu la força que fa el segon bloc sobre el terra en funció del temps, així com també la màxima i la mínima corresponents.
- A partir de quina amplitud la força mínima seria nul·la?

Resp.: a) $F = (m_1 + m_2)g + kA \sin \omega t$, on $\omega = \sqrt{\frac{k}{m_1}} = 18 \text{ rad/s}$,

$$F_{\max} = 71,82 \text{ N}, F_{\min} = 45,90 \text{ N}, \text{ b) } A_0 = \frac{(m_1 + m_2)g}{k} = 9,083 \text{ cm}$$

Problema 1.36. Les retallades arriben a les molles

Disposem d'una molla de constant de força $k = 200 \text{ N/m}$, que té una longitud natural $L = 100 \text{ cm}$ —v. figura 1.65 (a). Si volem tenir una molla de constant $k' = 350 \text{ N/m}$, quanta longitud ΔL li hem de retallar —v. figura 1.65 (b)?

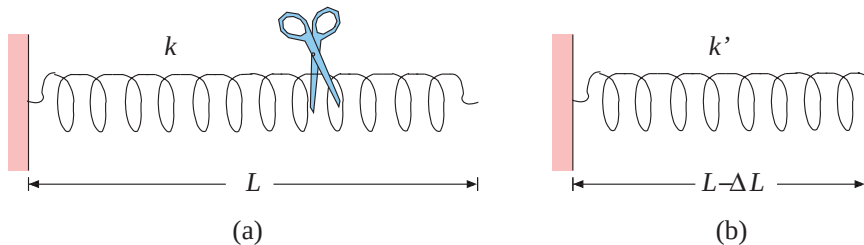


Figura 1.65

Resp.: $\Delta L = \left(1 - \frac{k}{k'}\right)L = 42,9 \text{ cm}$

Problema 1.37. Associació de molles

Considereu les dues associacions de molles de les figures 1.66 i 1.67.

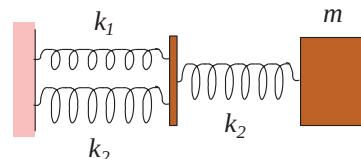


Figura 1.66

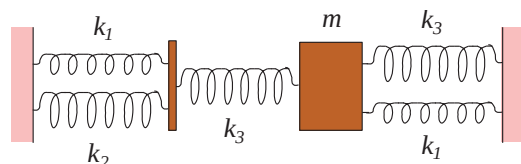


Figura 1.67

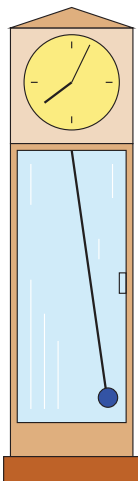


- a) Quant val la freqüència angular de les oscil·lacions del bloc de la figura 1.66?
- b) Si a la figura 1.67, $k_1 = k_3/3 = k_2/2 = k = 100 \text{ N/m}$ i $m = 1 \text{ kg}$, quin és el període de les oscil·lacions del bloc?

Resp.: a) $\omega = \sqrt{\frac{k_2(k_1 + k_2)}{k_1 + 2k_2}} \frac{1}{m}$, b) $T = 2\pi\sqrt{\frac{11}{2} \frac{m}{k}} = 1,47 \text{ s}$

Problema 1.38. Relloctes de pèndol i temperatura

Figura 1.68



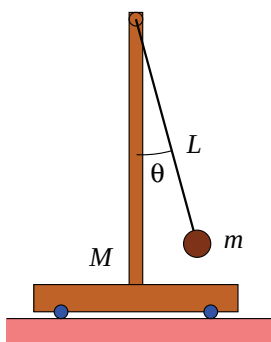
El pèndol d'un rellotge de paret que és a l'exterior està constituït per una barra homogènia de llautó suspesa d'un extrem —v. figura 1.68. Sabent que el coeficient de dilatació lineal del llautó val $\alpha = 19 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ i que l'expansió d'una barra de longitud L per efecte del canvi de temperatura $\Delta\theta$ ve donada per $\Delta L = \alpha L \Delta\theta$,

- a) trobeu la relació que hi ha entre la variació de la temperatura i la variació relativa corresponent del període del pèndol.
- b) El rellotge anterior s'ha calibrat al gener i va exacte a la temperatura de $\theta_0 = 10^\circ\text{C}$. Aplicant el resultat de l'aparat (a), esbrineu quant de temps, aproximadament, s'endarrerirà durant el mes de juliol si la temperatura mitjana del mes és de 25°C ?

Resp.: a) $\frac{\Delta T}{T} = \frac{1}{2} \alpha \Delta\theta = 1,43 \times 10^{-4}$, b) $\Delta t = 6 \text{ min } 22 \text{ s}$

Problema 1.39. Pèndol simple, però sobre un carretó

Figura 1.69



Un carretó té un pal vertical de l'extrem del qual penja un pèndol simple, constituït per una barra molt prima amb una massa puntual m a l'extrem inferior —v. figura 1.69. El carretó, de massa total M , té unes rodets de forma que pot oscil·lar endavant i endarrera sense cap mena de fricció en un pla horitzontal. Llavors, si pertorbem el pèndol de forma que efectui petites oscil·lacions, quin període T tindrà en relació amb el període T_0 que tindria si estigués fixat al terra?

Nota: El període T es pot calcular directament, però fixeuvos que aquest problema és molt semblant als dels dos cossos 1.10 i 1.11: en el fons, el carretó i la lentilla del pèndol són com si fossin dos cossos units per una molla de constant k . Quina?

Resp.: $T = \sqrt{\frac{M}{M+m}} T_0$, $k = mg/L$


Problema 1.40. Un pèndol físic

Una barra molt prima, de longitud $L = 60$ cm, es doblega per la meitat i forma una “V” corresponent a un angle $\alpha = 60^\circ$. Si, com es mostra a la figura 1.70, la pengem d’un eix horitzontal i deixem que faci petites oscil·lacions en un pla vertical, quin serà el seu període? Fixeu-vos que el període és independent del material de la barra.

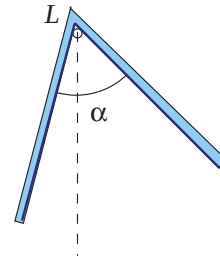


Figura 1.70

Resp.: $T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{3g \cos(\alpha/2)}} = 0,9640$ s

Problema 1.41. El segon centre d’oscil·lació

Una barra homogènia de longitud $L = 1,5$ m i massa $m = 0,60$ kg, sota l’acció del seu propi pes, pot oscil·lar al voltant d’un punt O_1 , situat a la distància $d_1 = L/10$ d’un dels extrems. Determineu-ne un segon punt O_2 , situat a la distància d_2 del mateix extrem ($0 < d_2 < L/2$), tal que les oscil·lacions de la barra penjada de O_2 tinguin el mateix període que les corresponents a O_1 . Supposeu que les oscil·lacions són sempre petites.

Resp.: $d_2 = 0,29167L = 43,75$ cm

Problema 1.42. Període mínim d’un pèndol físic

Una barra prima de longitud L i massa m oscil·la respecte d’un eix horitzontal que passa pel seu extrem O —v. figura 1.71. La barra té una boleta molt petita de massa $m/2$ que pot desplaçar amunt i avall al llarg d’ella. Esbrineu a quina distància x de l’eix hem de col·locar la boleta per tal que el període de les petites oscil·lacions sigui mínim.

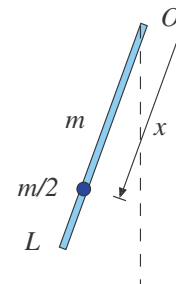
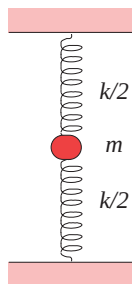


Figura 1.71

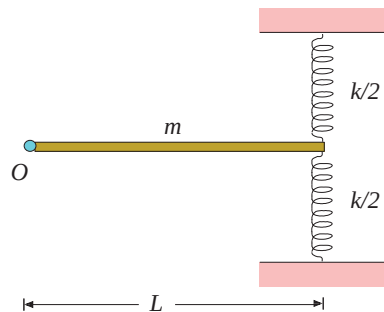
Resp.: $x = \left(\sqrt{\frac{5}{3}} - 1 \right) L = 0,2910L$

Problema 1.43. Oscil·lador lineal i oscil·lador angular

a) Una partícula de massa m lligada a dues molles de constant $k/2$, com ens mostra la figura 1.72 (a). Les oscil·lacions són en la direcció de les dues molles.



(a)



(b)

Figura 1.72



- b) Una barra de longitud L i massa m que pot girar en un pla horitzontal al voltant d'un eix vertical fix que passa pel seu extrem O —v. figura 1.72 (b). L'altre extrem de la barra és unit a dues molles iguals perpendiculars, de constants $k/2$. Les oscil·lacions angulars de la barra seran, en tot moment, petites.

Com acabem de veure, en els dos oscil·ladors intervenen dues molles de $k/2$ i una massa m .

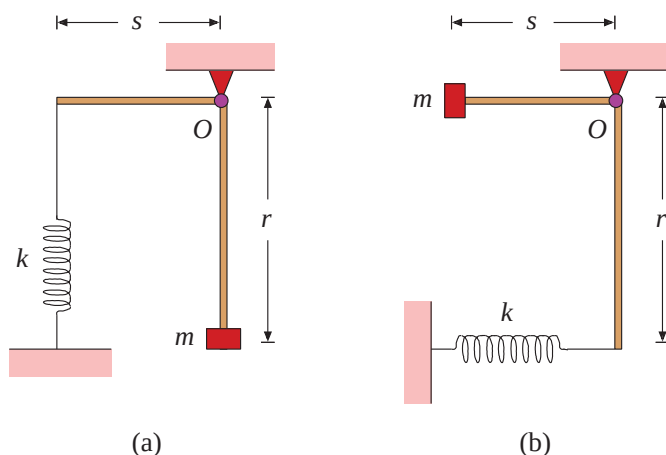
- i) Abans d'aplicar qualsevol equació i trobar les expressions dels períodes, reflexioneu i contesteu: quin dels dos oscil·ladors té el període més gran?
ii) A continuació, calculeu detalladament els dos períodes i compareu-los.

Resp.: i) Clarament l'oscil·lador (b) amb la barra; ii) $T_a = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$, $T_b = 2\pi\sqrt{\frac{m}{3k}}$

Problema 1.44. Sistemes amb barres oscil·lants

En els dos sistemes oscil·lants independents esquematitzats a la figura 1.73, les dues barres, que estan unides rígidament formant un angle recte, poden girar en un pla vertical al voltant de l'eix horitzontal O . Esbrineu el període de les oscil·lacions de petita amplitud d'ambdós sistemes sabent que les masses de les barres són negligibles, les de les partícules valen $m = 12$ kg, les longituds de les barres són $r = 1,2$ m i $s = 0,70$ m, i les molles tenen la mateixa constant $k = 3000$ N/m. En ambdós casos, la barra de longitud s és horitzontal en la posició d'equilibri.

Figura 1.73



Resp.: a) $T = 2\pi\sqrt{\frac{mr^2}{mgr + ks^2}} = 0,6507$ s, b) $T = 2\pi\frac{s}{r}\sqrt{\frac{m}{k}} = 0,2318$ s

Problema 1.45. Placa rectangular com a pèndol

Considerem una placa homogènia rectangular d'altura a i amplada b , que oscil·la en un pla vertical com un pèndol físic al voltant d'un eix horitzontal que passa pel seu punt mitjà superior O —v. figura 1.74.

- a) Quant val el període de les seves oscil·lacions petites?



- b) Sigui la relació $q = b/a$. D'entre totes les plaques rectangulars possibles de la mateixa àrea A , per a quin quocient q serà mínim el període?

Nota: El moment d'inèrcia d'una placa rectangular de dimensions $a \times b$ i massa m respecte d'un eix normal que passi pel seu centre val $I = \frac{1}{12}m(a^2 + b^2)$.

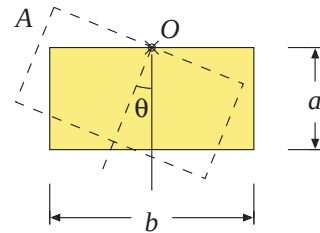


Figura 1.74

Resp.: a) $T = 2\pi\sqrt{\frac{4a^2 + b^2}{6ag}}$, b) $q = \frac{b}{a} = \frac{2}{\sqrt{3}} = 1,1547$

Problema 1.46. Molla, barra i paquet

Una barra de massa $m = 8$ kg i de longitud $L = 2$ m pot girar al voltant del seu punt mitjà O sense cap mena de fricció —v. figura 1.75.

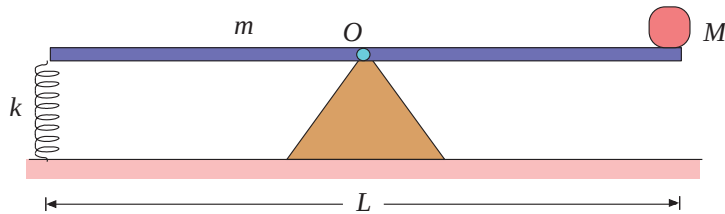


Figura 1.75

Un dels extrems de la barra és unit per una molla de constant $k = 400$ N/m a terra, mentre que sobre l'altre extrem hi ha un petit paquet de massa $M = 5$ kg. Suposant que aquest paquet està ben lligat a la barra i sabent que la barra està horitzontal quan el sistema està en equilibri:

- Quant val l'estirament inicial de la molla?
- Trobeu el període T de les oscil·lacions petites del sistema.
- Si l'amplitud angular de les oscil·lacions és de $\Theta = 0,10$ rad, quines són la velocitat i l'acceleració màximes que assolirà el paquet?
- Si el paquet estigués només dipositat sobre la barra però no lligat a aquesta, quina amplitud angular màxima podria assolir la barra sense que el paquet perdés el contacte amb ella?
- Tornant a l'apartat (b): quant valdria el període de les oscil·lacions d'aquest mateix sistema si hi afegíssim una segona molla de constant $k' = 2k$ a l'altre extrem —però de manera que la barra continués en equilibri en la posició horitzontal?

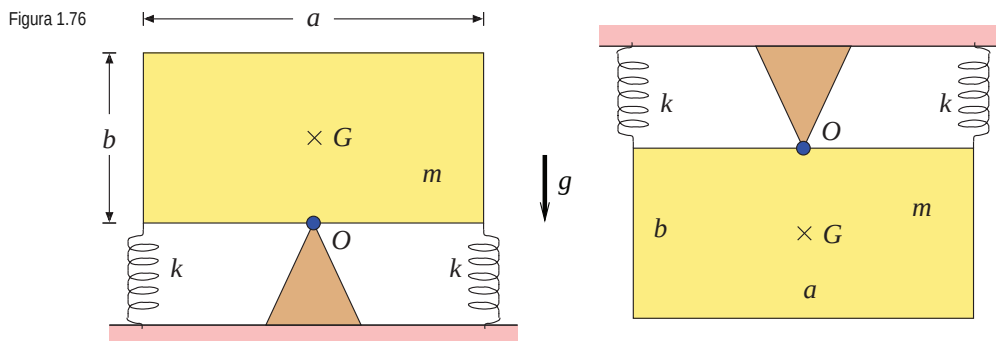
Resp.: a) $\Delta x = \frac{Mg}{k} = 12,26$ cm, b) $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m+3M}{3k}} = 0,8699$ s,

c) $v_{\max} = \frac{L}{2}\omega\Theta = 0,7223$ m/s, $a_{\max} = \frac{L}{2}\omega^2\Theta = 5,217$ m/s²,

d) $\Theta_{\max} = \frac{2g}{\omega^2 L} = 0,1880$ rad = 10,77°, e) $T' = 2\pi\sqrt{\frac{m+3M}{3(k+k')}} = \frac{T}{\sqrt{3}} = 0,5022$ s

Problema 1.47. Condicions per a l'oscil·lació, I

A la figura 1.76 es mostren dues plaques homogènies rectangulars iguals, de massa m i costats $a \times b$, —v. la nota del problema 1.45— però una, l'esquerra, descansa sobre l'articulació O i l'altra, la dreta, penja de l'articulació O i, ambdues, poden girar sense fricció en un pla vertical entorn de l'articulació corresponent.



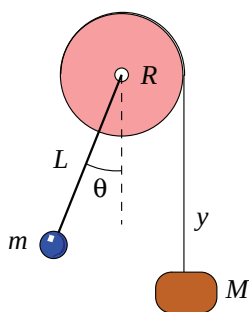
A la placa de l'esquerra els seus extrems estan lligats a terra per dues molles verticals iguals de constant k , mentre que a la de la dreta les molles dels extrems estan lligades al sostre.

- Fixeu-vos que la placa de la dreta oscil·larà en tots els casos, mentre que la placa de l'esquerra només ho farà si l'altura b satisfà... quina condició?
- Trobeu el període de les oscil·lacions de totes dues plaques.

Resp.: a) $b < \frac{ka^2}{mg}$, b) $T = 2\pi \sqrt{\frac{m(a^2 + 4b^2)}{6(ka^2 - bmg)}}$, $T = 2\pi \sqrt{\frac{m(a^2 + 4b^2)}{6(ka^2 + bmg)}}$

Problema 1.48. Condicions per a l'oscil·lació

Figura 1.77



Sigui una politja de radi R pràcticament sense massa a la qual hi ha fixada una barra de longitud L , també de massa negligible, però amb una massa puntual m a l'extrem —v. figura 1.77. La politja té enrotllada una corda lleugera amb un dels extrems que penja amb una massa M .

- Quina condició ha de satisfer M , en general, per tal que el sistema sigui oscil·latori?
- Donats R , L , M i m , per a quin angle θ_0 hi haurà equilibri estable?
- Trobeu l'equació exacta de les oscil·lacions del sistema al voltant de la posició d'equilibri i la freqüència de les petites oscil·lacions.

Resp.: a) $M < \frac{mL}{R}$, b) $\sin \theta_0 = \frac{MR}{mL}$,

c) $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgL}{mL^2 + MR^2}(\sin \theta - \sin \theta_0) = 0$, $\omega^2 = \frac{mgL \cos \theta_0}{mL^2 + MR^2}$.



Problema 1.49. Una molla real i mesura de g

Una manera de mesurar l'acceleració de la gravetat g amb una molla real amb una massa determinada no negligible és la següent. La molla es penja per un extrem al sostre i de l'altre s'hi penja un cos. Primer mesurem l'allargament estàtic de la molla, x_1 ; després, fent oscil·lar el sistema, en cronometrem el període T_1 . Ho repetim tot un altre cop, però amb un altre cos i n'obtenint les magnituds respectives, x_2 i T_2 . Doncs bé, suposant que la influència de la massa de la molla en aquestes mesures és equivalent a la d'afegir una mateixa massa desconeguda a la dels cossos, demostreu que g ve donada per

$$g = 4\pi^2 \frac{x_1 - x_2}{T_1^2 - T_2^2}$$

Fixeu-vos que g s'obté de mesures directes amb regla i cronòmetre.

Problema 1.50. Una altra mena de pèndol

Com es mostra a la figura 1.78, una barra rígida molt primeta OB , lligada pel punt A al sostre a través del fil AC està articulada en el punt O de manera que pot girar en un pla horitzontal. El pes de la barra és negligible davant del pes mg del bloc que té a l'extrem B . Si la longitud de la barra és r , la del fil AC és L i la distància OA és s , trobeu el període de les oscil·lacions de la barra entorn de l'eix vertical que passa per O si la desplacem horitzontalment una mica de la posició d'equilibri.

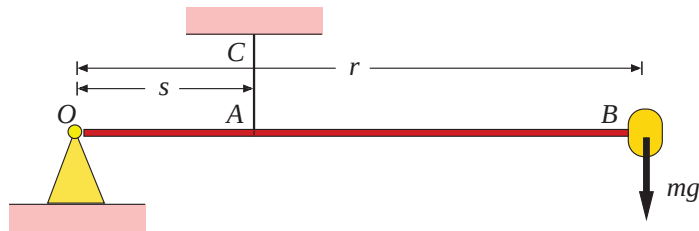


Figura 1.78

Resp.: $T = 2\pi \sqrt{\frac{rL}{s g}}$

Problema 1.51. Moviment oscil·latori d'una barra

Dos discs iguals situats en un mateix pla vertical, els eixos dels quals estan separats la distància d , giren en sentits contraris a una determinada velocitat angular ω (v. figura 1.79). Una barra homogènia de longitud més gran que d se situa simètricament sobre els dos discs sense que aquests deixin de girar.

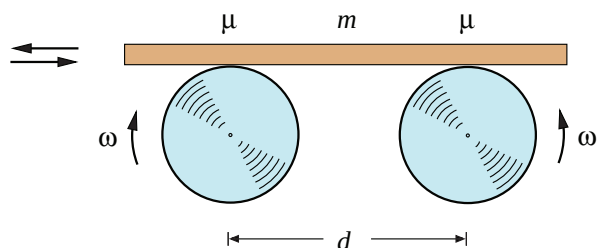


Figura 1.79



Demostreu que, a causa de les forces de fricció seca amb els discos, si se separa una mica la barra de la seva posició de simetria començarà a efectuar un MHS i trobeu-ne el període en funció del coeficient de fricció μ entre la barra i els discos.

Resp.: $T = 2\pi\sqrt{\frac{d}{2\mu g}}$

Problema 1.52. Més sobre el problema dels dos cossos

Seguint amb el problema resolt 1.10, demostreu que l'energia mecànica dels dos blocs ve donada per

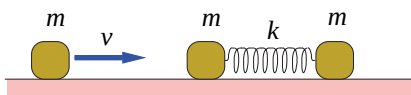
$$E = \frac{1}{2}\mu v^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

i, derivant-la, retrobeu l'expressió (7) sobre la freqüència angular de l'oscil·lació $\omega = \sqrt{k/\mu}$.

Problema 1.53. Sobre blocs, molles i xocs

Sobre una superfície horitzontal llisa hi ha dos blocs iguals de masses m units per una molla de constant k . Un altre bloc idèntic als anteriors —v. figura 1.80— xoca elàsticament contra un d'ells en la direcció de l'altre. Si la velocitat inicial d'aquest tercer bloc abans de la col·lisió era v , quant val l'allargament màxim que experimentarà la molla després del xoc?

Figura 1.80



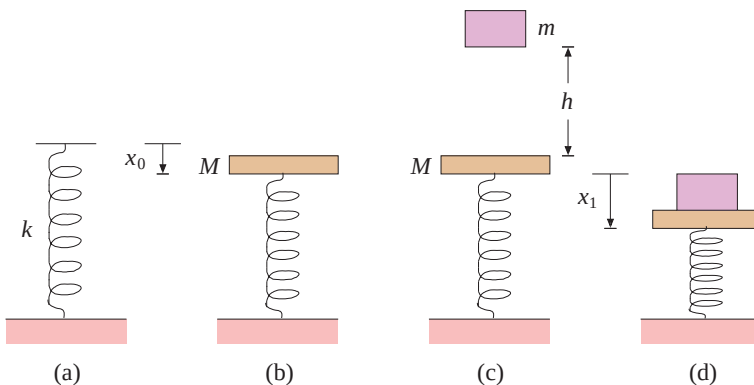
Recomenació: Si s'utilitza el concepte de massa reduïda i els resultats del problema 1.10 sobre els dos cossos, la resolució és molt ràpida.

Resp.: $x_{\max} = v\sqrt{\frac{m}{2k}}$

Problema 1.54. Molla col·locada verticalment

Tenim una molla llarga vertical sobre el terra —com es mostra a la figura 1.81 (a). Li col·loquem lentament un plat de massa $M = 1$ kg i s'ensorra $x_0 = 50$ cm —v. figura 1.81 (b). Des de $h = 2$ m d'altura deixem caure sobre el plat un cos molt tou i plàstic de $m = 2$ kg —v. figura 1.81 (c).

Figura 1.81





a) Esbrineu el màxim desplaçament x_1 que farà el plat des de la seva posició inicial —v. figura 1.81 (d) i b) les màximes velocitat i acceleració que assolirà el conjunt durant les seves oscil·lacions posteriors.

Resp.: $x_1 = x_0 \frac{m}{M} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2M}{m+M} \frac{h}{x_0}} \right) = 2,92 \text{ m},$

b) $v_{\max} = 4,90 \text{ m/s}, \quad a_{\max} = 12,5 \text{ m/s}^2$

Problema 1.55. Energia del sistema molla-massa-politja

- a) En el sistema oscil·lant de l'exemple 1.4, expresseu la conservació de l'energia del sistema en funció només del desplaçament x cap avall de la massa m penjada.
b) Derivant aquesta expressió, esbrineu el període del sistema.

Resp.: a) $E = -mgx + \frac{1}{2}k(x+x_0)^2 + \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$, amb $kx_0 = mg$

b) $T = 2\pi\sqrt{\frac{2m+M}{2k}}$

Problema 1.56. Barra oscil·lant sobre semicilindre

Com s'indica a la figura 1.82, sobre un semicilindre de radi R col·loquem una barra homogènia prima, de longitud L , de manera que es mantingui en equilibri. Quin és el període de les oscil·lacions que farà si desplaçem molt lleugerament un dels seus extrems més amunt o més avall de la posició d'equilibri? Suposeu que la barra rodola sense lliscar per sobre del cilindre.

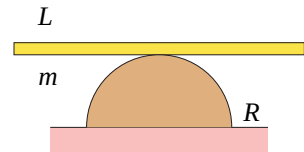


Figura 1.82

Resp.: $T = 2\pi\sqrt{\frac{L^2}{12Rg}}$

Problema 1.57. Condició per a un equilibri estable

De forma semblant al problema 1.56, un ortoedre de longitud L i altura h es col·loca en equilibri sobre un semicilindre de radi R —v. figura 1.83 (a) i nota del problema 1.45.

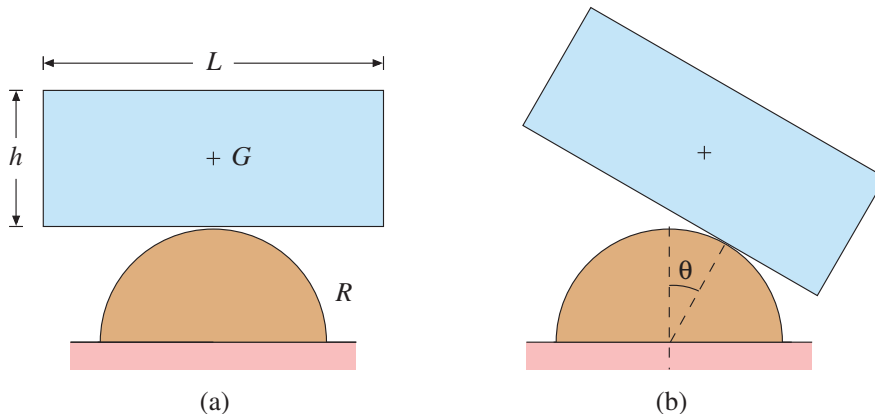


Figura 1.83



- a) Trobeu l'expressió de l'energia potencial de l'ortodre en funció de l'angle girat θ —v. figura 1.83 (b)— i demostreu que, aproximadament, per a angles petits, la posició d'equilibri és estable si se satisfà: $h < 2R$.
- b) Aplicant els mètodes de la conservació de l'energia i de les forces i moments, trobeu l'equació del moviment de l'ortodre i el període de les oscil·lacions petites.

Resp.: a) $U(\theta) = mg \left(R + \frac{h}{2} \right) \cos \theta + mgR\theta \sin \theta \approx U_0 + \frac{1}{2}mg \left(R - \frac{h}{2} \right) \theta^2,$

b) $T = 2\pi \sqrt{\frac{L^2 + 4h^2}{6(2R - h)g}}$

Problema 1.58. Energia potencial d'una partícula, 1

L'energia potencial d'una partícula que efectua un MHS ve donada per l'expressió

$$U(x) = a + b(x - c)^2$$

on $a = -9$ J, $b = 2$ N/m i $c = 3$ m. Si la partícula té una massa $m = 0,10$ kg i una energia total de $E = 23$ J, quant val l'amplitud A del seu moviment? I quant el seu període?

Resp.: $A = \sqrt{\frac{E - a}{b}} = 4$ m; $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{2b}} = 0,993$ s

Problema 1.59. Energia potencial d'una partícula, 2

L'energia potencial que té una partícula que es mou sobre l'eix x ve donada per l'expressió —tot en unitats SI—

$$U(x) = x^3 - 5x + 1$$

- a) Comenceu fent una gràfica de $U(x)$ i esbrineu quins punts de l'eix x són d'equilibri. Demostreu que un d'aquests punts és d'equilibri estable.
- b) Si la partícula té una massa de $m = 0,10$ kg, quin serà el seu període si oscil·la amb poca amplitud al voltant del punt d'equilibri estable?

Resp.: a) Punts d'equilibri: $x = \pm \sqrt{5/3}$; estable: $x = +\sqrt{5/3}$;

b) $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{2\sqrt{15}}} = 0,7139$ s

Problema 1.60. Oscil·lacions en molècules diatòmiques

Si r és la distància de separació entre els dos àtoms d'algunes molècules diatòmiques, i a i b dues constants positives, la força interactiva entre elles ve donada, aproximadament, per

$$F(r) = -\frac{a}{r^2} + \frac{b}{r^3} \quad (1)$$

- a) Feu, qualitativament, una gràfica de $F(r)$ i de la energia potencial corresponent. Presenta algun mínim aquesta última? En cas afirmatiu, quin significat físic té això?



- b) Demostreu que, per a distàncies petites al voltant del punt d'equilibri estable, l'expressió (1) es pot aproximar per una força restauradora lineal i que, si μ és la massa reduïda dels àtoms, la freqüència angular de les seves oscil·lacions petites val:

$$\omega = a^2 / \sqrt{\mu b^3}$$

Problema 1.61. Electrò entre dos ions positius

Siguin dos ions positius, de càrrega $+Ze$, pràcticament puntuals, immòbils, separats la distància a —v. figura 1.84.

- a) En algún punt de la recta mediatriu que els separa, a una petita distància x del centre O , hi ha un electrò de massa m i càrrega $-e$ que es desplaçant sobre la mediatriu amb una velocitat també petita. Aplicant-hi la *lleï de Coulomb*, trobeu l'equació diferencial del moviment i, fent-hi una primera aproximació lineal, comproveu que el moviment que farà l'electrò serà un MHS al voltant del punt central O . Quina freqüència tindrà el MHS?

Apliqueu el resultat al cas: $a = 2 \times 10^{-10}$ m, $Z = 30$, amb $e = 1,60 \times 10^{-19}$ C, $m = 0,911 \times 10^{-30}$ kg, $1/4\pi\epsilon_0 = 9,00 \times 10^9$ N·m²/C².

- b) Esbrineu, també, quina és la força F_y , en una primera aproximació lineal, a la qual està sotmès l'electrò si ara és sobre l'eix dels dos ions a una petita distància y de O . Comproveu que la força no és restauradora i que, al contrari d'abans, per al moviment en la direcció y dels dos ions el punt central O és un punt d'equilibri inestable, com també que, en termes de l'energia potencial electrostàtica $U(x,y)$ —de la qual deriva la força de Coulomb—, el punt central O és, matemàticament, un punt de sella.

Resp.: a) $\omega^2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{16Ze^2}{ma^3}$, $f = 1,96 \times 10^{16}$ Hz, b) $F_y = + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{32Ze^2}{a^3} y$

Problema 1.62. Oscil·lacions adiabàtiques

Un gas ideal està contingut en un tub cilíndric rígid que té un extrem tancat per un pistó mòbil de massa m el qual, ajustant perfectament, pot pujar i baixar lliurement pel tub sense cap mena de fricció —v. figura 1.85. La secció recta del tub és S i, en l'estat

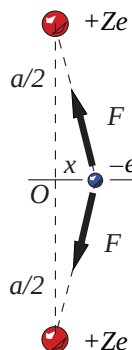


Figura 1.84

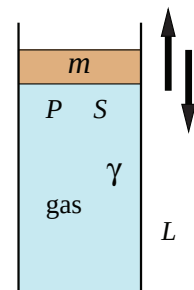


Figura 1.85



d'equilibri, estant el gas a la pressió P_0 , la longitud de tub que conté gas és L_0 . Demostreu que, pertorbant lleugerament la posició d'aquest pistó, per l'acció de la compressió i l'expansió adiabàtiques del gas, comença a efectuar un MHS al voltant de la posició d'equilibri amb una freqüència angular donada per

$$\omega = \sqrt{\gamma \frac{P_0 S}{m L_0}}$$

essent γ el coeficient adiabàtic del gas.

Nota: Recordeu que el producte PV^γ es manté constant al llarg d'un *procés adiabàtic*, essent γ una constant que només depèn del nombre d'àtoms que tingui la molècula del gas; per exemple, $\gamma = 1,40$ si el gas és diatòmic.



→ 2



Oscil·lacions amortides

2.1. Força de fricció viscosa

Sabem que, quan un cos es mou en el si d'un fluid viscos, experimenta una força de fricció que depèn, d'una manera complicada, de la velocitat del cos i de la naturalesa i les condicions del fluid. Però s'ha observat que, si la velocitat del cos respecte del fluid és petita, la força de fricció F_f és, aproximadament, proporcional a la seva velocitat relativa $\mathbf{v}$

$$\mathbf{F}_f = -b\mathbf{v} \quad (2.1)$$

essent b una magnitud positiva anomenada *constant d'amortiment*, que depèn de la forma i de la secció recta que presenti el cos, com també del coeficient de viscositat del fluid. El signe menys ens indica que la força de fricció sempre s'oposarà a la velocitat i, en conseqüència, al moviment; aquesta força sempre farà un treball negatiu.

En els moviments oscil·latoris típics, per exemple, el d'un pèndol, mai no s'assoleixen velocitats grans. Així doncs, l'expressió (2.1) és sovint una bona indicació de la força de fricció que experimenta una partícula que està oscil·lant; en aquest cas, la fricció amb el medi que l'envolta en va reduint l'energia i l'amplitud d'oscil·lació.

Un *amortidor* és, en general, un dispositiu que té la funció de reduir l'amplitud de les oscil·lacions d'un sistema. Els amortidors hidràulics es basen en la fricció que experimenta un objecte que es mou a través d'un fluid viscos.

Esquemàticament, es representen com a la figura 2.1. En aquests amortidors se satisfà bastant bé l'expressió (2.1).

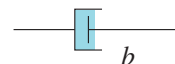


Figura 2.1

Vegem ara un exemple bastant il·lustratiu dels efectes que fa una força com la (2.1).

Exemple 2.1. Fricció viscosa

A una partícula de massa m se li comunica una velocitat inicial v_0 a $t = 0$. A causa de la fricció amb el medi que l'envolta la partícula experimenta la força $F = -bv$. Sense considerar cap altra força sobre la partícula, estudeu-ne el moviment.

**Solució**

Aplicant la segona llei de Newton, tenim $-bv = ma$. I d'aquí $-bv = m \frac{dv}{dt}$, que podem reescriure en variables separades com a

$$\frac{dv}{v} = -\frac{b}{m} dt$$

Integrant, tenim

$$\int \frac{dv}{v} = -\frac{b}{m} \int dt \quad \text{d'on} \quad \ln v = -\frac{b}{m} t + C \quad (1)$$

on C és la constant d'integració que depèn de les condicions inicials. En el nostre cas, en què a $t = 0$, $v = v_0$, d'(1) trobem $\ln v_0 = C$, d'on resulta

$$\ln v - \ln v_0 = \ln \frac{v}{v_0} = -\frac{b}{m} t$$

Notem que $\tau = m/b$ té dimensions de temps i s'anomena *constant de temps* o *temps de relaxació*.

Aplicant exponencials a l'expressió anterior obtenim

$$v(t) = v_0 e^{-t/\tau}, \quad \text{amb } \tau = m/b \quad (2)$$

És a dir, la velocitat de la partícula va decreixent exponencialment amb el temps.

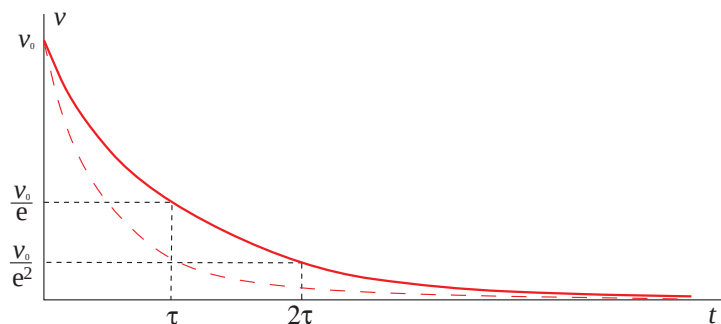
Si ara prenem el temps t en "unitats τ ", tenim que, després que passin:

- $t = 1\tau$, la velocitat s'ha reduït a 0,367 vegades v_0 ;
- $t = 2\tau$, la velocitat s'ha reduït a 0,135 v_0 ;
- $t = 5\tau$, la velocitat s'ha reduït a 0,007 v_0 ;
- $t = 7\tau$, la velocitat s'ha reduït a 0,0009 v_0 .

Per a la majoria dels efectes pràctics, podem considerar que després que passin entre 5 i 7 vegades τ la partícula s'ha aturat i el moviment s'ha extingit.

A la figura 2.2 s'ha representat la funció $v(t)$ de (2) per a un determinat valor de b , és a dir, τ —línia contínua— i per al doble de b , és a dir, la meitat de la τ anterior —línia discontinua.

Figura 2.2





Vegem ara com varia l'energia cinètica K de la partícula. Per (2), tenim que

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 e^{-2bt/m} \quad (3)$$

d'on veiem que l'energia es redueix amb una constant de temps, $m/2b$, que és la meitat que la constant corresponent de la velocitat. Calculem ara la potència P_D amb que es dissipa l'energia cinètica. Per (3) i (2), tindrem

$$P_D = \frac{dK}{dt} = -bv_0^2 e^{-2bt/m} = -bv^2$$

és a dir, $P_D = F_f \cdot v$.

Finalment, el lector pot integrar de nou (2), $x = \int v(t) dt$, per trobar la posició $x(t)$. Si pren la condició inicial que $x = 0$ a $t = 0$ li sortirà

$$x(t) = v_0 \frac{m}{b} \left(1 - e^{-bt/m} \right)$$

Observeu que, si bé la velocitat no arriba mai a ser estrictament zero, l'espai recorregut x no supera la distància $v_0 m/b = v_0 \tau$.

Els creixements o decreixements exponencials similars als d'aquest exemple són molt corrents en tots els camps de la física. L'amplitud i l'energia d'un oscil·lador harmònic amortit —l'objecte d'estudi d'aquest capítol— són un cas interessant d'aquests decreixements. D'altres importants són, per exemple, el decaïment radioactiu o la descàrrega d'un condensador a través d'una resistència —el circuit RC a l'apèndix §D.

2.2. Oscil·lacions harmòniques amortides

Tal com es presenta en aquesta figura 2.3, considerem un cos o partícula de massa m , sotmesa a una força recuperadora lineal $-kx$ per l'acció d'una molla, i a una força de fricció viscosa $-bv$ per l'acció d'un amortidor. Aplicant-hi la segona llei de Newton trobem l'equació de moviment

$$-kx - bv = ma$$

o, el que és igual,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \left(\frac{b}{m}\right) \frac{dx}{dt} + \left(\frac{k}{m}\right)x = 0 \quad (2.2)$$

equació diferencial semblant a la (1.9) del MHS però una mica més complexa pel fet que incorpora el terme dissipatiu.

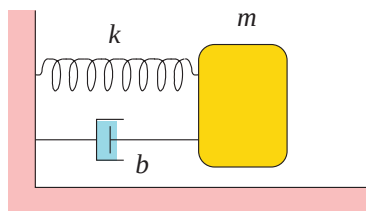


Figura 2.3

Matemàticament, aquesta és una *equació diferencial ordinària de segon ordre, lineal, a coeficients constants i homogènia* —v. apèndix B. S'anomena així perquè:

- les derivades que apareixen són ordinàries —i no parcials—;
- la derivada d'ordre més alt és de segon ordre;



- la funció $x(t)$ i les seves derivades estan elevades a la potència 1;
- els coeficients que multipliquen les derivades i la pròpia funció són constants;
- i és *homogènia* perquè la suma de la funció i les derivades pels seus coeficients respectius és igual a zero.

Si introduïm les noves constants ω_0 i β , *frequència angular pròpia o natural* de l'oscil·lador i *paràmetre d'amortiment*, respectivament, definits per

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \beta = \frac{b}{2m} \quad (2.3)$$

podem tornar a escriure l'equació anterior com a

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \quad (2.4)$$

La funció $x(t)$, solució de l'equació (2.4), que a més compleixi les dues condicions inicials de la partícula, en descriurà el moviment.

Però, quina mena de moviment farà la partícula?

Abans de recórrer a les matemàtiques perquè ens resolguin l'equació (2.4), pensem en termes físics. Si l'amortiment és molt petit, el moviment ha de ser molt semblant al MHS, i si, d'altra banda, la força recuperadora és molt petita, el moviment ha de ser molt semblant al que hem vist a l'exemple 2.1 anterior. És a dir,

- si $\beta \rightarrow 0$ $x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi)$
 $v(t) = -\omega_0 A \sin(\omega_0 t + \phi)$
- si $\omega_0 \rightarrow 0$ $v(t) = v_0 e^{-t/\tau}$

És bastant raonable suposar que el moviment de la partícula de l'equació (2.4) sigui una combinació d'aquests dos casos extrems.

Això ens suggereix que, com a possible solució d'aquesta equació diferencial, provem la funció següent

$$x(t) = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega_1 t + \phi) \quad (2.5)$$

que s'adapta bé als dos casos extrems anteriors i en què, A_0 i ϕ , com en el MHS, són dues constants que dependran de les condicions inicials, β és el paràmetre d'amortiment (2.3) i ω_1 és una nova freqüència angular que haurem de determinar. Si calculem la primera derivada de (2.4), és a dir, la velocitat, ens queda

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -A_0 e^{-\beta t} [\beta \cos(\omega_1 t + \phi) + \omega_1 \sin(\omega_1 t + \phi)] \quad (2.6)$$

i si calculem la segona derivada i substituïm tot a (2.4) i simplifiquem, arribem a

$$A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega_1 t + \phi) (\omega_0^2 - \beta^2 - \omega_1^2) = 0$$



Però aquesta expressió només pot ser zero per a qualsevol instant t si

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \quad (2.7)$$

Per tant, la funció (2.5) satisfà, efectivament, l'equació diferencial del moviment (2.4), essent ω_1 un nou paràmetre constant donat per (2.7).

Tal com veiem per l'equació (2.5), el moviment oscil·latori amortit és semblant al MHS, però en què l'amplitud no és constant sinó que va decreixent exponencialment al llarg del temps. Podem parlar, fins i tot, d'una *amplitud efectiva*, A , com el coeficient —no constant!— que multiplica la funció harmònica $\cos(\omega_1 t + \phi)$; per (2.5), és

$$A = A_0 e^{-\beta t} \quad (2.8)$$

on ara A_0 és l'amplitud inicial.

A la figura 2.4 s'han representat l'elongació $x(t)$ d'un moviment oscil·latori amortit —línia contínua— i $\pm A_0 e^{-\beta t}$, l'amplitud efectiva corresponent (2.8) —línia discontinua.

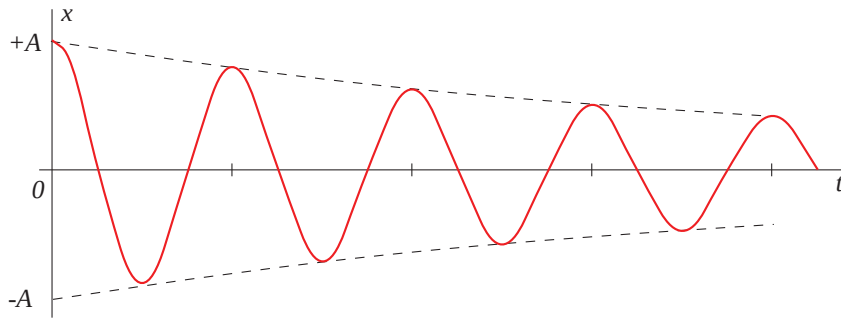


Figura 2.4

El moviment oscil·latori amortit no és un moviment periòdic en el sentit rigorós que dèiem a (1.4). Malgrat això, per (2.6) veiem que l'interval de temps entre dos màxims o mínims consecutius és constant i val

$$\Delta t_{\max} = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} \quad (2.9)$$

Com passava amb el període en el MHS, aquest $\Delta t_{\max}$ és independent de l'amplitud inicial. En aquest sentit més ampli, es pot parlar de la freqüència angular i del període de l'oscil·lació com ω_1 i $T = \Delta t_{\max} = 2\pi/\omega_1$, respectivament.

Fixem-nos, també, que la pèrdua relativa d'amplitud efectiva per període és constant. En efecte, aplicant (2.8), tenim

$$\frac{A(t) - A(t+T)}{A(t)} = 1 - \frac{A_0 e^{-\beta(t+T)}}{A_0 e^{-\beta t}} = 1 - e^{-\beta T} \quad (2.10)$$

que és independent del temps t . El producte $\beta T = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)}$ s'anomena *decrement logarítmic* de l'oscil·lació amortida.



Fixem-nos que, en general, $\omega_1 \leq \omega_0$. Però és molt útil observar que, si l'oscil·lació és poc amortida —que és com dir que $\beta T \ll 1$ —, aleshores $\beta^2 \ll \omega_0^2$ i, per tant, molt aproximadament

$$\omega_1 \approx \omega_0 \quad (2.11)$$

A continuació vegem dos exemples d'oscil·lacions amortides. En el primer, es presenta un cas en el qual comprovarem la validesa d'aquesta aproximació; en el segon, bastant amortit, ja no serà vàlida.

Exemple 2.2. Oscil·lació molt poc amortida

Si d'un oscil·lador harmònic amortit sabem que calen $n = 60$ oscil·lacions per tal que la pèrdua relativa d'amplitud efectiva sigui $1/4$, quant val la relació entre el paràmetre d'amortiment β i la freqüència pròpia ω_0 ?

Solució

Sigui T el període del moviment. Operant de forma anàloga a com s'ha fet per arribar a (2.10), per (2.8) tenim

$$\frac{1}{4} = \frac{A(t) - A(t + nT)}{A(t)} = 1 - e^{-n\beta T}$$

i d'aquí, aïllant $e^{-n\beta T}$ i aplicant logaritmes, s'arriba a

$$\beta = -\frac{1}{nT} \ln \frac{3}{4} = \left(\frac{1}{2\pi n} \ln \frac{4}{3} \right) \omega_1 = 7,631 \times 10^{-4} \omega_1$$

D'altra banda, per (2.7) tenim

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_1^2 + \beta^2} = \sqrt{1 + (7,631 \times 10^{-4})^2} \cdot \omega_1 = 1,000000291 \omega_1$$

que, a tots els efectes pràctics, és com dir $\omega_1 \approx \omega_0$. Per tant,

$$\beta = 0,000763 \omega_0 = \frac{\omega_0}{1310,6}$$

Exemple 2.3. Oscil·lació molt amortida

Sabent que la freqüència d'un oscil·lador amortit és el 95% de la seva freqüència pròpia, a quin tant per cent queda reduïda l'amplitud després de cada oscil·lació?

Solució

Sigui r el tant per 1 al qual es redueix l'amplitud efectiva transcurregut un període T . Això vol dir que

$$A(t + T) = r A(t)$$

i, per (2.8)

$$A_0 e^{\beta(t+T)} = r A_0 e^{-\beta t}$$



d'on surt

$$r = e^{-\beta T} \quad (1)$$

Però, quant val el decrement logarítmic βT ?

L'enunciat ens diu que $\alpha = \frac{\omega_1}{\omega_0} = \frac{95}{100}$. Per (2.7), tenim que

$$\omega_1^2 = \omega_0^2 - \beta^2 = \alpha^2 \omega_0^2$$

i d'aquí

$$\beta^2 = \omega_0^2 (1 - \alpha^2) = \omega_1^2 \frac{1 - \alpha^2}{\alpha^2} \quad \text{és a dir} \quad \frac{\beta}{\omega_1} = \sqrt{\frac{1 - \alpha^2}{\alpha^2}}$$

I, com que $\beta T = 2\pi \frac{\beta}{\omega_1}$, aleshores el coeficient r donat per (1) podem posar-lo com

$$r = e^{-\beta T} = e^{-2\pi \sqrt{\frac{1 - \alpha^2}{\alpha^2}}}$$

Fent les operacions, resulta: $r = 0,1268 = 12,68\%$

Fixem-nos que, amb aquesta única dada que dona l'enunciat, el 95%, podem trobar quant val el producte βT , però no podem saber ni quant val β ni quant val T per separat.

2.3. Energia de les oscil·lacions amortides

L'energia que té en qualsevol instant l'oscil·lador amortit és la inicial E_0 menys la perduda E_D deguda a la fricció. Aquesta la trobarem a partir de la potència dissipada P_D

$$P_D(t) = \mathbf{F}_f \cdot \mathbf{v} = -b \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = -b v^2$$

Així doncs, l'energia que té l'oscil·lador a l'instant t val

$$E(t) = E_0 + \int_0^t P_D(t) dt = \frac{1}{2} k A_0^2 - b \int_0^t v^2 dt$$

Substituint la velocitat $v(t)$ donada per (2.6) i desenvolupant la integral, finalment s'arriba a

$$\begin{aligned} E(t) = \frac{1}{2} m \omega_0^2 A_0^2 \left[e^{-2\beta t} + \frac{\beta \omega_1}{\omega_0^2} \left(e^{-2\beta t} \sin 2(\omega_1 t + \phi) - \sin 2\phi \right) + \right. \\ \left. + \frac{\beta^2}{\omega_0^2} \left(e^{-2\beta t} \cos 2(\omega_1 t + \phi) - \cos 2\phi \right) \right] \quad (2.12) \end{aligned}$$

Si suposem que les oscil·lacions són feblement amortides, és a dir, que $\beta \ll \omega_0 \approx \omega_1$, aleshores l'expressió (2.12) queda simplificada com

$$E(t) \approx \frac{1}{2} m \omega_0^2 A_0^2 e^{-2\beta t} = E_0 e^{-2\beta t} \quad (2.13)$$

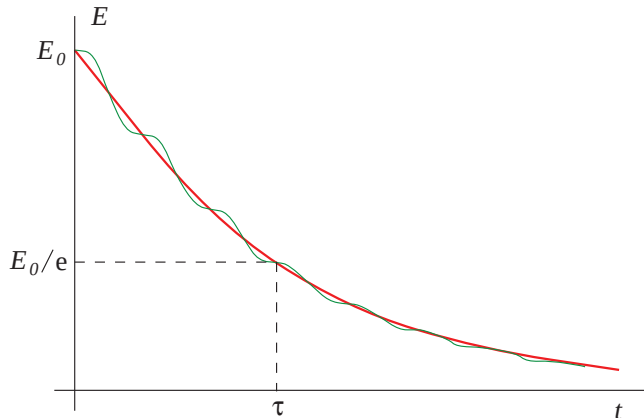
L'energia, doncs, també decau exponencialment amb el temps, però amb una *constant de temps* o *temps de relaxació* de l'energia donada per

$$\tau = \frac{1}{2\beta} \quad (2.14)$$

la meitat, doncs, que la $1/\beta$ de l'amplitud.

A la figura 2.5, s'ha representat el decreixement de l'energia d'un oscil·lador amortit segons l'expressió “exacta” (2.12) —la línia amb ondulacions— i segons l'aproximada (2.13). Aquest cas correspon a un amortiment donat per $\beta = \omega_0/15$, és a dir, $\omega_1 = 0,9978\omega_0$.

Figura 2.5



El grau d'amortiment d'un oscil·lador es caracteritza sovint per mitjà de l'anomenat *factor de qualitat* Q , que es defineix com el quocient entre l'energia emmagatzemada i la dissipada per cicle, multiplicat per 2π , és a dir,

$$Q = 2\pi \frac{(\text{energia emmagatzemada})}{(\text{energia dissipada per cicle})} \quad (2.15)$$

Si l'amortiment és petit, podem utilitzar l'expressió (2.13) per posar Q de la forma

$$Q = 2\pi \frac{E_0}{E_0 - E_0 e^{-2\beta T}} = 2\pi \frac{1}{1 - e^{-2\beta T}}$$

A més, com que $2\beta T$ és quasi zero, podem fer una aproximació lineal de l'exponencial com la (A.60); i finalment queda

$$Q \approx 2\pi \frac{1}{1 - \left(1 - 2\beta \frac{2\pi}{\omega_1}\right)} = \frac{\omega_1}{2\beta} \approx \frac{\omega_0}{2\beta} = \omega_0 \tau \quad (2.16)$$

A la secció §3.6 del capítol següent veurem per què Q rep aquest nom.



Exemple 2.4. Pèrdues relatives i factor de qualitat

En un moviment oscil·latori poc amortit: a) Quina relació hi ha entre la pèrdua relativa d'amplitud i la pèrdua relativa d'energia? b) I entre aquestes pèrdues i el factor de qualitat Q ?

Solució

a) Anomenem p la pèrdua relativa d'amplitud i q la pèrdua relativa d'energia. Com ja hem vist anteriorment, per a la primera tenim

$$p = \frac{A(t) - A(t+T)}{A(t)} = 1 - e^{-\beta T} \quad (1)$$

d'on surt: $e^{-\beta T} = 1 - p$. I per (2.13), per a l'energia trobem

$$\begin{aligned} q &= \frac{E(t) - E(t+T)}{E(t)} = 1 - \frac{E_0 e^{-2\beta(t+T)}}{E_0 e^{-2\beta t}} = \\ &= 1 - e^{-2\beta T} = 1 - \left(e^{-\beta T}\right)^2 = 1 - (1-p)^2 = 2p - p^2 \end{aligned}$$

Però, si el moviment és poc amortit, $0 \leq p \ll 1$; en aquest cas,

$$q = 2p - p^2 \approx 2p \quad (2)$$

b) Com que el moviment és poc amortit, $\omega_1 \approx \omega_0$ i el factor de qualitat val $Q = \frac{\omega_0}{2\beta}$, podem fer l'aproximació lineal d'(1): $e^{-\beta T} \approx 1 - \beta T$, per trobar

$$p = 1 - e^{-\beta T} \approx \beta T = \beta \frac{2\pi}{\omega_1} \approx \beta \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{\pi}{Q}$$

I, per (2), tenim $q = \frac{2\pi}{Q}$, que naturalment lliga amb la definició (2.15) del factor de qualitat Q .

2.4. Amortiment crític i sobreamortiment

En aquesta secció ens preguntem què passa si l'amortiment és tan gran que $\beta \geq \omega_0$?

La resposta és, com es podia esperar, que la partícula no oscil·la sinó que tendeix lentament cap al punt d'equilibri. Es poden presentar els dos casos següents.

2.4.1. Amortiment crític: $\beta = \omega_0$

En aquest cas la resolució de l'equació diferencial explica que el moviment de la partícula sigui com



$$x(t) = (A + Bt)e^{-\beta t} \quad (2.17)$$

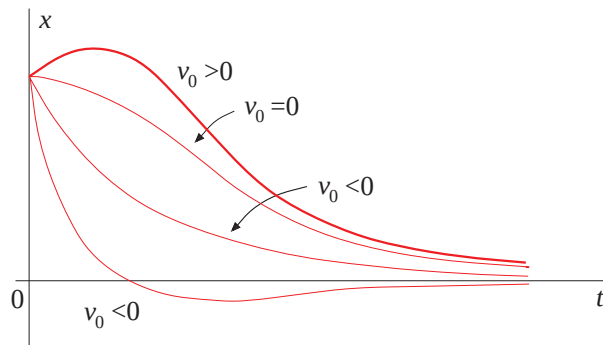
on A i B són les dues constants que depenen de les condicions inicials.

Si a $t = 0$ les condicions inicials són $x = x_0$ i $v = v_0$, llavors la funció $x(t)$ (2.17) queda com

$$x(t) = (x_0 + (v_0 + \beta x_0)t)e^{-\beta t} \quad (2.18)$$

A la figura 2.6 es mostren quatre gràfiques de $x(t)$ per a quatre velocitats inicials v_0 diferents. En tots quatre casos l'amortiment és idèntic, el crític.

Figura 2.6



2.4.2. Sobreamortiment: $\beta > \omega_0$

En aquest cas el moviment de la partícula ve donat per

$$x(t) = e^{-\beta t} (A_1 e^{-\omega'_1 t} + A_2 e^{+\omega'_1 t}) \quad (2.19)$$

on A_1 i A_2 són ara les dues constants que depenen de les condicions inicials i on $\omega'_1 = \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$.

Si tornem a fer que a $t = 0$, $x = x_0$ i $v = v_0$, trobarem que

$$A_1 = -\frac{v_0 + (\beta - \omega'_1)x_0}{2\omega'_1} \quad \text{i} \quad A_2 = \frac{v_0 + (\beta + \omega'_1)x_0}{2\omega'_1} \quad (2.20)$$

2.4.3. Propietat de l'amortiment crític

A l'hora de dissenyar un amortidor suprimidor de vibracions no volgudes cal tenir en compte la propietat següent de l'amortiment crític:

Per a unes mateixes condicions inicials d'un oscil·lador, dels tres casos possibles d'amortiment: petit ($\beta < \omega_0$), sobreamortiment ($\beta > \omega_0$) i crític ($\beta = \omega_0$), és en aquest últim que el sistema tendeix a l'equilibri més ràpidament.

L'exemple següent tracta d'una aplicació d'aquesta propietat.



Exemple 2.5. Retorn al més ràpid possible.

Un canó amb finalitats científiques, de massa total $m = 300$ kg, dispara horitzontalment projectils de massa $M = 15$ kg amb una velocitat de partida de $v_p = 1000$ m/s. El canó està unit per mitjà d'una molla i uns amortidors a una paret molt pesant i resistent —v. figura 2.7.

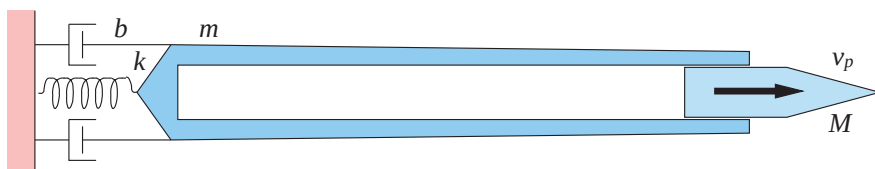


Figura 2.7

- Trobeu les constants k de la molla i b de l'amortidor equivalent per tal que el canó, després de cada tret, retorni a les proximitats del punt inicial d'equilibri al més ràpid possible sense que la força màxima que faci la molla no superi $F_{\max} = 2 \times 10^5$ N.
- Sigui τ l'interval de temps transcurregut des del tret fins que el canó assoleixi el seu desplaçament màxim $x_{\max}$. Quant valen τ i aquest màxim desplaçament? Quantes vegades τ cal esperar per tal que la velocitat del canó sigui inferior a 1 cm/s?

Solució

- Per la conservació de la quantitat de moviment, sabem que la velocitat inicial v_0 de retrocés del canó ve donada per $Mv_p + mv_0 = 0$. Prenent com a positiu el mateix sentit de l'eix x que el del moviment del projectil, resulta doncs

$$v_0 = -\frac{M}{m}v_p = -50 \text{ m/s}$$

D'altra banda, com que es tracta que el canó torni al punt d'equilibri al més ràpid possible, per la propietat enunciada a la secció §2.4.3 deduïm que el moviment ha de correspondre al cas d'amortiment crític.

La posició x del canó, mesurada des del punt inicial d'equilibri ve donada per l'expressió general (2.18), per a la qual, en aquest problema, tenim $x_0 = 0$ i $v_0 = -50$ m/s, que quedarà, doncs, com

$$x(t) = v_0 t e^{-\beta t} \quad (1)$$

Fixem-nos que la posició x del canó és inicialment zero, es fa negativa a causa del seu retrocés i torna, essent negativa, asimptòticament cap a zero. Al final de l'exemple està representada $x(t)$.

La força que fa la molla ve donada per $F_m = -kx$. Consegüentment, la força serà màxima quan el canó assoleixi la màxima separació de la posició d'equilibri. Derivant l'expressió (1) n'obtenim la velocitat v

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = v_0(1 - \beta t) e^{-\beta t} \quad (2)$$



que es fa zero, a part de $t \rightarrow \infty$, a $t_x = 1/\beta = \tau$. En aquest instant, $t = t_x$, el desplaçament del canó és, en valor absolut, màxim, i per (1) val

$$x_{\max} = \frac{v_0}{\beta e} \quad (3)$$

i la força màxima feta per la molla, en valor absolt, $F_{\max} = kx_{\max}$. Com que, en cas d'amortiment crític, tenim que $\beta = \omega_0$ i que $k = m\omega_0^2$, llavors, la màxima força, per (3), pot posar-se com

$$F_{\max} = \frac{m\beta v_0}{e} \quad (4)$$

Amb $m = 300 \text{ kg}$ i $v_0 = -50 \text{ m/s}$, per (4) trobem que la força de la molla no superarà els $F_{\max} = 2 \times 10^5 \text{ N}$ si

$$\beta = \omega_0 = \frac{e F_{\max}}{m v_0} = 36,24 \text{ s}^{-1}$$

Coneixent β , tenim, doncs

$$k = m\omega_0^2 = m\beta^2 = 3,941 \times 10^5 \text{ N/m}$$

$$b = 2m\beta = 2,175 \times 10^4 \text{ kg/s}$$

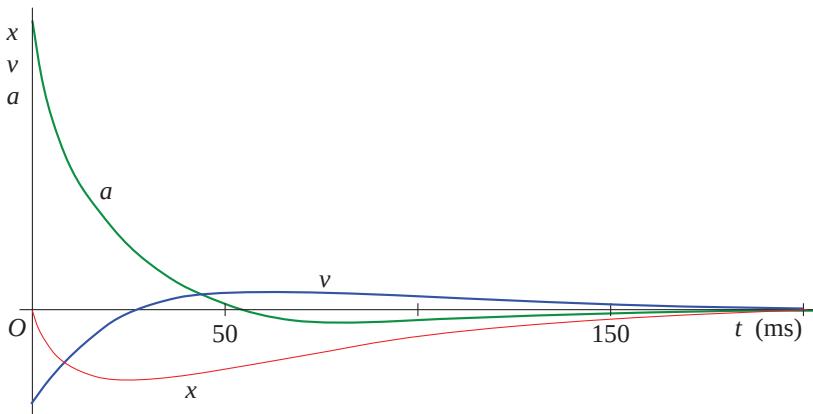
- b) Com ja hem vist, $\tau = 1/\beta = 0,02759 \text{ s}$, i el desplaçament màxim val $x_{\max} = F_{\max}/k = 0,5075 \text{ m}$, resultat que, és clar, coincideix amb el que obtindríem per (3).

Pel que fa a la velocitat, aquesta ve donada per (2). Però, si mesurem el temps en unitats de la constant de temps $\tau = 1/\beta$, com que $t = n\tau$, podem tornar a escriure l'expressió (2) de la forma

$$v = v_0(1 - n)e^{-n}$$

Si $n = 10$, resulta $v = 0,020 \text{ m/s}$ però, per $n = 11$, $v = 0,0083 < 0,01 \text{ m/s}$; en conseqüència, la velocitat del canó es fa inferior a 1 cm/s en algun moment entre $n = 10$ i $n = 11$, és a dir, entre $0,28$ i $0,30 \text{ s}$.

Figura 2.8





A la figura 2.8 s'han representat la posició x del canó, la seva velocitat v i la seva acceleració a segons les expressions (1), (2) i la següent, respectivament,

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = -v_0\beta(2 - \beta t)e^{-\beta t}$$

Observeu a la gràfica com $v = \frac{dx}{dt}$ i $a = \frac{dv}{dt}$.

2.5. Problemes resolts i problemes proposats

2.5.1. Problemes resolts

Problema 2.1. Paràmetres d'una oscil·lació amortida

A la figura 2.9 es mostra un període de la gràfica d'una oscil·lació amortida.

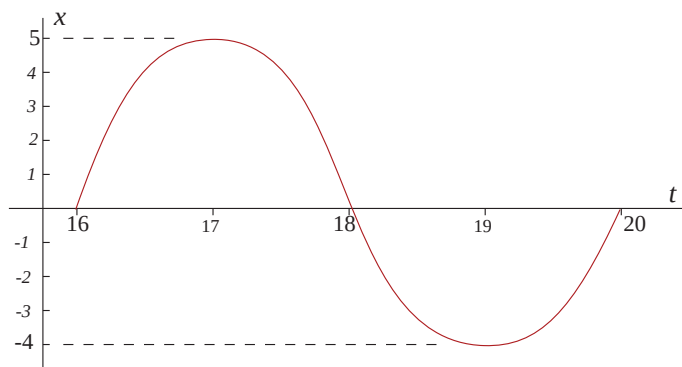


Figura 2.9

Si les dades estan en unitats SI, esbrineu l'elongació x d'aquesta oscil·lació en funció del temps.

Solució

Hem de trobar els paràmetres A_0 , β , ω_1 i ϕ de l'expressió (2.5)

$$x(t) = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega_1 t + \phi) \quad (1)$$

A la figura anterior veiem que el període de l'oscil·lació és $T = 4$ s, d'on $\omega_1 = 2\pi/4 = \pi/2$ rad/s. També veiem que, després de mig període, l'amplitud efectiva s'ha reduït de 5 a 4 m; així doncs,

$$A(t) = A_0 e^{-\beta t} \quad \text{queda com} \quad 4 = 5e^{-\beta 2}$$

d'on resulta $\beta = (-\ln 0,8)/2 = 0,112 \text{ s}^{-1}$. Consegüentment, (1) pot posar-se, en unitats SI, com

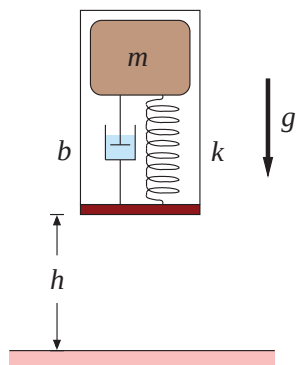
$$x(t) = 5e^{-0,112(t-17)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(t-17)\right) = 33,6e^{-0,112t} \cos\frac{\pi}{2}(t-17)$$

Problema 2.2. Oscil·lador amortit que rebota

Una massa unida a una molla i un amortidor feble —v. figura 2.10— es deixa caure des d'una determinada altura sobre un terra rígid. Esbrineu la fracció de l'altura inicial fins a la qual pujarà després de rebotar en funció del factor de qualitat Q de l'oscil·lador.

Solució

Figura 2.10



L'oscil·lador, en caiguda lliure, arriba a terra amb una velocitat $v_0 = \sqrt{2gh}$. Prenguem com a $x = 0$ la posició de la massa a l'instant del xoc, $t = 0$, a partir del qual comença a comprimir-se la molla. A continuació, a $t > 0$, es continua compriment fins arribar al màxim, que és a l'instant $t = T/4$, on T és el període —desconegut— de l'oscil·lador. Després es comença a expandir la molla i la massa m comença a pujar. Si el sentit creixent de les x és cap avall, a partir de (2.5) veiem que l'elongació x de la massa en funció del temps t , $t \geq 0$, ve donada per

$$x(t) = Ae^{-\beta t} \sin \omega_1 t, \quad \text{amb} \quad T = 2\pi/\omega_1$$

d'on, derivant, trobem

$$v(t) = Ae^{-\beta t} (-\beta \sin \omega_1 t + \omega_1 \cos \omega_1 t)$$

D'aquesta última trobem que

$$v_0 = v(0) = \omega_1 A \quad (1)$$

D'altra banda, la massa —i el sistema— començarà a aixecar-se del terra a l'instant $t = T/2$ en què la molla tingui la longitud natural i ja no faci cap força sobre la massa. A partir d'aquest moment, el sistema pujarà per inèrcia fins a una determinada altura màxima h' , donada per la conservació $mgh' = mv_1^2/2$, on la velocitat v_1 és la que té la massa quan torna a passar per $x = 0$, és a dir,

$$v_1 = -v(T/2) = +\omega_1 Ae^{-\beta T/2} = v_0 e^{-\beta T/2} \quad (2)$$

I d'(1) i (2) tenim

$$\frac{h'}{h} = \frac{v_1^2}{v_0^2} = e^{-\beta T} = e^{-\beta 2\pi/\omega_1}$$

Com que l'amortidor és feble $\omega_1 \approx \omega_0$ i $Q = \omega_0/2\beta$, d'on trobem

$$\frac{h'}{h} \approx e^{-\pi 2\beta/\omega_0} = e^{-\pi/Q}$$

Problema 2.3. Cinemàtica d'un moviment oscil·latori amortit

Una partícula de massa $m = 100$ g està unida a una molla de constant de força $k = 0,4$ N/cm. La partícula es troba en el si d'un líquid viscos, de manera que el coeficient de fricció entre la partícula i el líquid val $b = 2,4$ kg/s. La partícula es troba



inicialment en el punt d'equilibri quan rep un cop que li comunica una velocitat de 1600 cm/s. Esbrineu:

- La posició de la partícula en funció del temps.
- La distància al punt d'equilibri més gran que assolirà la partícula després de $t = 0,5$ s.
- El temps que ha de transcórrer per tal que l'amplitud de les oscil·lacions amortides es redueixi al 2% de la màxima separació entre la partícula i el punt d'equilibri.

Solució

- El moviment serà una oscil·lació amortida com la (2.5)

$$x(t) = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega_1 t + \phi) \quad (1)$$

on A_0 i ϕ depenen de les condicions inicials, i β i ω_1 , de les condicions de l'oscil·lador. Comencem trobant aquests últims. Posant molta cura en les unitats, tenim

$$\beta = \frac{b}{2m} = 12 \text{ s}^{-1}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 20 \text{ rad/s}, \quad \omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = 16 \text{ rad/s} \quad (2)$$

Com veiem, β és comparable a ω_0 i, en conseqüència, ω_1 és molt diferent de ω_0 . Hem d'anar amb molt de compte ull perquè aquestes oscil·lacions són bastant amortides i no se'n poden fer aproximacions.

Troblem ara A_0 i ϕ . De (1) la velocitat de la partícula ve donada per

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -A_0 e^{-\beta t} [\beta \cos(\omega_1 t + \phi) + \omega_1 \sin(\omega_1 t + \phi)] \quad (3)$$

Amb les condicions inicials que ens diu l'enunciat i les igualtats (1) i (2), tindrem per a x i v

- si $t = 0$, aleshores: $0 = A_0 \cos \phi$, d'on surt que $\phi = \pm \frac{\pi}{2}$.
- si $t = 0$, aleshores: $v_0 = 1600 = -A_0 (\beta \cos \phi + \omega_1 \sin \phi) = -A_0 \omega_1 \sin \phi$.
Si volem una A_0 positiva hem de prendre, doncs, $\phi = -\frac{\pi}{2}$ i, per tant: $A_0 = +\frac{v_0}{\omega_1} = 100 \text{ cm}$.

I l'elongació (1) quedarà, finalment, en cm i s, com

$$x(t) = 100 e^{-12t} \cos(16t - \frac{\pi}{2}) = 100 e^{-12t} \sin(16t) \quad (4)$$

- Per trobar la distància màxima que demana l'enunciat igualem a zero la primera derivada de $x(t)$, és a dir, la velocitat (3). Amb $\phi = -\pi/2$ i (2), trobem

$$\tan \omega_1 t_e = \frac{\omega_1}{\beta} \quad \text{és a dir} \quad \tan 16t_e = \frac{4}{3}$$



d'on

$$16t_e = 0,9272952 \text{ rad} \pm n \cdot \pi, \quad \text{on} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

i t_e , en s

$$t_e = 0,05795595 \pm n \cdot 0,19634954 \quad (5)$$

Tots aquests valors de t_e donen els extrems —màxims i mínims— relatius de la funció (4), un per a cada valor de n :

- $n = 0 \implies t_0 = 0,057956 < 0,5 \text{ s}$, el primer màxim;
- $n = 1 \implies t_1 = 0,254305 < 0,5 \text{ s}$, el primer mínim;
- $n = 2 \implies t_2 = 0,450655 < 0,5 \text{ s}$, el segon màxim;
- $n = 3 \implies t_3 = 0,647005 > 0,5 \text{ s}$, el segon mínim;
- $n = 4 \implies t_4 = 0,843354 > 0,5 \text{ s}$, el tercer màxim, i primer màxim amb $t > 0,5 \text{ s}$.

A aquest últim valor t_4 li correspon, per (4), una x màxim relatiu, de $x_4 = 3,220 \times 10^{-3} \text{ cm}$, que, com veiem, és una distància molt petita.

- c) Pel que hem fet fins ara, podem observar que la màxima separació entre la partícula i el punt d'equilibri es correspon a l'instant $t_e = t_0$ que, substituït a (4), dóna $x_{\max} = 39,907 \text{ cm}$. Així doncs, el temps que ens demanen, t_c , ha de satisfer la relació següent

$$A(t_c) = \frac{2}{100} x_{\max}, \quad \text{és a dir,} \quad 100e^{-12t_c} = \frac{2}{100} 39,907$$

d'on resulta que es requereix el temps $t_c = 0,40255 \text{ s}$.

Problema 2.4. Oscil·lació amortida i constant d'amortiment

Sabent que, en una oscil·lació amortida, l'amplitud efectiva de l'oscil·lació número 5 és 1,40 vegades l'amplitud de l'oscil·lació número 12, esbrineu:

- a) Quin tant per cent del seu valor crític val la constant b ?
- b) Quin tant per cent de l'energia es dissipa entre una oscil·lació i la següent?

Solució

- a) Per (2.8) veiem que l'enunciat ens diu que

$$A_0 e^{-\beta \cdot 5T} = 1,40 A_0 e^{-\beta \cdot 12T}$$

d'on, simplificant, tenim

$$\beta = \frac{\ln 1,4}{7T} \quad (1)$$

D'altra banda, sabem que $\beta = \frac{b}{2m}$ i que el valor crític de β , β_{crit} , s'assoleix quan $\beta = \beta_{\text{crit}} = \omega_0$. Per les dades de l'enunciat, ja veiem que es tracta d'un cas d'amortiment



feble. En aquest cas, el període T és pràcticament igual al de les oscil·lacions sense amortir, $T_0 = 2\pi/\omega_0$. Així, per (1), tindrem

$$\frac{b}{b_{crit}} = \frac{\beta}{\beta_{crit}} = \frac{\ln 1,4}{7T\omega_0} \approx \frac{\ln 1,4}{7 \cdot 2\pi} = 0,007650$$

és a dir, un 0,7650%.

- b) Quant a l'energia, sabem que, en cas d'amortiment feble, aquesta disminueix al llarg del temps en la forma $E = E_0 e^{-2\beta t}$. Per tant, al llarg d'un període se'n perd, doncs, la quantitat relativa

$$q = \frac{E_0 - E_0 e^{-2\beta T}}{E_0} = 1 - e^{-2\beta T} \quad (2)$$

I, per (1), tenim que

$$2\beta T = 2 \times \frac{\ln 1,4}{7} = 0,09613$$

que, substituït a (2), resulta $q = 0,09166 = 9,166\%$.

Problema 2.5. Oscil·lació angular amortida d'una barra

Una barra homogènia de massa m pot girar en un pla vertical al voltant del seu extrem inferior O —v. figura 2.11. L'altre extrem de la barra està lligat per una molla de constant k i un amortidor de constant b .

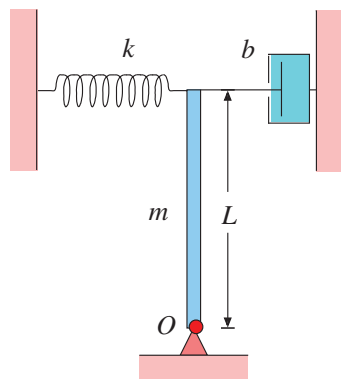


Figura 2.11

- Trobeu l'equació diferencial del moviment de rotació de la barra per a angles petits al voltant de la posició d'equilibri indicada a la figura. Quant ha de valer, com a mínim, k per tal que, retirada la barra de la seva posició vertical d'equilibri, aquesta retorni cap a ella?
- Quin valor màxim pot tenir b si el moviment ha de ser oscil·latori?
- Si $m = 0,50$ kg, $k = 60$ N/m, $b = 0,15$ kg/s, i $L = 1$ m, esbrineu el període del moviment i trobeu a quin tant per cent queda reduïda l'amplitud després de cada període.

**Solució**

Aquest problema es pot resoldre a partir de les forces i els moments o per consideracions sobre l'energia... que en aquest sistema no es conserva! Anem per aquesta segona via.

- a) Imaginem la barra girada un angle θ respecte de la vertical —la posició d'equilibri— i movent-se a la velocitat angular $d\theta/dt$. Anomenem x l'allargament de la molla en aquesta posició. Aleshores, si prenem l'origen d'energia potencial gravitatòria en el punt O , l'energia potencial del sistema en un instant qualsevol val

$$U = mg\frac{L}{2}\cos\theta + \frac{1}{2}kx^2 \quad (1)$$

expressió que, considerant angles petits, podem simplificar. Normalment, aproximem el cosinus de θ com $\cos\theta \approx 1$ però aquí ens convé fer una aproximació de segon ordre del desenvolupament de Maclaurin —v. (A.55)— com $\cos\theta \approx 1 - \theta^2/2$. La raó és que a (1) sumem el $\cos\theta$ a un $x^2 = L^2\sin^2\theta \approx L^2\theta^2$ i que, quan se sumen dues expressions aproximades ambdues han de tenir el mateix ordre d'aproximació perquè, en cas contrari, la d'ordre més gran desapareix. Així, si fem

$$\cos\theta \approx 1 - \frac{1}{2}\theta^2 \quad x = L\sin\theta \approx L\theta$$

queda, doncs, com

$$U = \frac{1}{2}mgL + \left(\frac{1}{2}kL^2 - \frac{1}{4}mgL\right)\theta^2 \quad (2)$$

L'energia cinètica de rotació de la barra val $K = \frac{1}{2}I_0\omega^2$, on $I_0 = \frac{1}{3}mL^2$ és el moment d'inèrcia de la barra de longitud L i massa m , i ω és la velocitat angular. És a dir,

$$K = \frac{1}{2}\frac{1}{3}mL^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \quad (3)$$

Si no hi hagués friccions, es conservaria l'energia i la suma de (2) més (3) seria una constant. Però aquest no és el cas. Ara s'està dissipant energia a l'amortidor a un ritme donat per la potència $P_{dis} = -bv \cdot v = -bv^2$, essent v la velocitat a l'amortidor, és a dir, $v = Ld\theta/dt$ i, per tant,

$$P_{dis} = \mathbf{F}_f \cdot \mathbf{v} = -bv \cdot v = -bv^2 = -bL^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \quad (4)$$

Així doncs, tenim

$$E = U + K \quad \text{i} \quad \frac{dE}{dt} = P_{dis}$$

que, per (2), (3) i (4), queda com

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2}mgL - \frac{1}{4}mgL\theta^2 + \frac{1}{2}kL^2\theta^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{3}mL^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \right\} = -bL^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$



Derivant i simplificant la $Ld\theta/dt$ comuna, queda

$$\left(kL - \frac{1}{2}mg\right)\theta + \frac{1}{3}mL\frac{d^2\theta}{dt^2} = -bL\frac{d\theta}{dt}$$

i, reordenant,

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{3b}{m}\frac{d\theta}{dt} + \left(\frac{3k}{m} - \frac{3g}{2L}\right)\theta = 0 \quad (5)$$

que és l'equació diferencial de les oscil·lacions petites de la barra. Comparant aquesta equació (5) amb la familiar d'un sistema molla-massa-amortidor

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2x = 0 \quad (6)$$

veiem que a (5) tenim

$$\beta = \frac{3b}{2m} \quad \omega_0^2 = \frac{3k}{m} - \frac{3g}{2L} \quad (7)$$

Com que ω_0^2 ha de ser positiva, llavors, perquè hi hagi oscil·lacions, la molla ha de tenir una constant k mínima donada per

$$k > \frac{mg}{2L}$$

- b) Com que la freqüència angular del moviment és $\omega_1^2 = \omega_0^2 - \beta^2$, per tal que el moviment de la barra sigui oscil·latori, β^2 ha de ser més petit que la ω_0^2 , d'on, per (7), resulta la condició

$$b^2 < \frac{4mk}{3} - \frac{2m^2g}{3L}$$

- c) Substituint els valors indicats a l'enunciat, s'obté

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{3k}{m} - \frac{3g}{2L}} = 18,58 \text{ rad/s} \quad \beta = \frac{3b}{2m} = 0,45 \text{ s}^{-1}$$

Com que $\beta^2 \ll \omega_0^2$, es tracta d'un cas d'amortiment molt petit. El període valdrà

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} \approx \frac{2\pi}{\omega_0} = 0,3381 \text{ s}$$

L'amplitud de les oscil·lacions disminueix al ritme donat per $A = A_0 e^{-\beta t}$, essent A , en aquest cas, l'amplitud angular. Després de cada període, l'amplitud es reduirà, doncs, al tant per cent

$$\frac{A_{n+1}}{A_n} = e^{-\beta T} = 0,8588 = 85,88\%$$

i, per tant, se'n perderà el 14,12%.

**Problema 2.6. Amortiment crític i sobreamortiment**

Demostreu que, per a les mateixes condicions inicials, $x_0 = 0$ i $v_0 > 0$, una partícula de massa m sotmesa a la força recuperadora $F = -kx$ i a la de fricció $F' = -bv$ torna cap al punt d'equilibri més ràpidament si es troba en l'amortiment crític que si està en el sobreamortiment.

Solució

Seguim la notació habitual amb els paràmetres $\beta = b/2m$, $\omega_0^2 = k/m$ i $\omega_1' = \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$. Amb les condicions inicials de l'enunciat, els moviments de la partícula en cas d'amortiment crític —en què $\beta = \omega_0$ — i en cas de moviment sobreamortit —si $\beta > \omega_0$ — vénen donats, com és fàcil de comprovar, per les dues expressions

$$x_{crit} = v_0 t e^{-\beta t}, \quad x_{sobr} = \frac{v_0}{2\omega_1'} e^{-\beta t} (e^{+\omega_1' t} - e^{-\omega_1' t}) \quad (1)$$

Comprovem ara que, per a qualsevol instant de temps $t > 0$, $x_{crit} < x_{sobr}$. Per (1), es tracta de demostrar que, per a qualsevol $t > 0$,

$$v_0 t e^{-\beta t} < \frac{v_0}{2\omega_1'} e^{-\beta t} (e^{+\omega_1' t} - e^{-\omega_1' t})$$

és a dir, que

$$\omega_1' t < \frac{e^{+\omega_1' t} - e^{-\omega_1' t}}{2}$$

Per a això fem el desenvolupament de Taylor/Maclaurin de les dues exponencials del membre de la dreta. Per (A.57), tenim que

$$e^z \approx 1 + z + \frac{1}{2!} z^2 + \frac{1}{3!} z^3 + \dots$$

Si prenem $z = \pm \omega_1' t$, tindrem, efectivament,

$$\omega_1' t < \frac{1}{2} \left(2\omega_1' t + \frac{2\omega_1'^3 t^3}{3!} + \dots \right) = \omega_1' t + \frac{\omega_1'^3 t^3}{6} + \frac{\omega_1'^5 t^5}{120} + \dots$$

cosa que confirma, la hipòtesi $x_{crit} < x_{sobr}$ i l'enunciat del problema.

Problema 2.7. Mínima oscil·lació possible

Volem construir una plataforma de massa $m = 60$ kg, disposada sobre quatre molles iguals i amb un amortidor —v. figura 2.12 en què es mostra el sistema de perfil. Damunt de la plataforma hi ha un paquet de massa $M = 80$ kg, i tot el conjunt està en equilibri i en repòs.

- Esbrineu quant han de valer les constants k de les molles i la constant b de l'amortidor per tal que, després de retirar el paquet de la plataforma, aquesta torni a la situació de repòs al més ràpid possible en una nova posició d'equilibri situada a la distància $d = 0,10$ m per damunt de l'actual.
- Estudieu la cinemàtica de la plataforma i contesteu les preguntes següents.



- Quant valdrà la màxima velocitat assolida per la plataforma?
- I l'acceleració màxima i la mínima?
- Traspasarà la plataforma el nou punt d'equilibri?
- Quant de temps tardarà la plataforma, molt aproximadament, a completar el 99% del seu recorregut total?

Solució

- a) Inicialment, la plataforma està en un punt d'equilibri, però després de retirar-ne el paquet, la posició d'equilibri s'ha desplaçat la distància Δx per damunt de l'anterior. Aquesta nova posició d'equilibri queda determinada per $4k\Delta x = Mg$. Per requeriment de l'enunciat, si $\Delta x = d$, aleshores, tenim

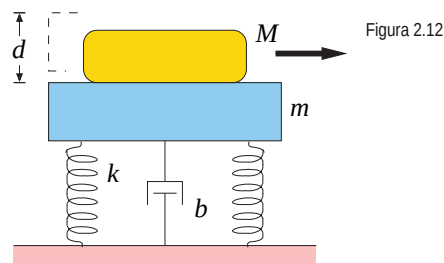
$$k = \frac{Mg}{4d} = 1962 \text{ N/m} \quad (1)$$

D'altra banda, dels tres casos possibles d'amortiment —subamortit, crític i sobreamortit—, sabem que el cas d'amortiment crític és el que tendeix més ràpidament a la situació d'equilibri. Per tant, el paràmetre d'amortiment β que hem de triar per a l'amortidor és igual a la freqüència angular pròpia del sistema plataforma-4 molles, $\omega_0 = \sqrt{4k/m}$, i per (1) és

$$\beta = \omega_0 = \sqrt{\frac{4k}{m}} = 11,44 \text{ s}^{-1} \quad (2)$$

La constant b de l'amortidor ha de valer, doncs,

$$b = 2m\beta = 1372 \text{ kg/s}$$



- b) Com sabem, l'equació del moviment d'una partícula sotmesa a una força recuperadora lineal i una força de fricció viscosa en cas d'amortiment crític ve donada per l'expressió general

$$x(t) = (x_0 + (v_0 + \beta x_0)t) e^{-\beta t}$$

en què x_0 i v_0 són, naturalment, la posició i la velocitat inicials. En el nostre cas, $v_0 = 0$, per la qual cosa

$$x(t) = x_0(1 + \beta t) e^{-\beta t} \quad (3)$$

amb el valor de β donat a (2). Si prenem un eix x vertical dirigit cap amunt i amb l'origen a la nova posició d'equilibri, aleshores tenim $x_0 = -d = -0,10 \text{ m}$.

Derivant (3), obtenim la velocitat

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -x_0\beta^2 t e^{-\beta t} \quad (4)$$

I, tornant a derivar, l'acceleració

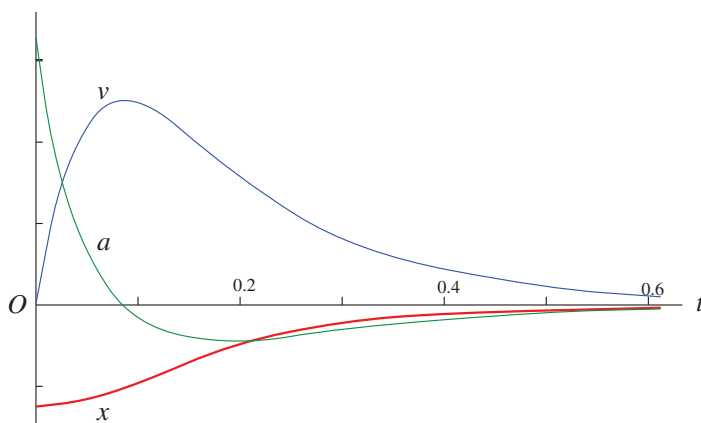
$$a(t) = \frac{dv}{dt} = -x_0\beta^2(1 - \beta t) e^{-\beta t} \quad (5)$$

Prenent $\tau = 1/\beta = 0,08744$ s, com a unitat de temps, veiem que l'acceleració es fa zero a l'instant $t_v = \tau$ i, per tant, en aquest instant, la velocitat és màxima o mínima. Si la velocitat inicial i la final són zero i no hi ha més extrems, podem creure, sense necessitar més derivades, que aquest cas correspon a un màxim. Per (4), valdrà

$$v_{max} = v(\tau) = -\frac{x_0\beta}{e} = 0,421 \text{ m/s}$$

A les gràfiques de la figura 2.13, s'han representat l'elongació x —multiplicada per 50—, la velocitat v —multiplicada per 25— i l'acceleració a de la plataforma, segons les expressions (3), (4) i (5), respectivament.

Figura 2.13



Pel que fa a l'acceleració, fixem-nos que, a $t = 0$, la velocitat és zero i, en conseqüència, l'única força que actua sobre la plataforma és deguda a les quatre molles comprimides. Veiem que l'acceleració, en aquest instant, val, per (5)

$$a(0) = -x_0\beta^2 = 13,08 \text{ m/s}^2 \quad (6)$$

que, com es podia esperar, correspon a la calculada a partir de la compressió de les molles aplicant-hi els resultats (1) o (2)

$$a(0) = \frac{F}{m} = -\frac{4kd}{m} = 13,08 \text{ m/s}^2$$

També, per a t molt gran, la plataforma estarà pràcticament aturada en el nou punt d'equilibri, $x = 0$, on la força i l'acceleració seran nul·les. D'altra banda, derivant (5) i igualant a zero, obtenim

$$\frac{da}{dt} = x_0\beta^3(2 - \beta t)e^{-\beta t} = 0 \quad (7)$$

d'on resulta que un extrem local de l'acceleració s'aconsegueix a l'instant $t_a = 2\tau$ i que, substituït a (5), dóna

$$a(2\tau) = +\frac{x_0\beta^2}{e^2} = -1,770 \text{ m/s}^2 \quad (8)$$



negativa! Com que no hi ha més extrems locals —a part de $t \rightarrow \infty$ — arribem a la conclusió que l'acceleració $a(t)$ donada per (5), per a $t \geq 0$, té:

- un màxim absolut —no local— a $t = 0$, resultat (6);
- un mínim local a $t = 2\tau$, resultat (8);
- un mínim absolut a $t \rightarrow \infty$, on $a = 0$.

Per (3), veiem que $x(t)$ tindrà sempre el mateix signe de x_0 , és a dir, que la plataforma no passarà del punt d'equilibri; de fet, cal un temps infinit perquè hi arribi. Per trobar l'instant t_1 en què la seva posició sigui, per exemple, com demana l'enunciat, un 1% de la inicial, plantejem, per (3), l'equació corresponent

$$\frac{x_0}{100} = x_0(1 + \beta t_1) e^{-\beta t_1}$$

o l'equivalent

$$z = \frac{1}{100} e^z - 1 \quad (9)$$

on z és l'instant t_1 , però mesurat en unitats de τ : $z = \beta t_1 = t_1/\tau$.

L'equació (9) no es pot resoldre analíticament —és una equació transcendent—, però podem trobar un valor numèric tan aproximat de z com vulguem seguint un mètode semblant al del problema 1.25:

- (1) Donem, a ull, un primer valor a z , que anomenem z_{don} .
- (2) Substituïm z_{don} a l'expressió de la dreta de (9) i n'obtenim z_{calc} .
- (3) Si $z_{calc} > z_{don}$ agafem una nova z , més petita; si $z_{calc} < z_{don}$, n'agafem una de més gran. Tornem al pas (1) i així anem repetint el cicle fins que, molt aproximadament, $z_{calc} = z_{don}$.

Començant amb un valor, per exemple, de $z = 5$, resulta, 0,48; hem de prendre una z més gran: per a $z = 6$, resulta 3,0; per a $z = 7$, resulta 9,97; així doncs, z està entre 6 i 7; per a $z = 6,5$, resulta 5,6; per a $z = 6,6$, etc. Fent-ho així, trobem ràpidament $6,638 < z < 6,639$, és a dir, que $t_1 \approx 6,638\tau = 0,580$ s.

2.5.2. Problemes proposats

Problema 2.8. Caiguda amb fricció viscosa $F = -bv$

Estudieu la caiguda d'una gota de pluja. Per fer-ho suposeu una gota de massa m , sotmesa al seu propi pes mg i a una força de fricció viscosa $F_f = -bv$, deguda a l'aire. Si inicialment la gota està en repòs, esbrineu el creixement de la velocitat en funció del temps. Feu una representació gràfica d'aquesta funció. Quant val la velocitat límit de la gota?

Resp.: $v(t) = \frac{mg}{b} (1 - e^{-bt/m})$, $v_{lim} = \frac{mg}{b}$

**Problema 2.9. Oscil·lacions harmòniques amortides**

Com ja sabem, l'elongació del moviment oscil·latori amortit d'una partícula ve donada per l'expressió

$$x(t) = A e^{-\beta t} \cos(\omega_1 t + \phi)$$

- Trobeu els valors de A i ϕ en funció de la posició i la velocitat inicials, x_0 i v_0 , respectivament.
- Quant han de valer les constants A_v i ϕ_v per tal de poder posar la velocitat de la partícula anterior de la forma

$$v(t) = -A_v e^{-\beta t} \sin(\omega_1 t + \phi + \phi_v)$$

Resp.: a) $A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0 + \beta x_0}{\omega_1}\right)^2}$, $\tan \phi = \frac{v_0 + \beta x_0}{\omega_1 x_0}$, b) $A_v = \omega_0 A$, $\tan \phi_v = \frac{\beta}{\omega_1}$

Problema 2.10. Oscil·lació amortida d'una molla fixada al sostre

Una molla de constant k té un extrem fixat al sostre i l'altre lliure. En aquesta disposició vertical a l'instant $t = 0$, se li penja a l'extrem lliure un pes mg i es deixa que la molla s'allargui i comenci a oscil·lar. Si l'oscil·lació és amortida, caracteritzada per una constant b , estudeu el moviment vertical del pes penjat.

Resp.: $x(t) = \frac{mg}{k} \left[1 - e^{-\beta t} \left(\cos \omega_1 t + \frac{\beta}{\omega_1} \sin \omega_1 t \right) \right]$, amb $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m} - \beta^2}$, $\beta = \frac{b}{2m}$

Problema 2.11. Oscil·lació molt amortida

Un moviment harmònic amortit té per expressió, en unitats SI

$$x(t) = 0,40 e^{-3t/2} \sin \pi(t + 1/3)$$

- Quin tant per cent del seu valor crític val la constant d'amortiment? Es pot considerar aquesta oscil·lació molt poc amortida?
- Quant de temps Δt caldrà esperar, aproximadament, per tal que l'energia mitjana del moviment es redueixi al 5% de la inicial?
- En quin instant $t_{min} > 0$ l'elongació de l'oscil·lador es fa mínima i quant val?

Resp.: a) 43,1%, no; b) $\Delta t = 0,999$ s,

c) $t_{min} = 1,02$ s, $x_{min} = -7,76$ cm

Problema 2.12. Oscil·lacions molt poc amortides

El moviment harmònic amortit d'una partícula té per expressió, en unitats SI,

$$x(t) = 0,05 e^{-0,5t} \cos 40\pi t$$



- a) Es tracta d'una oscil·lació molt poc amortida? Quant val el factor de qualitat Q ?
 b) Quantes oscil·lacions N_A caldrà esperar per tal que l'amplitud del moviment es redueixi a $1/1000$ de la inicial? I quantes N_E pel que fa a l'energia?
 c) Si la massa de la partícula és $m = 0,10$ kg, quant valen les constants de força i d'amortiment, k i b , respectivament?

Resp.: a) Sí; $Q = 126$, b) $N_A = 276$, $t_A = 13,8$ s, $N_E = N_A/2$, $t_E = 6,91$ s,
 c) $k = 1,58$ kN/m, $b = 0,100$ kg/s

Problema 2.13. Oscil·lador molt poc amortit

La constant de força de la molla a la qual està unida una partícula de massa $m = 10$ g val $k = 15$ N/cm. Si un cop està oscil·lant la partícula perd un 20% de l'energia cada 30 oscil·lacions,

- a) Quin tant per cent d'energia haurà perdut després de fer 90 oscil·lacions?
 b) Quant val el factor de qualitat Q d'aquest oscil·lador?
 c) Quant val el seu coeficient d'amortiment?
 d) Quant hauria de valer el coeficient d'amortiment b per tal que la partícula estigués en amortiment crític?

Resp.: a) $\frac{61}{125} \times 100 = 48,8\%$, b) $Q = \frac{60\pi}{\ln(5/4)} = 845$, c) $b = 4,59 \times 10^{-3}$ kg/s,
 d) $b_{crit} = 7,75$ kg/s

Problema 2.14. Període d'un oscil·lador amortit

Un pèndol simple que en el buit té un període T_0 es col·loca en un medi resistent i s'observa que a cada oscil·lació l'amplitud es redueix a la meitat. Quant val el nou període?

Resp.: $T = T_0 \sqrt{1 + \left(\frac{\ln 2}{2\pi}\right)^2} = 1,0061 T_0$

Problema 2.15. Donar corda a un rellotge de pèndol

El pèndol d'un rellotge és equivalent a un pèndol simple de longitud $L = 1$ m, amb una llentilla de massa $m = 1$ kg. Amb diferents experiments es comprova que l'amplitud de l'oscil·lació es redueix de $A_0 = 5$ cm a $A_N = 2$ cm després de $N = 26$ oscil·lacions. Per tal que el pèndol mantingui l'amplitud inicial A_0 , se li subministra energia per mitjà d'una massa $M = 3$ kg que penja d'una corda vinculada al pèndol i es deixa que vagi caient lentament. Si, per l'espai que ocupa la caixa del rellotge, la massa M només pot baixar un desnivell $h = 120$ cm, cada quant de temps s'ha d'anar aixecant la massa M al rellotge?

Resp.: Amb $T = 2,006$ s, $\Delta t = \frac{2LMNTh}{m(A_0^2 - A_N^2)} = 1,78 \times 10^5$ s = 49,5 hores;
 cada dos dies.

**Problema 2.16. Potència perduda per un oscil·lador amortit**

Comproveu que la potència mitjana dissipada en un oscil·lador harmònic poc amortit ve donada per l'expressió

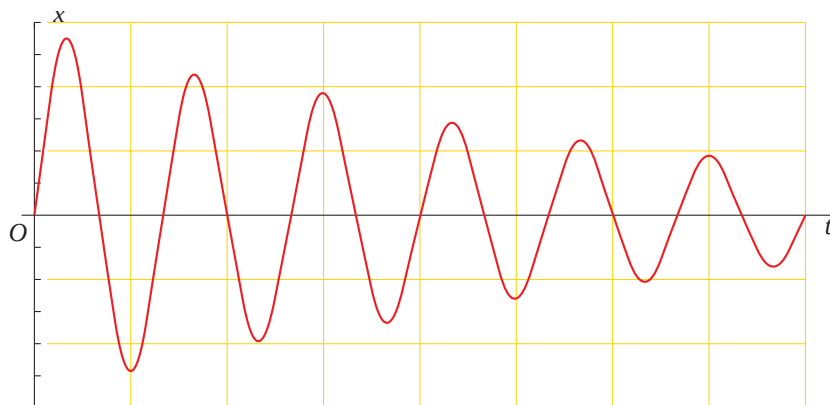
$$\langle P \rangle = \frac{E}{\tau}$$

on E és l'energia que té a cada instant i $\tau = 1/(2\beta)$ la constant de temps de l'energia.

Problema 2.17. Oscil·lació amortida i factor de qualitat

Una partícula fa el moviment harmònic amortit, que s'indica a la gràfica de la figura 2.14.

Figura 2.14



A partir d'ella, podríeu dir quant val, aproximadament, el factor de qualitat de l'oscil·lador?

Resp.: Entre 14 i 15.

Problema 2.18. Energia d'una oscil·lació poc amortida

Una massa de $m = 0,50$ kg, unida a una molla de constant elàstica $k = 250$ N/m, oscil·la amb una amplitud inicial de $A_0 = 6$ cm.

- Trobeu l'energia de l'oscil·lador a l'instant inicial.
- Esbrineu el valor del paràmetre d'amortiment de l'oscil·lador sabent que en cada cicle es dissipa un 1,0% de l'energia. Quin període té?
- Quantes oscil·lacions caldrà esperar fins que l'energia quedi reduïda a menys de 0,10 J?

Resp.: a) $E = 0,450$ J, b) $\beta = 0,0179$ s⁻¹, $T = 0,281$ s, c) $N = 150$

Problema 2.19. Oscil·lacions d'una molla vertical, amb amortiment

Tornem a considerar el sistema oscil·lant del problema 1.34. Realment, la fricció del cos amb l'aire provoca un petit amortiment tal que, després de 20 oscil·lacions, l'amplitud s'ha reduït de 29,4 cm a 10 cm.



- a) Quin tant per cent de l'amplitud es perd després de cada període? I quin tant per cent de l'energia?
- b) Esbrineu el temps que cal esperar per tal que l'energia que quedi sigui 1/4 de la inicial?
- c) Quant val el factor de qualitat d'aquest oscil·lador?

Resp.: a) $p = 5,24\%$, $q = 2p - p^2 \approx 2p = 10,2\%$, b) $\Delta t = \frac{\ln 4}{2\beta} = 11,4 \text{ s}$, c) $Q = 58,3$

Problema 2.20. Pèndol simple amb molla i amortiment

Considerem un pèndol simple, consistent en una barra molt prima de massa negligible, penjada del sostre per un extrem —el centre de suspensió— i amb una partícula de massa m a l'extrem lliure. La barra està lligada a una paret a través d'una molla horitzontal de constant k . La molla té la longitud justa tal que, quan la barra està vertical, la molla no fa cap força. La longitud de la barra és r , mentre que la molla està agafada en un punt de la barra que està a la distància s del centre de suspensió. Si, a més, quan oscil·la aquest sistema la partícula està sotmesa a una força de fricció viscosa de constant b :

- a) Trobeu la freqüència angular ω_1 d'oscil·lació del sistema.
- b) Si $r = 1 \text{ m}$, $s = 0,8 \text{ m}$, $k = 3 \text{ N/m}$, $m = 0,2 \text{ kg}$, $b = 0,6 \text{ kg/s}$ i $g = 9,81 \text{ m/s}^2$, es pot considerar aquest sistema poc amortit? Quant val, en aquest cas, ω_0/ω_1 ?
- c) Després de cada oscil·lació, a quin tant per cent queda reduïda l'amplitud?

Resp.: a) $\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{r} + \frac{ks^2}{mr^2} - \frac{b^2}{4m^2}}$, b) No. $\omega_0/\omega_1 = 1,0635$, c) 10,28%.

Problema 2.21. Sistemes oscil·lants amortits

Siguin els dos sistemes oscil·lants independents (a) i (b) representats a la figura 2.15. En els dos casos, les barres, de massa negligible, horitzontals en la situació d'equilibri i amb un pes puntual mg en un dels extrems, poden fer petites oscil·lacions al voltant de l'altre, l'articulació O . Els amortidors proporcionen una força de fricció viscosa de constant d'amortiment b . Esbrineu fins a quin valor màxim de b ambdós sistemes encara oscil·laran.

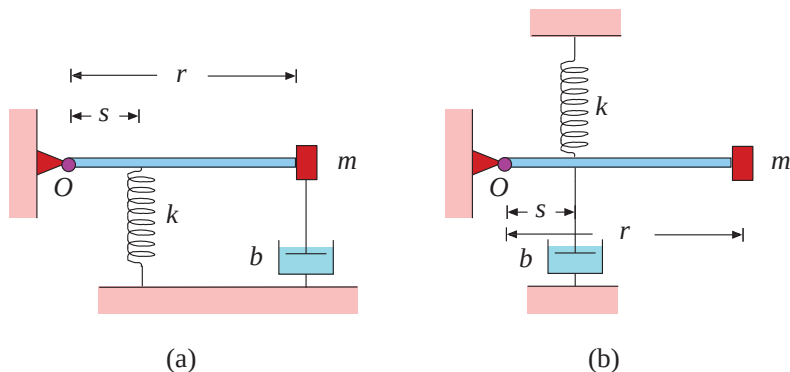


Figura 2.15

Resp.: a) $b_{crit} = \frac{2s}{r}\sqrt{mk}$, b) $b_{crit} = \frac{2r}{s}\sqrt{mk}$

Problema 2.22. Cinemàtica del sobreamortiment

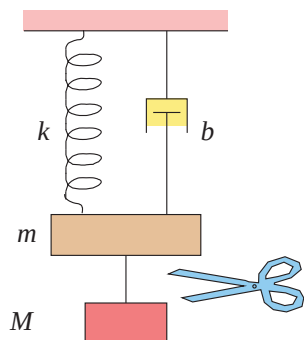
Sigui una partícula de massa m unida a una molla de constant k i a un amortidor d'una constant b tan gran que estiguem en el cas de sobreamortiment. I siguin x_0 i v_0 la posició i la velocitat inicials de la partícula, respectivament. Demostreu que:

- si $x_0 \neq 0$, $v_0 = 0$, la partícula no arriba mai a la posició d'equilibri;
- si $x_0 = 0$, $v_0 > 0$, la partícula tampoc no arriba mai a la posició d'equilibri;
- si $x_0 = 0$, $v_0 < 0$, la partícula només passa una vegada per la posició d'equilibri.

Problema 2.23. Moviment sobreamortit

Com s'aprecia a la figura 2.16, dues masses m i M estan penjades en equilibri d'una molla vertical de constant k . Paral·lelament a la molla, hi ha un amortidor hidràulic de constant d'amortiment b . Si a l'instant $t = 0$ traiem del sistema la massa M , immediatament el cos de massa m es posarà en moviment.

Figura 2.16



Si $m = 4$ kg, $M = 5$ kg, $k = 100$ N/m, $b = 48$ kg/s:

- Farà un moviment oscil·latori? Per què?
- Expresseu el desplaçament de la massa m respecte de la posició d'equilibri en funció del temps.

Resp.: a) No, ja que $b > b_{crit} = 2\sqrt{mk} = 40$ kg/s,

$$b) x(t) = A_1 e^{-(\beta + \omega'_1)t} + A_2 e^{-(\beta - \omega'_1)t}, \text{ amb}$$

$$A_1 = \frac{Mg}{2k} \left(1 - \frac{\beta}{\omega'_1} \right) = -0,1984 \text{ m},$$

$$A_2 = \frac{Mg}{2k} \left(1 + \frac{\beta}{\omega'_1} \right) = 0,6889 \text{ m}, \quad \omega'_1 = \sqrt{11} \text{ s}^{-1}, \quad \beta = 6 \text{ s}^{-1}$$



→ 3



Oscil·lacions forçades

3.1. Oscil·lacions forçades

En els oscil·ladors reals sempre hi ha una dissipació contínua d'energia al medi resistent exterior deguda a les friccions. Això fa que tant l'energia com l'amplitud de les oscil·lacions vagin disminuint fins a acabar desapareixent. Per tant, si volem mantenir un sistema oscil·lant amb una amplitud i una energia constants, hem de proporcionar-li energia per compensar la que el sistema perd. Això s'acostuma a fer amb algun mecanisme exterior a l'oscil·lador, que actua sobre aquest aplicant-hi una *força impulsora* externa. Un exemple molt conegut és el cas d'un nen en un gronxador, que podem mantenir-lo en un moviment oscil·latori indefinidament si li anem donant embranzides de forma adient. Aquesta classe de moviments o dinàmismes s'anomenen *oscil·lacions forçades* i són l'objecte d'estudi, en un nivell més elemental, en aquest capítol i, en una forma més general, als capítols 5 i 6.

Considerem un oscil·lador constituït per una partícula de massa m que es pot desplaçar al llarg de l'eix x , lligada a una molla de constant de força k i a un amortidor de constant b —v. figura 3.1. Per mitjà d'un determinat mecanisme s'aplica a la partícula, a més, una força impulsora externa $F(t)$ de la mateixa direcció que l'eix x .

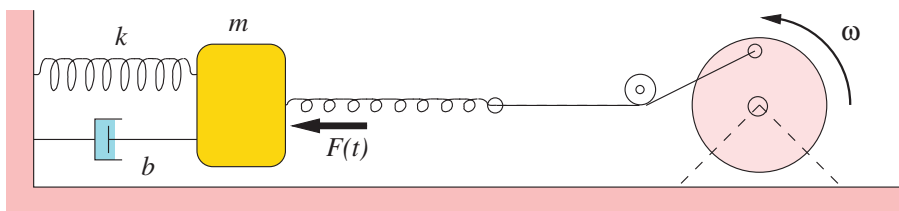


Figura 3.1

Si bé, a la pràctica, forces depenents del temps n'hi ha de molts tipus, és particularment interessant estudiar el cas en què $F(t)$ sigui una força harmònica o sinusoidal de la forma

$$F(t) = F_0 \cos \omega t \quad (3.1)$$

Les raons d'aquesta elecció són ben senzilles.



- L'estudi del moviment de la partícula sota aquesta força és, matemàticament, bastant simple i, per tant, serveix molt bé per entendre la resposta de la partícula a forces periòdiques més complexes.
- Les forces harmòniques com (3.1) són molt corrents en física i enginyeria. En veurem, entre d'altres, a la secció §3.4 dedicada a les màquines giratòries.
- Com veurem al capítol 5, qualsevol força periòdica és, en el fons, una suma de forces sinusoidals com ara la (3.1) —*sèrie de Fourier*. Això, amb el principi de superposició que veurem al capítol 4, vol dir que, si coneixem la resposta matemàtica a la força (3.1), podrem conèixer el comportament sota l'acció de qualsevol altra força periòdica.

Així doncs, aplicant la segona llei de Newton a la partícula, tindrem

$$-kx - bv + F_0 \cos \omega t = ma$$

és a dir,

$$-kx - b \frac{dx}{dt} + F_0 \cos \omega t = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

i, reordenant, obtenim

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \left(\frac{b}{m}\right) \frac{dx}{dt} + \left(\frac{k}{m}\right)x = \left(\frac{F_0}{m}\right) \cos \omega t \quad (3.2)$$

Aquesta igualtat és una *equació diferencial ordinària, lineal i a coeficients constants* com ho era la (2.2) de les oscil·lacions amortides, però, a diferència d'aquella, aquesta és *no homogènia*, que vol dir que el membre de la dreta no és zero.

Si seguim la notació del capítol anterior en què

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad \beta = \frac{b}{2m} \quad (3.3)$$

aleshores, l'equació diferencial anterior queda com

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \left(\frac{F_0}{m}\right) \cos \omega t \quad (3.4)$$

Però, quina és la solució d'aquesta equació diferencial i quina mena de moviment farà la partícula?

A la secció següent es responen aquestes dues qüestions.

3.2. Estats transitori i estacionari

Sabem que la solució general $x(t)$ de les equacions diferencials lineals *no homogènies* com la (3.4) és la suma de dues funcions —v. apèndix §B.3—

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) \quad (3.5)$$

que són



- $x_h(t)$ és la *solució general* de l'equació diferencial homogènia associada a la (3.4)

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \quad (3.6)$$

- $x_p(t)$ és la *solució particular* de tota l'equació no homogènia (3.4).

- a) La solució general de l'equació homogènia (3.6) és, precisament, el moviment oscil·latori harmònic amortit, que hem vist al capítol anterior. Així doncs, si, com és habitual en aquests casos, l'amortiment no supera el valor crític, és a dir, si $\beta < \omega_0$, llavors tenim

$$x_h(t) = A_h e^{-\beta t} \cos(\omega_1 t + \phi_h) \quad (3.7)$$

on $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$, i A_h i ϕ_h són les dues constants arbitràries que depenen de les condicions inicials.

- b) Com a solució particular $x_p(t)$ a l'equació (3.4), provarem una funció com

$$x_p(t) = A \cos(\omega t - \delta) \quad (3.8)$$

en què ω és la freqüència de la força impulsora externa (3.1) i A i δ són dues noves constants que determinarem a continuació, imposant la condició que la funció (3.8) satisfaci l'equació diferencial (3.4).

La funció $x_p(t)$ (3.8) té com a derivades

$$\frac{dx_p}{dt} = -\omega A \sin(\omega t - \delta) \quad \text{i} \quad \frac{d^2x_p}{dt^2} = -\omega^2 A \cos(\omega t - \delta) \quad (3.9)$$

Si desenvolupem $\cos(\omega t - \delta)$ i $\sin(\omega t - \delta)$ i substituïm a l'equació diferencial (3.4), tenim

$$\begin{aligned} \sin \omega t &\cdot A \{ (\omega_0^2 - \omega^2) \sin \delta - 2\beta \omega \cos \delta \} + \\ \cos \omega t &\cdot \left\{ A(\omega_0^2 - \omega^2) \cos \delta + 2A\beta \omega \sin \delta - \frac{F_0}{m} \right\} = 0 \end{aligned} \quad (3.10)$$

Com s'explica a l'apèndix §B.2.1, les funcions $\cos \omega t$ i $\sin \omega t$ són *linealment independents*; per tant, els seus coeficients als interiors de les dues claus $\{ \}$ han de ser necessàriament nuls per tal que es compleixi aquesta igualtat a zero a tot instant t . En conseqüència, del terme amb $\sin \omega t$ obtenim

$$\tan \delta = \frac{2\beta \omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (3.11)$$

i, per (A.31), també

$$\cos \delta = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \delta}} = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}} \quad (3.12)$$



$$\sin \delta = \frac{\tan \delta}{\sqrt{1 + \tan^2 \delta}} = \frac{2\omega\beta}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} \quad (3.13)$$

I del terme amb $\cos \omega t$ de (3.10) i les igualtats anteriors trobem

$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} \quad (3.14)$$

I ara que ja hem vist que la funció $x_p(t)$ donada per (3.8) satisfà, efectivament, l'equació diferencial (3.4), amb els valors de A i δ anteriors, ens preguntem

Quin significat físic té tot això, és a dir, què ens està expressant físicament la funció $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$, que hem obtingut com la solució general de l'equació (3.4)?

La resposta és ben simple. La funció $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$ explica el moviment que fa la partícula des de l'instant inicial. Aquest moviment és bastant complicat ja que és la superposició d'una oscil·lació amortida, la $x_h(t)$, més una oscil·lació harmònica simple, la $x_p(t)$

$$x(t) = A_h e^{-\beta t} \cos(\omega_1 t + \phi_h) + A \cos(\omega t - \delta) \quad (3.15)$$

Però, d'altra banda, a mesura que vagi transcorrent el temps, l'amplitud efectiva de l'oscil·lació amortida, $A_h e^{-\beta t}$, anirà fent-se cada vegada més petita, fins a acabar desapareixent. Per contra, l'oscil·lació harmònica simple imposada romandrà indefinidament mentre s'hi continuï aplicant la força externa.

Podem resumir dient, doncs, que

- immediatament després de posar-se en marxa l'oscil·lador forçat, hi ha una primera etapa, l'*estat transitori*, en què el moviment de la partícula és complicat,
- però que, passat un temps, el moviment es torna un MHS de la mateixa freqüència que la força impulsora externa. Aquesta segona etapa és la que es coneix com a *estat estacionari*, per a la qual

$$x_{est}(t) = A \cos(\omega t - \delta) \quad (3.16)$$

La durada relativa de l'estat transitori depèn del grau d'amortiment de l'oscil·lador. Si aquest és gran, és a dir, si no se satisfà que $\beta \ll \omega_0$, la durada es pot considerar relativament petita i, al contrari, si hi ha poc amortiment, l'estat estacionari pot tardar relativament molt a arribar. De 3 a 7 vegades la constant de temps $\tau = 1/\beta$ dóna una idea aproximada de quant durarà l'estat transitori.

Mentre hi hagi aplicada la força impulsora externa, l'estat estacionari perdurarà. Per això, en la majoria d'aplicacions —per exemple, en el corrent elèctric altern— acostuma a tenir més interès pràctic que l'estat transitori.

Exemple 3.1. Dos estats transitoris

En unitats del SI les equacions de moviment de l'estat transitori de dos oscil·ladors forçats són



$$x(t) = 1,5 e^{-2\pi t/5} \cos\left(\frac{4\pi\sqrt{6}}{5}t\right) + \cos(6\pi t + 0,14889) \quad (1)$$

$$x(t) = 1,5 e^{-2\pi t/5} \cos\left(\frac{4\pi\sqrt{6}}{5}t\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}t - 0,10626\right) \quad (2)$$

Trobeu els paràmetres característics de les dues oscil·lacions.

Solució

- a) Comencem pel moviment expressat per (1). Comparant la funció (1) amb la solució general (3.15), veiem que

$$A_h = 1,5 \text{ m}, \quad \phi_h = 0, \quad \beta = \frac{2\pi}{5} = 1,2566 \text{ s}^{-1}, \quad \omega_1 = \frac{4\pi\sqrt{6}}{5} \text{ rad/s}$$

$$A = 1 \text{ m}, \quad \omega = 6\pi \text{ rad/s}, \quad \delta = -0,14889 \text{ rad}$$

Per (2.7), trobem $\omega_0 = \sqrt{\omega_1^2 + \beta^2} = 2\pi \text{ rad/s}$; és a dir, $\omega_0 = 5\beta = \omega/3$. I per (3.14), $F_0/m = 319,4 \text{ m/s}^2$, i, finalment, per (3.11), podem comprovar que $\delta = \arctan(-3/20) = -0,1488899 \text{ rad}$.

La constant de temps de l'oscil·lació amortida val $\tau = 1/\beta = 0,7958 \text{ s}$; per tant, l'estat transitori dura entre 3 i 5 s. Això es pot apreciar observant la gràfica de la funció oscil·lant (1) representada a la figura 3.2.

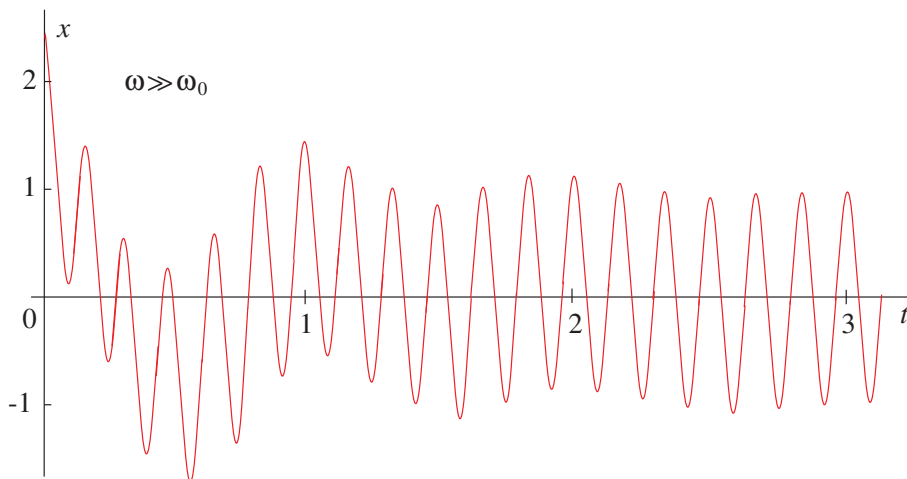


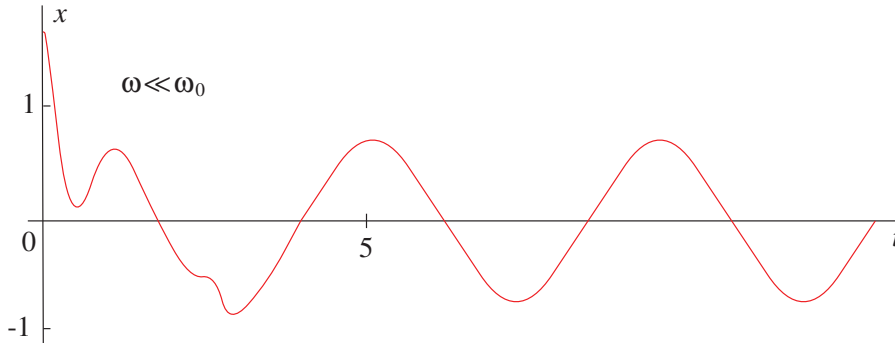
Figura 3.2

Fixem-nos que, quan $\omega \gg \omega_0$, com aproximadament en aquest cas, l'efecte que fa l'oscil·lació amortida $x_h(t)$ en l'estat transitori és fer trontollar inicialment l'oscil·lació abans que s'estabilitzi i s'entri en l'estat estacionari.

- b) La gràfica de l'oscil·lació forçada (2) s'ha representat a la figura 3.3.



Figura 3.3



De la suma de funcions (2), l'oscil·lació amortida és la mateixa que la de l'apartat (a); per tant, els valors de A_h , ϕ_h , ω_1 , ω_0 i β són els mateixos que els del cas anterior.

Pel que fa a l'oscil·lació estacionària, per comparació a (3.15), tenim

$$A = 1 \text{ m}, \quad \omega = \frac{\pi}{2} \text{ rad/s} = \frac{\omega_0}{4}$$

I, per (3.11) i (3.14), comprovem que

$$\delta = \arctan \frac{8}{75} = +0,1062649 \text{ rad}, \quad F_0/m = 37,223 \text{ m/s}^2$$

A partir de la representació gràfica anterior, veiem que, quan $\omega \ll \omega_0$, com aproximadament en aquest cas, l'efecte que fa l'oscil·lació amortida $x_h(t)$ en l'estat transitori és provocar una distorsió en les primeres oscil·lacions anteriors a l'estat estacionari.

3.3. Impedància i ressonància

3.3.1. Impedància

Com veiem per (3.14), per a uns valors fixos de F_0/m , ω_0 i β , l'amplitud A és una funció de la freqüència ω . Si definim

$$D = (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2$$

està clar que A serà màxima quan D sigui mínim; en conseqüència, si ω_2 és la freqüència angular que fa màxima l'amplitud, tenim que

$$\left(\frac{dD}{d\omega} \right)_{\omega=\omega_2} = -2(\omega_0^2 - \omega_2^2)2\omega_2 + 8\beta^2\omega_2 = 0$$

d'on resulta que

$$\omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} \quad (3.17)$$

Això sí, si l'amortiment és molt petit: $\omega_2 \approx \omega_0$.



A la figura 3.4 s'ha representat (3.14), A en funció de ω , per a diversos valors de β : $\beta = \omega_0/3$, $\beta = \omega_0/6$ i $\beta = \omega_0/15$. Fixeu-vos com els pics de les gràfiques es fan més prominents a mesura que l'amortiment es fa més petit.

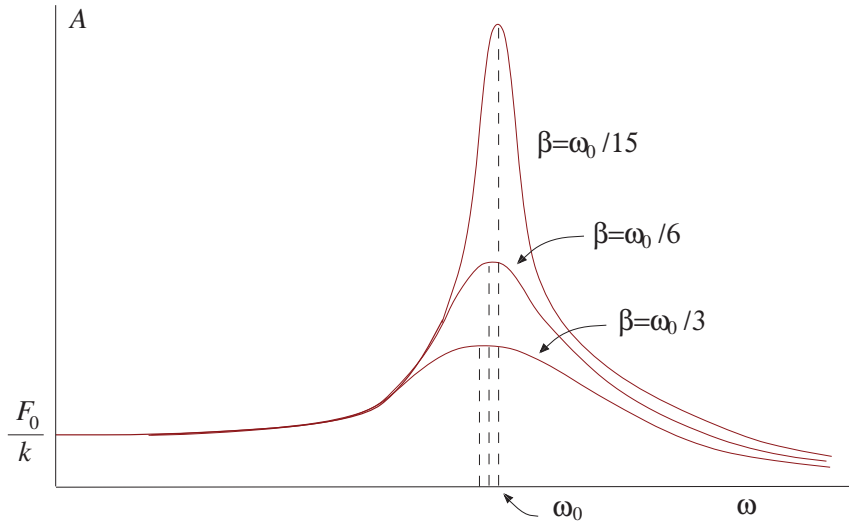


Figura 3.4

L'angle δ donat per (3.11) és el desfasament entre $F(t)$, (3.1), i la funció $x_p(t)$, (3.8); és a dir, en l'estat estacionari, δ és el *desfasament entre la força impulsora i l'elongació* de la partícula.

La velocitat de la partícula en l'estat estacionari és, simplement, la derivada de $x_p(t)$, (3.8)

$$v(t) = \frac{dx_p}{dt} = -\omega A \sin(\omega t - \delta) \quad (3.18)$$

Definim ara l'angle ε com

$$\varepsilon = \delta - \frac{\pi}{2} \quad (3.19)$$

que, per (3.11), satisfà

$$\tan \varepsilon = \tan \left(\delta - \frac{\pi}{2} \right) = \frac{1}{-\tan \delta} = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\beta\omega} \quad (3.20)$$

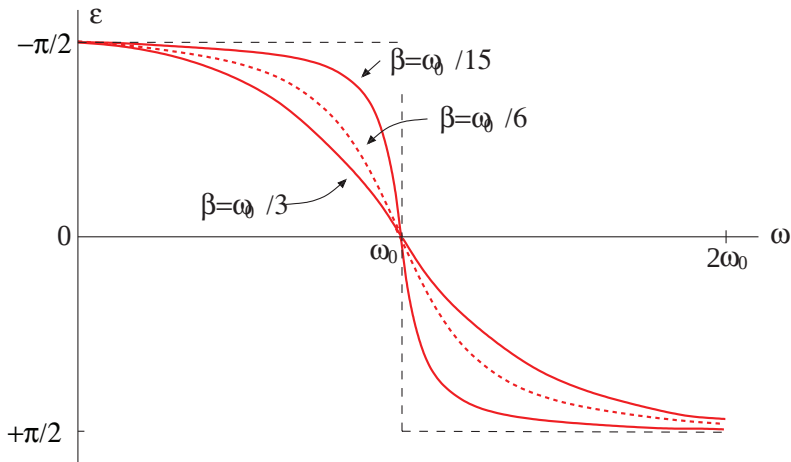
A la figura 3.5 s'ha representat ε en funció de ω per als tres valors de β : $\beta = \omega_0/3$, $\beta = \omega_0/6$ i $\beta = \omega_0/15$. Fixem-nos que ε es fa zero a $\omega = \omega_0$.

L'angle ε permet expressar la velocitat (3.18) de la forma

$$v(t) = \omega A \cos(\omega t - \varepsilon) \quad (3.21)$$

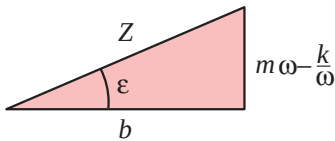
d'on veiem que l'angle ε és el *desfasament entre la força impulsora i la velocitat*. A partir d'ara, treballarem més amb l'angle ε que amb el δ .

Figura 3.5



Ara hi introduïm un nou paràmetre característic de l'oscil·lador que s'anomena *impedància*, que simbolitzem per Z i que definim com a

Figura 3.6



$$Z = m \sqrt{\left(\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega}\right)^2 + 4\beta^2} \quad (3.22)$$

expressió que, per (3.3), és equivalent a

$$Z = \sqrt{\left(m\omega - \frac{k}{\omega}\right)^2 + b^2} \quad (3.23)$$

Observem que, com a regla mnemotècnica, podem utilitzar el triangle rectangle de la figura 3.6 per recordar les relacions que hi ha entre l'angle ε , (3.20), la impedància Z , la resta $(m\omega - k/\omega)$ i b . Així,

$$\cos \varepsilon = \frac{b}{Z} \quad (3.24)$$

Per (3.14), és immediat comprovar que la impedància Z es relaciona amb l'amplitud de la velocitat ωA de la forma

$$\omega A = \frac{F_0}{Z} \quad (3.25)$$

3.3.2. Ressonància

La ωA serà màxima quan Z sigui mínima. Per (3.22), veiem que la funció $Z(\omega)$ —que s'ha representat a la figura 3.7— és mínima quan

$$\omega = \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (3.26)$$



En aquest cas, es diu que l'oscil·lador està en *ressonància* i tenim que

$$Z_{RES} = b \quad (3.27)$$

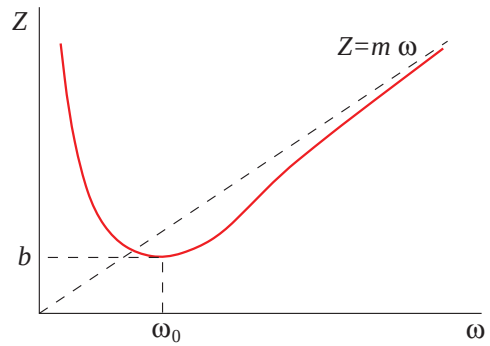


Figura 3.7

Fixem-nos també que, si $\omega = \omega_0$, per (3.11) i (3.20), l'angle δ val $\pi/2$ i l'angle ε és nul

$$\delta_{RES} = \frac{\pi}{2} \quad \varepsilon_{RES} = 0 \quad (3.28)$$

és a dir, en la ressonància, la força impulsora i l'elongació tenen un desfasament de $\pi/2$, és a dir, 1/4 de període i, per contra, la força impulsora i la velocitat estan en fase.

En conclusió, en la ressonància, la velocitat v i l'elongació x de la partícula vénen donades per

$$v_{RES} = \frac{F_0}{b} \cos \omega_0 t \quad x_{RES} = \frac{F_0}{b\omega_0} \sin \omega_0 t \quad (3.29)$$

A la figura 3.8, s'ha representat ωA , l'amplitud de la velocitat, en funció de ω . Les tres gràfiques corresponen als tres valors de β anteriors: $\beta = \omega_0/3$, $\beta = \omega_0/6$ i $\beta = \omega_0/15$.

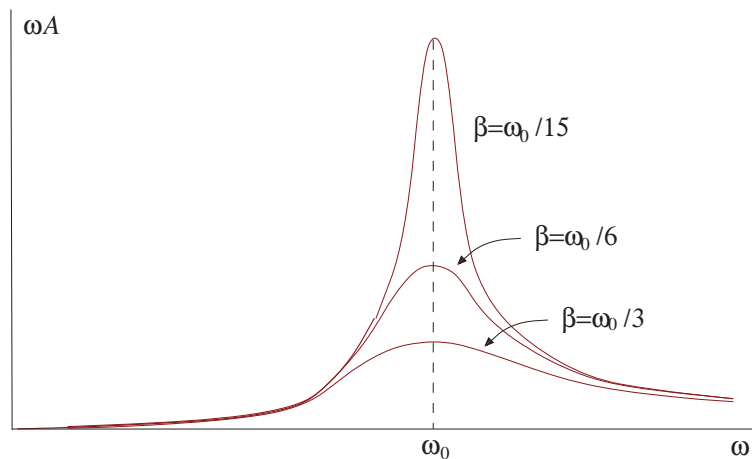


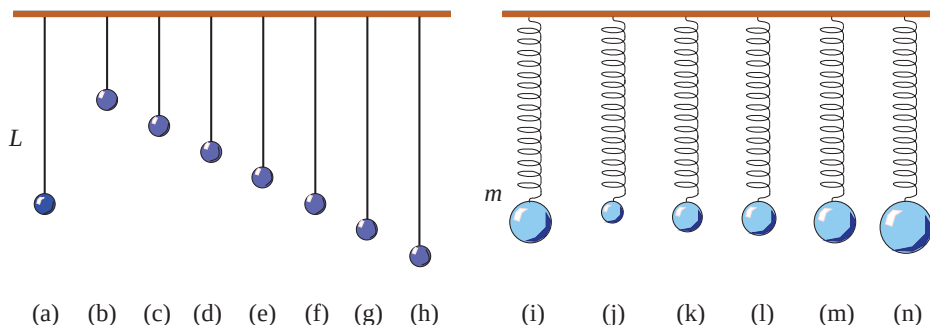
Figura 3.8

Fixem-nos, tant en aquesta gràfica com en l'anterior $A(\omega)$ de la figura 3.4, en la forma característica de pic que presenten. Això sí, com ja hem vist, hi ha una diferència entre

ambdues gràfiques: el màxim de ωA és a $\omega = \omega_0$, independentment del valor de β , mentre que el màxim de A és a la ω_2 de (3.17), que sí depèn de β .

Per observar fenòmens d'oscil·lacions forçades i de ressonància, no cal disposar d'aparells especials. Com es mostra a la figura 3.9 esquerra, un experiment molt senzill però ben il·lustratiu consisteix a agafar un corda gruixuda, tensar-la horitzontalment i lligar-hi fort uns quants pèndols simples de longituds diferents.

Figura 3.9



Si fem oscil·lar transversalment només el pèndol (a), transcurregut un interval curt de temps, com a conseqüència de les vibracions que es propagaran a través de la corda gruixuda, tots els altres també oscil·laran una mica, però el que ho farà amb una amplitud més gran és (f), que és el que té la mateixa longitud i, per tant, la mateixa freqüència pròpia que (a). Anàlogament, si fem oscil·lar verticalment la massa (i), la barra o corda que suporta la molla corresponent —v. figura 3.9 dreta— transmetrà les vibracions als altres oscil·ladors. Tots acabaran oscil·lant, però el que ho farà amb una amplitud més gran serà el sistema (m), la freqüència pròpia del qual és la mateixa que la del sistema impulsor (i).

Els fenòmens d'oscil·lacions forçades i ressonància intervenen en moltes situacions habituals. Des de la sintonització d'un aparell de ràdio —que comentem a la secció §3.6— fins a les embranzides que dona un pare al seu fill petit quan està en un gronxador. Aquestes embranzides són forces periòdiques de curta durada: si s'apliquen amb el mateix període que el de l'oscil·lació pròpia, $\omega = \omega_0$, procurant que estiguin en fase la velocitat i l'embranchida, l'amplitud del gronxador començarà a créixer.

Com que tots els cossos i totes les estructures tenen un cert grau d'elasticitat i, consegüentment, freqüències pròpies d'oscil·lació, qualsevol agent extern que faci vibrar l'estructura hi pot originar ressonàncies. Aquest detall és fonamental a l'hora de dissenyar ponts, gratacels, etc. L'any 1831 el pont penjant de Broughton, a Gran Bretanya, es va enfonsar a causa de les vibracions forçades pel pas d'una tropa de soldats. En un cas semblant, l'any 1850, l'enfonsament del pont de la Basse-Chaîne, a Angers, França, va causar molts morts. Avui dia, això ja no pot passar perquè els dissenyadors de ponts ja tenen en compte que aquests no tinguin aquestes freqüències pròpies.¹

¹ En el cas del famós pont penjant de Tacoma Narrow, al Estats Units, un vent fluixet va acabar partint-lo un matí de 1940 al cap de pocs mesos de ser inaugurat. Des d'aquell any, molts llibres de física han posat aquest cas com a exemple de ressonància destructiva per oscil·lacions forçades... , però no va ser això el que va passar. En realitat, aquest pont es va enfonsar a causa d'un fenomen diferent anomenat *fluttering* o aletejament, ben conegut avui dia en l'aerodinàmica de ponts.



3.3.3. Ressonància paramètrica

Un cas especial de ressonància és la coneguda com a *ressonància paramètrica*. Les oscil·lacions forçades d'un oscil·lador es poden generar no tan sols per mitjà d'una força periòdica impulsora externa com la (3.1), sinó també a causa de la variació periòdica d'algun paràmetre característic de l'oscil·lador que en les oscil·lacions lliures seria constant. Per exemple, un pèndol simple en què fem variar periòdicament la longitud del pèndol: si la freqüència d'aquesta variació coincideix amb la del pèndol, aquest entrarà en ressonància paramètrica. Aquest és el cas del famós balanceig del “botafumeiro” de la catedral de Santiago de Compostel·la. També és el cas del nen que està assegut al gronxador que, estant sol, s'ajup i s'aixeca sobre el seient seguint el ritme de les oscil·lacions. En ajupir-se o aixecar-se l'infant, el moment d'inèrcia del pèndol físic que és el conjunt gronxador-nen varia. O el cas d'una molla que té en un extrem una massa i, per l'altre, està agafada a una paret que, en comptes d'estar fixa, estigui realitzant una MHS d'una certa freqüència —vegeu, entre d'altres, els problemes 3.7.1 i següent. En molts casos, les vibracions que es produeixen com a conseqüència de ressonàncies paramètriques poden arribar a ser molt perjudicials.

3.4. Vibracions produïdes per màquines giratòries

En aquesta secció, veurem un dels casos més importants i freqüents d'oscil·lacions forçades: les vibracions que tenen com a origen una màquina giratòria —per exemple, un motor elèctric— que no està prou *compensada o equilibrada*, és a dir, aquelles en què el rotor o alguna peça que gira no presenta simetria de revolució al voltant de l'eix de gir.

Com s'esquematitza a la figura 3.10, una màquina de massa total M unida a una paret fixa per una molla i un amortidor de constants k i b , respectivament, es troba sobre un pla horitzontal llis i el conjunt constitueix un oscil·lador amortit. La màquina té una peça petita mòbil de massa m que descriu un moviment circular uniforme de radi a a la velocitat angular ω . Estudiem com afectarà el moviment de la peça al moviment de la màquina.

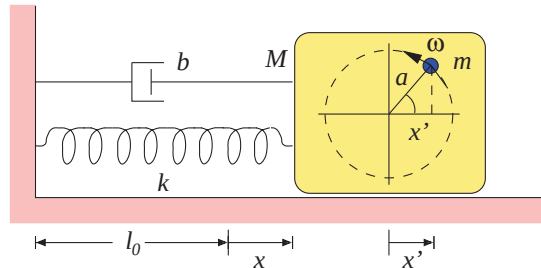


Figura 3.10

Amb la notació de la figura 3.10, l_0 és la longitud natural de la molla; x , el seu allargament en un instant determinat i x' , l'elongació, sobre el pla horitzontal, de la peça giratòria, que en funció del temps quedarà com

$$x' = a \cos \omega t \quad (3.30)$$

La segona llei de Newton aplicada a la peça de massa m ens dóna

$$m \frac{d^2(x + x')}{dt^2} = F_m \quad (3.31)$$

on F_m és la força interna que fa la màquina sobre la peça. Aplicant ara la segona i la tercera lleis de Newton a la màquina tenim

$$(M - m) \frac{d^2x}{dt^2} = -kx - b \frac{dx}{dt} - F_m \quad (3.32)$$

Sumant (3.31) i (3.32), i tenint en compte (3.30), trobem

$$M \frac{d^2x}{dt^2} + m \frac{d^2(a \cos \omega t)}{dt^2} = -kx - b \frac{dx}{dt}$$

i reordenant

$$M \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = am\omega^2 \cos \omega$$

Ens queda, doncs, l'equació diferencial de la vibració —una oscil·lació forçada— en la qual l'amplitud de la força impulsora (3.1) val

$$F_0 = am\omega^2 \quad (3.33)$$

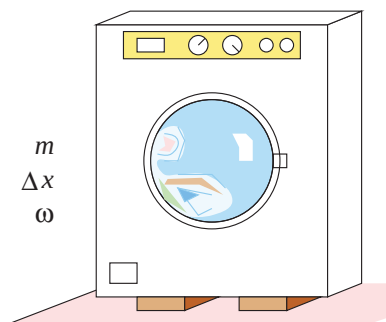
Si la freqüència ω amb què gira la peça és pròxima a la pròpia de l'oscil·lador, $\omega_0 = \sqrt{k/M}$, hi ha una ressonància que, en moltes situacions pràctiques, pot ser desagradable, perjudicial i, fins i tot, perillosa. Fixem-nos que, això sí, només cal col·locar una altra peça idèntica a l'anterior en la posició simètrica per tal que aquestes vibracions forçades desapareguin. Un cas relacionat d'alguna manera amb aquest és el que s'exposa al problema 3.7.1. A la secció §8.3.2, també veurem com es poden reduir aquestes vibracions.

Exemple 3.2. Les vibracions d'una rentadora

Els quatre peus de goma sobre els quals descansa una rentadora s'han ensorrat exactament $\Delta x = 1,50$ mm per l'acció del pes d'aquesta —v. figura 3.11. Quina freqüència de centrifugació s'hauria d'evitar especialment si no volem que el terra vibri excessivament?

Solució

Figura 3.11



Una rentadora amb roba centrifugant és una màquina giratòria descompensada com les que acabem de comentar. Si la freqüència de la centrifugació coincideix amb la freqüència pròpia d'oscil·lació de la rentadora sobre els seus peus, entrarà en ressonància i la rentadora —i el terra— vibrarà de manera molt exagerada i molesta.

Com dèiem, la freqüència pròpia de la rentadora és la freqüència amb què oscil·la sobre els seus peus. Si la massa de la rentadora amb la roba és m i suposem que els peus de goma es comporten com si fossin quatre molles iguals de constant k , aquesta freqüència és, com sabem, $\omega_0 = \sqrt{4k/m}$.



A l'enunciat no ens diuen quant valen ni k ni m , però sí que ens diuen que en posar la rentadora sobre els quatre peus aquests es comprimeixen una longitud Δx . Aquesta és tal que la força que origina compensa el pes: $4k\Delta x = mg$. Així doncs, la freqüència de ressonància serà

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{4k}{m}} = \sqrt{\frac{g}{\Delta x}}$$

Substituint els valors numèrics, trobem: $\omega_0 = 80,87 \text{ rad/s} = 772 \text{ rpm}$.

3.5. Potència mitjana absorbida per l'oscil·lador

Com hem vist, en l'estat estacionari, l'oscil·lador fa un MHS. Des del punt de vista energètic, l'estat estacionari s'explica mitjançant un balanç d'energia: la força de fricció dissipa energia cap al medi exterior al mateix ritme que la força impulsora externa la subministra a l'oscil·lador. Com que la força de fricció és proporcional a la velocitat i aquesta és proporcional a l'amplitud del MHS, els paràmetres característics del MHS forçat, A i ε , són aquells que equilibren la potència dissipada amb la potència subministrada. En aquesta secció comprovem analíticament aquest raonament qualitatiu.

Calculem la potència subministrada per la força impulsora, P_S . Sabem que $P_S = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$. En el nostre cas, tenim, per (3.1) i (3.21), doncs

$$P_S(t) = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = F_0 \cos \omega t \cdot \frac{F_0}{Z} \cos(\omega t - \varepsilon) = \frac{F_0^2}{Z} (\cos \varepsilon \cos^2 \omega t + \sin \varepsilon \cos \omega t \sin \omega t)$$

o també, utilitzant (A.26) i (A.18), tenim

$$P_S(t) = \frac{1}{2} \frac{F_0^2}{Z} [\cos \varepsilon + \cos(2\omega t - \varepsilon)] \quad (3.34)$$

Veiem, doncs, que la potència $P_S(t)$ depèn de l'instant t que considerem: en una part del cicle, és positiva però, en una altra, és negativa. Aquesta és, recordem-ho, la potència subministrada per la força impulsora a la partícula a l'instant t .

Però en la majoria d'aplicacions no interessa tant aquesta *potència instantània* $P_S(t)$ com la *potència mitjana* $\langle P_S \rangle$, és a dir, l'energia total subministrada a l'oscil·lador durant tot un període, dividida per la durada d'aquest, $T = 2\pi/\omega$. Com s'explica a l'apèndix §A.4, la mitjana ve donada per

$$\langle P_S \rangle = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} P_S(t) dt \quad (3.35)$$

on la integral representa l'energia i on ja hem posat el període com a $T = 2\pi/\omega$.

Aplicant-ho a la funció $P_S(t)$ de (3.34), tenim

$$\langle P_S \rangle = \frac{1}{2} \frac{F_0^2}{Z} (\cos \varepsilon + \langle \cos(2\omega t - \varepsilon) \rangle)$$

i, com que la mitjana d'una constant és ella mateixa i la mitjana de qualsevol funció sinusoidal és zero, resulta, doncs

$$\langle P_S \rangle = \frac{1}{2} \frac{F_0^2}{Z} \cos \varepsilon = \frac{1}{2} F_0 \omega A \cos \varepsilon = \frac{1}{2} \frac{F_0^2}{Z^2} b \quad (3.36)$$

on hem utilitzat, per a l'última igualtat, l'expressió (3.24) deduïda anteriorment com un exemple de l'aplicació del triangle de la impedància.

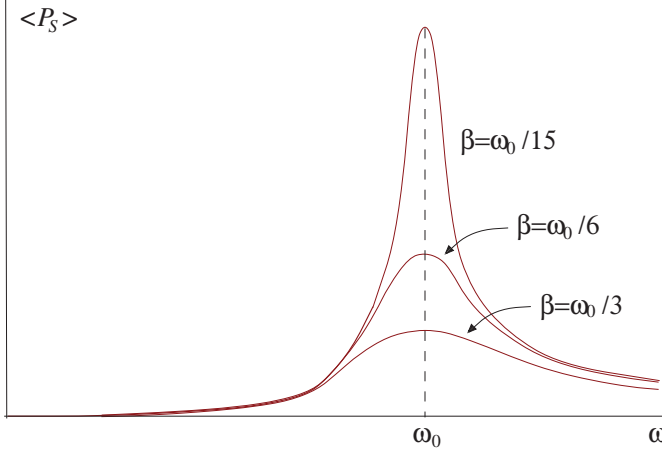
En la ressonància, en què $Z = b$ i $\cos \varepsilon = 1$, tenim que

$$\langle P_S \rangle_{RES} = \frac{1}{2} \frac{F_0^2}{b} \quad (3.37)$$

i la potència mitjana transferida a l'oscil·lador és màxima.

A la figura 3.12 s'ha representat la potència mitjana $\langle P_S \rangle$ en funció de ω , expressió (3.36). Fixeu-vos que, qualitativament, és semblant a la gràfica de l'amplitud de la velocitat ωA : $\langle P_S \rangle$ depèn de la impedància com a $1/Z^2$ i ωA com a $1/Z$.

Figura 3.12



3.6. Factor de qualitat Q i amplada de la ressonància

Com acabem de veure la potència mitjana $\langle P_S \rangle$ és una funció de ω que, en la ressonància, $\omega = \omega_0$, es fa màxima, $\langle P_S \rangle_{RES}$. La potència relativa o quocient $\langle P \rangle / \langle P \rangle_{RES}$ és, en conseqüència, una altra funció de ω que en el màxim val 1. Per (3.36) i (3.37), veiem que

$$\frac{\langle P_S \rangle}{\langle P_S \rangle_{RES}} = \frac{b^2}{Z^2} \quad (3.38)$$

A la gràfica de la figura 3.13 hem representat $\langle P_S \rangle / \langle P_S \rangle_{RES}$ en funció de ω / ω_0 , per als tres valors $\beta = \omega_0 / 5$, $\beta = \omega_0 / 10$ i $\beta = \omega_0 / 50$. En aquestes gràfiques fixem-nos com, a mesura que l'amortiment β es fa més petit, el pic corresponent es fa més i més estret.

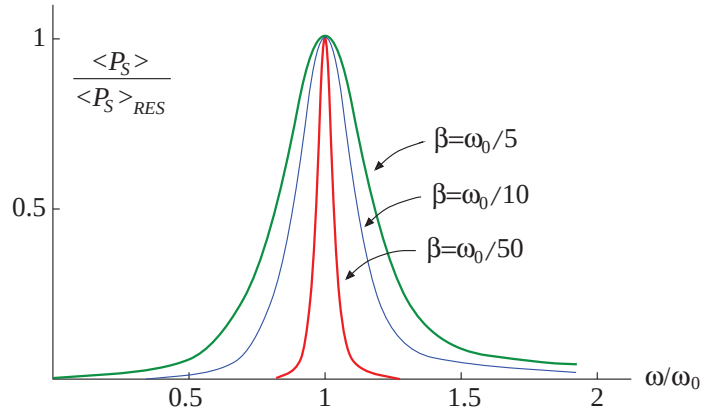


Figura 3.13

A la figura 3.14 s'ha representat un d'aquest pics.

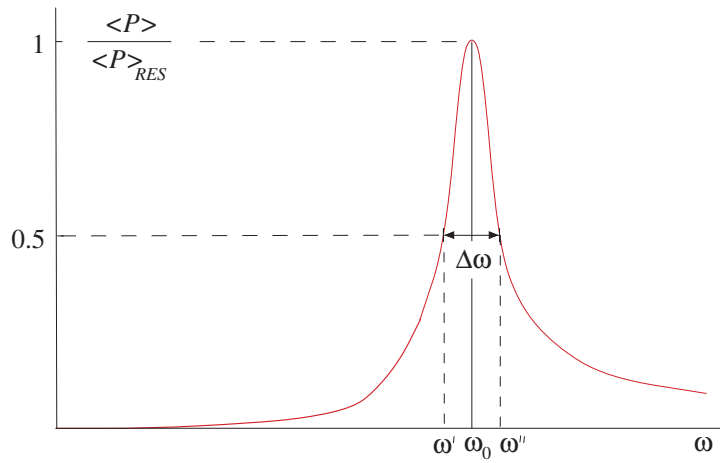


Figura 3.14

La potència relativa és superior a 1/2 per a totes les freqüències compreses entre la ω' i la ω'' , i 1 per a exactament la ω_0 , de forma que $\omega' < \omega_0 < \omega''$. Definint l'*amplada de la ressonància* com a $\Delta\omega = \omega'' - \omega'$, es pot demostrar fàcilment que, si $\beta \ll \omega_0$, llavors

$$\Delta\omega = \omega'' - \omega' = 2\beta \quad (3.39)$$

A la secció §2.3 hem vist a (2.16) que, en el cas d'amortiments petits, el factor de qualitat Q podia posar-se com $Q = \omega_0/(2\beta)$. Doncs bé, a la vista d'aquest últim resultat, podem escriure

$$Q = \frac{\omega_0}{2\beta} = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} \quad (3.40)$$

d'on podem concloure que el factor de qualitat Q ens indica l'estretor del pic de la ressonància.

Tot això que acabem de veure sobre les oscil·lacions forçades fa referència a la posició, la velocitat, la massa, la força, etc. de partícules o sòlids. És a dir, hem estudiat les

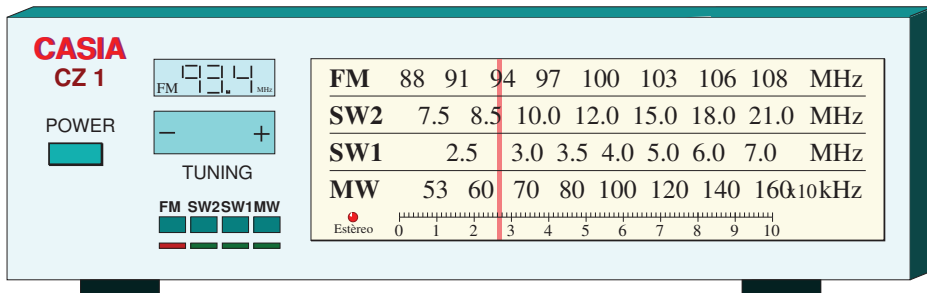


oscil·lacions, en general, i les forçades, en particular, des d'exemples mecànics. Però les mateixes tècniques i el mateixos resultats que hem anat trobant es poden aplicar i s'apliquen a problemes d'altres branques de la ciència tant diferents com els circuits elèctrics, telecomunicacions, òptica, geologia, etc. Totes aquestes situacions, en camps tan diferents, presenten un punt clau comú: queden descrites per equacions diferencials com ara la (3.4). Així, el concepte d'impedància, anàlogament a com l'hem vist a la secció §3.3 des del punt de vista mecànic, s'aplica exactament igual als circuits elèctrics de corrent altern.

Per al lector interessat, a l'apèndix D es comparen les oscil·lacions elèctriques i les mecàniques.

Per acabar, podem afegir que, en general, allà on hi hagi una freqüència pròpia i un agent extern periòdic hi ha fenòmens de ressonància més o menys pronunciats segons el factor de qualitat corresponent. Així, per exemple, quan estem sintonitzant una emissora de ràdio —v. figura 3.15— estem modificant la freqüència pròpia ω_0 del condensador variable del circuit elèctric oscil·lant *LC* del receptor —apèndix D— fins a igualar-la amb la freqüència ω de les ones radioelèctriques que emet l'emissora concreta que volem escoltar. Si aquest circuit no té un factor de qualitat *Q* prou alt, l'aparell agafarà també altres emissores que tinguin freqüències semblants a ω_0 i l'audició serà dolenta. En canvi, si el factor *Q* dels receptors és gran, hi pot haver moltes emissores amb freqüències pròximes unas de les altres sense que es perdi qualitat en l'audició.

Figura 3.15



3.7. Problemes resolts i problemes proposats

3.7.1. Problemes resolts

Problema 3.1. Oscil·lació forçada sinusoïdalment

Una partícula de massa $m = 0,140$ kg és unida a una molla de constant $k = 300$ N/m i a un amortidor de constant d'amortiment $b = 3$ kg/s. Si, sobre la partícula, comença a actuar una força impulsora externa sinusoïdal d'amplitud $F_0 = 30$ N i freqüència $\omega = 50$ rad/s, avalueu:

a) quant de temps durarà, aproximadament, l'estat transitori del moviment.

A continuació, ja en l'estat estacionari, esbrineu:

b) la impedància Z del sistema;

c) l'amplitud A de l'oscil·lació estacionària i de la seva velocitat, ωA ;



- d) l'angle de desfasament ε entre la velocitat i la força impulsora;
- e) la potència mitjana subministrada a l'oscil·lador i el factor de qualitat Q , i
- f) la freqüència angular a la qual hi hauria ressonància i quina amplitud tindrien les oscil·lacions en aquest cas.

Solució

- a) Com ja sabem, a partir del moment en què s'aplica la força impulsora, la partícula comença a efectuar un moviment oscil·latori complicat, anomenat *estat transitori*, que és la superposició d'una oscil·lació amortida

$$x_h = A_h e^{-\beta t} \cos(\omega_1 t + \phi)$$

més un MHS de la mateixa freqüència ω que la força impulsora

$$x_p = A \cos(\omega t - \delta)$$

però desfasat l'angle δ respecte d'ella. Transcurregut un cert temps, l'amplitud efectiva de l'oscil·lació amortida pràcticament ha desaparegut i només queda el MHS: s'ha arribat a l'*estat estacionari*.

La durada de l'estat transitori és, doncs, l'interval de temps que tarda l'exponencial $e^{-\beta t}$ a fer-se molt petita, en general, entre 4 i 7 vegades $\tau = 1/\beta$. Com en les oscil·lacions amortides, β val

$$\beta = \frac{b}{2m} = 10,714 \text{ s}^{-1} \quad (1)$$

d'on resulta una durada d'entre 50 i 80 s.

- b) Ja en l'estat estacionari, substituint les dades numèriques de l'enunciat a l'expressió de la impedància, ens dóna

$$Z = \sqrt{\left(m\omega - \frac{k}{\omega}\right)^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10} = 3,1623 \text{ kg/s} \quad (2)$$

- c) Com sabem, de l'amplitud ωA de la velocitat a l'estat estacionari i (2) deduïm

$$\omega A = \frac{F_0}{Z} = 9,4868 \text{ m/s}$$

i l'amplitud de l'elongació, és, doncs

$$A = \frac{\omega A}{\omega} = 0,18974 \text{ m}$$

- d) Començarem trobant la freqüència angular pròpia ω_0 de l'oscil·lador

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 46,291 \text{ rad/s} \quad (3)$$



Si l'angle de desfasament entre l'elongació i la força impulsora és, com l'anomenàvem abans, δ , l'angle de desfasament entre la velocitat i la força és $\varepsilon = \delta - \pi/2$, que ve donat directament, com sabem, per l'arctangent

$$\varepsilon = \arctan \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\beta\omega} = 0,32175 \text{ rad} = 18,435^\circ$$

fórmula en la qual hem utilitzat (1) i (3).

- e) Aquest és un oscil·lador no gaire amortit, ja que $\beta/\omega_0 = 0,23$. El factor de qualitat es pot calcular com

$$Q = \frac{\omega_0}{2\beta} = 2,16$$

I, pel que fa a la potència mitjana, aquesta ve donada, com sabem, per qualsevol d'aquestes expressions

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} \frac{F_0^2}{Z} \cos \varepsilon = \frac{1}{2} F_0 \omega A \cos \varepsilon = \frac{1}{2} \frac{F_0^2}{Z^2} b$$

en les quals, substituint els valors numèrics anteriors, resulta: $\langle P \rangle = 135,0 \text{ W}$.

- f) La ressonància és la condició per la qual l'amplitud de la velocitat ωA es fa màxima i, com sabem, es produeix quan $\omega = \omega_0 = 46,291 \text{ rad/s}$. En aquest cas, $Z_{RES} = b$, $(\omega A)_{RES} = F_0/b$ i

$$A_{RES} = \frac{(\omega A)_{RES}}{\omega_0} = \frac{F_0}{b\omega_0} = 0,2160 \text{ m}$$

Problema 3.2. L'estat estacionari i la força impulsora

Una partícula de massa $m = 6 \text{ g}$, lligada a una molla i a un amortidor, està sotmesa a una força impulsora sinusoidal tal que el MHS que descriu l'estat estacionari ve donat per

$$x(t) = 0,08 \cos 2\pi(9t - 1/6) \quad (1)$$

on totes les magnituds són en unitats SI. Sabent que quan deixa d'actuar la força impulsora exterior l'amplitud de les oscil·lacions amortides es redueix a 1/5 de la inicial cada 6 oscil·lacions, esbrineu:

- El factor de qualitat de l'oscil·lador i el paràmetre d'amortiment.
- La impedància del sistema i l'amplitud de la força exterior.
- L'expressió de les oscil·lacions en cas que el sistema estigüés en ressonància.

Solució

- a) L'amplitud efectiva de les oscil·lacions amortides es redueix de la forma $A_{ef} = Ae^{-\beta t}$. Segons l'enunciat, tenim que



$$\frac{1}{5}A = Ae^{-6\beta T} \quad (2)$$

Aplicant logaritmes trobem que $\ln 5 = 6\beta T$. El període T d'aquestes oscil·lacions ve donat, com sabem, per $T = 2\pi/\omega_1 = 2\pi/\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$, essent ω_0 la freqüència pròpia de l'oscil·lador. Com que aquest oscil·lador, pel que diu l'enunciat sobre l'amplitud, no està gaire amortit podem suposar —com després comprovarem— que $\beta^2 \ll \omega_0^2$ i, per tant, que $\omega_1 \approx \omega_0$. Per tant, de (2) traiem que

$$\ln 5 = 12\pi \frac{\beta}{\omega_0} \quad (3)$$

Com que el factor de qualitat Q ve donat per $Q = \omega_0/2\beta$, llavors

$$Q = \frac{6\pi}{\ln 5} = 11,71$$

El paràmetre d'amortiment β el trobarem a partir de l'angle $\delta = \pi/3$ de desfasament entre l'elongació x i la força impulsora. La tangent d'aquest angle val, com sabem,

$$\tan \delta = \tan \frac{\pi}{3} = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (4)$$

essent ω la freqüència de la força impulsora, 18π rad/s en aquest cas. Substituint la β de l'equació (3) en (4), resulta

$$\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega_0} = \frac{\omega \ln 5}{6\pi \tan \frac{\pi}{3}} = 2,7876 = \alpha$$

D'aquesta equació de segon grau, per a ω_0

$$\omega_0^2 - \alpha\omega_0 - \omega^2 = 0$$

trobem les dues solucions

$$\omega_0 = \frac{\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + 4\omega^2}}{2} = 1,394 \pm 56,566 \text{ rad/s}$$

però, ens quedem, només, amb la positiva: $\omega_0 = 57,96$ rad/s.

I ara que tenim el valor de ω_0 , per (3) trobem que $\beta = 2,474 \text{ s}^{-1}$. Ara també podem comprovar que, efectivament, $\omega_1 \approx \omega_0$: $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = 0,99909\omega_0$.

b) Substituint ω_0 i ω a l'expressió de la impedància, trobem

$$Z = m\sqrt{\left(\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega}\right)^2 + 4\beta^2} = 0,03429 \text{ kg/s} \quad (5)$$

Quant a l'amplitud F_0 de la força impulsora podem trobar-la de la relació entre aquesta i l'elongació A , 0,08 m per (1),

$$A = \frac{F_0}{\omega Z} \quad (6)$$

d'on resulta $F_0 = 0,1551$ N.

c) El moviment de la partícula estaria en ressonància si $\omega = \omega_0$. En aquest cas, com ja sabem, tindriem que:

- el desfasament entre la força impulsora i el desplaçament seria: $\delta_{RES} = \pi/2$ rad; i
- la impedància (5) es faria mínima: $Z_{RES} = 2m\beta = 0,02969$ kg/s;
- l'amplitud (6) ara valdria

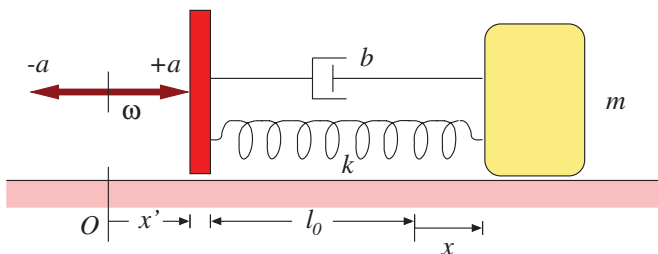
$$A_{RES} = \frac{F_0}{\omega Z_{RES}} = \frac{F_0}{2m\beta\omega_0} = 0,09013 \text{ m}$$

Així doncs, en unitats SI, el moviment de la partícula seria: $x_{RES}(t) = 0,09013 \sin 57,96t$

Problema 3.3. Oscil·lacions forçades per un MHS extern, 1

Sigui un bloc de massa m unit per una molla de constant de força k a una paret mòbil que fa un MHS d'amplitud a i freqüència ω . El bloc té un amortidor de constant b unit a la paret mòbil. Aprofitant els suggeriments indicats a la figura 3.16, estudieu el moviment del bloc i comproveu que correspon a una oscil·lació forçada sinusoidalment per una força impulsora d'amplitud $F_0 = am\omega^2$.

Figura 3.16



Solució

Seguint la notació de la figura anterior, siguin: l_0 , la longitud natural de la molla; x' , l'elongació de la paret mòbil i, x , l'allargament de la molla. Així, la x' podem posar-la de la forma

$$x' = a \cos \omega t \quad (1)$$

La força que fa la molla és proporcional al seu allargament, x , i l'amortidor, com que està unit a la paret mòbil, fa una força sobre el bloc proporcional a la velocitat relativa del bloc respecte de la paret de suport, dx/dv . Per tant, la segona llei de Newton aplicada a aquest cas ens proporciona

$$m \frac{d^2(x' + x)}{dt^2} = -kx - b \frac{dx}{dt} \quad (2)$$



equació que, per (1), podem deixar com

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = am\omega^2 \cos \omega t \quad (3)$$

Trobem, doncs, una equació diferencial que ens explica que l'allargament x de la molla respon a una oscil·lació forçada sinusoidalment per una força impulsora d'amplitud

$$F_0 = am\omega^2$$

Al problema següent veiem una aplicació d'aquest resultat. Vegeu també el problema 3.26.

Problema 3.4. Limitació de les vibracions

Un aparell electrònic delicat està sobre una plataforma que pateix les vibracions d'un motor de forma contínua —v. figura 3.17. La massa de l'aparell és $m = 8 \text{ kg}$ —molt més petita que la de la plataforma— i la constant de força de cadascuna de les quatre molles iguals que el suporten val $k = 6 \times 10^4 \text{ N/m}$. Si l'amplitud de les vibracions de l'aparell ha de ser, com a màxim, el triple de la de la plataforma, esbrineu entre quina freqüència mínima i màxima aquesta no hauria de vibrar. Supposeu negligible l'amortiment.

Solució

Com hem vist al problema 3.7.1, la vibració de la plataforma amb una freqüència ω i una amplitud a és equivalent a aplicar a l'aparell una força impulsora sinusoidal de la mateixa freqüència i d'amplitud $F_0 = am\omega^2$. Com que l'amortiment és molt petit, aquesta força farà vibrar l'aparell amb l'amplitud A donada per l'expressió

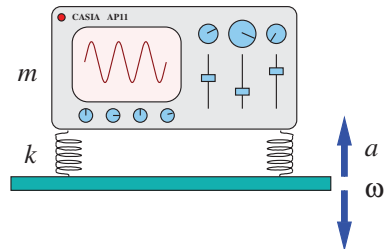


Figura 3.17

$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} \approx \frac{a\omega^2}{|\omega_0^2 - \omega^2|} \quad (1)$$

en la qual ω_0 és la freqüència pròpia de l'aparell sobre les quatre molles, és a dir, $\omega_0 = \sqrt{\frac{4k}{m}}$. Anomenant-la $\alpha = A/a$, la condició que ens diu l'enunciat sobre l'amplitud —que $\alpha \leq 3$ — imposa que la freqüència ω de la plataforma hagi de ser:

- $\omega_1 < \omega < \omega_0$, amb ω_1 donada per l'equació

$$\alpha = \frac{\omega_1^2}{\omega_0^2 - \omega_1^2} \quad \text{és a dir} \quad \omega_1 = \omega_0 \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha + 1}}$$

- $\omega_0 < \omega < \omega_2$, amb ω_2 donada per l'equació

$$\alpha = \frac{\omega_2^2}{\omega_2^2 - \omega_0^2} \quad \text{és a dir} \quad \omega_2 = \omega_0 \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha - 1}}$$

Com que $\omega_0 = 173,2 \text{ rad/s}$, llavors, posant $\alpha = 3$, trobem: $\omega_1 = 0,866025 \omega_0 = 150,0 \text{ rad/s}$ i $\omega_2 = 1,22474 \omega_0 = 212,1 \text{ rad/s}$, és a dir, $f_1 = 23,87 \text{ Hz}$, i $f_2 = 33,76 \text{ Hz}$.

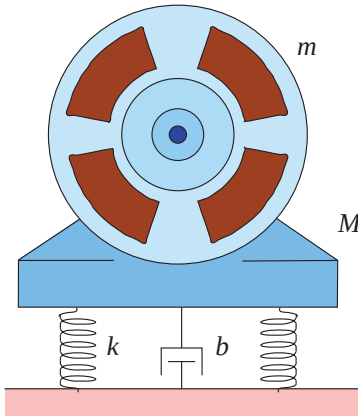
En definitiva, el marge de freqüències en què no hauria de vibrar la plataforma és

$$23,9 \text{ Hz} < f < 33,8 \text{ Hz}$$

Problema 3.5. Transmissibilitat: motor elèctric sobre el terra

Un motor elèctric, de massa total $M = 100 \text{ kg}$ i que gira a $\omega = 900 \text{ rpm}$, té un petit desequilibri, equivalent a una massa $m = 0,5 \text{ kg}$ amb un radi $r = 0,20 \text{ cm}$.

Figura 3.18



Com es mostra a la figura 3.29, el motor està suportat per unes molles verticals, de constant de força conjunta $k = 4 \times 10^4 \text{ N/m}$ i un amortidor, de constant d'amortiment $b = 2000 \text{ kg/s}$, i tot el conjunt està dipositat sobre el terra. Estudieu quant val, en l'estat estacionari, la força màxima que fan aquests dos elements sobre el terra —exclòs el pes Mg del motor.

Solució

Un motor descompensat que gira a la velocitat angular ω provoca, com hem vist a la secció §3.4, una força impulsora harmònica d'amplitud $F_0 = m\omega^2 r$, que forçarà, en l'estat estacionari, un MHS del propi motor $x = A \cos(\omega t - \delta)$. Per tant, la força F que faran les molles i l'amortidor sobre el terra, a part del propi pes del motor, valdrà

$$F = kx + b \frac{dx}{dt} = kA \cos(\omega t - \delta) + b\omega A \sin(\omega t - \delta), \quad \text{si } F \geq 0 \quad (1)$$

on A ve donada, com sabem, per

$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}} \quad (2)$$

A la meitat del període en què $F = kx + b \frac{dx}{dt} < 0$ prenem $F = 0$, ja que el motor està dipositat sobre el terra —i no collat a ell— i no el pot estirar cap amunt; en aquest cas, el



pes aparent del motor és més petit que Mg . Aplicant-hi la igualtat trigonomètrica (A.20), podem posar (1) de la forma

$$F(t) = A\sqrt{k^2 + b^2\omega^2} \sin(\omega t - \delta - \phi), \quad \text{amb } \tan \phi = \frac{k}{b\omega} \quad (3)$$

És clar que el màxim de (3) és l'amplitud de la força, $F_{max} = A\sqrt{k^2 + b^2\omega^2}$. Substituint (2) aquí, podem posar F_{max} com

$$\frac{F_{max}}{F_0} = \sqrt{\frac{\omega^4 + 4\beta^2\omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} \quad (4)$$

quotient, anomenat sovint, de *transmissibilitat*.

Amb els valors numèrics de l'enunciat, tenim: $\omega = 900 \text{ rev/min} = 94,248 \text{ rad/s}$, $\omega_0 = \sqrt{k/M} = 20 \text{ rad/s}$, $\beta = b/2M = 10 \text{ s}^{-1}$ i, finalment, l'amplitud de la força impulsora: $F_0 = m\omega^2 r = 888,27 \text{ N}$.

Si substituïm tot això a (4), resulta una força màxima de $F_{max} = 1,0450 \cdot F_0 = 928,2 \text{ N}$.

A la figura 3.19 s'ha representat la transmissibilitat F_{max}/F_0 donada per (4) en funció de ω/ω_0 , per a tres valors del paràmetre β : $\beta = \omega_0/5$, $\beta = \omega_0/2$, i $\beta = \omega_0$. En aquest problema: $\beta = \omega_0/2$ i $\omega/\omega_0 = 4,71$.

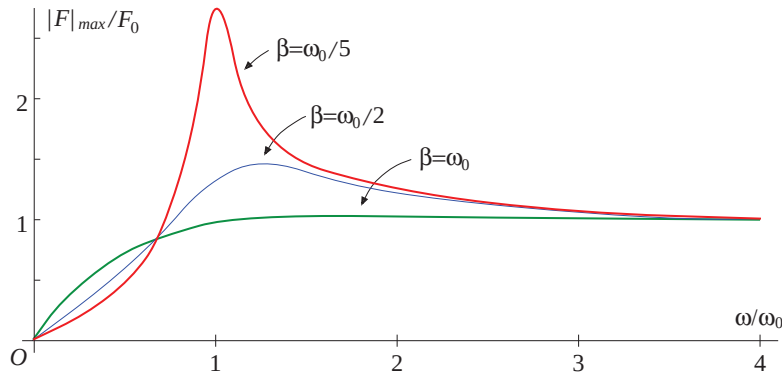


Figura 3.19

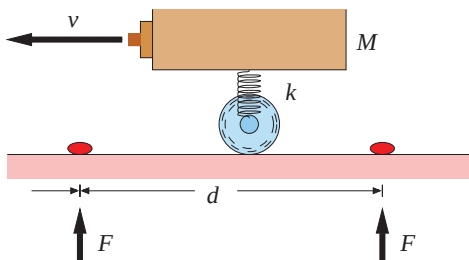
Com es podia esperar, la transmissibilitat en la ressonància, $\omega = \omega_0$, es fa molt gran si l'amortiment és petit. En aquest cas (4), es pot expressar en funció del factor de qualitat com $Q = \omega_0/(2\beta)$ com

$$\left[\frac{F_{max}}{F_0} \right]_{RES} = \sqrt{Q^2 + 1} \approx Q$$

Problema 3.6. Ressonància deguda a una força periòdica no harmònica

Un cotxe arrossega un remolc de dues rodes amb una càrrega molt fràgil. Podem considerar el remolc carregat com un gran bloc de massa M , suportat per dues molles de constant k recolzades sobre l'eix de les dues rodes.

Figura 3.20



A partir d'un cert punt de la carretera per la qual circula estan fent obres, de manera que al llarg de l'asfalt hi ha uns cables gruixuts disposats transversalment i separats entre si uniformement la distància d . Esbrineu quina velocitat v ha d'evitar especialment el conductor si no vol fer trontollar massa la càrrega. Apliqueu el resultat a les dades: $k = 10^5 \text{ N/m}$, $d = 5 \text{ m}$, i $M = 1000 \text{ kg}$.

Solució

En aquest cas el remolc amb les dues molles és l'oscil·lador i els “copets” que van rebent les dues rodes cada vegada que passen per damunt dels cables són la força externa impulsora $F(t)$. Aquesta “força”, evidentment, no és una força harmònica del tipus $F_0 \cos \omega t$, però si el cotxe va a velocitat constant $F(t)$ sí que és una força periòdica. Això ens permet pensar que, si bé els resultats del desenvolupament matemàtic de la teoria d'oscil·lacions forçades per una força impulsora harmònica que hem vist al llarg d'aquest capítol no seran correctes quantitativament sí ho poden ser qualitativament. En particular, és correcte creure que, si la freqüència pròpia de l'oscil·lador i la de la força impulsora dels copets coincideixen, hi haurà ressonància, és a dir, l'amplitud de les vibracions forçades del remolc es farà molt gran. Està clar, doncs, que la velocitat que hem d'evitar és la que correspon a la ressonància.

La freqüència angular pròpia de l'oscil·lador —el remolc amb les dues molles— és $\omega_0 = \sqrt{2k/M}$. La freqüència dels copets és $\omega = 2\pi/\Delta t$, essent-ne Δt el període, és a dir, l'interval de temps transcorregut entre un copet i el següent, $\Delta t = d/v$. Igualant les dues freqüències

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{M}} = \frac{2\pi v}{d}$$

obtenim la velocitat per a la qual hi haurà la ressonància

$$v_{RES} = \frac{d}{2\pi} \sqrt{\frac{2k}{M}}$$

I, aplicant els valors numèrics, en resulta la velocitat: $v_{RES} = 11,25 \text{ m/s} = 40,5 \text{ km/h}$.

Per acabar, es deixa per al lector veure que, de fet, a les velocitats del remolc $v_{RES}/2 = 20,25 \text{ km/h}$, $v_{RES}/3 = 13,5 \text{ km/h}$, $v_{RES}/4 = 10,1 \text{ km/h}$, etc., també hi haurà ressonància.

Problema 3.7. Oscil·lacions i força externa no periòdica

Un extrem d'una molla de constant de força k està unit a una paret fixa mentre que l'altre està unit a una massa m . Inicialment, la massa està en el punt d'equilibri amb la velocitat



v_0 i, a partir de $t = 0$, se li aplica una força externa $F(t)$ que la tracta d'allunyar de la paret i que creix amb el temps t de la forma

$$F(t) = F_0 \frac{t}{\tau} \quad (1)$$

on F_0 i τ són dues constants. Estudia el moviment que farà la massa com a resposta a la força aplicada.

Solució

Plantegem la segona llei de Newton, la qual, amb (1), quedarà com

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = F_0 \frac{t}{\tau} \quad (2)$$

equació diferencial lineal no homogènia i de la qual ja sabem que la solució general és la suma de la solució general de l'equació homogènia

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0, \quad \text{amb} \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

més una solució particular de la no homogènia (2). La solució de l'homogènia és el MHS

$$x_h(t) = A_h \cos(\omega_0 t + \phi_h) \quad (3)$$

on A_h i ϕ_h són les dues constants arbitràries determinades per les condicions inicials. Com a solució particular de l'equació (2), provem la funció lineal

$$x_p(t) = At \quad (4)$$

que la satisfà i que, substituïda a (2), ens proporciona

$$A = \frac{F_0}{k\tau}$$

Així, doncs, la solució general de (2) és la suma de (3) més (4)

$$x(t) = A_h \cos(\omega_0 t + \phi_h) + \frac{F_0}{k\tau} t \quad (5)$$

que, derivada, proporciona la velocitat

$$v(t) = -\omega_0 A_h \sin(\omega_0 t + \phi_h) + \frac{F_0}{k\tau} \quad (6)$$

Quant valen A_h i ϕ_h ? Si prenem com a origen de coordenades el punt d'equilibri, llavors, a $t = 0$ tenim

- $x(0) = 0$; per tant, de (5), $\cos \phi_h = 0$
- $v(0) = v_0$; per tant, de (6), $-\omega_0 A_h \sin \phi_h + \frac{F_0}{k\tau} = v_0$



d'on resulta $\phi_h = \frac{\pi}{2}$ i $A_h = \left(\frac{F_0}{k\tau} - v_0 \right) \frac{1}{\omega_0}$. Finalment, substituint a (5) resulta el moviment

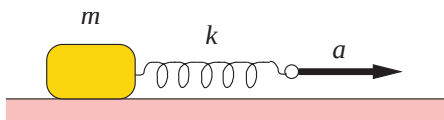
$$x(t) = \frac{F_0}{k\tau\omega_0}(\omega_0 t - \sin \omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t \quad (7)$$

que, com veiem, és la superposició d'un moviment uniforme de velocitat $F_0/k\tau$ i un MHS de freqüència ω_0 . Fixeu-vos que, si no hi hagués la molla que lliga la massa a la paret, la massa es mouria de la forma: $x = \frac{1}{6} \frac{F_0}{m\tau} t^3$.

Exemple 3.8. Bloc accelerat per una molla

Un bloc de massa m que descansa sobre una superfície horitzontal llisa està unit a un dels extrems d'una molla de constant k . Inicialment el sistema està en repòs quan, a partir d'un moment determinat, comencem a estirar l'altre extrem de la molla amb l'acceleració constant a —v. figura 3.21. Prenent la posició inicial del bloc com a origen de l'eix x , esbrineu com serà el moviment del bloc en funció del temps.

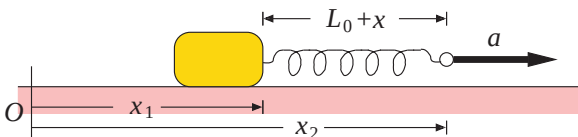
Figura 3.21



Solució

Seguirem la notació de la figura 3.22. Signuin: x_1 , la posició del bloc respecte de l'origen —la seva posició inicial és $x(0) = 0$; L_0 , la longitud natural de la molla; x , el seu allargament, i x_2 , la posició de l'extrem accelerat de la molla.

Figura 3.22



Per tot això que acabem de dir, tenim

$$x_2(t) = \frac{1}{2}at^2 + L_0 \quad (1)$$

i també que

$$x = x_2 - x_1 - L_0 \quad (2)$$

Aplicant la segona llei de Newton a la massa i tenint en compte (1) i (2), arribem a

$$m \frac{d^2 x_1}{dt^2} = +kx = -kx_1 + \frac{1}{2}kat^2$$

Si, com fem tan sovint, en diem $\omega_0^2 = k/m$, l'equació anterior ens queda com

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + \omega_0^2 x_1 = \frac{1}{2}\omega_0^2 at^2 \quad (3)$$



Per resoldre (3) suposarem que la funció solució és de la mena següent —suma de la solució general de l'homogènia més una particular de (3):—apèndix §B.3—

$$x_1(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi) + Bt^2 + Ct + D \quad (4)$$

on A i ϕ són constants que depenen de les condicions inicials de x_1 , i les altres constants B , C i D les trobarem a partir de la condició que la funció (4) satisfaci (3).

Substituint (4) a (3) trobem que se satisfà la igualtat (3) si B , C i D són

$$B = \frac{1}{2}a \quad C = 0 \quad D = -\frac{a}{\omega_0^2}$$

Així, (4) queda com

$$x_1(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi) + \frac{1}{2}at^2 - \frac{a}{\omega_0^2} \quad (5)$$

Troblem ara el valor de A i ϕ . Derivant x_1 , tenim

$$v_1(t) = \frac{dx_1}{dt} = -\omega_0 A \sin(\omega_0 t + \phi) + at \quad (6)$$

Ara podem trobar A i ϕ a partir de les condicions inicials. Per l'enunciat, a $t = 0$ tenim $x = 0$ i $v_1 = 0$. Així, per (5) i (6)

$$0 = A \cos \phi - \frac{a}{\omega_0^2} \quad \text{i} \quad 0 = -\omega_0 A \sin \phi$$

d'on deduïm: $\phi = 0$ i $A = a/\omega_0^2$. Així, la funció (5) queda, finalment, com

$$x_1(t) = \frac{1}{2}at^2 - \frac{a}{\omega_0^2}(1 - \cos \omega_0 t) \quad (7)$$

Comprovem que, si derivem dues vegades (7), trobem, primer, la velocitat (6)

$$v_1(t) = a \left(t - \frac{1}{\omega_0} \sin \omega_0 t \right)$$

i, després, l'acceleració del bloc

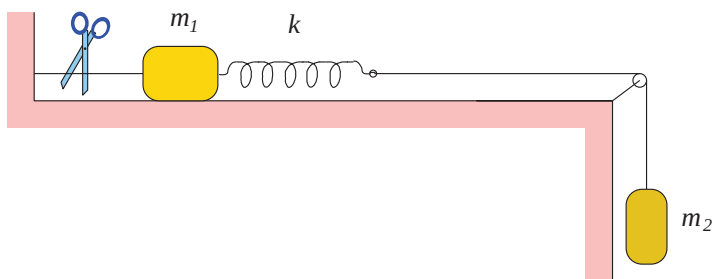
$$a_1(t) = a(1 - \cos \omega_0 t)$$

en funció de l'acceleració a de l'extrem. Efectivament, el moviment resultant és la superposició d'un cert MHS de freqüència ω_0 a un moviment amb acceleració constant a .

Exemple 3.9. El problema dels dos cossos, 2

Un bloc de massa m_1 que descansa sobre una superfície horitzontal llisa està unit per un dels seus costats a una paret i, per l'altre, a un extrem d'una molla de constant k —v. figura 3.23. L'altre extrem de la molla està unit a un fil inextensible que, passant per una politja molt petita, manté penjat en equilibri un segon bloc de massa m_2 .

Figura 3.23

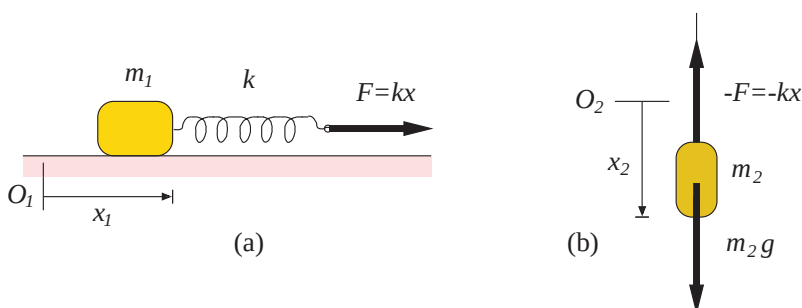


Els dos blocs estan inicialment en repòs però, a $t = 0$, tallem el fil que lliga el primer bloc a la paret. Estudieu la velocitat de la caiguda del segon bloc en funció del temps.

Solució

Aquest problema és semblant al 1.10. En les dues figures següents estan representats els dos blocs per separat. A la figura 3.24 (a) es mostra el bloc de massa m_1 i la coordenada x_1 que dóna la seva posició sobre la taula; també es mostra la força F que s'exerceix sobre ell: si la molla està estirada la longitud x , llavors tenim que $F = kx$. A la figura 3.24 (b) està indicada la coordenada x_2 que mesura la posició vertical del bloc de massa m_2 i les dues forces a què aquest està sotmès: el pes m_2g i la tensió de la corda, que és, en mòdul, la mateixa F que fa la molla sobre m_1 , però de sentit contrari.

Figura 3.24



Així doncs, l'aplicació de la segona llei de Newton i la relació entre F i x proporcionen les equacions

$$F = m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} \quad (1)$$

$$m_2 g - F = m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} \quad (2)$$

$$F = kx \quad (3)$$

D'altra banda, les coordenades x_1 i x_2 estan relacionades amb x de la forma: $x_2 = x_1 + x + C$, on C és una constant que depèn de la longitud del fil. Derivant aquesta equació dues vegades n'obtenim

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} = \frac{d^2 x_1}{dt^2} + \frac{d^2 x}{dt^2} \quad (4)$$



Tenim, doncs, quatre incògnites, x_1 , x_2 , x i F , i quatre relacions entre elles: ja podem re-soldre el problema. Substituint (1), (3) i (4) a (2), i operant, obtenim l'equació diferencial

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{\mu}x = g \quad \text{amb la massa reduïda} \quad \frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \quad (5)$$

L'equació (5) és molt semblant a l'equació diferencial del MHS d'una massa μ lligada a una molla de constant k . L'única diferència és que a la (5) hi ha g on a la del MHS hi ha 0. Per tant, podem esperar que la funció solució de (5) sigui molt semblant a la d'un MHS. En efecte, la solució de (5) és del tipus: $x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi) + B$, on $\omega_0^2 = k/\mu$, i en què B és una constant que hem de determinar. Això ho fem substituint aquesta funció a (5) i comprovant que se satisfà la igualtat si $B = \mu g/k$. En conseqüència, $x(t)$ queda com

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi) + \frac{\mu g}{k} \quad (6)$$

en què A i ϕ queden determinades per les condicions inicials. Segons l'enunciat tenim que:

- A $t = 0$, els blocs estaven en equilibri: $kx(0) = m_2 g$. I per (6) queda, doncs, la condició

$$A \cos \phi = \frac{(m_2 - \mu)g}{k}$$

- A $t = 0$, els blocs estaven en repòs: $v(0) = 0$. Derivant (6) obtenim

$$0 = -\omega_0 A \sin \phi$$

D'aquestes dues últimes equacions trobem $\phi = 0$ i $A = (m_2 - \mu)g/k$, amb la qual cosa l'elongació de la molla (6) podem posar-la com

$$x(t) = \frac{\mu g}{k} \left(1 + \frac{m_2}{m_1} \cos \omega_0 t \right) \quad (7)$$

Pel que fa al moviment del segon bloc, ara només hem de combinar l'equació (2) amb la (3) i substituir a la (3) la x per la donada a (7); és a dir,

$$\frac{d^2x_2}{dt^2} = g - \frac{k}{m_2}x \quad \text{d'on} \quad \frac{dv_2}{dt} = \frac{m_2 g}{m_1 + m_2} (1 - \cos \omega_0 t)$$

Integrant aquesta última considerant que la velocitat inicial és 0, trobem la velocitat v_2 de "caiguda" del segon bloc

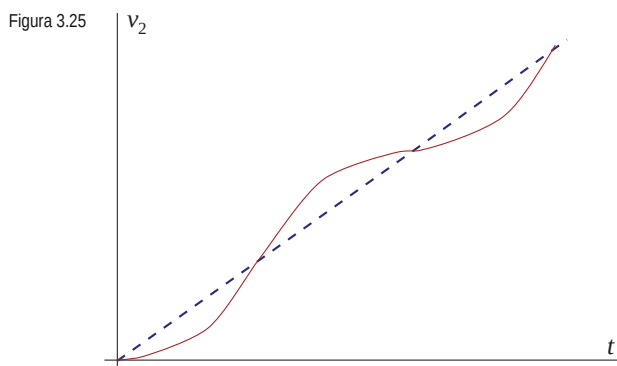
$$v_2 = \frac{m_2 g}{m_1 + m_2} \left(t - \frac{1}{\omega_0} \sin \omega_0 t \right) \quad (8)$$

Observem que la primera part d'aquesta igualtat

$$v_2^{no} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} g t \quad (9)$$

és la que correspon a la caiguda que faria el bloc si no hi hagués molla o aquesta fos inextensible. Per tant, l'efecte que fa la molla sobre el moviment és superposar a la caiguda que faria el bloc sense molla un MHS de freqüència ω_0 i amplitud $A' = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \frac{g}{\omega_0^2}$.

A la figura 3.25 s'han representat en funció del temps les velocitats d'aquests dos moviments: a) en línia discontinua, el cas en què no hi hagués la molla —expressió (9)—, i b) en línia contínua, el cas en què hi hagués la molla —expressió (8).

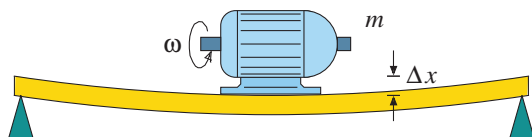


3.7.2. Problemes proposats

Problema 3.10. Motor sobre una biga

Després de collar un motor elèctric giratori de $m = 18$ kg de pes a una biga horitzontal, aquesta s'ha flexionat $\Delta x = 6$ mm —v. figura 3.26.

Figura 3.26



- Si no és convenient que la biga es flexioni gaire, quina velocitat angular, en revolucions per minut (rpm), cal evitar especialment?
- Si el rotor giratori del motor, que pesa $M = 8$ kg, està descentrat $a = 0,5$ cm respecte de l'eix de rotació, quina amplitud tindran les oscil·lacions de la biga quan estigui funcionant el motor a 350 rpm?

Resp.: a) $\omega = \sqrt{\frac{g}{\Delta x}} = 386$ rpm, b) $A = \frac{M}{m} \frac{a\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2} = 1,02$ cm

Problema 3.11. Conduint sobre dunes ondulades

Un cotxe tot-terreny —v. figura 3.27— té en els amortidors molles que, descansant sobre els eixos de les rodes, suporten el pes del cotxe carregat, $m = 2100$ kg —excepte les rodes i els eixos. La constant de força conjunta d'aquestes molles és $k = 1,5 \times 10^5$ N/m.

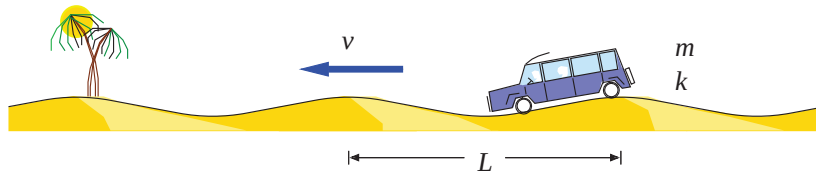


Figura 3.27

Si aquest cotxe es desplaça uniformement per un terreny sinuós —les dunes del desert— i la distància entre màxims és $L = 15$ m, quina velocitat hauria d'evitar especialment el conductor per tal que càrrega i passatgers no vibressin excessivament per l'efecte de les oscil·lacions forçades pel terreny?

Resp.: $20,2 \text{ m/s} = 72,6 \text{ km/h}$

Problema 3.12. Excursionista a l'aigua!

Per poder travessar un riu estret hi ha un tauló llarg que va d'un marge fins a l'altre. Un excursionista caminant molt a poc a poc, amb prudència, arriba fins al mig, s'atura i observa que el tauló s'ha flexionat “només” 12 cm. Creu que és poc, agafa confiança i segueix cap a l'altre costat de la riera com si res, despreocupat, caminant a $3,8 \text{ km/h}$. Però el tauló comença a vibrar i l'excursionista cau a l'aigua. Quina part de la física haurà recordat en caure a l'aigua? Quina longitud tenien els seus passos sobre el tauló?

Resp.: Uns 73 cm

Problema 3.13. Oscil·lacions amortides i forçades

Un oscil·lador harmònic feblement amortit de massa $m = 0,1 \text{ kg}$ i constant de força $k = 394,8 \text{ N/m}$, perd, després de cada oscil·lació lliure, un 2% de la seva amplitud. Si hi apliquem una força impulsora sinusoidal d'amplitud $F_0 = 1 \text{ N}$ per tal que les oscil·lacions no s'esmoreixin, esbrineu:

- Quina ha de ser la freqüència f d'aquesta força si volem que l'oscil·lador en tregui el màxim profit?
- Quant valdrà el factor de qualitat Q del sistema?
- Quant valdrà, en aquestes circumstàncies, la seva impedància Z , l'amplitud A de les oscil·lacions estacionàries, així com la potència transmesa a l'oscil·lador?

Resp.: a) $f = 10 \text{ Hz}$, b) $Q = 155,5$, c) $Z = 0,04040 \text{ kg/s}$, $A = 0,3939 \text{ m}$, $P = 12,4 \text{ W}$

Problema 3.14. Oscil·lació forçada d'una partícula

Una partícula de massa $m = 0,050 \text{ kg}$, unida a una molla de constant $k = 160 \text{ N/m}$, fricciona amb un fluid viscos en què la constant d'amortiment és $b = 2 \text{ kg/s}$. Si sobre la partícula actua una força impulsora externa sinusoidal d'amplitud $F_0 = 2 \text{ N}$ i freqüència $\omega = 40 \text{ rad/s}$, esbrineu:

- la impedància Z del sistema;
- l'amplitud A de l'oscil·lació estacionària i de la seva velocitat, ωA ;



- c) l'angle de desfasament ε entre la força impulsora i la velocitat;
- d) la freqüència angular a la qual hi hauria ressonància;
- e) l'amplitud de la velocitat i de l'elongació que tindrien les oscil·lacions en aquest últim cas.

Resp.: a) $Z = 2,83 \text{ kg/s}$, b) $\omega A = 0,707 \text{ m/s}$, $A = 0,0177 \text{ m}$, c) $\varepsilon = -\frac{\pi}{4} \text{ rad}$,

d) $\omega_0 = 56,6 \text{ rad/s}$, e) $V_{0\text{RES}} = 1,00 \text{ m/s}$, $A_{0\text{RES}} = 0,0177 \text{ m}$

Problema 3.15. Més sobre oscil·lacions forçades

Un oscil·lador està constituït per una partícula de massa $m = 0,050 \text{ kg}$, unida a una molla de constant $k = 800 \text{ N/m}$. El sistema fricciona amb un fluid viscos en què la constant d'amortiment és $b = 1,5 \text{ kg/s}$. Si sobre la partícula actua una força impulsora externa harmònica d'amplitud $F_0 = 20 \text{ N}$ i freqüència angular $\omega = 100 \text{ rad/s}$, esbrineu:

- a) la impedància Z del sistema i l'angle de desfasament ε entre la força impulsora i la velocitat;
- b) la potència mitjana subministrada per la força externa a l'oscil·lador; quin tant per cent representa aquesta potència respecte a la màxima que s'aconseguiria en la ressonància?
- c) Per a quina freqüència ω hi hauria ressonància? I per sobre de quina freqüència la potència mitjana subministrada és inferior al 50% de la potència de la ressonància?

Resp.: a) $Z = 3,354 \text{ kg/s}$, $\varepsilon = -63,43^\circ$, b) $\langle P \rangle = 26,67 \text{ W}$, 20,0%,

d) $\omega = 126,49 \text{ rad/s}$, $\omega = 141,49 \text{ rad/s}$

Problema 3.16. Oscil·lacions forçades a causa del moviment d'una plataforma

Un bloc de massa $m = 0,1 \text{ kg}$ es penja de l'extrem inferior d'una molla de constant $k = 600 \text{ N/m}$, que tenim agafada verticalment a una plataforma per l'altre extrem. Aquesta plataforma fa un MHS vertical d'amplitud $a = 3 \text{ cm}$. Fent diverses proves amb la freqüència d'oscil·lació de la plataforma comprovem que la màxima amplitud del moviment oscil·latori del bloc val $A = 12 \text{ cm}$. Quant valen el factor de qualitat Q d'aquest sistema i la potència mitjana subministrada a l'oscil·lador?

Resp.: $Q = 4,0$, $\langle P \rangle = 83,7 \text{ W}$

Problema 3.17. Oscil·lador molt amortit forçat

Una partícula de massa $m = 1 \text{ g}$ està unida a una molla de constant recuperadora $k = 5,0 \text{ N/cm}$ i a un amortidor. Quan la partícula oscil·la, a causa de l'amortiment, ho fa amb una freqüència que és un 90% de la seva freqüència pròpia.

- a) En quin factor disminueix la seva energia després de cada oscil·lació?
- b) Si li apliquem una força externa harmònica de freqüència la de ressonància, quant ha de valer l'amplitud F_0 de la força externa per tal que la partícula oscil·li amb una amplitud constant de 2 cm ?
- c) Quant val, en aquest cas, la potència P transmesa de la força externa a la partícula?



- d) A quina freqüència de la força externa l'amplitud de l'oscil·lació es faria màxima i quant valdria en aquest nou cas, suposant que l'amplitud de la força fos la F_0 trobada a l'apartat (b)?

Resp.: a) 0,227%, b) $F_0 = 8,72 \text{ N}$, c) $P = 61,6 \text{ W}$, d) 88,6 Hz, 2,22 m

Problema 3.18. Estat transitori, impedància i ressonància

Un cos de massa $m = 0,010 \text{ kg}$ està lligat a una molla de constant de força $k = 0,050 \text{ N/m}$ i a un petit amortidor de constant $b = 0,030 \text{ kg/s}$. Si sobre aquest cos apliquem una força harmònica d'amplitud $F_0 = 0,10 \text{ N}$ i de freqüència angular $\omega = 50 \text{ rad/s}$, esbrineu, per al moviment del cos en l'estat estacionari:

- la impedància mecànica i l'amplitud de la velocitat i de l'elongació.
- Per a quina freqüència angular la partícula entraria en ressonància i quant valdria, en aquest cas, la velocitat màxima de la partícula? I l'amplitud de l'elongació corresponent?
- Per cert, d'un oscil·lador d'aquestes característiques, quant dura l'estat transitori?

Resp.: a) 0,500 kg/s, 0,200 m/s, 4,00 mm,

b) $\omega_{RES} = 2,24 \text{ rad/s}$, 3,33 m/s, 1,49 m, c) Entre 3,5 i 5 s

Problema 3.19. Simetria del pic de la potència mitjana

Considerem un oscil·lador amortit forçat per una força impulsora harmònica de freqüència ω i sigui ω_0 la freqüència de la ressonància.

- Demostreu que la potència mitjana subministrada a l'oscil·lador és la mateixa, tant si $\omega = \kappa\omega_0$ com si $\omega = \omega_0/\kappa$, on $\kappa > 0$. Observeu la gràfica de la figura 3.14 i interpreteu geomètricament aquest resultat.
- Fent les aproximacions necessàries, demostreu que, en un entorn petit del màxim —on $\kappa = 1$ — la gràfica de la potència és simètrica.

Problema 3.20. Gràfica del pic de la potència

A la figura 3.28 s'ha representat la potència mitjana $\langle P \rangle$ que adquireix un oscil·lador forçat en funció de la freqüència angular ω de la força externa.

- Observeu la gràfica. Quant val, aproximadament, el factor de qualitat Q del sistema?
- Si la freqüència de ressonància fos als 160 rad/s, quant valdria, en aquest cas, el paràmetre d'amortiment β ?

Resp.: $Q \approx 8$, $\beta \approx 10 \text{ s}^{-1}$

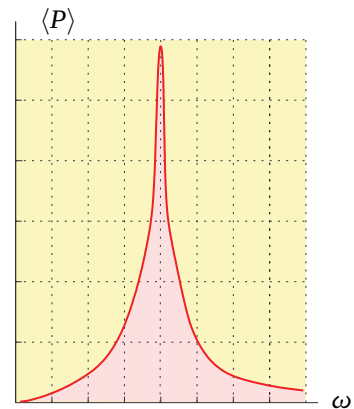


Figura 3.28



Problema 3.21. Potència d'un oscil·lador forçat

La freqüència natural d'un oscil·lador forçat és de 250 Hz i el seu paràmetre d'amortiment $\beta = 10 \text{ s}^{-1}$.

- Esbrineu-ne el factor de qualitat Q i l'amplada de la ressonància.
- A partir de quina freqüència superior a la natural la potència mitjana absorbida per l'oscil·lador és inferior a la meitat de la corresponent en la ressonància?

Resp.: a) $Q = 78,5$, $\Delta f = 3,18 \text{ Hz}$, b) $f_{1/2} = 251,6 \text{ Hz}$

Problema 3.22. Oscil·lacions amortides i forçades

Disposem de dues molles, la 1 i la 2, de constants de força $k_1 = 200 \text{ N/m}$ i $k_2 = 100 \text{ N/m}$, respectivament, i un bloc de ferro de $m = 2 \text{ kg}$. Pengem la molla 1 del sostre i la 2 a continuació de la 1. Després, pengem de l'extrem inferior de la 2 la massa i la deixem caure pel seu propi pes per tal que comenci a oscil·lar. Sabent que el moviment és molt poc amortit, esbrineu:

- En quina proporció del total s'allargaran cadascuna de les dues molles durant el moviment?
- Quanta energia tindrà inicialment el sistema? Supposeu l'origen d'energia potencial en el punt d'equilibri.
- Si també sabem que cada 10 oscil·lacions l'amplitud es redueix a $3/5$ de la inicial, quant val la constant d'amortiment del sistema?
- Trobeu la potència mitjana que es dissipa a l'inici de l'oscil·lació n -ésima.
- A partir d'ara, per mitjà d'un electroimant, volem provocar oscil·lacions forçades verticals en el bloc de ferro. Entre quins valors màxim i mínim ha d'estar la freqüència de la força harmònica externa aplicada per tal que la potència mitjana transmesa a l'oscil·lador sigui més gran que la meitat de la màxima possible?
- Suposem que ajustem els paràmetres de la força externa per tal que el sistema estigui en ressonància. Amb una amplitud de la força externa de $0,10 \text{ N}$, quina amplitud arribaran a tenir les oscil·lacions forçades estacionàries?
- Continuant en condicions de ressonància, 50 oscil·lacions després que s'hi hagi aplicat la força externa, estaran aquestes plenament en l'estat estacionari?

Resp.: a) $\frac{x_1}{x} = \frac{1}{3}$, $\frac{x_2}{x} = \frac{2}{3}$, b) $E_0 = 2,89 \text{ J}$, c) $b = 0,188 \text{ kg/s}$,

d) $P(n) = -0,271 e^{-0,102 \cdot n} \text{ W}$, e) $0,911 \leq f \leq 0,926 \text{ Hz}$,

f) $A_R = 9,23 \text{ cm}$, g) Encara no: $50 \cdot T_0 = 54,4 \text{ s} < 3 \frac{1}{\beta} = 63,9 \text{ s}$

Problema 3.23. Rotor desequilibrat

Un motor de massa $M = 40 \text{ kg}$ es troba sobre quatre molles iguals de constant $k = 2800 \text{ N/cm}$ —v. figura 3.29. El rotor d'aquest motor, que gira a una velocitat angular de $\omega = 1200 \text{ rpm}$, té un desequilibri equivalent a una massa $m = 100 \text{ g}$ situada a $r = 15 \text{ cm}$ de l'eix de gir.



- a) Suposant que aquest motor només pot vibrar verticalment, trobeu l'amplitud d'aquestes oscil·lacions forçades. El motor porta un amortidor de constant $b = 800 \text{ kg/s}$.
- b) A quantes rpm del rotor es produiria la ressonància i quant valdria, en aquest cas, l'amplitud de les oscil·lacions forçades?

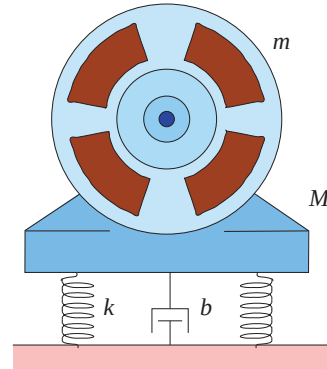


Figura 3.29

Resp.: a) $A = 0,475 \text{ mm}$,
 b) $f_{RES} = 1598 \text{ rpm}$,
 $A_{RES} = 3,14 \text{ mm}$

Problema 3.24. Oscil·lacions angulars forçades en una barra

Una barra de massa $m = 4 \text{ kg}$ i longitud $2L = 2 \text{ m}$ que, com es mostra a la figura 3.30, està lligada per un dels extrems a una molla vertical de constant $k = 4000 \text{ N/m}$ pot girar al voltant del seu punt mitjà O . La barra també està connectada a un petit amortidor de constant d'amortiment $b = 20 \text{ kg/s}$ a la distància $a = 0,50 \text{ m}$ de O . Si a l'altre extrem de la barra aquesta té aplicada una força impulsora harmònica de mòdul $F_0 = 75 \text{ N}$ i freqüència $f = 10 \text{ Hz}$, esbrineu:

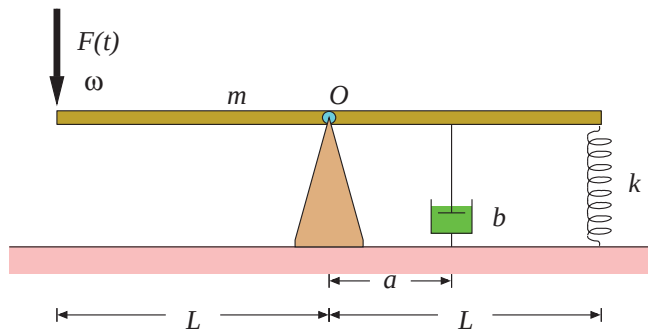


Figura 3.30

- a) L'equació diferencial del moviment de la barra. Quina és la freqüència pròpia de la barra?
- b) Quant valen analíticament i numèricament, en aquest cas, el paràmetre d'amortiment β i la impedància Z , aquesta última definida tal que $L\dot{\Theta} = F_0/Z$, essent $\dot{\Theta}$ l'amplitud de la velocitat angular de les oscil·lacions?
- c) L'amplitud angular de les oscil·lacions estacionàries.
- d) L'amplitud que tindrien en la ressonància.

Resp.: a) $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \left(\frac{3a^2b}{mL^2}\right) \frac{d\theta}{dt} + \left(\frac{3k}{m}\right) \theta = \frac{3F_0}{mL} \cos \omega t$, $f_0 = 8,72 \text{ Hz}$,

$$b) \beta = \frac{3a^2b}{2mL^2} = 1,88 \text{ s}^{-1}, Z = \sqrt{\left(\frac{m\omega}{3} - \frac{k}{\omega}\right)^2 + \frac{a^4b^2}{L^4}} = 20,7 \text{ kg/s},$$

$$c) \Theta = 3,30^\circ, \quad d) \Theta_{RES} = 13,68^\circ$$

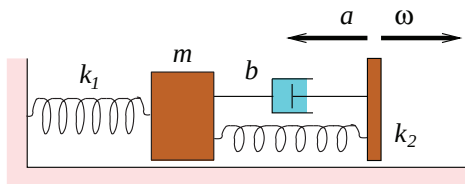
Problema 3.25. Pèndol simple forçat

El punt de suspensió d'un pèndol simple de longitud L i lentilla de massa m es desplaça horitzontalment efectuant un MHS d'amplitud a i freqüència angular ω : $x'(t) = a \sin \omega t$. Comproveu que, per a les petites oscil·lacions del pèndol, aquest es comporta com un oscil·lador lineal forçat per una força de tipus: $F(t) = mg \frac{a}{L} \cos \omega t$.

Problema 3.26. Oscil·lacions forçades per un MHS extern

Un petit bloc de massa m està lligat a una paret fixa per una molla de constant k_1 i a una paret mòbil vibratòria per una molla de constant k_2 i un amortidor de constant b —v. figura 3.31. Si l'oscil·lació de la paret és del tipus $x'(t) = a \cos \omega t$, trobeu l'equació de moviment de l'oscil·lació forçada que fa el bloc.

Figura 3.31



Resp.:
$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k_1 + k_2}{m} x = -\frac{F_0}{m} \sin(\omega t + \alpha),$$

amb $F_0 = a\sqrt{k_2^2 + b^2\omega^2}$, $\tan \alpha = \frac{-k_2}{b\omega}$

Problema 3.27. Amplada de la ressonància

Demostreu l'expressió (3.39) — $\Delta\omega = 2\beta$ — sobre l'amplada de la ressonància.

Problema 3.28. Oscil·lacions i força externa no periòdica

Un sistema consta d'una massa m unida a una molla de constant de força k , sense que hi hagi amortiment. Inicialment, la massa estava en repòs a l'origen i, a partir de $t = 0$, s'hi aplica una força externa en la direcció x del moviment de la massa, de la forma

$$F(t) = F_0 e^{-\gamma t}$$

on F_0 i γ són dues constants. a) Quin moviment $x(t)$ farà la massa com a resposta a la força aplicada? Comproveu per substitució directa a l'equació diferencial del moviment que $x(t)$ és del tipus

$$x(t) = A(e^{-\gamma t} + B \sin \omega_0 t + C \cos \omega_0 t)$$

on $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, i A , B i C són constants que s'han de determinar.

b) Interpreteu la funció anterior. i) Hi ha un estat transitori i un estat estacionari? ii) Té sentit aquí el concepte de ressonància?

Resp.: a) $A = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 + \gamma^2)}$, $B = \frac{\gamma}{\omega_0}$, $C = -1$. b) i) Sí, n'hi ha. ii) No té sentit.





Superposició de MHS

4.1. Linealitat i superposició

Considerem un oscil·lador forçat per una força impulsora $F_1(t)$ i sigui $x_1(t)$ l'elongació resultant de la partícula. De cara al que veurem a continuació, la força $F_1(t)$ no té per què ser necessàriament sinusoidal, ni tan sols periòdica. Amb la notació de la secció §3.1 sobre oscil·lacions forçades, sabem que l'equació del moviment que ha de satisfer la funció $x_1(t)$ és

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} + 2\beta \frac{dx_1}{dt} + \omega_0^2 x_1 = \frac{1}{m} F_1(t)$$

Com ja hem vist aquesta és una equació diferencial *lineal*, és a dir, la funció solució $x_1(t)$, la seva derivada i la seva segona derivada estan elevades a la potència 1 (o zero). Aquesta condició de linealitat de l'equació diferencial és molt important perquè, com veurem a continuació, simplifica molt la recerca de solucions i l'estudi del moviment.

Considerem el mateix oscil·lador, però sotmès ara a una altra força impulsora, la $F_2(t)$, i sigui $x_2(t)$ l'elongació de la partícula en aquestes noves circumstàncies. L'equació diferencial per a $x_2(t)$ és ara

$$\frac{d^2x_2}{dt^2} + 2\beta \frac{dx_2}{dt} + \omega_0^2 x_2 = \frac{1}{m} F_2(t)$$

Què passaria si aquest mateix oscil·lador estigués sotmès a la força impulsora $F = F_1 + F_2$? Doncs que l'elongació x que seguiria la partícula és, precisament, $x = x_1 + x_2$. Comprovem-ho.

Si a l'equació diferencial corresponent a $F = F_1 + F_2$ substituïm $x = x_1 + x_2$, tenim

$$\begin{aligned} & \frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \\ &= \frac{d^2(x_1 + x_2)}{dt^2} + 2\beta \frac{d(x_1 + x_2)}{dt} + \omega_0^2 (x_1 + x_2) = \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{d^2 x_1}{dt^2} + 2\beta \frac{dx_1}{dt} + \omega_0^2 x_1 \right) + \left(\frac{d^2 x_2}{dt^2} + 2\beta \frac{dx_2}{dt} + \omega_0^2 x_2 \right) = \\
&= \frac{1}{m} F_1 + \frac{1}{m} F_2 = \frac{1}{m} F
\end{aligned}$$

Aquest resultat, conseqüència de la *linealitat* d'aquestes equacions diferencials, s'anomena *principi de superposició*. Naturalment, el que hem fet es pot estendre a més de dues funcions força $F_n(t)$ i, fins i tot, no tenen per què tenir la mateixa direcció. Així doncs, el principi de superposició ens assegura que:

Si, sota l'acció d'una sola força impulsora $F_n(t)$, el moviment és $r_n(t)$, si actuen simultàniament totes les forces $F_n(t)$ el moviment resultant serà la suma dels moviments individuals $r_n(t)$, amb $n = 1, 2, \dots, N$, és a dir,

$$\begin{aligned}
\text{si } F_n(t) &\implies r_n(t) \\
\text{si } \sum_{n=1}^N F_n(t) &\implies \sum_{n=1}^N r_n(t)
\end{aligned}$$

4.2. Superposició de dos MHS de la mateixa direcció

Considerem un oscil·lador sotmès a una força impulsora externa harmònica $F_1(t)$ de freqüència angular ω_1 . En l'estat estacionari, el moviment de la partícula és de la mena

$$x_1(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) \quad (4.1)$$

Considerem ara el mateix oscil·lador sotmès a una altra força impulsora harmònica $F_2(t)$ de la mateixa direcció que F_1 però de freqüència angular ω_2 . En l'estat estacionari el moviment de la partícula serà

$$x_2(t) = A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) \quad (4.2)$$

Pel principi de superposició que hem vist a la secció anterior, sabem que, si ara actuen totes dues forces $F = F_1 + F_2$ sobre l'oscil·lador, l'elongació x de la partícula val

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) \quad (4.3)$$

Sense que ens importi l'origen de x_1 i de x_2 a partir d'ara estudiarem les propietats que presenta $x(t)$, el moviment resultant de la superposició de x_1 més x_2 .

Segons quine siguin les freqüències ω_1 i ω_2 , podem considerar tres casos particulars.

4.2.1. Freqüències iguals

És a dir, que $\omega_1 = \omega_2 = \omega$. Aquest cas és el més senzill perquè el moviment resultant és un altre MHS de freqüència ω i d'amplitud A i fase inicial ϕ . Vegem-ho.

Fent els desenvolupaments trigonomètrics corresponents:

$$\begin{aligned}
x &= x_1 + x_2 = \\
&= A_1 \cos(\omega t + \phi_1) + A_2 \cos(\omega t + \phi_2) =
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &= A_1(\cos \omega t \cos \phi_1 - \sin \omega t \sin \phi_1) + A_2(\cos \omega t \cos \phi_2 - \sin \omega t \sin \phi_2) = \\
 &= \cos \omega t \cdot (A_1 \cos \phi_1 + A_2 \cos \phi_2) - \sin \omega t \cdot (A_1 \sin \phi_1 + A_2 \sin \phi_2) \equiv \\
 &\equiv A \cos(\omega t + \phi) = \\
 &= \cos \omega t \cdot A \cos \phi - \sin \omega t \cdot A \sin \phi
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

Identificant els coeficients de $\cos \omega t$ i $\sin \omega t$, tenim

$$A \cos \phi = A_1 \cos \phi_1 + A_2 \cos \phi_2$$

$$A \sin \phi = A_1 \sin \phi_1 + A_2 \sin \phi_2$$

d'on, elevant al quadrat i sumant, resulten A i ϕ . Per tant, queda demostrat que el moviment és un MHS amb

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\phi_1 - \phi_2) \tag{4.5}$$

$$\tan \phi = \frac{A_1 \sin \phi_1 + A_2 \sin \phi_2}{A_1 \cos \phi_1 + A_2 \cos \phi_2} \tag{4.6}$$

Malgrat que ja hem vist trigonomètricament que el moviment resultant és un MHS, és molt enriquidor tornar a veure això mateix però des del punt de vista dels fasors.

Recordem que un fasor —v. secció §1.1.1— és un vector situat a l'origen que gira a una velocitat angular constant i que, per tant, la seva component x fa un MHS. Així doncs, tal com s'indica a la figura 4.1, considerem dos fasors, el $\mathbf{A}_1$ i el $\mathbf{A}_2$, de mòduls A_1 i A_2 , que giren amb la mateixa velocitat angular ω . Les seves fases inicials són, respectivament, ϕ_1 i ϕ_2 , i l'angle constant que formen entre si és $\Delta\phi = \phi_1 - \phi_2$.

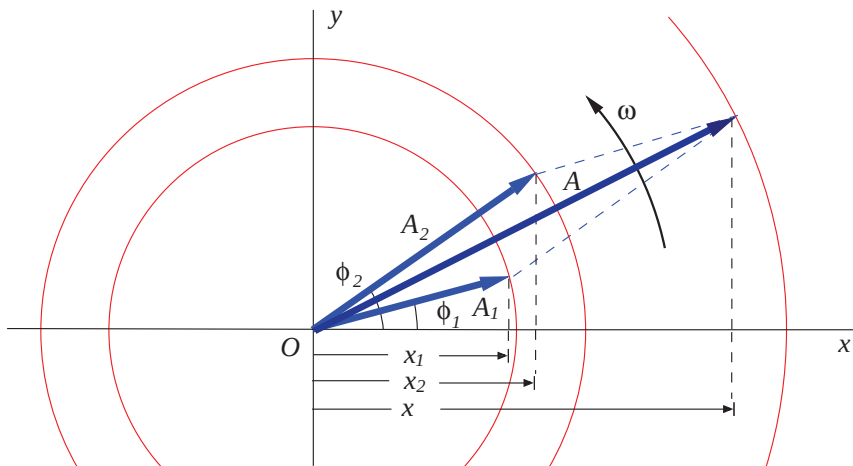


Figura 4.1

Les components x respectives de cadascun dels dos fasors representen dos MHS d'amplituds A_1 i A_2 i fases inicials ϕ_1 i ϕ_2 , respectivament. La suma d'aquests dos fasors és un altre fasor, $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2$ i, com que la component x de la suma de dos vectors és la suma de les components x de cadascun d'ells, llavors la component x del fasor $\mathbf{A}$ és la suma dels dos MHS, x_1 més x_2 . Conseqüentment, el moviment resultant és un altre MHS

de la mateixa freqüència l'amplitud i la fase inicial del qual podem trobar per la regla de la suma de vectors. Naturalment, aquests resultats coincideixen amb els (4.5) i (4.6) anteriors.

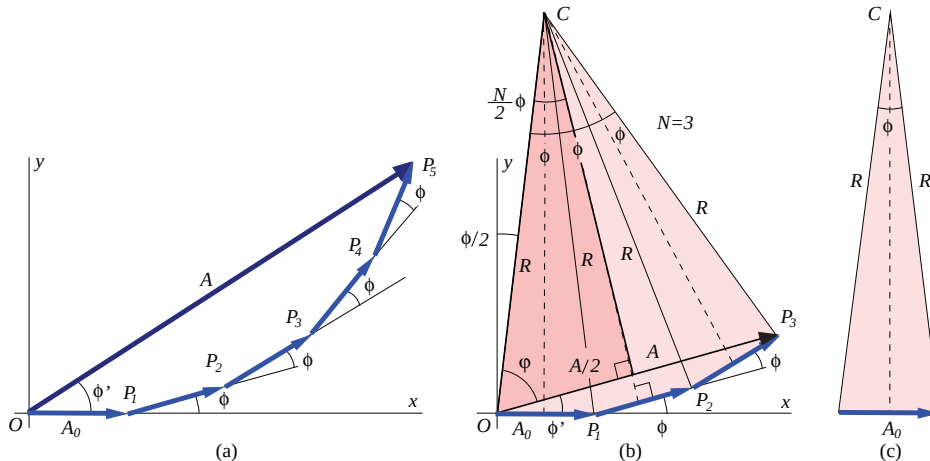
4.2.2. Superposició de N MHS proporcionalment desfasats

Una extensió especialment interessant del que acabem de veure és el cas de la superposició de N MHS de la mateixa direcció, la mateixa freqüència i la mateixa amplitud, desfasats entre si un múltiple enter del mateix angle ϕ . Pel que acabem de veure, sabem que el moviment resultant serà un nou MHS. Així doncs, tenim que

$$\begin{aligned} x(t) &= A_0 \cos \omega t + A_0 \cos(\omega t + \phi) + A_0 \cos(\omega t + 2\phi) + \dots + A_0 \cos(\omega t + (N-1)\phi) = \\ &\equiv A \cos(\omega t + \phi') \end{aligned} \quad (4.7)$$

Ara només es tracta de trobar els valors de A i ϕ' . Com en la secció anterior, podem intentar-ho amb desenvolupaments trigonomètrics però, per mitjà dels fasors, és bastant més fàcil i formatiu. En efecte, com hem vist abans, el MHS resultant és el corresponent al vector-fasor suma dels N MHS constituents. Tenint en compte que tots els fasors-MHS són de la mateixa amplitud A_0 i que tots estan desfasats de l'anterior l'angle ϕ , la geometria del problema és molt senzilla. A la figura 4.2 (a) es mostra, per al cas $N = 5$, el fasor del MHS resultant com la suma dels $N = 5$ fasors participants. Fixem-nos com el fasor i forma un angle ϕ amb la direcció de l'anterior $i - 1$. L'amplitud A del MHS resultant és el mòdul del vector-fasor $\vec{OP}_5$, suma de $\vec{OP}_1, \vec{P_1P_2}, \dots$, etc.

Figura 4.2



Per trobar el valor de A només cal que tracem rectes perpendiculars als fasors que passin pels respectius centres —línies discontinúes a la figura 4.2 (b), en què es mostra el cas per a $N = 3$, així com el triangle corresponent a 1 fasor, figura 4.2 (c). Totes aquestes rectes es tallen en el mateix punt C . Com que tots els fasors tenen el mateix mòdul A_0 i es van desviant uniformement, la successió de fasors determina un arc de circumferència de centre a C , radi R i un angle, en general, $N\phi$. Observem que el centre C és a la dreta de l'eix y . Dels angles rectes corresponents —v. figures (b) i (c) anteriors— trobem

$$\sin \frac{N\phi}{2} = \frac{A/2}{R}, \quad \sin \frac{\phi}{2} = \frac{A_0/2}{R}$$



d'on resulta

$$A = A_0 \frac{\sin \frac{N\phi}{2}}{\sin \frac{\phi}{2}} \quad (4.8)$$

I, pel que fa al desfasament ϕ' , de les mateixes figures anteriors veiem que $\phi' = 90^\circ - \frac{\phi}{2} - \varphi$, essent $\varphi = 90^\circ - \frac{N\phi}{2}$, és a dir, que

$$\phi' = (N-1) \frac{\phi}{2} \quad (4.9)$$

El resultat (4.8) és important per si mateix, però sobre amb vista a l'estudi de les interferències d'ones harmòniques degudes a N fonts coherents i al de la difracció d'una ona per una esclatxa rectangular.

4.2.3. Freqüències diferents

El cas general de freqüències diferents el podem tractar com acabem de fer per al cas de les freqüències iguals. Tant si ho fem per trigonometria com si ho fem per la suma dels dos fasors —ara de velocitats angulars diferents—, veiem que l'expressió equivalent a la (4.5) per a l'amplitud A del moviment és

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos\{(\omega_1 - \omega_2)t + (\phi_1 - \phi_2)\} \quad (4.10)$$

i, en conseqüència, el moviment no serà un MHS. A passa per un mínim, $|A_2 - A_1|$; per un màxim, $A_1 + A_2$, i per tots els valors intermedis.

És interessant assenyalar que, com en totes les superposicions de dos MHS, el moviment només serà periòdic si el període d'un, T_1 , i el període de l'altre, T_2 , estan en una relació de nombres enters, és a dir, si hi ha existeixen dos nombres enters n_1 i n_2 tals que $n_1 T_1 = n_2 T_2$. Si, de tots els enters n_1 i n_2 que satisfan la igualtat anterior, agafem els més petits, tindrem el mínim comú múltiple de T_1 i T_2 , és a dir, el període T del moviment resultant

$$T = n_{1_{\min}} T_1 = n_{2_{\min}} T_2$$

4.2.4. Freqüències lleugerament diferents. Pulsacions

Freqüències ω_1 i ω_2 lleugerament diferents vol dir que:

$$\omega_1 \neq \omega_2 \quad \text{però} \quad |\Delta\omega| = |\omega_1 - \omega_2| \ll \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = \omega \approx \omega_1 \approx \omega_2 \quad (4.11)$$

Aquest és un cas particular del que hem vist a §. Per tal de simplificar els càlculs trigonomètrics, suposarem, sense perdre generalitat, que les dues oscil·lacions tenen la mateixa amplitud A , la mateixa fase inicial i que aquesta és zero. Tindrem, doncs

$$\begin{aligned} x &= x_1 + x_2 = A \cos \omega_1 t + A \cos \omega_2 t = A(\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t) = \\ &= 2A \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right) \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right) \end{aligned} \quad (4.12)$$

que, amb la notació de (4.11), ens queda com

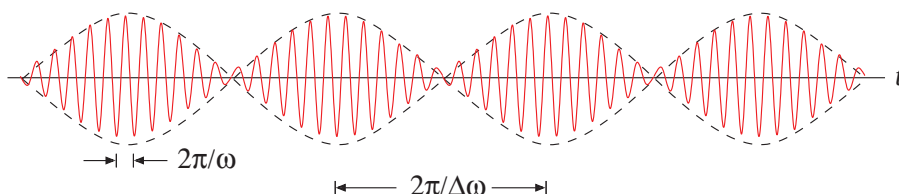
$$x(t) = 2A \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right) \cos\omega t \quad (4.13)$$

és a dir, una mena de moviment harmònic de freqüència ω molt semblant a les dues originals, ω_1 i ω_2 , però d'una *amplitud efectiva* A_{ef} donada per:

$$A_{ef} = 2A \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right) \quad (4.14)$$

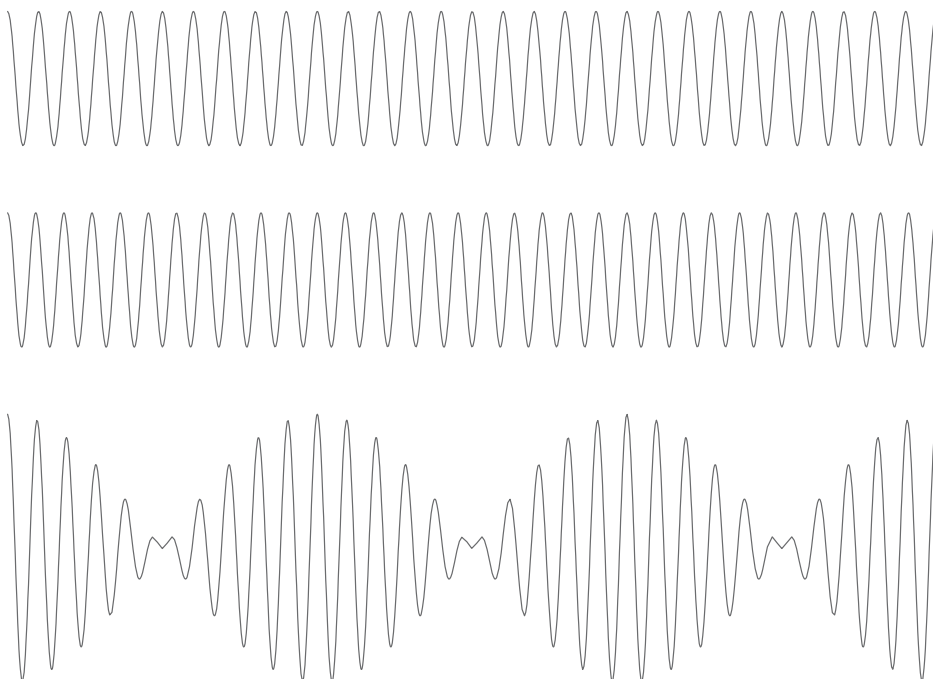
Tenim, doncs, una oscil·lació semblant a un MHS però amb una *amplitud modulada* d'una freqüència $\Delta\omega/2$. Aquest efecte s'anomena *pulsacions*. A la figura 4.3 s'hi ha representat la funció resultant $x(t)$ i el significat dels dos períodes $T = 2\pi/\omega$ i $T_p = 2\pi/\Delta\Omega$. La freqüència $\omega_p = 2\pi/T_p = \Delta\Omega$ s'anomena *freqüència de les pulsacions*.

Figura 4.3



A la figura 4.4 s'observen les pulsacions corresponents a la superposició de les dues oscil·lacions concretes: $x_1 = \cos 5t$, $x_2 = \cos 5,5t$.

Figura 4.4





4.3. Superposició de dos MHS de direccions perpendiculars

D'acord amb la freqüència considerem dos casos.

4.3.1. Freqüències iguals

Seria el cas en què les oscil·lacions fossin de la forma

$$x(t) = A \cos \omega t \quad (4.15)$$

$$y(t) = B \cos(\omega t + \phi) \quad (4.16)$$

on, sense perdre generalitat, hem pres la fase inicial del moviment de x com a zero. D'aquestes expressions, trobem

$$\frac{x}{A} = \cos \omega t \quad \frac{y}{B} = \cos(\omega t + \phi) = \cos \omega t \cos \phi - \sin \omega t \sin \phi$$

i, combinant les igualtats anteriors, s'arriba a

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - \frac{2xy}{AB} \cos \phi = \sin^2 \phi \quad (4.17)$$

Abans de continuar, recordem que l'equació general de les *còniques* és de la forma $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$; la cònica és una el·lipse si $b^2 - 4ac < 0$, i està centrada a l'origen si $d = e = 0$.

Així doncs, (4.17) és l'equació d'una *el·lipse* centrada a l'origen però d'eixos principals que no es corresponen als eixos x i y del sistema de coordenades.

Com que els màxims i els mínims de $x(t)$ i de $y(t)$ són, respectivament, $\pm A$ i $\pm B$, resulta que l'el·lipse està inscrita en un rectangle centrat de costats $2A \times 2B$. A les figures 4.5 (a) i (b), es mostren dos casos possibles d'aquestes el·lipses.

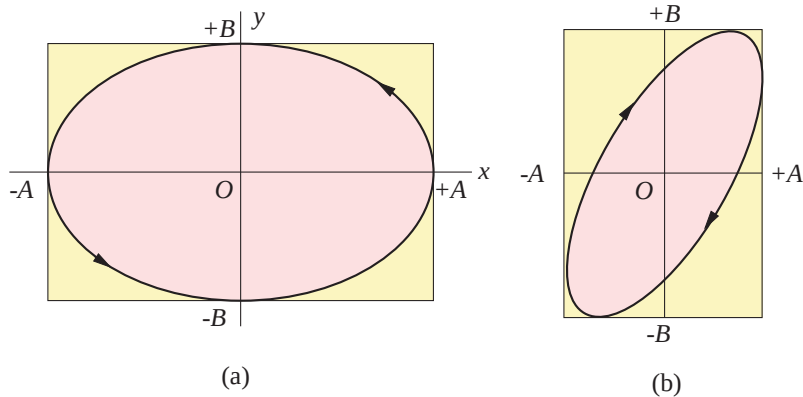
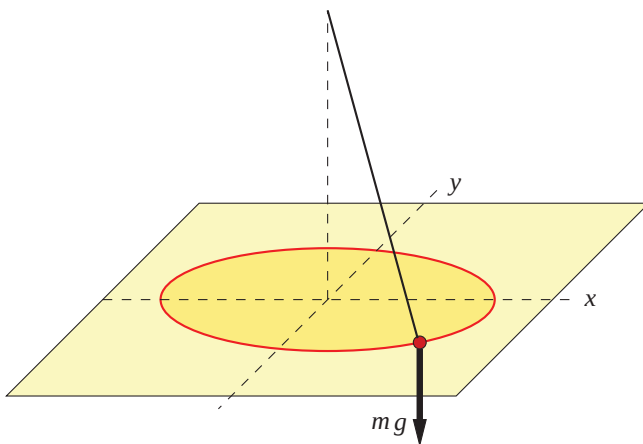


Figura 4.5

Fixeu-vos que un pèndol simple en què la lentilla es pugui moure lliurement en un pla horitzontal és un bon exemple de la superposició què estem tractant. En efecte, si en un pèndol simple desplaçem la lentilla del punt d'equilibri segons l'eix horitzontal x i la deixem anar comunicant-li una petita velocitat inicial segons l'altre eix horitzontal y ,

la partícula descriurà un moviment pendular segons x i un altre segons y , ambdós de la freqüència donada per (1.20), $\omega = \sqrt{g/L}$. Per tant, la trajectòria serà una el·lipse centrada en el punt d'equilibri com la que es mostra a la figura 4.6: tindrem un *pèndol cònic el·líptic*.

Figura 4.6



De totes les possibles el·lipses (4.17), en destaquen aquests dos casos:

- Quan $\phi = 0$, $\phi = \pi$.

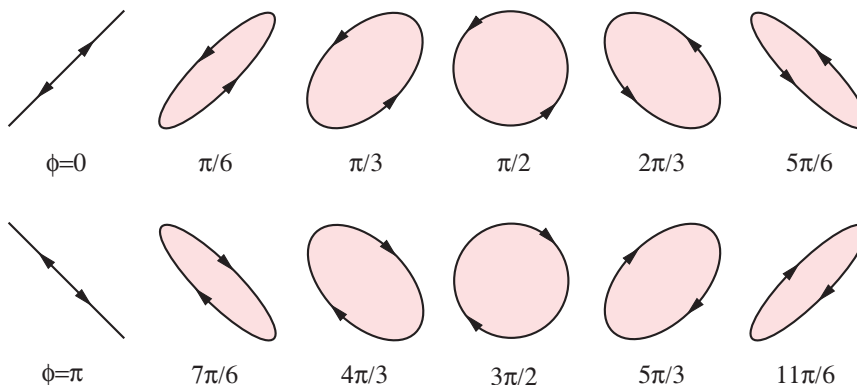
L'el·lipse degenera en una de les dues rectes: $y = \cos \phi \frac{B}{A} x = \pm \frac{B}{A} x$.

El moviment és un MHS sobre la recta corresponent, i l'amplitud és $\sqrt{A^2 + B^2}$.

- Quan $\phi = \frac{\pi}{2}$, $\phi = \frac{3\pi}{2}$.

L'el·lipse ara és referida als seus propis eixos: $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$.

Figura 4.7





A la figura 4.7, es mostren algunes de les el·lipses que tenen per equació la (4.17). A totes $A = B$, i els angles ϕ estan indicats sota de cadascuna d'elles. També s'indica el sentit del gir de la partícula sobre l'el·lipse.

Amb la disposició habitual dels eixos x i y —de x a y , en sentit antihorari—, es pot demostrar —com es proposa al problema 4.4— que un angle $\phi > 0$ correspon a una el·lipse recorreguda en sentit horari, i a l'inrevés.

Exemple 4.1. El·lipses en evolució

Esbrineu quin serà el resultat de superposar dos MHS de direccions perpendiculars i freqüències lleugerament diferents.

Solució

Siguin els dos MHS següents:

$$\begin{aligned}x(t) &= A \cos \omega_1 t \\ y(t) &= B \cos(\omega_2 t + \varphi)\end{aligned}$$

amb ω_1 i ω_2 tals que $\omega_1 \neq \omega_2$ i $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 \ll \omega_2 \approx \omega_1$. Amb aquesta notació, podem reescriure les dues equacions de moviment $x(t)$ i $y(t)$ com

$$\begin{aligned}x(t) &= A \cos \omega_1 t \\ y(t) &= B \cos(\omega_1 t + [t\Delta\omega + \varphi])\end{aligned}$$

Aquestes són les mateixes equacions que hem estudiat anteriorment, (4.15) i (4.16), ara amb $\phi(t) = t\Delta\omega + \varphi$ que, combinades, porten a l'equació (4.17). Si allà dèiem que l'angle ϕ determina que la trajectòria sigui una el·lipse, una recta, etc., aleshores, en aquest cas en què $\phi(t)$ va creixent lentament amb el temps tindrem, doncs, que la trajectòria anirà evolucionant i passarà per totes les el·lipses que es mostren a la figura 4.7. Segons el valor de $\Delta\omega$, aquesta evolució serà més lenta i tranquil·la o més ràpida i brusca.

4.3.2. Freqüències diferents. Figures de Lissajous

Considerem ara la superposició de dos MHS de direccions perpendiculars i de freqüències ω_x i ω_y diferents. Les equacions corresponents, en el cas general, són:

$$\begin{aligned}x(t) &= A \cos(\omega_x t + \phi) \\ y(t) &= B \cos(\omega_y t + \varphi)\end{aligned}\tag{4.18}$$

En aquest cas, les trajectòries ja no són, en general, el·lipses sinó que són bastant més complexes.

Anàlogament al que ja hem comentat a la secció §4.2.3 per al cas de freqüències diferents, però de la mateixa direcció, el moviment resultant de la superposició només és periòdic si el quocient ω_x/ω_y és un nombre racional:

$$\frac{\omega_x}{\omega_y} = \frac{n_x}{n_y}\tag{4.19}$$

En aquest cas, el període és el mínim comú múltiple dels períodes dels MHS de les dues direccions.

Si la superposició és periòdica, les trajectòries són corbes molt boniques, que reben el nom de *figures de Lissajous*. A la figura 4.8, hi ha representada la corresponent a les dues equacions següents:

$$\begin{aligned}x(t) &= 12 \cos 3t \\ y(t) &= 5 \cos(4t + 4\pi/9)\end{aligned}$$

Figura 4.8

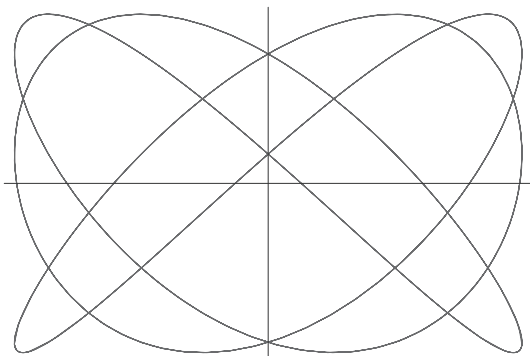
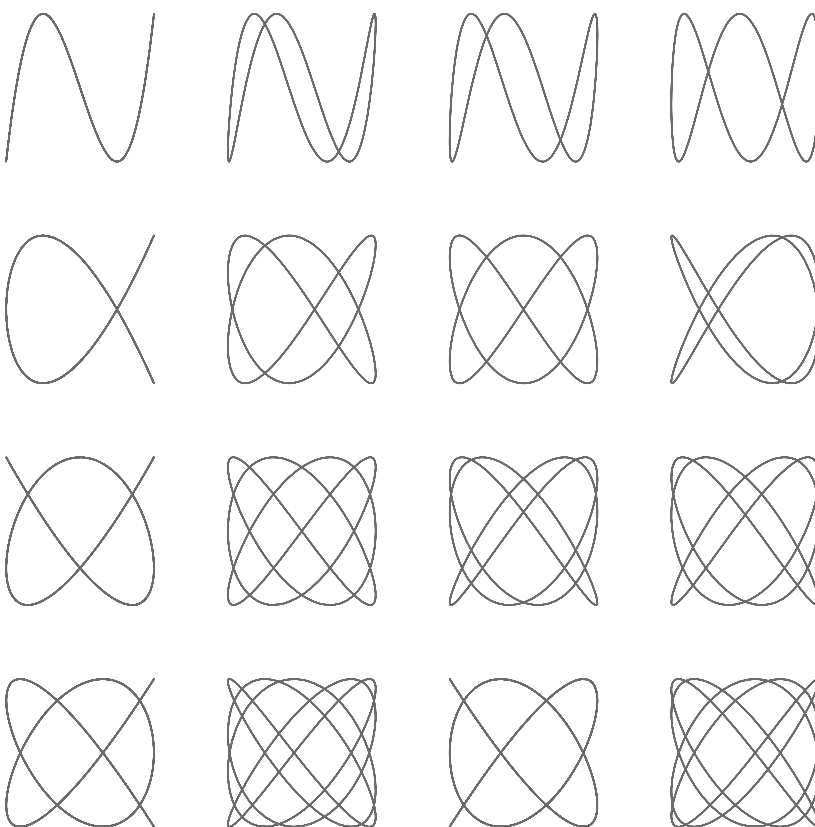


Figura 4.9





A la figura 4.9, s'han representat més trajectòries de Lissajous per als valors de ω_x/ω_y i φ següents:

$$\frac{\omega_x}{\omega_y} = (\text{per files}) = \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}; \quad \phi = 0; \quad \varphi = (\text{per columnes}) = 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{7}$$

A la secció §4.3.1, hem vist com podem posar de manifest la superposició de dos MHS de direccions perpendiculars de la mateixa freqüència amb un pèndol simple. Anàlogament, podem veure en acció les figures de Lissajous observant el moviment de les lentilles dels “pèndols simples en Y”. A la figura 4.10, es mostra un d'aquests pèndols.

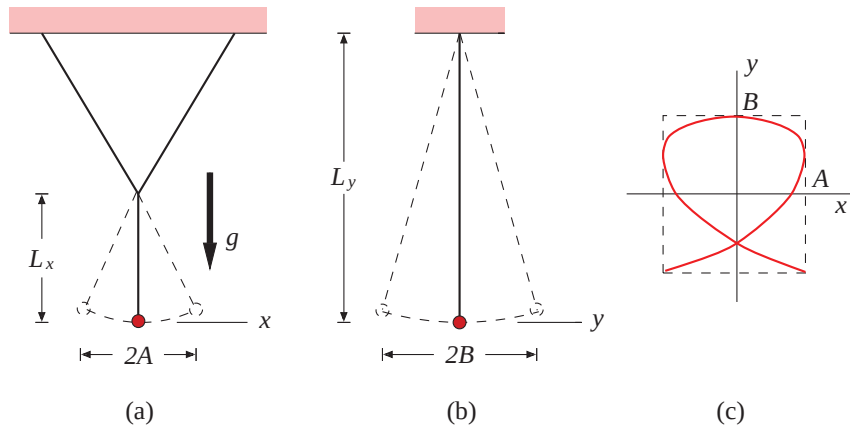


Figura 4.10

A causa de la construcció en “Y” del pèndol, aquest té un longitud d'oscil·lació L_x en el pla de la Y —v. figura 4.10 (a)— i de L_y en la direcció perpendicular —v. figura 4.10 (b). Si $\sqrt{L_x/L_y}$ és racional, la composició d'oscil·lacions de la lentilla en una direcció i en l'altra donarà lloc a una figura de Lissajous. Com que, en el cas representat, el quocient de longituds és, aproximadament, $4/9$, tenim, doncs,

$$\sqrt{\frac{L_x}{L_y}} = \frac{\omega_y}{\omega_x} = \frac{2}{3}$$

Una figura de Lissajous d'aquest cas podria ser, per exemple, la de la figura 4.10 (c) anterior.

Exemple 4.2. Construcció de les figures de Lissajous

Dibuixeu “a mà” sobre paper mil·limetrat la figura de Lissajous corresponent a les equacions paramètriques

$$\begin{aligned} x &= 12 \cos 2t \\ y &= 15 \cos(3t - \pi/4) \end{aligned}$$

utilitzant, com a referència, la representació fasorial dels dos MHS.

Solució

A les figures 4.11, 4.12 i 4.13 següents s'indica clarament com s'ha de començar, continuar i acabar el dibuix.



Figura 4.11

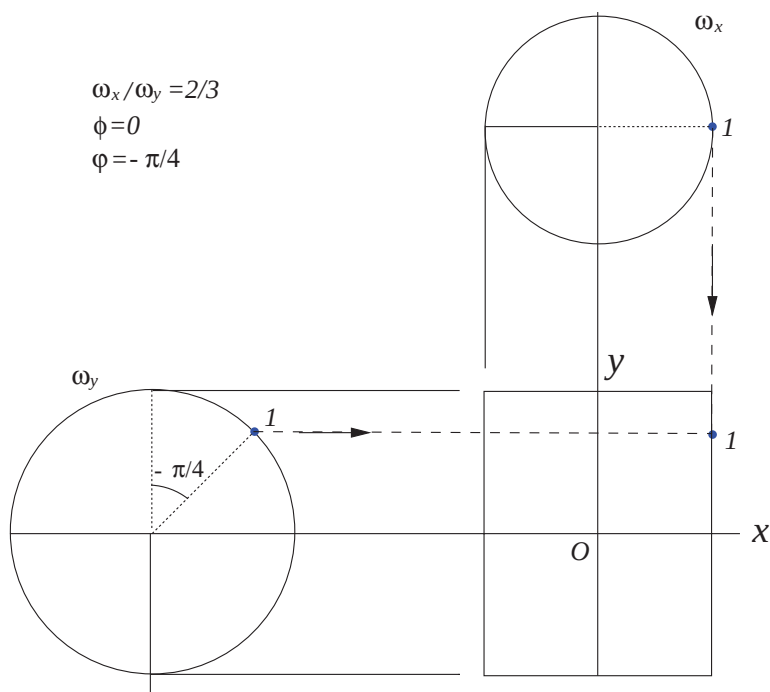


Figura 4.12

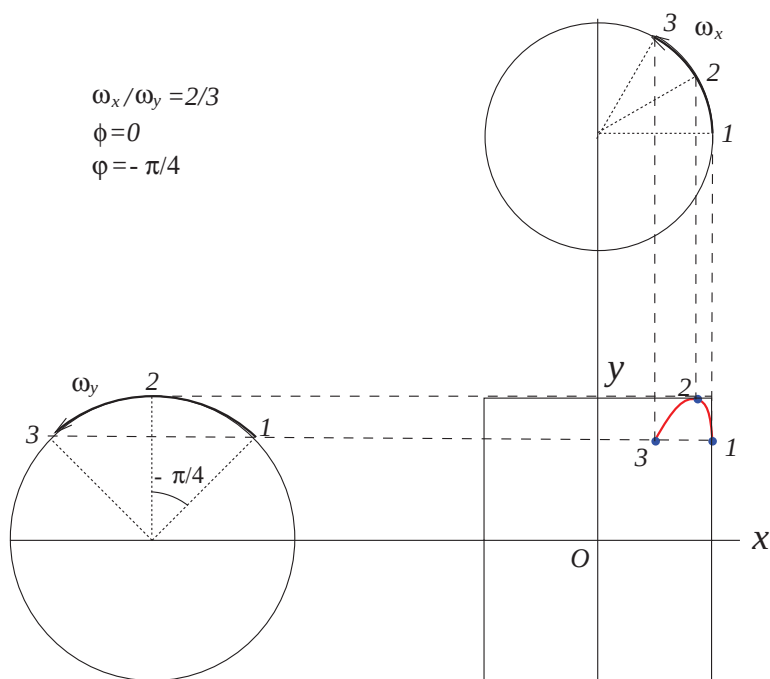
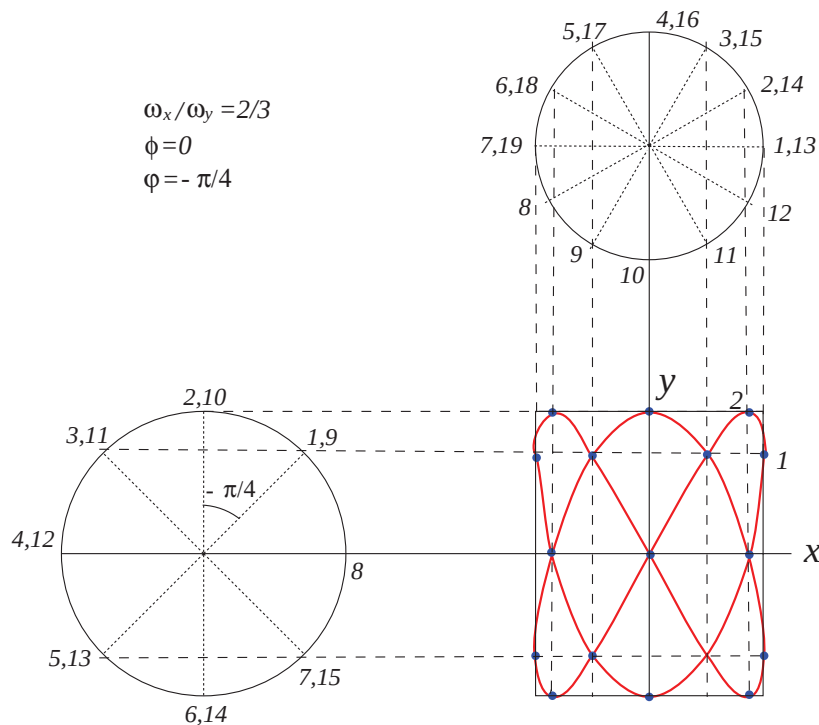




Figura 4.13



4.4. Problemes resolts i problemes proposats

4.4.1. Problemes resolts

Problema 4.1. Superposició de dos MHS de la mateixa direcció

Esbrineu les equacions dels moviments resultants que resulten de la superposició dels dos MHS

$$\begin{aligned}x_1 &= 6 \sin 2t \\x_2 &= 8 \sin(2t + \phi)\end{aligned}$$

si ϕ és igual a 0, π , $\pi/2$ o $\pi/3$, respectivament.

Solució

a) Si $\phi = 0$. En aquest cas: $x = x_1 + x_2 = 6 \sin 2t + 8 \sin 2t = 14 \sin 2t$.

Si $\phi = \pi$ rad. Anàlogament: $x = x_1 + x_2 = 6 \sin 2t - 8 \sin 2t = -2 \sin 2t$.

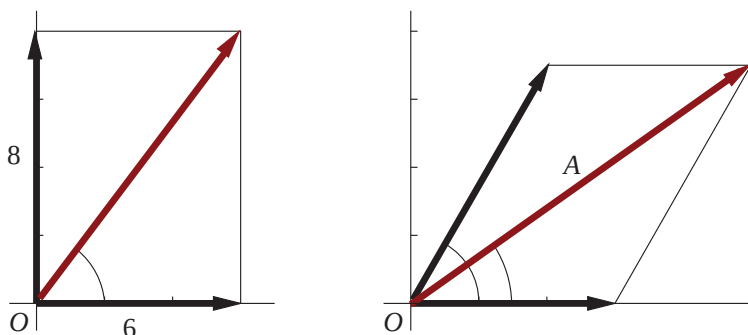
b) Si $\phi = \frac{\pi}{2}$. Ara, de la superposició resulta

$$x = x_1 + x_2 = A \cos(2t + \varphi) \quad (1)$$



d'on A i φ els podem treure del diagrama de la suma dels fasors corresponents —v. figura 4.14 esquerra.

Figura 4.14



Pel teorema de Pitàgores,

$$A = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10 \quad \varphi = \arctan \frac{8}{6} = 0,92730 \text{ rad}$$

- c) Si $\phi = \pi/3$. L'expressió de l'oscil·lació resultant torna a ser com la (1). A la figura 4.14 dreta és mostra el diagrama de fasors d'aquest cas. Per (A.12), tenim

$$A = \sqrt{6^2 + 8^2 + 2 \times 6 \times 8 \times \cos \pi/3} = 12,166 \quad \text{i} \quad 8^2 = A^2 + 6^2 - 2 \times 6 \times A \cos \varphi$$

d'on resulta $\varphi = 0,60589$ rad. En definitiva, ens queda

$$x = x_1 + x_2 = 12,17 \sin(2t + 0,6059)$$

Problema 4.2. Força central $F = -kr$ i trajectòria el·líptica

Una partícula de massa m que es mou sobre el pla xy està sotmesa a la *força central*: $F = -kr$, on k és una constant positiva i r és el vector posició. A l'instant $t = 0$, la posició i la velocitat inicials són, respectivament, $(x_0, 0)$ i $(0, v_0)$.

- Demostreu que la partícula fa un MHS segons l'eix x i un altre segons l'eix y , ambdós de freqüència angular $\omega = \sqrt{k/m}$, i que la seva trajectòria és una l'el·lipse.
- Calculeu quant valen l'energia i el moment angular de la partícula a l'instant inicial i comproveu que es conserven.

Solució

Si hi apliquem la segona llei de Newton, tenim: $-kr = m\mathbf{a}$, equació vectorial que podem reescriure en components de la forma

$$-k(x\mathbf{u}_x + y\mathbf{u}_y) = m \left(\frac{d^2x}{dt^2} \mathbf{u}_x + \frac{d^2y}{dt^2} \mathbf{u}_y \right)$$



i, igualant les components, ens queda el sistema de dues equacions diferencials

$$-kx = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$-ky = m \frac{d^2y}{dt^2}$$

que són les equacions diferencials de dos MHS, un per a la x i l'altra per a la y . Observem un fet molt important: en cadascuna de les dues equacions, només apareix una de les coordenades, o la x o la y . D'aquest fet, se'n diu que les dues equacions diferencials estan *desacoblades*. Això simplifica molt la resolució del sistema la qual, en aquest cas, és immediata. Si fem $\omega = \sqrt{k/m}$, la solució general de cadascuna de les dues equacions és, com sabem,

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

$$y(t) = B \cos(\omega t + \varphi)$$

on els valors de les constants A , B , ϕ i φ els determinarem a partir de les condicions inicials que ens diu l'enunciat.

Si $t = 0$ tenim per a x i v_x , y i v_y :

$$- x(0) = x_0 = A \cos \phi, \quad v_x(0) = 0 = -\omega \sin \phi; \quad \text{d'on surt que:} \quad \phi = 0, A = x_0.$$

$$- y(0) = 0 = A \cos \varphi, \quad v_y(0) = v_0 = -\omega B \sin \varphi; \quad \text{d'on surt que:} \quad \varphi = -\frac{\pi}{2}, B = \frac{v_0}{\omega}.$$

Així doncs, les components del vector posició de la partícula són

$$x(t) = x_0 \cos \omega t \tag{1}$$

$$y(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t \tag{2}$$

i, derivant, tenim les components de la seva velocitat

$$v_x(t) = -\omega x_0 \sin \omega t \tag{3}$$

$$v_y(t) = v_0 \cos \omega t \tag{4}$$

Si sumem $\cos^2 \omega t$ i $\sin^2 \omega t$, de (1) i (2), veiem que la trajectòria de la partícula és l'el·lipse

$$\frac{x^2}{x_0^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2} = 1$$

D'altra banda, un camp de forces $\mathbf{F} = -k\mathbf{r}$ és un camp central i conservatiu, i recordem que això vol dir, en general, que es conserva tant el moment angular com l'energia de la partícula. Comprovem-ho.



- El moment angular de la partícula val, en general:

$$\mathbf{L} = m \mathbf{r} \times \mathbf{v} = m (x\mathbf{u}_x + y\mathbf{u}_y) \times (v_x\mathbf{u}_x + v_y\mathbf{u}_y) = m (xv_y - yv_x)\mathbf{u}_z$$

i substituint les x , y , v_x , v_y per les seves expressions (1), (2), (3) i (4), i simplificant, s'arriba al resultat:

$$\mathbf{L} = m x_0 v_0 \mathbf{u}_z$$

que és el moment angular inicial, amb el qual queda demostrada la seva conservació.

- Pel que fa a l'energia, recordem també que, si una força és central, és a dir, de direcció radial i el seu mòdul només depèn de r , $F(r)$, llavors la força és conservativa. És a dir, existeix la funció escalar energia potencial $U(r)$, que també només depèn de r i que està relacionada amb la força $F(r)$ de la forma: $F(r) = -\frac{dU(r)}{dr}$. Per tant,

$$U = - \int F(r) dr = +k \int r dr = \frac{1}{2}kr^2 + C$$

essent C una constant arbitrària que podem determinar prenent l'origen d'energia potencial, $U = 0$, per exemple, a $r = 0$; amb la condició $C = 0$. Però $r^2 = x^2 + y^2$ i, en conseqüència, U queda com:

$$U = \frac{1}{2}kr^2 = \frac{1}{2}k(x^2 + y^2) = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}ky^2$$

és a dir, que aquí també s'aplica el principi de superposició: l'energia potencial del moviment resultant de superposar un MHS segons x i un altre MHS segons y és la suma de les energies potencials de cadascun d'ells per separat.

- Calculem ara la suma de l'energia potencial U més la cinètica K en un instant qualsevol. Tenim, pel que hem vist fins ara,

$$E = U + K = \frac{1}{2}kr^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}k(x^2 + y^2) + \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2)$$

on, substituint les x , y , v_x , v_y per les seves expressions d'(1),..., (4), i simplificant, arribem a E

$$E = \frac{1}{2}kx_0^2 + \frac{1}{2}mv_0^2$$

que és, efectivament, una constant i que correspon a l'energia a l'instant inicial.

Problema 4.3. Trajectòria el·líptica

Una partícula fa dos MHS simultanis perpendiculars entre si donats per les equacions —tot en unitats SI—

$$\begin{aligned} x(t) &= 5 \cos 3\pi t \\ y(t) &= 3 \sin 3\pi t \end{aligned} \tag{1}$$



- Demostreu que el moviment resultant de la partícula és una el·lipse.
- Trobeu el primer instant de temps positiu en què la velocitat de la partícula forma un angle de 30° amb l'eix x . Quin angle forma, en aquest instant, el vector posició de la partícula amb la velocitat?
- En quins dos instants immediatament posteriors torna la partícula a tenir la mateixa celeritat?

Solució

- Només cal prendre (1) i fer

$$\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = \cos^2 3\pi t + \sin^2 3\pi t = 1$$

que és l'equació d'una el·lipse centrada a l'origen amb els eixos principals dirigits segons x i y —v. figura 4.15.

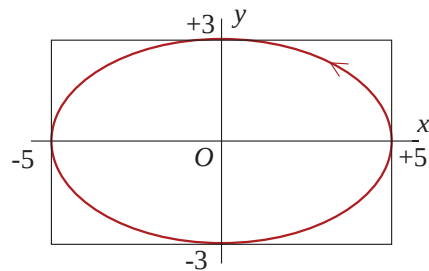


Figura 4.15

- Derivant $x(t)$ i $y(t)$, n'obtenim la velocitat de la partícula

$$\begin{aligned} v_x(t) &= -15\pi \sin 3\pi t \\ v_y(t) &= 9\pi \cos 3\pi t \end{aligned}$$

Seguint les instruccions de l'enunciat, ens interessen els instants de temps t tals que

$$\tan 30^\circ = \frac{v_y}{v_x} = \frac{9 \cos 3\pi t}{-15 \sin 3\pi t} = -\frac{3}{5} \frac{1}{\tan 3\pi t}$$

és a dir, els donats per

$$t = -\frac{1}{3\pi} \arctan\left(\frac{3}{5 \tan 30^\circ}\right) \quad (2)$$

El valor numèric de t que obtenim amb la calculadora directament de (2) és $t_0 = -0,085374$ s. Però aquest és un instant de temps negatiu. És el moment en el qual la velocitat de la partícula forma l'angle de 30° que diu l'enunciat, però és anterior a $t = 0$. Com que després d'un període $T = 2\pi/\omega$ la partícula torna a tenir el mateix vector velocitat però el temps serà positiu, l'instant que ens interessa és

$$t_1 = t_0 + T = t_0 + \frac{2\pi}{3\pi} = 0,58129 \text{ s}$$



En aquest instant, la posició de la partícula val, per (1), $x(t_1) = 3,467 \text{ m}$ i $y(t_1) = -2,162 \text{ m}$. L'angle θ que forma el vector posició amb l'eix x ve donat per

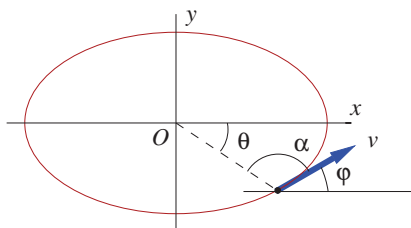
$$\theta = \arctan \frac{y(t_1)}{x(t_1)} = -31,95^\circ$$

i l'angle α que determinen el vector posició i la velocitat val —v. figura 4.16—

$$\alpha = 180^\circ - 30^\circ - |\theta| = 118,1^\circ$$

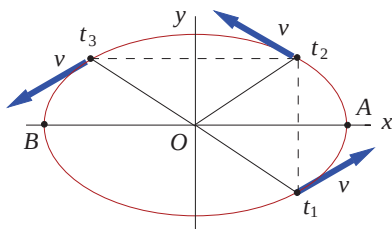
En una trajectòria circular, aquest angle sempre seria 90° .

Figura 4.16



- c) La forma de l'el·lipse i el moviment de la partícula presenten simetria respecte dels eixos x i y . Això vol dir que els dos instants immediatament posteriors a t_1 en els quals el mòdul de la velocitat de la partícula torna a ser la que tenia a t_1 són t_2 i t_3 en els quals la posició de la partícula és representada a la figura 4.17.

Figura 4.17



Sigui Δt l'interval de temps que ha de transcórrer des de t_1 perquè la partícula arribi al punt $A(5, 0)$ sobre l'eix de simetria x . Com que a $t = 0$ la partícula és a A , aleshores $\Delta t = T - t_1$. I, d'altra banda, l'interval de temps que ha de passar per tal que vagi de la posició corresponent a t_1 fins a la de t_3 és mig període. Per tant, tenim

$$t_2 = t_1 + 2\Delta t = T + \Delta t = 2T - t_1 = 0,7520 \text{ s}$$

$$t_3 = t_1 + \frac{T}{2} = 0,9146 \text{ s}$$

Problema 4.4. Sentit del moviment en les el·lipses

La trajectòria el·líptica d'una partícula ve donada per les equacions paramètriques

$$\begin{aligned} x(t) &= A \cos \omega t \\ y(t) &= B \cos(\omega t + \phi) \end{aligned}$$



Demostreu que, en general, un angle $\phi > 0$ correspon a una el·lipse recorreguda en sentit horari, i a l'inrevés.

Solució

Si tenim un cas particular sempre podem trobar el sentit del gir de la partícula tempejant: conegudes les dues equacions del moviment, per a $x(t)$ i per a $y(t)$, anem donant valors a t i anem veient cap a on va la partícula. Però hi podem trobar una regla general.

Com es mostra en la figura 4.18, sigui θ l'angle de les coordenades polars, és a dir, l'angle determinat per l'eix x i el vector posició de la partícula. Doncs bé, el sentit del gir de la partícula és el signe que té la seva velocitat angular, $d\theta/dt$.

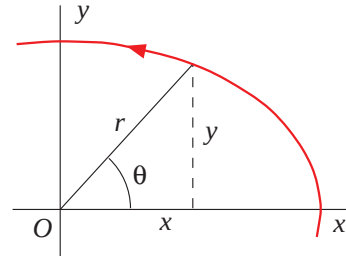


Figura 4.18

Com sabem, la relació entre les coordenades x, y de la partícula i l'angle θ és

$$\tan \theta = \frac{y}{x}$$

Derivant aquesta equació respecte del temps n'obtenim

$$\frac{d(\tan \theta)}{dt} = \frac{1}{\cos^2 \theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{x^2} \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) \quad (1)$$

Si considerem que

$$x(t) = A \cos \omega t \quad \text{i} \quad y(t) = B \cos(\omega t + \phi)$$

substituïm a (1) i simplifiquem, arribem a

$$\frac{d\theta}{dt} = -\omega AB \frac{\cos^2 \theta}{x^2} \sin \phi$$

Com que $\cos^2 \theta$ i $\omega AB/x^2$, excepte singularitats, són sempre positius, aleshores, el sentit de la velocitat angular ve determinat pel signe de $-\sin \phi$.

En la disposició habitual dels eixos x i y —de x a y , en sentit antihorari—, un angle $\phi > 0$ tal que $-\sin \phi < 0$ indica, doncs, una el·lipse recorreguda en sentit horari, i a l'inrevés.

Problema 4.5. Dibuixar una figura de Lissajous 1 : 2

Una partícula de massa m que es mou en el pla XY descriu la figura de Lissajous donada per

$$\begin{aligned} x(t) &= A \sin \omega t \\ y(t) &= A \sin(2\omega t + \phi) \end{aligned}$$

- a) Aplicant el mètode de les dues projeccions, dibuixeu “a mà” la trajectòria de la partícula per al cas $\phi = 0$.



- b) Trobeu la força que actua sobre la partícula, així com les expressions de l'energia potencial i l'energia cinètica en funció del temps. Quant val l'energia total E de la partícula?

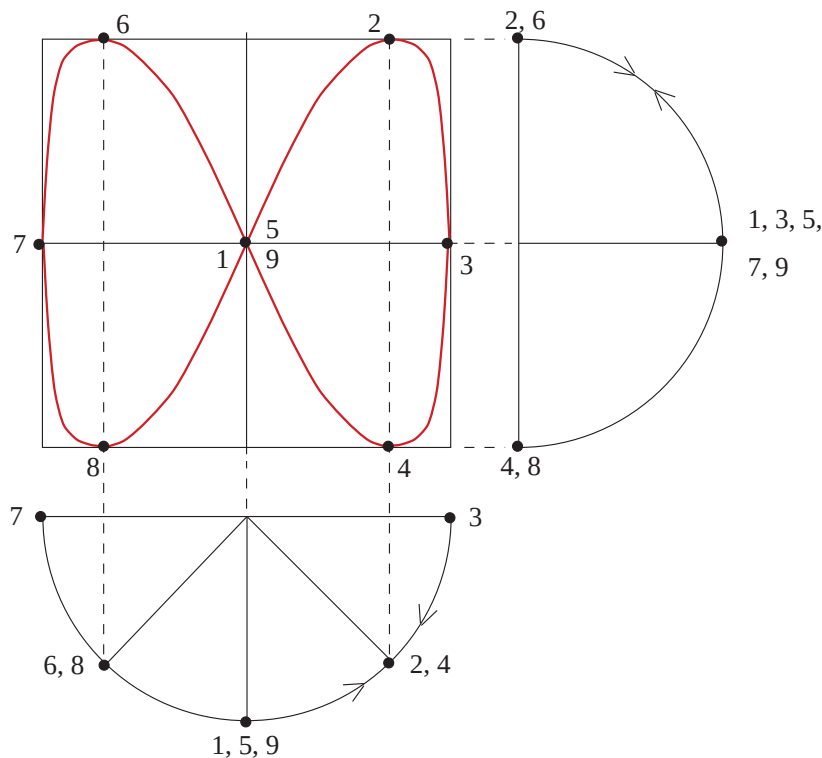
Solució

- a) Primer, trobem el període del moviment resultant. Aquest és el mínim comú múltiple dels períodes segons x i segons y . És a dir, val $T = n_x T_x = n_y T_y$ si n_x i n_y són els enters més petits que satisfan aquesta relació. En aquest cas, simplement tenim $n_x = 1$ i $n_y = 2$ ja que

$$T = 1 \times \frac{2\pi}{\omega} = 2 \times \frac{2\pi}{2\omega} = \frac{2\pi}{\omega}$$

A la figura 4.19, es mostra la construcció punt a punt de la corresponent corba de Lissajous a partir dels dos MHS $x(t)$ i $y(t)$, disposats de forma horitzontal i vertical, respectivament.

Figura 4.19



- b) La velocitat i l'acceleració de la partícula vénen donades per les derivades de $x(t)$ i $y(t)$

$$v_x(t) = -\omega A \cos \omega t$$

$$a_x(t) = -\omega^2 A \sin \omega t = -\omega^2 x$$

$$v_y(t) = -2\omega A \cos(2\omega t + \phi)$$

$$a_y(t) = -4\omega^2 A \sin(2\omega t + \phi) = -4\omega^2 y$$



Aplicant ara la segona llei de Newton, trobem la força

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m(a_x \mathbf{u}_x + a_y \mathbf{u}_y) = -m\omega^2(x \mathbf{u}_x + 4y \mathbf{u}_y)$$

que, a diferència de l'exemple, no és central. Quant a les energies cinètica i potencial de la partícula, per les expressions anteriors de x , y , v_x i v_y tenim

- Energia cinètica K :

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2) = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 (\cos^2 \omega t + 4\cos^2(2\omega t + \phi))$$

- Energia potencial U . Prenent —com és habitual— l'origen de l'energia potencial en el punt d'equilibri, tenim:

$$\begin{aligned} U &= \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -m\omega^2 \int (x \mathbf{u}_x + 4y \mathbf{u}_y) \cdot (dx \mathbf{u}_x + dy \mathbf{u}_y) = \\ &= \frac{1}{2}m\omega^2 (x^2 + 4y^2) = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 (\sin^2 \omega t + 4\sin^2(2\omega t + \phi)) \end{aligned}$$

Sumant K i U , tenim l'energia total. En efecte, comprovem que és constant i que val

$$E = K + U = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 (1 + 4) = \frac{5}{2}m\omega^2 A^2$$

D'aquests últims resultats, podem veure que, si $E_{(x)}$ i $E_{(y)}$ són les energies que tindria la partícula si només es desplaçés segons x o segons y , respectivament, aleshores, $E = E_{(x)} + E_{(y)}$.

4.4.2. Problemes proposats

Problema 4.6. Superposició de tres MHS

Una partícula està sotmesa simultàniament a tres MHS de la mateixa direcció i freqüència d'amplituds 4, 5 i 6 unitats, respectivament. Si sabem que la fase del segon MHS està avançada $\pi/4$ rad respecte del primer i la del tercer, $\pi/3$ rad respecte del segon, esbrineu l'amplitud del MHS resultant de la superposició i la fase del moviment respecte del primer MHS.

Resp.: $A = 11,08$ unitats, $\varphi = 1,001$ rad

Problema 4.7. Energia en la superposició de dos MHS

Una partícula està sotmesa, simultàniament, a dos MHS de la mateixa freqüència i direcció però d'amplituds diferents i desfasats l'angle ϕ .

Siguin E_1 i E_2 les energies que tindria la partícula si només fes un dels dos MHS. Demostreu que, aleshores, en la superposició dels dos MHS, l'energia de la partícula passa a ser

$$E = E_1 + E_2 + 2\sqrt{E_1 E_2} \cos \phi$$



Comproveu aquest resultat per a diversos casos particulars de ϕ ; per exemple, $\phi = 0$ i $\phi = \pi/2$.

Problema 4.8. Superposició de dos MHS perpendiculars

Esbrineu les equacions de les trajectòries resultants del moviment d'una partícula superposició dels dos MHS perpendiculars

$$\begin{aligned}x &= 4 \sin \omega t \\y &= 3 \sin(\omega t + \phi)\end{aligned}$$

si ϕ és igual a 0, $\pi/2$, π . Per a $\pi/2$, feu, a més, una gràfica de la trajectòria i determineu el sentit del moviment de la partícula.

Resp.: $y = \frac{3}{4}x$; $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$, en sentit horari; $y = -\frac{3}{4}x$

Problema 4.9. MHS rectilini

Les components x, y del moviment d'una partícula són dos MHS de la mateixa freqüència. En unitats SI

$$\begin{aligned}x(t) &= 5 \cos\left(2t - \frac{\pi}{6}\right) \\y(t) &= 3 \cos\left(2t - \frac{7\pi}{6}\right)\end{aligned}$$

- Demostreu que el moviment resultant de la partícula és un MHS sobre la recta $y = -3x/5$.
- Trobeu tots els instants t en què la partícula passa per l'origen i
- la celeritat amb què ho fa.

Resp.: b) $t = (3n-1)\frac{\pi}{6}$, amb $n = 0, 1, 2, \dots$, c) $v = 136$ m/s

Problema 4.10. Superposició de MHS perpendiculars

En unitats SI, les equacions de moviment d'una partícula de massa $m = 1$ kg són, per als tres casos (A), (B) i (C), les següents:

$$\begin{array}{lll}\text{A)} & x = 6 \sin t & \text{B)} & x = 6 \sin 2t & \text{C)} & x = 6 \sin 3t \\ & y = 4 \cos 2t & & y = 4 \cos 2t & & y = 4 \cos 2t\end{array}$$

- Trobeu i dibuixeu les trajectòries dels casos (A) i (B).
- Esbrineu els períodes i les energies dels tres moviments periòdics.

Resp.: a) A) $y = 4 - \frac{2}{9}x^2$, B) $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$,

$$\text{b) } T_A = 2T_B = T_C = 2\pi \text{ s, } E_A = 50 \text{ J, } E_B = 104 \text{ J, } E_C = 194 \text{ J}$$



Problema 4.11. Dibuix de les figures de Lissajous

Utilitzant com a referència la representació fasorial de dos MHS, construïu “a mà”, sobre paper quadriculat, les figures de Lissajous corresponents a les dues parelles d’equacions paramètriques:

a) $x = \sin 3t$, $y = \sin(4t + \pi/6)$

b) $x = \sin(t + \pi)$, $y = \sin 3t$

Comproveu que són les dues corbes representades a la figura 4.20.

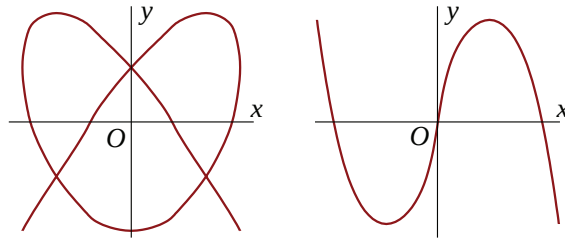


Figura 4.20

Problema 4.12. Superposició de 3 MHS perpendiculars entre si

Les equacions de moviment d’una partícula que es mou en l’espai són, en unitats del SI

$$x(t) = 6 \cos 20\pi t$$

$$y(t) = 7 \cos(8\pi t + \pi/6)$$

$$z(t) = 8 \cos(12\pi t + \pi/3)$$

Quina mena de moviment fa la partícula? Quant val el període del seu moviment?

Resp.: Fa un moviment periòdic de període $T = 1/2$ s

Problema 4.13. Partícula entre quatre molles

Una partícula de massa $m = 0,050$ kg està subjectada per quatre molles, com s’indica a la figura 4.21. Les dues molles de constant k_1 determinen l’eix x i les altres dues, perpendiculars a aquestes, de constant k_2 , l’eix y . L’origen d’aquest sistema de coordenades és la posició d’equilibri de la partícula.

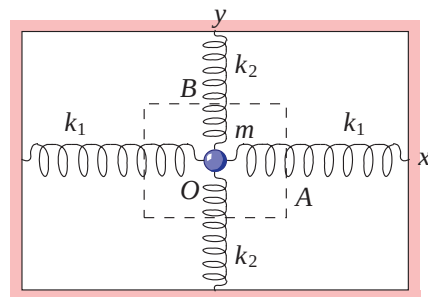


Figura 4.21

Suposant desplaçaments de la partícula molt petits per comparació a la longitud de les molles, descriviu quina mena de moviment i quina trajectòria farà si les constants de les molles i les condicions inicials x_0, y_0, v_{x0}, v_{y0} són les següents:



- a) $k_1 = k_2 = k$, i $x_0 = 0, y_0 = b, v_{x_0} = v_0, v_{y_0} = 0$
 b) $k_1 = 4k_2$, i $x_0 = y_0 = 0, v_{x_0} = v_{y_0} = v_0$
 c) $k_1 = 4k_2/9$, i $x_0 = y_0 = a, v_{x_0} = v_0, v_{y_0} = 0$
 d) És periòdic el moviment si $k_1 = 2k_2$?

Resp.: a) El·lipse: $\frac{2k}{mv_0^2}x^2 + \frac{y^2}{b^2} = 1$;

b) Figura de Lissajous tipus: $x = A \sin 2\omega t, y = 2A \sin \omega t$, amb $\omega = \sqrt{\frac{k_1}{2m}}$,

$A = \frac{v_0}{2\omega}$; c) Figura de Lissajous, d) No és periòdic

Problema 4.14. Trajectòria el·líptica d'una partícula entre dues molles

La partícula de massa m del problema anterior està subjectada ara només per les dues molles de constant k_1 , que estan allargades fins assolir la tensió F . Si la longitud total de les dues molles allargades amb la partícula és L , quina relació hi ha d'haver entre aquesta longitud L i la tensió F per tal que la partícula, posada en moviment molt a prop de l'origen, descrigui una trajectòria el·líptica al voltant d'aquest?

Resp.: $F = k_1 L/2$

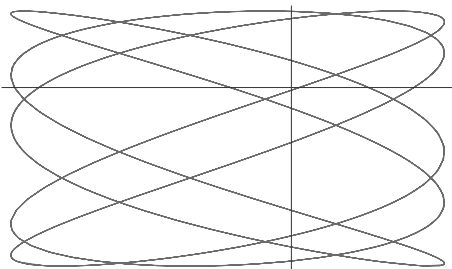
Problema 4.15. Sobre les figures de Lissajous

Suposeu que esteu davant d'una figura de Lissajous —per exemple, la figura 4.22. Traceu una línia recta paral·lela a l'eix x que talli la corba en diversos punts sense que cap d'ells sigui una intersecció. Feu el mateix amb una altra recta ara paral·lela a l'eix y . Siguin N_x i N_y el nombre de vegades que la recta paral·lela a l'eix x i la paral·lela a la y , respectivament, tallen la corba de la figura.

a) Demostreu que $\frac{\omega_x}{\omega_y} = \frac{N_y}{N_x}$

b) Apliqueu aquest resultat a la figura 4.22. Quant val el quocient ω_x/ω_y ?

Figura 4.22



Resp.: $\omega_x/\omega_y = 5/3$. La figura és $x = 9 \cos 5t, y = 5 \cos(3t + 2\pi/3)$.



→ 5



Oscil·lacions i sèries de Fourier

Al capítol anterior hem vist que la linealitat de l'equació diferencial de les oscil·lacions forçades feia que es complís el *principi de superposició*. Recordem que això vol dir que si tenim N “funcions força impulsora”, $F_n(t)$, amb $n = 1, 2, \dots, N$, i les N corresponents solucions $x_n(t)$ de les equacions diferencials amb aquestes forces aplicades individualment, aleshores, si apliquem una força impulsora $F(t)$ que sigui combinació lineal de les $F_n(t)$ anteriors, la solució de la nova equació diferencial, $x(t)$, serà la mateixa combinació lineal de les F_n , però per a les x_n . Esquemàticament:

$$\begin{array}{lll} \text{si} & F_n(t) & \longrightarrow x_n(t), \quad n = 1, 2, \dots, N \\ \text{aleshores} & F(t) = \sum_{n=1}^N c_n F_n(t) & \longrightarrow x(t) = \sum_{n=1}^N c_n x_n(t) \end{array} \quad (5.1)$$

on les c_n són constants qualssevol.

5.1. Sèries de Fourier (SF)

5.1.1. Teorema de Fourier

Sigui $f(t)$ una funció periòdica de període T definida a l'interval $]0, T[$ i estesa fora d'aquest interval a partir $f(t+T) = f(t)$. Sigui $\omega = 2\pi/T$ la freqüència angular o pulsació de la funció. Es defineix com a *sèrie de Fourier* —a partir d'ara, SF— de la funció $f(t)$ el sumatori

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t) \quad (5.2)$$

on els coeficients a_n i b_n per a $n = 0, 1, 2, \dots$ vénen donats —v. problema 5.1— per:

$$\begin{array}{lll} \text{si } n = 0 & a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt & b_0 = 0 \\ \text{si } n \geq 1 & a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos n\omega t dt & b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin n\omega t dt \end{array} \quad (5.3)$$

La freqüència angular ω s'anomena *freqüència fonamental* perquè és la més baixa i perquè totes les altres, $n\omega$, les *freqüències harmòniques*, són múltiples d'aquesta. El conjunt de termes del sumatori (5.2), amb $n > 1$, s'anomenen els *harmònics superiors*.

El conjunt dels coeficients a_n i b_n , ordenats segons les freqüències respectives, ω , 2ω , 3ω , ..., s'anomena l'*espectre discret de freqüències*, i la descomposició de la funció $f(t)$ en la suma d'harmònics (5.2), *anàlisi de Fourier* de la funció.

Com es demostra en els textos de matemàtiques, si $f(t)$ satisfà les *condicions de Dirichlet* següents:

- $f(t)$ està definida i és uniforme, excepte en un nombre finit de punts de $]0, T[$,
- $f(t)$ i $\frac{df}{dt}$ són quasicontínues en $]0, T[$,

aleshores, la SF de $f(t)$, (5.2), convergeix cap a:

- $f(t)$ en els punts on la funció és contínua,
- la mitjana entre el límit de la funció per l'esquerra i el límit per la dreta en els punts de discontinuïtat.

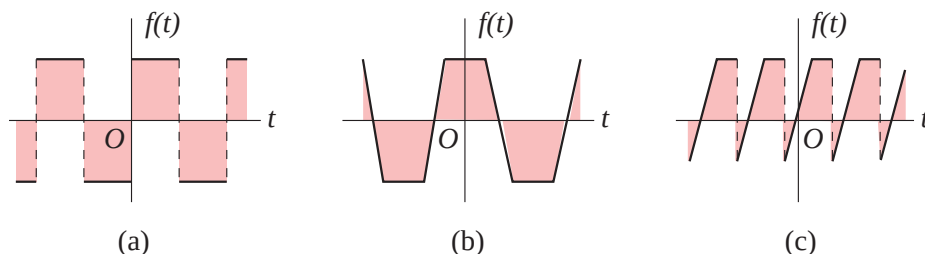
Des del punt de vista matemàtic, les condicions de Dirichlet són suficients però no necessàries. De fet, com hem vist, són molt poc restrictives i, a la pràctica, quasi totes les funcions amb significat físic les compleixen.

Entre moltes altres, les SF presenten les propietats següents:

1. Una funció $f(t)$ es diu que és *parella* si $f(-t) = f(t)$. Són parelles, per exemple, t^2 , $\cos \omega t$, $\sin^2 \omega t$, etc. I una funció $f(t)$ es diu que és *senar* si $f(-t) = -f(t)$. Són senars, per exemple, t^3 , $\sin \omega t$, $\sin \omega t \cos \omega t$, etc. A les funcions parelles, el desenvolupament (5.2) només conté termes en cosinus, i a les funcions senars només n'hi ha en sinus. A les que no són ni parelles ni senars n'hi ha de tots dos tipus; vegeu també el problema 5.8.

A la figura 5.1, s'han esquematitzat les gràfiques de tres funcions periòdiques: la (a) és senar; la (b) és parella, i la (c) no és ni senar ni parella.

Figura 5.1



2. Utilitzant els resultats (A.82) i (A.83) sobre integrals trigonomètriques definides, es pot demostrar fàcilment que els coeficients a_n i b_n corresponents a la funció $f(t)$, donats per (5.3), verifiquen la *igualtat de Parseval*



$$\frac{1}{2T} \int_0^T f^2(t) dt = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \quad (5.4)$$

que, com veurem a la secció §5.2.2, està molt relacionada amb l'energia.

3. En els textos de matemàtiques, es demostren els teoremes que diuen:

- La SF de $f(u)$ es pot *integrar terme a terme* des de t_0 fins a t i en resulta una nova sèrie que convergeix uniformement cap a $\int_{t_0}^t f(u) du$, sempre que $f(u)$ sigui quasi-contínua a l'interval $[0, T]$ i t_0 i t pertanyin a aquest interval. Vegeu l'exemple 5.4.
- La SF de $f(t)$ es pot *derivar terme a terme* i en resulta una nova sèrie que convergeix uniformement cap a $g(t) = \frac{df(t)}{dt}$, sempre que $g(t)$ sigui quasicontínua en l'interval $[0, T]$.

Exemple 5.1. Sèrie de Fourier d'una ona quadrada positiva

Feu el desenvolupament en SF de la funció periòdica $f(t)$ —ona quadrada positiva— definida per

$$f(t) = \begin{cases} F_0, & \text{si } 0 < t < T/2 \\ 0, & \text{si } T/2 < t < T \end{cases} \quad (5.5)$$

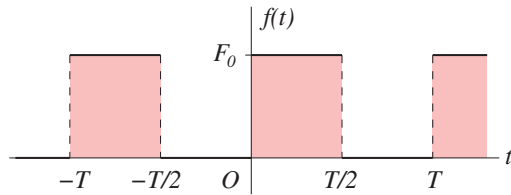


Figura 5.2

Solució

Hem de calcular els coeficients del desenvolupament (5.2) donats per (5.3). Així, per a les b_n tenim

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T} \left(\int_0^{T/2} + \int_{T/2}^T \right) = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} F_0 \sin \frac{2\pi n}{T} t dt = F_0 \frac{1}{n\pi} (1 - \cos n\pi) = \\ &= \begin{cases} = 0, & \text{si } n \text{ és parell} \\ = F_0 \frac{2}{n\pi}, & \text{si } n \text{ és senar} \end{cases} \end{aligned}$$

Per a a_0 , trobem

$$a_0 = \frac{1}{T} \left(\int_0^{T/2} F_0 dt + \int_{T/2}^T 0 \cdot dt \right) = \frac{1}{2} F_0$$

Les altres a_n , $n > 0$, resulten nul·les. Per tant, el desenvolupament queda com

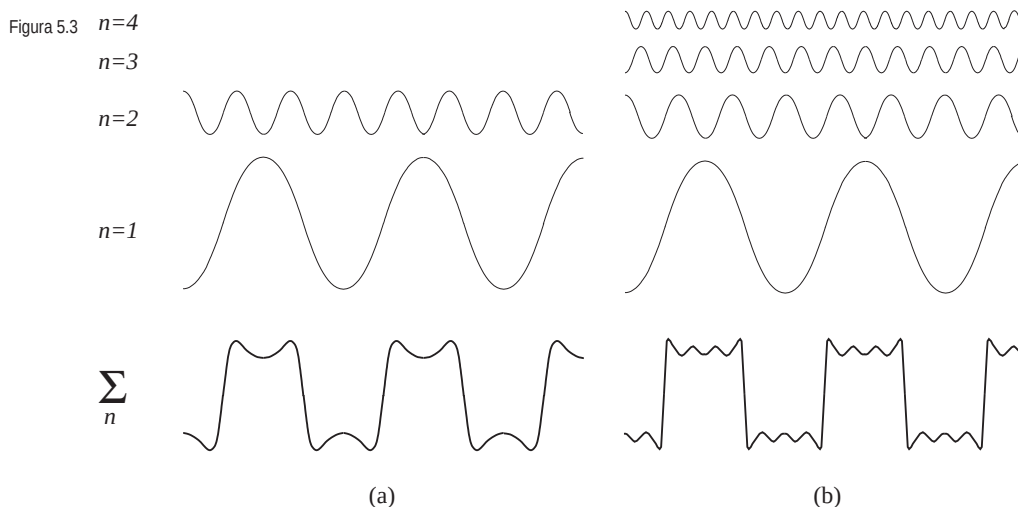
$$f(t) = \frac{F_0}{2} + F_0 \frac{2}{\pi} \left(\sin t + \frac{\sin 3t}{3} + \frac{\sin 5t}{5} + \dots \right) \quad (5.6)$$



Fixem-nos que els coeficients d'aquesta sèrie: $1, 1/3, 1/5$, etc. decreixen molt poc d'un terme al següent. D'aquest fet es diu que la sèrie és de *convergència lenta*: calen molts termes de la sèrie truncada per aconseguir una aproximació bona de la funció. Aquest fet és molt corrent: les funcions amb discontinuïtats són, en general, de convergència més lenta que les funcions més “suaus” sense discontinuïtats.

Observem, també, que a $t = 0$ la sèrie dóna $F_0/2$, és a dir, la mitjana dels límits de la funció a $t = 0$ per l'esquerra i per la dreta. Això és general per a tots els punts de discontinuïtat de qualsevol funció que desenvolupem.

A la figura 5.3, s'han representat els primers termes de la sèrie (5.6) i les sumes respectives. Com veiem, a la columna (a) només n'hi ha els dos primers i a la (b), els quatre primers.

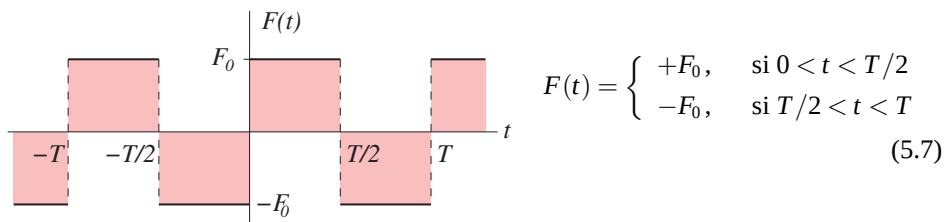


Malgrat que la sèrie (5.6) és de convergència molt lenta, es pot apreciar que la suma amb només quatre termes ja es comença a acostar bastant a la funció (5.5).

Exemple 5.2. Sèrie de Fourier d'una ona quadrada

Trobeu el desenvolupament de Fourier de la funció periòdica $F(t)$ —ona quadrada— definida per

Figura 5.4



Solució

Observem que aquesta funció $F(t)$ es relaciona amb la $f(t)$ de l'exemple 5.1 de la forma

$$F(t) = 2f(t) - F_0$$



i, per tant, per (5.6) el desenvolupament de Fourier de $F(t)$, (5.7), serà

$$F(t) = F_0 \frac{4}{\pi} \left(\sin \omega t + \frac{\sin 3\omega t}{3} + \frac{\sin 5\omega t}{5} + \dots \right) = \frac{4F_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin(2n-1)\omega t \quad (5.8)$$

on, naturalment, $\omega = 2\pi/T$.

Exemple 5.3. Sèrie de Fourier d'una dent de serra

Esbrineu la sèrie de Fourier corresponent a la funció *dent de serra*, de període T , definida com

$$f(t) = \frac{2F_0}{T}t, \quad \text{si } -T/2 < t < T/2 \quad (5.9)$$

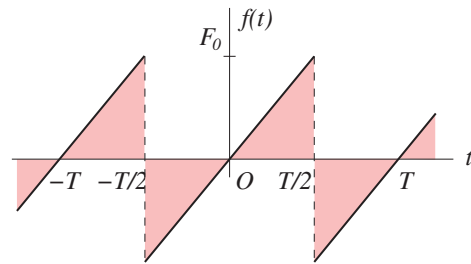


Figura 5.5

Solució

Aquesta és una funció senar que només tindrà sinus en el seu desenvolupament. Efectivament, si $\omega = 2\pi/T$, aplicant (5.3) s'arriba fàcilment al resultat

$$f(t) = \frac{2F_0}{\pi} \left(\frac{\sin \omega t}{1} - \frac{\sin 2\omega t}{2} + \frac{\sin 3\omega t}{3} - \dots \right) \quad (5.10)$$

Exemple 5.4. Sèrie de Fourier d'una ona triangular positiva

Trobeu el desenvolupament de Fourier de la funció $f(t)$ ona triangular següent:

$$f(t) = 2F_1 \frac{|t|}{T} = \begin{cases} 2F_1 \frac{+t}{T}, & \text{si } 0 < t < T/2 \\ 2F_1 \frac{-t}{T}, & \text{si } -T/2 < t < 0 \end{cases} \quad (5.11)$$

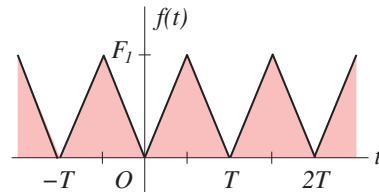


Figura 5.6

Solució

Aquesta funció és parella i, per les propietats que hem vist a la secció §5.1, el seu desenvolupament només tindrà cosinus. Aplicant ara l'expressió (5.3) per al càlcul de les a_n , en podem trobar sense cap dificultat els coeficients i, en definitiva, la SF corresponent.

Aquesta és la forma directa de trobar el desenvolupament de Fourier, però també n'hi ha una altra que, en bastants ocasions, pot anar molt bé. Fixem-nos que, si fem $F_1 = F_0 \cdot T/2$, llavors la funció (5.11) és la integral de la funció ona quadrada (5.7). Per tant, si integrem terme a terme la sèrie (5.8) amb $F_0 = 2F_1/T = F_1\omega/\pi$, ens queda



$$\begin{aligned}
 f(t) &= \int F(t) dt = \frac{4}{\pi} \frac{F_1 \omega}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \int \sin(2n-1)\omega t dt = \\
 &= -\frac{4F_1}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos(2n-1)\omega t + C
 \end{aligned} \quad (11)$$

on C és la constant d'integració que podem determinar a partir d'un valor de t i $f(t)$. Per exemple, com que a $t = 0$ tenim que $f(0) = 0$, veiem, per (1), que

$$C = \frac{4F_1}{\pi^2} \left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots \right)$$

Si ara provem $t = T/4$, per al qual $f(T/4) = F_1/2$, per (1) resulta $C = F_1/2$ —i d'aquí obtenim, de passada, quant val la sèrie numèrica anterior:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

Finalment, doncs, la sèrie (1) queda com

$$f(t) = F_1 \left\{ \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \left(\frac{\cos \omega t}{1^2} + \frac{\cos \omega 3t}{3^2} + \frac{\cos \omega 5t}{5^2} + \dots \right) \right\} \quad (5.12)$$

Observem que així com la sèrie (5.8) es pot integrar terme a terme i tot va bé, no passa el mateix si la volem derivar. En efecte, com és immediat de comprovar, si la derivem, queda una sèrie *no convergent* i no la funció constant zero que podríem esperar de la derivada de la funció (5.7).

En els exemples següents i en els problemes del final del capítol, veurem altres funcions periòdiques importants i els desenvolupaments corresponents.

5.2. Sèries de Fourier i estats estacionaris

5.2.1. Aplicació de les SF a les oscil·lacions forçades

Suposem que la força impulsora $F(t)$ que actua sobre un oscil·lador és periòdica, de període $2\pi/\omega$, i que, per tant, la podem desenvolupar en SF com (5.2)

$$F(t) = F_0 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t) \quad (5.13)$$

Per la linealitat que vèiem a (5.1) i els resultats de la secció §3.2, la solució $x(t)$, per a l'estat estacionari, serà, doncs

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_0}{n\omega Z_n} (a_n \cos(n\omega t - \delta_n) + b_n \sin(n\omega t - \delta_n)) \quad (5.14)$$

on, per (3.22) i (3.11),

$$Z_n = m \sqrt{\left(\frac{\omega_0^2 - n^2 \omega^2}{n\omega} \right)^2 + 4\beta^2} \quad \tan \delta_n = \frac{2\beta n\omega}{\omega_0^2 - n^2 \omega^2} \quad (5.15)$$



Com veurem tot seguit les expressions (5.15) són vàlides fins i tot per a $n = 0$.

Si en diem

$$\mu = \frac{\omega}{\omega_0} \quad (5.16)$$

i recordem que el factor de qualitat és $Q = \omega_0/2\beta$, aleshores, de (5.15) obtenim que els coeficients amb a_n —i, anàlogament, amb b_n — de (5.14) i els angles δ_n els podem posar, per a tota n , com

$$F_0 \frac{a_n}{n\omega Z_n} = \frac{F_0}{m\omega_0^2} \frac{a_n}{\sqrt{(1 - n^2\mu^2)^2 + \frac{n^2\mu^2}{Q^2}}} \quad (5.17)$$

$$\tan \delta_n = \frac{1}{Q} \frac{n\mu}{1 - n^2\mu^2} \quad (5.18)$$

Si l'amortiment és molt petit, és a dir, Q bastant gran, les dues expressions anteriors poden simplificar-se i queden com

$$F_0 \frac{a_n}{n\omega Z_n} = \frac{F_0}{m\omega_0^2} \frac{a_n}{|1 - n^2\mu^2|} \quad \text{i} \quad \delta_n \approx 0 \quad (5.19)$$

Això sí, en aquest cas, recordem que si l'amortiment és estrictament nul l'estat transitori perdurarà per sempre i l'estat estacionari no s'arribarà a assolir mai.

Vegem com s'aplica tot això a diversos exemples.

Exemple 5.5. Sèrie de Fourier i oscil·lacions forçades per una ona quadrada

Un oscil·lador de massa m , freqüència pròpia ω_0 i amortiment molt petit està sotmès a la força periòdica $F(t)$ ona quadrada que hem vist a l'exemple 5.2.

Si $m = 1$ kg, $F_0 = 1$ N i $\omega_0 = 10$ rad/s, estudieu l'estat estacionari de l'oscil·lador per a les tres freqüències $\mu = \omega/\omega_0 = \{0, 1; 0, 3; 1, 5\}$.

Solució

Com hem vist a l'exemple 5.2, el desenvolupament de Fourier de $F(t)$ és (5.8), amb $\omega = 2\pi/T$,

$$F(t) = F_0 \frac{4}{\pi} \left(\sin \omega t + \frac{\sin 3\omega t}{3} + \frac{\sin 5\omega t}{5} + \dots \right) = \frac{4F_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin(2n-1)\omega t \quad (1)$$

Com que, en aquest exemple, $\beta \approx 0$, per (5.19) i (1) resulta, finalment, la sèrie

$$x(t) = \frac{F_0}{m\omega_0^2} \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1) |1 - (2n-1)^2\mu^2|} \sin(2n-1)\omega t$$

Substituint els valors numèrics i $n = 1, 2, 3, \dots$, obtenim els tres casos següents segons μ .



$$- \mu = \omega/\omega_0 = 0,1$$

$$x(t) = F_0 \times 10^{-3} ($$

+ 12,8610 sin(1 · 3t)	+ 4,6639 sin(3 · 3t)	+ 3,3953 sin(5 · 3t)	+ 3,5665 sin(7 · 3t)
+ 7,4458 sin(9 · 3t)	+ 5,5119 sin(11 · 3t)	+ 1,4194 sin(13 · 3t)	+ 0,6791 sin(15 · 3t)
+ 0,3963 sin(17 · 3t)	+ 0,2567 sin(19 · 3t)	+ 0,1778 sin(21 · 3t)	+ 0,1290 sin(23 · 3t)
+ 0,0970 sin(25 · 3t)	+ 0,0750 sin(27 · 3t)	+ 0,0593 sin(29 · 3t)	+ 0,0477 sin(31 · 3t)
+ 0,0390 sin(33 · 3t)	+ 0,0323 sin(35 · 3t)	+ 0,0271 sin(37 · 3t)	+ 0,0230 sin(39 · 3t)
+ 0,0196 sin(41 · 3t)	+ 0,0169 sin(43 · 3t)	+ 0,0147 sin(45 · 3t)	+ 0,0128 sin(47 · 3t)
+ 0,0113 sin(49 · 3t)	+ 0,0100 sin(51 · 3t)	+ 0,0089 sin(53 · 3t)	+ ...)

Com veiem, el terme més significatiu és el primer, però l'amplitud torna a fer-se important en el cinquè, que correspon a la freqüència $\omega_5 = 9\omega = 27$ rad/s. Més enllà del sisè els coeficients es van fent més petits, però molt lentament... Per tal que els coeficients siguin $< 0,01$, hem d'esperar al $2n - 1 = 53$, mentre que perquè siguin $< 0,001$ hem d'esperar al $2n - 1 = 109$.

$$- \mu = \omega/\omega_0 = 0,3$$

$$x(t) = F_0 \times 10^{-3} ($$

+ 13,9916 sin(1 · 3t)	+ 22,3375 sin(3 · 3t)	+ 2,0372 sin(5 · 3t)	+ 0,5334 sin(7 · 3t)
+ 0,2249 sin(9 · 3t)	+ 0,1170 sin(11 · 3t)	+ 0,0689 sin(13 · 3t)	+ 0,0441 sin(15 · 3t)
+ 0,0299 sin(17 · 3t)	+ 0,0213 sin(19 · 3t)	+ 0,0157 sin(21 · 3t)	+ 0,0118 sin(23 · 3t)
+ 0,0092 sin(25 · 3t)	+ ...)		

En aquest cas, el terme més significatiu no és el primer sinó el segon, que té la freqüència $\omega_2 = 3 \cdot 3 = 9$ rad/s pròxima a la natural $\omega_0 = 10$ rad/s. Més enllà del tercer, els coeficients es van fent més petits, també lentament...

$$- \mu = \omega/\omega_0 = 1,5$$

$$x(t) = F_0 \times 10^{-3} ($$

+ 10,1859 sin(1 · 3t)	+ 0,2205 sin(3 · 3t)	+ 0,0461 sin(5 · 3t)	+ 0,0166 sin(7 · 3t)
+ 0,0078 sin(9 · 3t)	+ 0,0043 sin(11 · 3t)	+ 0,0026 sin(13 · 3t)	+ 0,0017 sin(15 · 3t)
+ 0,0012 sin(17 · 3t)	+ 0,0008 sin(19 · 3t)	+ 0,0006 sin(21 · 3t)	+ 0,0005 sin(23 · 3t)
+ 0,0004 sin(25 · 3t)	+ ...)		

En aquest últim cas, com passa en general si $\omega > \omega_0$, predomina clarament l'harmònic fonamental i el moviment és, bastant aproximadament, un MHS de freqüència ω amb les petites correccions introduïdes pels altres harmònics.

A les figures 5.7 s'han esquematitzat les gràfiques de $x(t)(\times 10^3)$ corresponents a aquests tres casos durant uns quants períodes. Les gràfiques es comenten per si mateixes: a les (a) i (b), sobretot a la primera, en què $\mu = \omega/\omega_0 \ll 1$, és a dir, $\omega_0 < \omega$ o $T > T_0$, a $x(t)$ encara s'aprecia l'efecte de la forma quadrada de $F(t)$; a la (c), amb $\omega_0 > \omega$ i $T < T_0$, ja no.

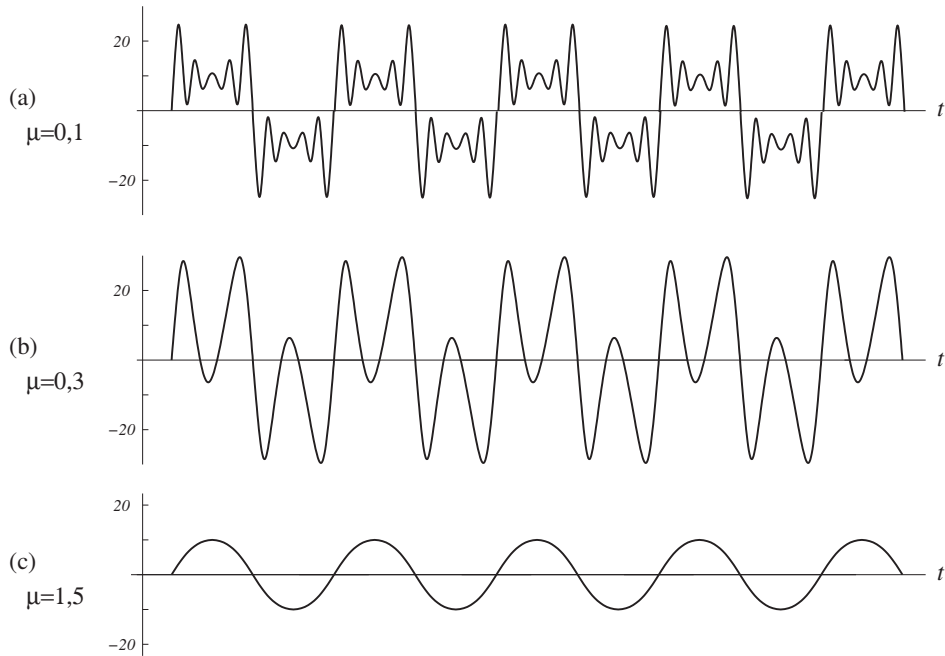


Figura 5.7

Exemple 5.6. Sèrie de Fourier i oscil·lacions forçades per un sinus rectificat

El mateix oscil·lador de l'exemple 5.5 anterior està sotmès a la força periòdica $F(t)$ en la forma del *sinus rectificat* següent:

$$f(t) = F_0 \left| \sin \frac{2\pi}{T} t \right|, \text{ si } 0 < t < T \quad (5.20)$$

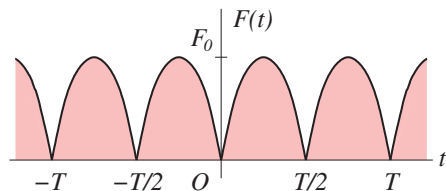


Figura 5.8

Sabem que a aquesta funció força li correspon el desenvolupament de Fourier següent —es demana demostrar-ho en el problema 5.9—:

$$f(t) = F_0 \left\{ \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \left(\frac{\cos \omega t}{1 \cdot 3} + \frac{\cos 2\omega t}{3 \cdot 5} + \frac{\cos 3\omega t}{5 \cdot 7} + \dots \right) \right\} \quad (5.21)$$

on, naturalment, $\omega = 2\pi/T$. Prenent, com abans, $\omega_0 = 10$ rad/s, $m = 1$ kg, i $\beta \approx 0$, estudeu el moviment estacionari de l'oscil·lador per a les tres freqüències: $\mu = \omega/\omega_0 = \{0,3; 0,8; 1,5\}$.

Solució

Igual com hem fet a l'exemple anterior, trobem $x(t)$ a partir de (5.14) i (5.19). El terme $2F_0/\pi$ de (5.21) queda com $2F_0/\pi m \omega_0^2$ ja que, de fet, és una força estàtica; els altres porten al desenvolupament següent:



$$x(t) = \frac{F_0}{m\omega_0^2} \left(\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2 - 1) |1 - n(\omega/\omega_0)^2|} \cos n\omega t \right)$$

Substituint els valors numèrics i $n = 1, 2, 3, \dots$ obtenim, per a cada μ , les sèries següents.

- $\mu = \omega/\omega_0 = 0,3$

$$\begin{aligned} x(t) = & F_0 \cdot 6,36620 \times 10^3 & -F_0 \cdot 10^3 (\\ & + 4,6639 \cos(1 \cdot 3t) & + 1,3263 \cos(2 \cdot 3t) & + 1,9147 \cos(3 \cdot 3t) & + 0,4593 \cos(4 \cdot 3t) \\ & + 0,1029 \cos(5 \cdot 3t) & + 0,0398 \cos(6 \cdot 3t) & + 0,0192 \cos(7 \cdot 3t) & + 0,0105 \cos(8 \cdot 3t) \\ & + 0,0063 \cos(9 \cdot 3t) & + 0,0040 \cos(10 \cdot 3t) & + 0,0027 \cos(11 \cdot 3t) & + 0,0019 \cos(12 \cdot 3t) \\ & + 0,0013 \cos(13 \cdot 3t) & + 0,0010 \cos(14 \cdot 3t) & + \dots) \end{aligned}$$

Com podem apreciar, els termes més significatius són, amb diferència, els tres primers. Aquí també el tercer és el que té la freqüència $\omega_3 = 3 \cdot 3 = 9$ rad/s més pròxima a la natural, $\omega_0 = 10$ rad/s. A partir del quart, els coeficients es van fent més petits, però ara més ràpidament que a l'exemple anterior. A la figura 5.9, s'ha representat $x(t)(\times 10^3)$ durant uns quants períodes.

Figura 5.9



- $\mu = \omega/\omega_0 = 0,8$

$$\begin{aligned} x(t) = & F_0 \cdot 6,36620 \times 10^3 & -F_0 \cdot 10^3 (\\ & + 11,7893 \cos(1 \cdot 3t) & + 0,5441 \cos(2 \cdot 3t) & + 0,0764 \cos(3 \cdot 3t) & + 0,0219 \cos(4 \cdot 3t) \\ & + 0,0086 \cos(5 \cdot 3t) & + 0,0040 \cos(6 \cdot 3t) & + 0,0022 \cos(7 \cdot 3t) & + 0,0012 \cos(8 \cdot 3t) \\ & + 0,0008 \cos(9 \cdot 3t) & & & + \dots) \end{aligned}$$

En aquest cas, el terme dominant és el primer. El moviment és un MHS, amb una petita correcció de menys del 5% per part del segon, i molt més petites per part dels següents.

- $\mu = \omega/\omega_0 = 1,5$

$$\begin{aligned} x(t) = & F_0 \cdot 6,36620 \times 10^3 & -F_0 \cdot 10^3 (\\ & + 3,3953 \cos(1 \cdot 3t) & + 0,1061 \cos(2 \cdot 3t) & + 0,0189 \cos(3 \cdot 3t) & + 0,0058 \cos(4 \cdot 3t) \\ & + 0,0023 \cos(5 \cdot 3t) & + 0,0011 \cos(6 \cdot 3t) & + 0,0006 \cos(7 \cdot 3t) & + \dots) \end{aligned}$$

Aquí torna a dominar l'armònic fonamental, amb una petita correcció d'un 3% per part del segon harmònic i molt més petites per part dels següents.



Exemple 5.7. Sèrie de Fourier i oscil·lacions forçades amb amortiment

L'oscil·lador de l'exemple 5.5 està sotmès ara a una força de fricció viscosa per a la qual el factor de qualitat val $Q = 3$ —és a dir, $\beta = \omega_0/6$. Torneu a estudiar el moviment estacionari de l'oscil·lador per a la freqüència $\omega/\omega_0 = 0,3$ tenint en compte ara l'amortiment.

Solució

Abans de començar, fixem-nos que, en aquest cas, l'amortiment té la seva importància. Ara ja hi aplicarem les expressions (5.17) i (5.18), amb les b_n donades per (5.8). Ens quedarà

$$x(t) = \frac{F_0}{m\omega_0^2} \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)} \frac{1}{\sqrt{[1 - (2n-1)^2\mu^2]^2 + \frac{(2n-1)^2\mu^2}{Q^2}}} \sin[(2n-1)\omega t - \delta_n]$$

amb l'angle δ_n donat, en general per (5.18), i que aquí resulta

$$\tan \delta_n = \frac{(2n-1)\mu}{Q(1 - (2n-1)^2\mu^2)}$$

Fent les operacions numèriques per a $2n-1 = 1, 3, 5, \dots$, n'obtenim

$$x(t) = F_0 \times 10^{-3} ($$

+12,2625 sin(1 · 3t - 0,1095)	+2,8070 sin(3 · 3t - 1,0062)	+0,9111 sin(5 · 3t + 0,3805)
+0,3722 sin(7 · 3t + 0,2025)	+0,1829 sin(9 · 3t + 0,1421)	+0,1023 sin(11 · 3t + 0,1108)
+0,0627 sin(13 · 3t + 0,0912)	+0,0411 sin(15 · 3t + 0,0778)	+0,0284 sin(17 · 3t + 0,0679)
+0,0204 sin(19 · 3t + 0,0603)	+0,0151 sin(21 · 3t + 0,0542)	+0,0115 sin(23 · 3t + 0,0493)
+0,0090 sin(25 · 3t + 0,0452)	+0,0071 sin(27 · 3t + 0,0418)	+0,0058 sin(29 · 3t + 0,0388)
+0,0047 sin(31 · 3t + 0,0362)	+0,0039 sin(33 · 3t + 0,0340)	+0,0033 sin(35 · 3t + 0,0320)
+ ...)		

A la figura 5.10, es mostra aquesta resposta $x(t)(\times 10^3)$ durant uns quants períodes: compareu-la amb la gràfica (b) de la figura 5.7 de l'exemple 5.5, què és el mateix cas, però allà sense amortiment.

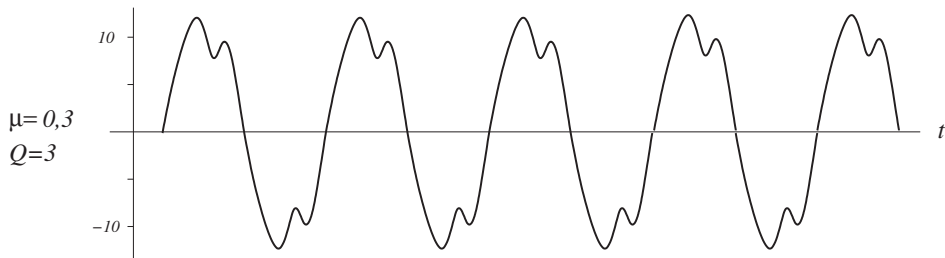


Figura 5.10



5.2.2. Energia i sèrie de Fourier

Considerem una força externa $F(t)$ periòdica, que desenvolupem en sèrie de Fourier

$$F(t) = F_0 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t)$$

i que actua sobre la partícula d'un oscil·lador originant-ne un moviment periòdic $x(t)$ tal que, en l'estat estacionari, podem expressar la seva velocitat en una sèrie de Fourier com ara aquesta altra

$$v(t) = \dot{x}(t) = v_0 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (A_n \cos n\omega t + B_n \sin n\omega t)$$

Com fèiem a la secció §3.5 ara ens preguntem quanta potència, de mitjana, subministra la força externa a l'oscil·lador, que, en l'estat estacionari, és com preguntar quanta energia té l'oscil·lador. Com sabem, la potència instantània subministrada és el producte $P(t) = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = F v$ i la mitjana —apèndix §A.4— serà

$$\langle P \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T F(t) v(t) dt = \frac{1}{2} F_0 v_0 \frac{\omega}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi/\omega} \left[\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t) \right] \left[\sum_{n=0}^{\infty} (A_n \cos n\omega t + B_n \sin n\omega t) \right] dt \quad (5.22)$$

Ara bé, aquesta integral queda extraordinàriament simplificada. Si ens hi fixem bé, aquest producte de sumatoris dóna lloc a integrals del tipus

$$\int_0^{2\pi/\omega} \cos n\omega t \sin m\omega t dt \quad \text{o tipus} \quad \int_0^{2\pi/\omega} \sin n\omega t \sin m\omega t dt$$

etc. Precisament, aquestes integrals trigonomètriques estan recollides a l'apèndix §A.3.2, d'on deduïm que només les d'un integrant tipus (A.82), com $\sin^2 n\omega t$ o $\cos^2 n\omega t$, són diferents de zero. Així, la integral (5.22) queda com

$$\langle P \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} F_0 v_0 (a_n A_n + b_n B_n) \quad (5.23)$$

És a dir, la potència mitjana total subministrada és igual a la suma de les potències de cadascuna de les components de Fourier. Aquest resultat es pot generalitzar a les energies de la forma següent:

L'energia total d'una oscil·lació periòdica és exactament la suma de les energies corresponents a cadascuna de les components de Fourier.

5.3. Integral de Fourier

Una funció $f(t)$ no periòdica la podem entendre com una funció que té un període que va des de $-\infty$ fins a $+\infty$. En vista d'això, ens podem preguntar si l'anàlisi de Fourier



que hem vist i aplicat a la secció §5.1 es pot estendre a les funcions no periòdiques. La resposta és que sí i, de fet, veurem que hi ha una gran similitud entre els casos de la funció periòdica i el de la funció no periòdica.

Teorema de la integral de Fourier

Si $f(t)$ compleix les *condicions de Dirichlet* —esmentades a la secció §5.1— i la integral $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt$ convergeix, aleshores la funció $f(t)$ es pot expressar com

$$f(t) = \int_0^{\infty} [A(\omega) \cos \omega t + B(\omega) \sin \omega t] d\omega \quad (5.24)$$

essent $A(\omega)$ i $B(\omega)$ dues funcions de ω definides per

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t dt \quad B(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t dt \quad (5.25)$$

Com en el teorema de la SF, en els punts de discontinuïtat de $f(t)$ la integral (5.24) val la mitjana entre els límits per l'esquerra i per la dreta de la funció.

Aquestes expressions (5.24) i (5.25) són, en el fons, semblants a (5.2) i (5.3), que hem vist a la secció §5.1. Les funcions $A(\omega)$ i $B(\omega)$ fan el mateix paper a la integral (5.24) que les constants a_n i b_n donades per (5.3) a la sèrie (5.2): en la descomposició de la funció $f(t)$ en una integral de funcions sinus i cosinus, representen l'amplitud, la contribució o el pes de cada terme segons la freqüència ω de què es tracti. En ambdós casos, per a les a_n , b_n i les $A(\omega)$, $B(\omega)$, les integrals que les determinen s'estenen a tot el període corresponent.

D'altra banda, la diferència més notable i més característica entre el cas de la funció periòdica i el de la funció no periòdica és que, en aquesta última, el sumatori de la sèrie (5.2) ha quedat convertit en la integral (5.24). Això significa que, en la SF, l'espectre de freqüències és discret: ω , 2ω , 3ω , ..., mentre que en la integral de Fourier tenim un *espectre de freqüències continu*: com veiem a (5.24) i (5.25), totes les freqüències, des de 0 fins a ∞ , contribueixen, més o menys, al desenvolupament de $f(t)$. Els valors $A(\omega)$ i $B(\omega)$ són les amplituds en els desenvolupaments en cosinus i sinus corresponents a l'interval de freqüències entre ω i $\omega + d\omega$.

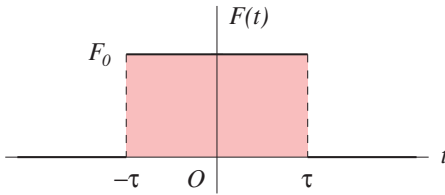
Les dues integrals (5.25) són les dues components de la *transformada de Fourier*, eina matemàtica potentíssima de gran aplicació en tots els camps de la física i la tecnologia. A la secció §5.5, veurem una forma més compacta d'expressar el desenvolupament (5.25) i la transformada de Fourier.

A continuació, vegem-ne dos exemples. En el primer, veurem com es fa el desenvolupament en integral de Fourier d'un pols rectangular; en el segon, com sorgeix la necessitat de la distribució contínua de freqüències per a les funcions no periòdiques. I a la pròxima secció estudiarem com es relaciona la durada d'un tren d'ones o senyal sinusoidal amb l'interval de freqüències que cal per sintetitzar-lo.

**Exemple 5.8. Integral de Fourier d'un pols rectangular**

Sigui la funció no periòdica $f(t)$ *pols rectangular* definida com

Figura 5.11



$$f(t) = \begin{cases} F_0, & \text{si } -\tau < t < \tau \\ 0, & \text{si } |t| > \tau \end{cases} \quad (5.26)$$

Feu-ne el desenvolupament en integral de Fourier.

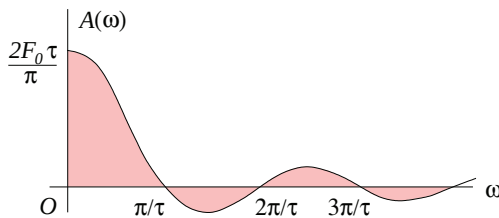
Solució

Calculem les funcions $A(\omega)$ i $B(\omega)$ corresponents. Bé, de fet, anàlogament al que hem vist a la secció §5.1 que passa amb els coeficients a_n i b_n de les sèries de Fourier, si $f(t)$ és senar, la funció és $A(\omega) = 0$ i, si $f(t)$ és parella, la funció és $B(\omega) = 0$. En aquest exemple, la funció (5.26) és parella i, per tant, $B(\omega) = 0$. Quant a la $A(\omega)$, per (5.25) tenim que

$$A(\omega) = \frac{F_0}{\pi} \int_{-\tau}^{\tau} \cos \omega t \, dt = \frac{F_0}{\pi \omega} [\sin \omega t]_{-\tau}^{\tau} = \frac{2F_0\tau}{\pi} \frac{\sin \omega \tau}{\omega \tau} \quad (5.27)$$

A la figura 5.12, hi ha representada la funció $A(\omega)$. Fixem-nos com l'allargament o l'escurçament de tota la gràfica depèn de τ .

Figura 5.12



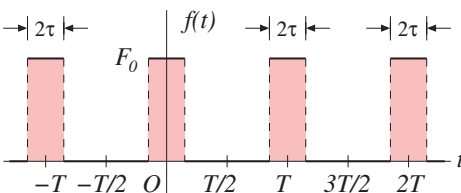
I ara, per (5.24) i (5.27), podem posar la funció pols rectangular (5.26) com la integral de Fourier

$$f(t) = \frac{2F_0\tau}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \omega \tau}{\omega \tau} \cos \omega t \, d\omega \quad (5.28)$$

Exemple 5.9. Espectre discret i espectre continu

Sigui la funció periòdica $f(t)$ *impuls o pols rectangular* definida per

Figura 5.13



$$f(t) = \begin{cases} F_0, & \text{si } 0 < t < \tau \\ 0, & \text{si } \tau < t < T - \tau \\ F_0, & \text{si } T - \tau < t < T \end{cases} \quad (5.29)$$



on F_0 i τ són constants. Fent $\omega = 2\pi/T$, el seu desenvolupament en SF és —com es demana que es demostrï al problema 5.12—

$$f(t) = F_0 \frac{\omega\tau}{\pi} + F_0 \frac{2}{\pi} \left(\frac{\sin \omega\tau}{1} \cos \omega t + \frac{\sin 2\omega\tau}{2} \cos 2\omega t + \frac{\sin 3\omega\tau}{3} \cos 3\omega t + \dots \right) \quad (5.30)$$

Doncs bé, estudiem la relació entre l'espectre discret de freqüències d'aquesta funció i l'espectre continu del pols rectangular aïllat de l'exemple 5.8.

Solució

El terme general de la sèrie (5.30), si $n > 0$, és

$$a_n = F_0 \frac{2}{\pi} \frac{\sin(n2\omega\tau)}{n} = 4F_0 \frac{\tau}{T} \frac{\sin n\omega\tau}{n\omega\tau} \quad (1)$$

Per tal de normalitzar les a_n , introduïm les a_n^* , que per (1) queden com

$$a_n^* = \frac{T}{2\pi} a_n = \frac{2F_0\tau}{\pi} \frac{\sin n\omega\tau}{n\omega\tau} \quad (2)$$

Veiem que a_n^* té una expressió molt semblant a la funció $A(\omega)$ donada per (5.27) de l'exemple anterior. Això sí, no oblidem que les ω de les dues expressions tenen significats diferents.

La a_n^* donada per (2) també podem entendre-la com una funció de $n\omega$, $a_n^*(n\omega)$. En aquest sentit, de (2) deduïm que $a_n^*(n\omega)$ passa per zero cada cop que $n\omega\tau = k\pi$, essent $k = 1, 2, \dots$, és a dir, per als valors de n —zeros— donats per

$$n_k = k \frac{\pi}{\omega\tau} = k \frac{T}{2\tau}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3)$$

o, el que és equivalent, per als valors de $n\omega$ donats per

$$n_k\omega = k \frac{T}{2\tau} \cdot \frac{2\pi}{T} = k \frac{\pi}{\tau}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (4)$$

que resulten independents del valor de T .

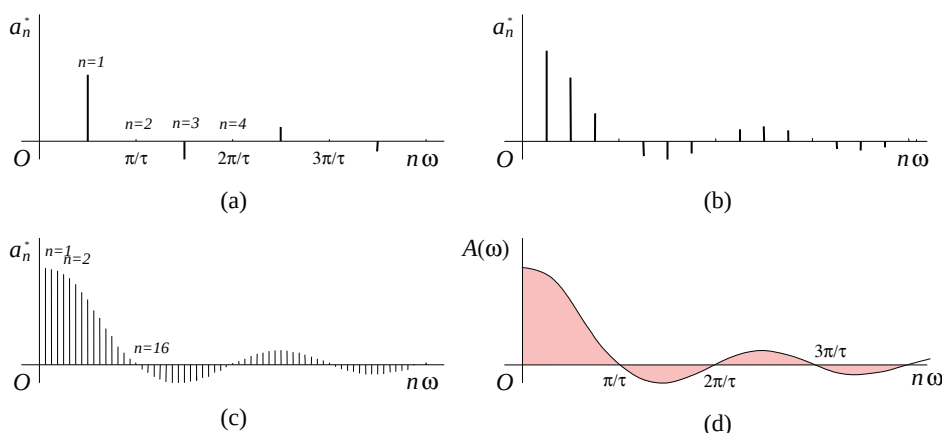
D'altra banda, ara ens podem preguntar: Quin nombre de freqüències hi ha entre l'origen, $n = 0$, i el primer zero de la $a_n^*(n\omega)$? O entre dos zeros qualssevol consecutius? Per (3) i (4), tenim que

$$\Delta n = n_k - n_{k-1} = \frac{T}{2\tau} \quad \text{i} \quad \Delta(n\omega) = \omega \Delta n = \frac{\pi}{\tau} \quad (5)$$

A la figura 5.14, s'ha representat gràficament la a_n^* donada per (2) en funció de $n\omega$, per als valors discrets de $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, per als tres quocients τ/T : (a) $1/4$, (b) $1/8$, (c) $1/16$. Observem que en aquestes tres gràfiques, queden molt ben reflectides l'expressió (4) —a les tres gràfiques, els zeros són a $k\pi/\tau$ — i la (5) —la “densitat de freqüències” és proporcional a T/τ . Si féssim T molt, molt gran, les freqüències s'ajuntarien tant que semblaria un espectre continu. Fixem-nos que, a mesura que τ/T disminueix va apareixent amb més claretat un embolcall a l'espectre discret de a_n^* , i que aquest embolcall és

$A(\omega)$, l'espectre continu del pols aïllat, representat a la figura 5.14 (d) —compareu-la amb la figura 5.12 de l'exemple 5.8.

Figura 5.14



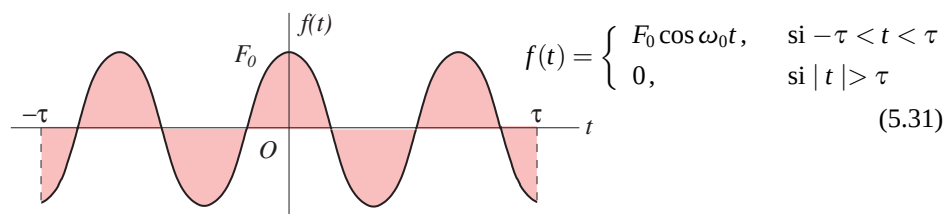
Així doncs, amb aquest exemple, hem vist la tendència de l'espectre a fer-se continu si la funció periòdica tendeix a deixar-ho de ser.

5.4. Anàlisi de Fourier d'un pols harmònic finit

Una oscil·lació o una ona harmònica en sentit estricte no pot donar-se en la realitat, ja que això voldria dir que existeix des de sempre i per sempre. En la realitat el que tenim són polsos harmònics, que vénen a ser com oscil·lacions o ones harmòniques però de durada finita, és a dir, tenen un instant en què comencen i un instant en què acaben. Els polsos són tan importants que dedicarem aquesta secció a estudiar-los amb detall fent-los l'anàlisi de Fourier.

Per a aquesta anàlisi, definim la funció *pols harmònic finit* de freqüència ω_0 i durada 2τ com

Figura 5.15



Si l'oscil·lació s'estengués a tot el temps, és a dir, des de $-\infty$ fins a ∞ , l'anàlisi de Fourier seria ben simple: només contribuiria a la funció la freqüència ω_0 . Però, com que la funció és zero fins a $t = -\tau$ i torna a ser-ho des de $t = +\tau$, i només hi ha oscil·lació entre aquests dos instants, hem d'afegir a $F_0 \cos \omega_0 t$ una sèrie contínua d'altres harmònics de forma que la suma de tots ells reproduïxi exactament el pols (5.31).

Com que la funció és parella, només contribuirà a (5.24) el terme amb $A(\omega)$, ja que $B(\omega) = 0$. Per (5.25) i per (A.23), tindrem



$$\begin{aligned}
 A(\omega) &= \frac{F_0}{\pi} \int_{-\tau}^{\tau} \cos \omega_0 t \cos \omega t dt = \frac{F_0}{2\pi} \int_{-\tau}^{\tau} [\cos(\omega_0 - \omega)t + \cos(\omega_0 + \omega)t] dt = \\
 &= \frac{F_0 \tau}{\pi} \left(\frac{\sin(\omega - \omega_0)\tau}{(\omega - \omega_0)\tau} + \frac{\sin(\omega + \omega_0)\tau}{(\omega + \omega_0)\tau} \right)
 \end{aligned} \quad (5.32)$$

Si, com passa en moltes ocasions d'interès, la durada del pols és bastant més gran que el període de l'oscil·lació, és a dir, $2\tau \gg 2\pi/\omega_0$, aleshores $(\omega_0 + \omega)\tau \gg \pi$, per a qualsevol ω , la qual cosa vol dir que el segon quocient de (5.32) es fa molt petit, fins i tot per a $\omega = 0$, i a la suma (5.32) predomina el primer, que a $\omega = \omega_0$ pren el valor màxim, 1. Per tant, si $\omega_0 \tau \gg \pi$, podem aproximar (5.32) per

$$A(\omega) \approx \frac{F_0 \tau}{\pi} \frac{\sin(\omega - \omega_0)\tau}{(\omega - \omega_0)\tau} \quad (5.33)$$

Aquesta funció $A(\omega)$ donada per (5.33) s'ha representat a la figura 5.16. Hi podem apreciar que, si bé hi ha una freqüència dominant que correspon a $\omega = \omega_0$ —on hi ha el màxim—, per sintetitzar un pols finit cal una distribució contínua de freqüències. Com veiem també a (5.33), i s'ha expressat a la figura 5.16, a mesura que fem créixer τ la funció $A(\omega)$ es va encongint en ω i es converteix en un pic centrat en ω_0 cada cop més alt i estret. També podem fixar-nos que la funció pols rectangular (5.26) és un cas particular — $\omega_0 = 0$ — del pols harmònic finit, la qual cosa també queda reflectida en les corresponents $A(\omega)$, la (5.33) i la (5.28).

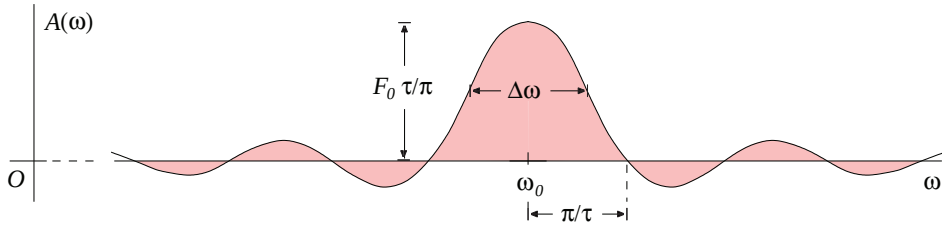


Figura 5.16

Podem acabar de veure encara millor la relació entre la durada del pols i la distribució de freqüències introduint-hi l'*amplada del pic* $\Delta\omega$. Aquesta $\Delta\omega$ dóna una idea clara de la grandària, a la pràctica, del marge de freqüències que intervenen en la integral de Fourier de la funció $f(t)$ —que, en teoria, és infinit. De forma semblant a com vam fer per a l'amplada de la ressonància a la secció §3.6, definim $\Delta\omega$ com l'interval tal que, per a les ω

$$\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2} < \omega < \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2} \quad \text{llavors} \quad A(\omega) > \frac{1}{2}A(\omega_0) = \frac{1}{2}F_0\tau \quad (5.34)$$

Com que la solució de la inequació $\sin x/x > 1/2$ és, com és ben fàcil de comprovar, $|x| < 1,895$, aleshores, per (5.33) i (5.34), trobem que $\Delta\omega\tau = 3,79$. Si, finalment, en lloc de τ posem $\Delta t = 2\tau$, és a dir, la durada del pols, i n'arrodonim el resultat, ens queda que la relació entre $\Delta\omega$ i Δt és, aproximadament,

$$\Delta\omega \Delta t \approx 2\pi \quad (5.35)$$

Aquesta última relació ens expressa que,

com més petita sigui la durada Δt del pols, més marge de freqüències $\Delta\omega/2$ al voltant de ω_0 caldrà per representar-lo, i a l'inrevés.



L'aproximació (5.35), i tot el que se'n desprèn, és molt important en camps com l'òptica i les telecomunicacions, però, sobretot, és fonamental en la *mecànica quàntica*. En la visió quàntica de la física, les partícules es descriuen per polsos finits o paquets d'ona d'una freqüència angular ω proporcional a l'energia que tenen. En aquesta interpretació, la relació (5.35) és l'expressió del *principi d'incertesa de Heisenberg* que, més o menys, vol dir que el producte de la incertesa en l'energia que té una partícula per la incertesa en l'instant de temps que estem considerant no es pot fer mai zero sinó que té un valor finit, de forma que si millorem el coneixement d'una d'aquestes magnituds automàticament empitjora el de l'altra.

5.5. La transformada de Fourier

És molt interessant observar que el desenvolupament en sèrie de Fourier (5.2) que hem vist anteriorment, amb els coeficients donats per (5.3), també té un tractament molt senzill amb nombres complexos.¹ Per mitjà de les igualtats (C.13), tenim que

$$\begin{aligned} a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t &= a_n \frac{e^{in\omega t} + e^{-in\omega t}}{2} + b_n \frac{e^{in\omega t} - e^{-in\omega t}}{2i} = \\ &= \frac{1}{2}(a_n - ib_n)e^{in\omega t} + \frac{1}{2}(a_n + ib_n)e^{-in\omega t} = c_n e^{in\omega t} + c_{-n} e^{-in\omega t}, \end{aligned}$$

amb $n = 1, 2, \dots$ i, per tant, podem posar la SF (5.2) de la funció $f(t)$, de període $T = 2\pi/\omega$, com

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t} \quad (5.36)$$

on c_n són els coeficients complexos donats per la integral següent i que es relacionen amb els a_n i b_n de (5.3) de la forma

$$c_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) e^{-in\omega t} dt = \begin{cases} (a_n - ib_n)/2, & \text{si } n > 0 \\ (a_{-n} + ib_{-n})/2, & \text{si } n < 0 \\ a_0/2, & \text{si } n = 0 \end{cases} \quad (5.37)$$

Anàlogament, amb la representació complexa, la integral de Fourier (5.24) pot posar-se com²

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (5.38)$$

en què $\mathcal{F}(\omega)$ és, precisament, la *transformada de Fourier* complexa de la funció $f(t)$, donada per

$$\mathcal{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (5.39)$$

¹ A l'apèndix C, es fa un repàs dels nombres complexos i de la representació complexa de les oscil·lacions.

² A la igualtat (5.38) el coeficient $1/2\pi$ és convencional, és a dir, es pot posar o no; si no es posa (5.38), és més semblant a (5.36), però s'haurà de posar a la (5.39).



i de la qual, comparant (5.38) i (5.39) amb les homòlogues (5.24) i (5.25), veiem que $\mathcal{F}(\omega)$ està molt relacionada amb $A(\omega)$ i $B(\omega)$.

L'analogia entre la transformada de Fourier i les sèries de Fourier es manifesta clarament en el fet que la transformada també té la seva *igualtat de Parseval* que, de forma anàloga a la (5.4), ara estableix

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{F}(\omega)|^2 d\omega \quad (5.40)$$

Vegem, per acabar, un exemple de transformada de Fourier.

Exemple 5.10. Transformada de Fourier d'una gaussiana

Sigui la *funció gaussiana*

$$f(t) = F_0 e^{-at^2} \quad (1)$$

en què F_0 i a són constants. Calculeu i interpreteu la seva transformada de Fourier.

Solució

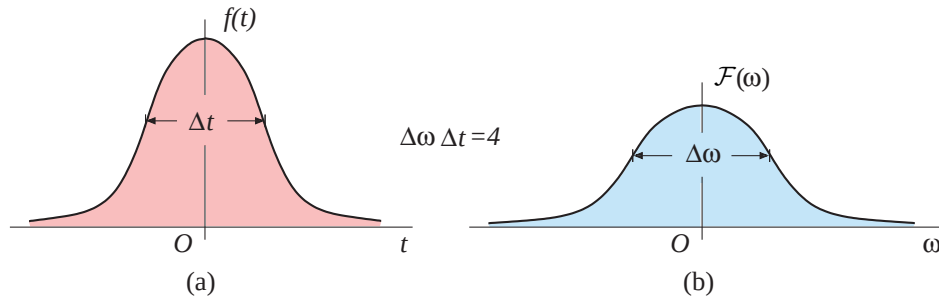


Figura 5.17

Abans de començar, vegem com es relaciona el paràmetre a amb l'amplada Δt característica de la *campana de Gauss* (1) —v. figura 5.17 (a). Com és fàcil de comprovar igualant a zero la segona derivada de (1), a $t_0 = \sqrt{\frac{1}{2a}}$ i a $-t_0$ hi ha els dos punts d'inflexió d'(1), que es corresponen amb l'altura relativa $f(t_0)/F_0 = 1/\sqrt{e} = 0,606$. Així doncs, una bona indicació de l'amplada Δt de (1) és $2t_0$, és a dir,

$$\Delta t = 2\sqrt{\frac{1}{2a}} \quad (2)$$

Esbrinem ara la transformada de (1). Per a això, apliquem l'expressió (5.39) i trobem

$$\mathcal{F}(\omega) = F_0 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2} e^{-i\omega t} dt \quad (3)$$

Com que podem fer

$$-at^2 - i\omega t = -\left(t\sqrt{a} + i\frac{\omega}{2\sqrt{a}}\right)^2 - \frac{\omega^2}{4a}$$



i ara, aplicant el canvi de variable $u = t\sqrt{a} + i\frac{\omega}{2\sqrt{a}}$, per al qual $dt = du/\sqrt{a}$, aleshores (3) queda com

$$\mathcal{F}(\omega) = F_0 \frac{1}{\sqrt{a}} e^{-\omega^2/4a} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du \quad (4)$$

El valor d'una integral com ara aquesta última està tabulat en (A.87). Tenint en compte que la funció e^{-u^2} és parella, la integral val, doncs, $\sqrt{\pi}$. I, finalment, la transformada (4) queda com

$$\mathcal{F}(\omega) = F_0 \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\omega^2/4a} \quad (5)$$

Així doncs, la transformada d'una funció gaussiana és una nova gaussiana. Podem caracteritzar l'amplada d'aquesta última —v. figura 5.17 (b)— aplicant l'expressió (2) adaptada a (5), i ens queda

$$\Delta\omega = 2\sqrt{2a} = \frac{4}{\Delta t}$$

d'on trobem, de forma semblant a la (5.35), que $\Delta\omega \Delta t = 4$. En definitiva, si $f(t)$ és una gaussiana estreta —amb una Δt petita—, la transformada gaussiana és ampla —amb $\Delta\omega$ gran—, i a l'inrevés. En termes de l'anàlisi de Fourier, això és com dir que, com més “estreta o ràpida” transcorre la gaussiana $f(t)$, més freqüències abastarà, és a dir, en llenguatge d'enginyeria de telecomunicacions, tindrà més *amplada de banda*. Observeu que aquest detall està en la línia del que hem vist a la secció §5.4 en relació amb el pols harmònic finit.

5.6. Problemes resolts i problemes proposats

5.6.1. Problemes resolts

Problema 5.1. Els coeficients de les sèries de Fourier

Trobeu les dues expressions (5.3) que donen els coeficients del desenvolupament d'una funció en sèrie de Fourier. Per a això, podeu fer el següent. Per trobar les a_n , multipliqueu tota la igualtat (5.2) per $\cos n\omega t$ i integreu entre 0 i $T = 2\pi/\omega$. Totes aquestes integrals s'anul·len excepte la de la a_n . I per a b_n feu el mateix però amb $\sin n\omega t$.

Solució

És a dir, per a m enter, hem d'integrar

$$\begin{aligned} \int_0^T f(t) \cos m\omega t dt &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^T (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t) \cos m\omega t dt = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^T \cos n\omega t \cos m\omega t dt + \sum_{n=0}^{\infty} b_n \int_0^T \sin n\omega t \cos m\omega t dt \end{aligned}$$



Per (A.82), (A.83) i (A.81) sabem que en aquests dos sumatoris d'integrals l'única que resulta ser diferent de zero és la corresponent a $\cos \cdot \cos$ i $n = m$. Així, com que $T = 2\pi/\omega$, tenim

$$\int_0^T f(t) \cos n\omega t dt = a_n \int_0^T \cos^2 n\omega t dt = a_n \frac{\pi}{\omega} = a_n \frac{T}{2}$$

d'on es dedueix el coeficient a_n . I anàlogament amb els coeficients b_n i $\sin m\omega t$.

Problema 5.2. Sèrie de Fourier d'un sinus semirectificat

Segui la funció $g(t)$ sinus semirectificat, de període $T = 2\pi/\omega$, definida com —v. figura 5.18—

$$g(t) = \begin{cases} F_0 \sin \omega t, & \text{si } nT \leq t \leq (n+1/2)T \\ 0, & \text{si } (n+1/2)T \leq t \leq nT \end{cases}$$

(5.41)

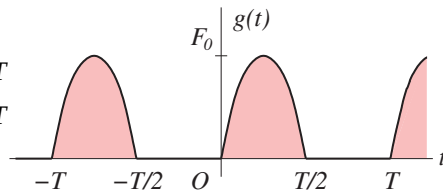


Figura 5.18

amb $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Sabent que el desenvolupament de la funció sinus rectificat $f(t) = F_0 |\sin \omega t|$ és la donada a (5.21) —com es demana demostrar al problema 5.9—, trobeu el desenvolupament del sinus semirectificat definit abans.

Solució

El sinus semirectificat (5.41) està relacionat amb el simplement rectificat $f(t)$ de la forma $g(t) = [F_0 \sin \omega t + f(t)]/2$, i, en conseqüència, la sèrie corresponent a $g(t)$ es relaciona amb la sèrie de $f(t)$ de (5.21) de la mateixa manera

$$g(t) = F_0 \left\{ \frac{\sin \omega t}{2} + \frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi} \left(\frac{\cos 2\omega t}{1 \cdot 3} + \frac{\cos 4\omega t}{3 \cdot 5} + \frac{\cos 6\omega t}{5 \cdot 7} + \dots \right) \right\} \quad (5.42)$$

Problema 5.3. Sèrie de Fourier d'una successió de paràboles

Trobeu el desenvolupament en SF de la funció periòdica $g(t)$ definida com —v. figura 5.19—

$$g(t) = 4F_0 \frac{t^2}{T^2}, \quad \text{si } -T/2 < t < T/2$$

(5.43)

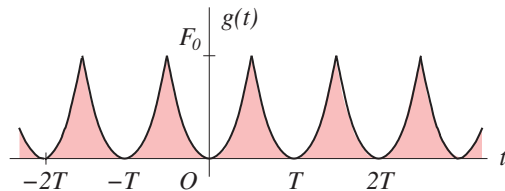


Figura 5.19

Solució

Podem fer-ho calculant els coeficients a_n, b_n per (5.3), o per integració de la sèrie (5.10) corresponent a la funció (5.9). En efecte, per (5.43) i (5.9) veiem que



$$g(t) = \frac{4}{T} \int f(t) dt = -\frac{4}{T} \frac{2F_0}{\pi} \frac{1}{\omega} \left(\frac{\cos \omega t}{1^2} - \frac{\cos 2\omega t}{2^2} + \frac{\cos 3\omega t}{3^2} - \dots \right) + C \quad (1)$$

on C és la constant d'integració. Tal com vam fer a l'exemple 5.4, podem intentar trobar la C donant un valor concret a t i imposant que (1) valgui el que resulta per (5.43). En aquest cas, aquest mètode no és immediat ja que sempre hi apareix una sèrie numèrica. Però també podem calcular C fixant-nos que la C és la constant a_0 de (5.3), és a dir, que

$$C = a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} 4F_0 \frac{t^2}{T^2} dt = \frac{F_0}{3} \quad (2)$$

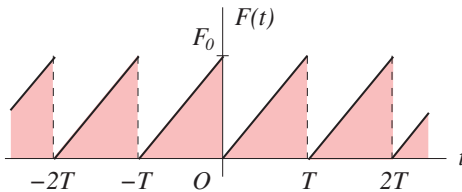
Així, de (1) i (2) obtenim

$$g(t) = \frac{F_0}{3} - \frac{4F_0}{\pi^2} \left(\frac{\cos \omega t}{1^2} - \frac{\cos 2\omega t}{2^2} + \frac{\cos 3\omega t}{3^2} - \dots \right)$$

Problema 5.4. Estat estacionari d'un oscil·lador i sèrie de Fourier, 1

Un oscil·lador no amortit està sotmès a la força periòdica $F(t)$ *dent de serra positiva* donada per —v. figura 5.20—

Figura 5.20



$$F(t) = F_0 \frac{t}{T}, \quad \text{si } 0 < t < T \quad (5.44)$$

Sabent que el desenvolupament en SF d'aquesta funció ve donat —com es demana demostrar al problema 5.11— per la sèrie següent:

$$F(t) = F_0 \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \left(\frac{\sin \omega t}{1} + \frac{\sin 2\omega t}{2} + \frac{\sin 3\omega t}{3} + \dots \right) \right] \quad (5.45)$$

en què $\omega = 2\pi/T$, estudieu el moviment de l'oscil·lador en l'estat estacionari si $\omega/\omega_0 = 0,3$ i $m = 1$ kg, $\omega_0 = 10$ rad/s, $\beta \approx 0$.

Solució

Aplicant les expressions (5.13), (5.14) i (5.15), tindrem la sèrie —ara en sinus— per a l'elongació $x(t)$ de l'oscil·lador. Com que $\beta \approx 0$, llavors $\delta_n = 0$ i pel que fa a $\omega_n Z_n = n\omega Z_n$, per (5.14) queda com

$$\omega_n Z_n = \omega_n m \frac{|\omega_0^2 - \omega_n^2|}{\omega_n} = m |\omega_0^2 - n^2 \omega^2|$$

de manera que, per a $n = 0$, $\omega_n Z_n = m\omega_0^2$, i el terme $F_0/2$ de (5.45) dóna lloc a $F_0/2m\omega_0^2$, és a dir, a una força estàtica. En definitiva, per a aquesta força, la sèrie (5.15) és

$$x(t) = \frac{F_0}{m\omega_0^2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n |1 - n^2 \omega^2 / \omega_0^2|} \sin n\omega t \right) \quad (5.46)$$



Substituint $m = 1 \text{ kg}$, $\omega_0 = 10 \text{ rad/s}$, $\omega = 3 \text{ rad/s}$, i $n = 1, 2, 3, \dots$, obtenim

$$\begin{aligned}
 x(t) = & F_0 \cdot 5 \times 10^{-3} - F_0 \cdot 0,318310 \times 10^{-3} (\\
 & + 10,9890 \sin(1 \cdot 3t) + 7,8125 \sin(2 \cdot 3t) + 17,5439 \sin(3 \cdot 3t) + 5,6818 \sin(4 \cdot 3t) \\
 & + 1,6000 \sin(5 \cdot 3t) + 0,7440 \sin(6 \cdot 3t) + 0,4189 \sin(7 \cdot 3t) + 0,2626 \sin(8 \cdot 3t) \\
 & + 0,1766 \sin(9 \cdot 3t) + 0,1250 \sin(10 \cdot 3t) + 0,0919 \sin(11 \cdot 3t) + 0,0697 \sin(12 \cdot 3t) \\
 & + 0,0541 \sin(13 \cdot 3t) + 0,0429 \sin(14 \cdot 3t) + 0,0346 \sin(15 \cdot 3t) + 0,0284 \sin(16 \cdot 3t) \\
 & + 0,0235 \sin(17 \cdot 3t) + 0,0197 \sin(18 \cdot 3t) + 0,0167 \sin(19 \cdot 3t) + 0,0143 \sin(20 \cdot 3t) \\
 & + 0,0123 \sin(21 \cdot 3t) + 0,0107 \sin(22 \cdot 3t) + 0,0093 \sin(23 \cdot 3t) + 0,0082 \sin(24 \cdot 3t) \\
 & + \dots)
 \end{aligned}$$

Com veiem, el terme més significatiu és el tercer, que, en aquest cas, és el que té la freqüència $\omega_3 = 3 \cdot 3 = 9 \text{ rad/s}$ més pròxima a la natural $\omega_0 = 10 \text{ rad/s}$. A partir del quart, els coeficients es van fent més petits, però molt lentament... A la figura 5.21, es pot observar la gràfica de l'elongació $x(t)(\times 10^3)$, per a $F_0 = 1 \text{ N}$, durant uns sis períodes. Fixem-nos com afecta la freqüència pròpia les oscil·lacions i com la "forma" de la funció $F(t)$ es reflecteix en el moviment.

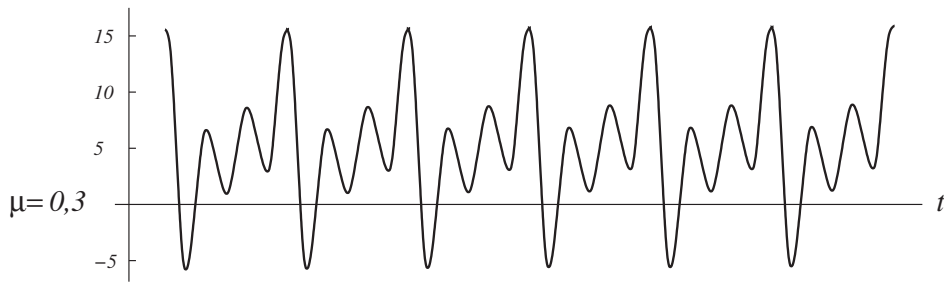


Figura 5.21

Problema 5.5. Estat estacionari d'un oscil·lador i sèrie de Fourier, 2

Un oscil·lador molt poc amortit està sotmès a una força externa $F(t)$ com l'impuls periòdic o pols rectangular (5.29) de l'exemple 5.9. Amb els valors de $\omega_0 = 10 \text{ rad/s}$, $m = 1 \text{ kg}$, i $\beta \approx 0$, i prenent $\alpha = 2\pi/100$, estudieu l'estat estacionari de l'oscil·lador per a la freqüència $\omega = 0,3 \omega_0$.

Solució

Partim de (5.14) i (5.19) per obtenir-ne la sèrie corresponent. Del desenvolupament en SF de $F(t)$, en (5.30), tenim que, per a $n = 0$, la força estàtica $\alpha F_0/\pi$ donarà lloc a $\alpha F_0/\pi m \omega_0^2$, i $x(t)$ resulta ser

$$x(t) = \frac{F_0}{m \omega_0^2} \left(\frac{\alpha}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \alpha}{n^2 |1 - n^2 (\omega/\omega_0)^2|} \cos n \omega t \right)$$

Substituint els valors numèrics i $n = 1, 2, 3, \dots$ tenim

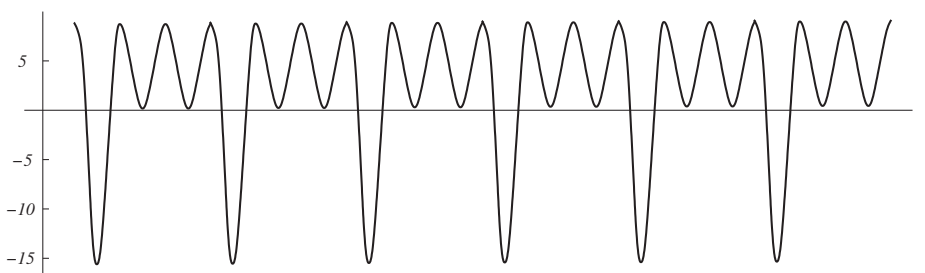
$$\begin{aligned}
 x(t) = & F_0 \cdot 0,2000 \times 10^{-3} + F_0 \cdot 10^{-3} (\\
 & + 0,4393 \cos(1 \cdot 3t) + 0,3117 \cos(2 \cdot 3t) + 0,6976 \cos(3 \cdot 3t) + 0,2249 \cos(4 \cdot 3t) \\
 & + 0,0630 \cos(5 \cdot 3t) + 0,0291 \cos(6 \cdot 3t) + 0,0162 \cos(7 \cdot 3t) + 0,0101 \cos(8 \cdot 3t) \\
 & + \dots)
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&+0,0067 \cos(9 \cdot 3t) \quad +0,0047 \cos(10 \cdot 3t) \quad +0,0034 \cos(11 \cdot 3t) \quad +0,0025 \cos(12 \cdot 3t) \\
&+0,0019 \cos(13 \cdot 3t) \quad +0,0015 \cos(14 \cdot 3t) \quad +0,0012 \cos(15 \cdot 3t) \quad +0,0010 \cos(16 \cdot 3t) \\
&+0,0008 \cos(17 \cdot 3t) \quad +0,0006 \cos(18 \cdot 3t) \quad +0,0005 \cos(19 \cdot 3t) \quad + \dots
\end{aligned}$$

Els termes més significatius són, amb diferència, els quatre primers. Aquí també el tercer, el més gran, és el que té la freqüència $\omega_3 = 3 \cdot 3 = 9$ rad/s més pròxima a la natural de l'oscil·lador, $\omega_0 = 10$ rad/s. A partir del cinquè, els coeficients es van fent lentament petits. A la figura 5.22, està representada $x(t)(\times 10^3)$, durant uns cinc períodes.

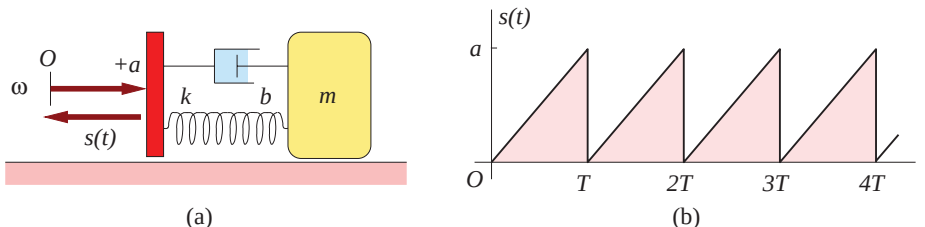
Figura 5.22



Problema 5.6. Oscil·lador forçat pel moviment periòdic del suport

La paret a la qual està unida la molla de l'oscil·lador amortit que es mostra a la figura 5.23 (a) està sotmesa a un desplaçament periòdic de tipus dent de serra positiu —v. figura 5.23 (b). Estudieu les oscil·lacions de la massa en l'estat estacionari i trobeu els primers termes de la sèrie de Fourier per a l'elongació x . Apliqueu el resultat general obtingut al cas en què $\omega_0 = \sqrt{k/m} = 37,5$ rad/s, i $\eta = \frac{\beta}{\omega_0} = 0,50$, i pel que fa a la força impulsora $a = 1$ m, i $\mu = \frac{\omega}{\omega_0} = 0,24$.

Figura 5.23



Solució

Primera part. Aquest problema és semblant al 3.7.1. Anomenem x la posició de la massa m de l'oscil·lador respecte d'un punt fix de l'horitzontal, i sigui $s(t)$ la posició de la paret o suport a què estan lligats la molla i l'amortidor. Aplicant la segona llei de Newton a la massa m trobem

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -k(x-s) - b \left(\frac{dx}{dt} - \frac{ds}{dt} \right)$$

o, el que és el mateix,

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = ks + b \frac{ds}{dt} \quad (1)$$



d'on veiem que en resulta una oscil·lació forçada per la força

$$F(t) = ks(t) + b \frac{ds(t)}{dt} \quad (2)$$

Fixem-nos que, en les t múltiples de T , la força $F(t)$ es fa “infinita durant un instant”.

Segona part. D'altra banda, abans ja hem vist —problema 5.4— que el desenvolupament de la funció dent de serra positiva ve donat per la sèrie de Fourier (5.45). Per tant, el desplaçament $s(t)$ que es mostra a la figura 5.23 (b) ve donat per

$$\frac{s(t)}{a} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin n\omega t \quad (3)$$

sèrie que, derivada terme a terme, proporciona

$$\frac{1}{a} \frac{ds}{dt} = -\frac{\omega}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \cos n\omega t \quad (4)$$

Així doncs, la “força” $F(t)$ donada a (2) es pot escriure com

$$F(t) = \frac{ka}{2} - \frac{a}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{k}{n} \sin n\omega t + b\omega \cos n\omega t \right) \quad (5)$$

Utilitzant la igualtat trigonomètrica (A.21) podem posar (5) de la forma

$$F(t) = \frac{ka}{2} - \frac{a}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sqrt{k^2 + n^2 \omega^2 b^2} \cdot \sin(n\omega t + \phi_n), \quad \text{amb } \tan \phi_n = \frac{n\omega b}{k} \quad (6)$$

També veiem que la sèrie-força (5) i (6) no convergeix en les t múltiples de T .

Tercera part. Trobem l'elongació $x(t)$ de la massa aplicant les expressions (3.14) i (3.14) a cadascun dels termes de la sèrie (6). Com que $b/m = 2\beta$ i $k/m = \omega_0^2$, tenim

$$x(t) = \frac{a}{2} - \frac{a}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sqrt{\frac{\omega_0^4 + 4\beta^2 n^2 \omega^2}{(\omega_0^2 - n^2 \omega^2)^2 + 4\beta^2 n^2 \omega^2}} \cdot \sin(n\omega t + \gamma_n), \quad \text{amb}$$

$$\gamma_n = \arctan \frac{2\beta n\omega}{\omega_0^2} - \arctan \frac{2\beta n\omega}{\omega_0^2 - n^2 \omega^2}$$

o, en termes de μ i η ,

$$x(t) = \frac{a}{2} - \frac{a}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sqrt{\frac{1 + 4n^2 \mu^2 \eta^2}{(1 - n^2 \mu^2)^2 + 4n^2 \mu^2 \eta^2}} \cdot \sin(n\omega t + \gamma_n), \quad \text{amb}$$

$$\gamma_n = \arctan(2n\mu\eta) - \arctan \frac{2n\mu\eta}{1 - n^2 \mu^2}$$

Substituint els valors numèrics i $n = 1, 2, 3, \dots$ tenim els termes següents:



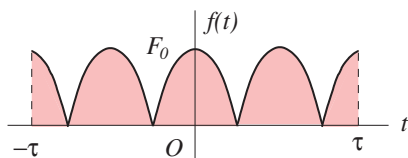
$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{a} \cdot x(t) = & 1,57080 - \\
& -1,05604 \sin(1 \cdot 9t - 0,01617) \quad -0,60025 \sin(2 \cdot 9t - 0,1199) \quad -0,44535 \sin(3 \cdot 9t - 0,3497) \\
& -0,33029 \sin(4 \cdot 9t - 0,6469) \quad -0,23287 \sin(5 \cdot 9t + 2,2381) \quad -0,16356 \sin(6 \cdot 9t + 2,0610) \\
& -0,11830 \sin(7 \cdot 9t - 1,9461) \quad -0,08871 \sin(8 \cdot 9t - 1,8702) \quad -0,06876 \sin(9 \cdot 9t - 1,8181) \\
& -0,05479 \sin(10 \cdot 9t - 0,7807) \quad -0,04469 \sin(11 \cdot 9t - 0,7529) \quad -0,03714 \sin(12 \cdot 9t - 0,7316) \\
& -0,03137 \sin(13 \cdot 9t - 0,7148) \quad -0,02685 \sin(14 \cdot 9t - 0,7011) \quad -0,02033 \sin(15 \cdot 9t - 0,6899) \\
& -0,02033 \sin(16 \cdot 9t - 0,6806) \quad -0,01793 \sin(17 \cdot 9t - 0,6726) \quad -0,01593 \sin(18 \cdot 9t - 0,6657) \\
& -0,01426 \sin(19 \cdot 9t - 0,6598) \quad -0,01283 \sin(20 \cdot 9t - 0,6545) \quad -0,01161 \sin(21 \cdot 9t - 0,6499) \\
& -0,01056 \sin(22 \cdot 9t - 0,6457) \quad -0,00964 \sin(23 \cdot 9t - 0,6421) \quad - \dots
\end{aligned}$$

Com veiem, la sèrie convergeix bastant lentament.

Problema 5.7. Transformada de Fourier d'una funció no periòdica

Sigui la funció no periòdica $f(t)$ definida com el *pols finit* —v. figura 5.24—

Figura 5.24



$$f(t) = \begin{cases} F_0 \cos^2 \omega_0 t, & \text{si } -\tau \leq t \leq \tau \\ 0, & \text{si } |t| > \tau \end{cases} \quad (5.47)$$

Trobeu-ne la transformada de Fourier $\mathcal{F}(\omega)$.

Solució

Per (A.26) i (C.13), la funció $\cos^2 \omega_0 t$ es pot posar com

$$\cos^2 \omega_0 t = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\omega_0 t = \frac{1}{2} + \frac{e^{i2\omega_0 t} + e^{-i2\omega_0 t}}{4}$$

I ara, aplicant (5.39), tenim que

$$\mathcal{F}(\omega) = F_0 \frac{1}{2} \int_{-\tau}^{+\tau} e^{-i\omega t} dt + F_0 \frac{1}{4} \int_{-\tau}^{+\tau} e^{i(-\omega + 2\omega_0)t} dt + F_0 \frac{1}{4} \int_{-\tau}^{+\tau} e^{i(-\omega - 2\omega_0)t} dt$$

d'on, per (C.13), resulta, finalment

$$\mathcal{F}(\omega) = F_0 \tau \left(\frac{\sin \omega \tau}{\omega \tau} + \frac{\sin(\omega - 2\omega_0)\tau}{2(\omega - 2\omega_0)\tau} + \frac{\sin(\omega + 2\omega_0)\tau}{2(\omega + 2\omega_0)\tau} \right)$$

Observeu que aquest resultat està d'acord amb el (5.27) de l'exemple 5.8 si $\tau \ll \pi/\omega_0$, i, qualitativament, també amb la transformada d'una gaussiana de l'exemple 5.5 si $\tau \approx \pi/\omega_0$.



5.6.2. Problemes proposats

Problema 5.8. SF de les funcions parelles i de les senars

- a) Demostreu que qualsevol funció es pot descompondre de forma única en la suma d'una funció parella més una senar.
- b) Sigui la funció $f(t)$. Aleshores, comproveu que la suma

$$f(t) = f_p(t) + f_s(t), \quad \text{amb} \quad f_p(t) = \frac{f(t) + f(-t)}{2}, \quad f_s(t) = \frac{f(t) - f(-t)}{2}$$

correspon a la descomposició de $f(t)$ en una funció parella, $f_p(t)$, més una de senar, $f_s(t)$.

- c) Finalment, demostreu que la SF d'una funció parella només pot tenir termes en cosinus —i, potser, una constant—, mentre que en la sèrie per a una funció senar només hi poden aparèixer termes en sinus.

Problema 5.9. Sèrie de Fourier d'un sinus rectificat

Feu el desenvolupament en sèrie de Fourier de la funció *sinus rectificat* definida per (5.20) i demostreu la solució donada per (5.21).

Problema 5.10. Sèrie de Fourier d'un sinus de qt

Comproveu que el desenvolupament en sèrie de Fourier de la funció $f(t) = F_0 \sin qt$, amb q no enter, ve donat per

$$F_0 \sin qt = F_0 \frac{2 \sin q\pi}{\pi} \left(\frac{\sin t}{1^2 - q^2} + \frac{2 \sin 2t}{2^2 - q^2} + \frac{3 \sin 3t}{3^2 - q^2} + \dots \right), \quad q \text{ no enter}$$

Problema 5.11. Sèrie de Fourier d'una dent de serra positiva

Sigui la funció *dent de serra positiva*: $F(t) = F_0 t/T$, si $0 < t < T$, que ja hem vist al problema 5.4. A partir del desenvolupament de la funció similar *dent de serra* (5.9) de l'exemple 5.3, demostreu que el desenvolupament de $F(t)$ (5.44) és el que hem donat per (5.45) del problema 5.4.

Problema 5.12. Sèrie de Fourier d'un impuls periòdic

Demostreu que a la funció impuls periòdic $F(t)$ definida per (5.29) a l'exemple 5.9 li correspon la SF donada pel desenvolupament (5.30).

Problema 5.13. Propietats de la transformada de Fourier

Si les transformades de Fourier de les funcions $f(t)$ i $g(t)$ són $\mathcal{F}(\omega)$ i $\mathcal{G}(\omega)$, respectivament, comproveu les propietats següents:

$$\begin{aligned} g(t) &= \frac{df(t)}{dt} & \mathcal{G}(\omega) &= i\omega \mathcal{F}(\omega) \\ g(t) &= t f(t) & \mathcal{G}(\omega) &= i \frac{d\mathcal{F}(\omega)}{d\omega} \end{aligned}$$



Oscil·lacions i transformació de Laplace

Al capítol 3, hem estudiat les oscil·lacions forçades per una força externa harmònica i, al capítol anterior, hem aplicat els desenvolupaments en sèrie de Fourier per a l'estudi de l'estat estacionari de les oscil·lacions forçades per qualsevol tipus de força periòdica. Complementàriament, en aquest capítol ens ocuparem, sobretot, de l'estat transitori de les oscil·lacions forçades, especialment quan les forces impulsores presenten salts i discontinuïtats o ni tan sols són periòdiques. Per a això, utilitzarem una tècnica matemàtica relativament simple però molt potent i general: la *transformació de Laplace*. Aquesta és una eina molt útil i que s'ha utilitzat àmpliament en diversos camps, tant de la matemàtica aplicada com de la més abstracta. En particular, resulta un mètode molt pràctic per resoldre alguns tipus bastant freqüents d'equacions diferencials. Com veurem al llarg del capítol, el gran avantatge d'aquest mètode és que, en la majoria dels casos, es passa d'haver de resoldre una equació diferencial amb condicions inicials a haver de resoldre una “simple” equació algebraica.

6.1. Transformació de Laplace (TL)

6.1.1. Transformació de Laplace

Donada una funció $f(t)$ de la variable real t definida per a $t \geq 0$, s'anomena *transformada de Laplace de f* —a partir d'ara, TL— la funció de p que resulta de la integral

$$\mathcal{F}(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt \quad (6.1)$$

Si bé en el cas general el paràmetre p pot ser un nombre complex, per a les explicacions i els exemples que veurem en aquest capítol en tenim prou tractant-lo com a real.

Les condicions per a l'existència de la TL de la funció $f(t)$ són bastant febles: n'hi ha prou que sigui contínua a trossos —fins i tot, pot fer-se infinita en alguns punts—, però



no pot créixer més de pressa que l'exponencial quan t tendeix cap a infinit. Així, per exemple, ni $1/t$, ni e^{t^2} tenen TL, però sí en tenen $1/\sqrt{t}$ i e^{-t^2} .

També podem representar la TL de la funció $f(t)$ com l'operador TL, $\mathcal{L}$, que actua sobre $f(t)$: $\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{F}(p)$. Com veurem després, aquest és un operador lineal que admet operador invers, la transformació inversa de Laplace, que representarem com $\mathcal{L}^{-1}$, de forma que $\mathcal{L}^{-1}[\mathcal{F}(p)] = f(t)$.

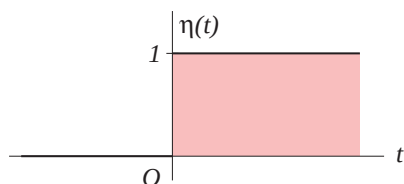
Com es pot comprovar, el límit $p \rightarrow +\infty$ de la TL $\mathcal{F}(p)$ d'una funció sempre dona 0. Aquest és un resultat important perquè ens diu que no totes les funcions de p són transformades d'alguna funció de t . Per exemple, p^2 , $\sin p$, $2 \ln p$ o una constant no són transformades de cap funció.

Unicitat de la transformada inversa. Per la pròpia definició de la TL com una integral, és fàcil veure que, rigorosament parlant, donada una funció $\mathcal{F}(p)$, hi poden haver dues funcions $f_1(t)$ i $f_2(t)$ transformades inverses. Ara bé, si $f_1(t)$ i $f_2(t)$ són funcions contínues per a tot $t \geq 0$ i $\mathcal{L}[f_1(t)] = \mathcal{L}[f_2(t)]$, llavors sí que podem afirmar que $f_1(t) = f_2(t)$. Sense aquesta propietat, no tindria sentit aquest capítol.

Exemple 6.1. Transformada de la funció salt unitari

Esbrineu la TL de la funció *salt unitari de Heaviside*, definida com —v. figura 6.1—

Figura 6.1



$$\eta(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t > 0 \end{cases} \quad (6.2)$$

Solució

Aplicant la definició (6.1), en resulta la integral

$$\mathcal{L}[\eta(t)] = \int_0^{\infty} e^{-pt} dt = -\left[\frac{1}{p} e^{-pt}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{p}, \quad \text{si } p > 0 \quad (TL-01)$$

Com veurem després en diversos exemples, aquesta funció és fonamental en les aplicacions de les TL.

Exemple 6.2. TL del sinus

Obteniu la TL de la funció $f(t) = \sin \omega t$.

Solució

Partim de la definició (6.1) i hi apliquem el mètode de la integració per parts (A.69) fent $u = \sin \omega t$, $dv = e^{-pt} dt$, i, per tant, $v = -e^{-pt}/p$ i $du = \omega \cos \omega t$. Així, trobem

$$\mathcal{L}[\sin \omega t] = \int_0^{\infty} \sin \omega t e^{-pt} dt = \left[-\frac{1}{p} \sin \omega t e^{-pt}\right]_0^{\infty} + \frac{\omega}{p} \int_0^{\infty} \cos \omega t e^{-pt} dt$$



Prenent els límits, entre zero i infinit, el terme entre claudàtors es fa nul i, quant a la integral següent, tornant a aplicar la integració per parts i traient límits, queda

$$\mathcal{L}[\sin \omega t] = -\frac{\omega}{p^2} \left[\cos \omega t e^{-pt} \right]_0^\infty - \frac{\omega^2}{p^2} \int_0^\infty \sin \omega t e^{-pt} dt = +\frac{\omega}{p^2} - \frac{\omega^2}{p^2} \mathcal{L}[\sin \omega t]$$

d'on resulta

$$\mathcal{L}[\sin \omega t] = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} \quad (TL-04)$$

Com anirem veient, en el càlcul de les integrals (6.1) s'utilitza molt sovint el mètode de la integració per parts —v. (A.69). Malgrat això, també veurem una mica més endavant que, per trobar la TL, per exemple, de la funció $\cos \omega t$, no caldrà tornar a fer cap integral sinó que la podrem determinar ràpidament a partir del resultat (TL-04) i l'aplicació d'alguna de les propietats generals que veurem a continuació.

Les TL d'altres funcions es troben de forma anàloga a la de l'exemple anterior. A la taula TL —pàg. 222— hi ha indicades les TL d'algunes de les sis funcions més importants. Les TL de moltes altres funcions poden deduir-se d'aquestes i de l'aplicació de les propietats de la TL que comentarem a continuació i que estan resumides a la mateixa taula TL.

6.1.2. Propietats de la TL

Siguin $\mathcal{F}(p)$ i $\mathcal{G}(p)$ les TL de les funcions $f(t)$ i $g(t)$, respectivament. La TL té les propietats següents:

1. La TL és lineal. Efectivament, com es veu immediatament per la definició (6.1), si a i b són dues constants qualssevol, tenim que

$$\mathcal{L}[a f(t) + b g(t)] = a \mathcal{F}(p) + b \mathcal{G}(p) \quad (TL-07)$$

2. Sigui $g(t) = f(t - \tau)$, essent τ una constant. Aleshores, fent el canvi de variable $t' = t - \tau$, tenim

$$\mathcal{L}[f(t - \tau)] = \int_{-\tau}^{\infty} f(t') e^{-p(t' + \tau)} dt' = e^{-p\tau} \int_{-\tau}^{\infty} f(t') e^{-pt'} dt'$$

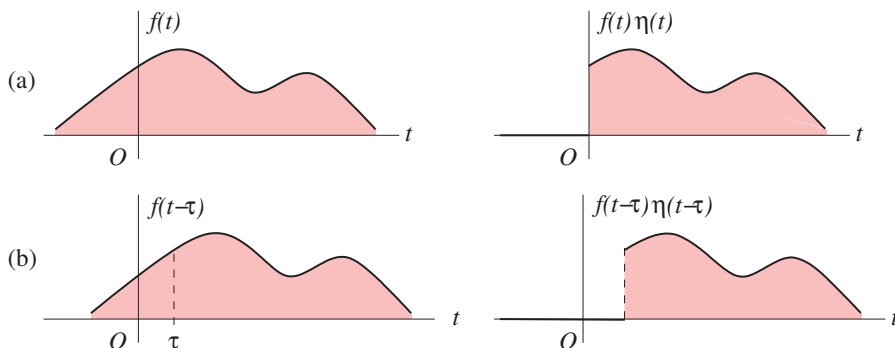
Ara atenció. Fixem-nos que

$$\text{si } t < 0, f(t) = 0, \quad \text{aleshores} \quad \mathcal{L}[f(t - \tau)] = e^{-p\tau} \mathcal{F}(p) \quad (6.3)$$

I, a l'inrevés. Si tenim la TL $\mathcal{G}(p) = e^{-p\tau} \mathcal{F}(p)$, pel que acabem de veure, la transformació inversa de $\mathcal{G}(p)$ dona $f(t - \tau)$, però per a una $f(t)$ que ha de ser nul·la si $t < 0$. Tot això pot quedar molt clar si fem ús de la funció salt de Heaviside que hem vist en l'exemple 6.1. Així, essent $f(t)$ una funció qualsevol no necessàriament zero per a $t < 0$ i la TL de la qual sigui $\mathcal{F}(p)$, tenim que

$$\text{si } \mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{F}(p) \quad \text{aleshores} \quad \mathcal{L}^{-1}[e^{-p\tau} \mathcal{F}(p)] = f(t - \tau) \cdot \eta(t - \tau) \quad (TL-08)$$

Figura 6.2



A la figura 6.2 (a) es mostra una funció $f(t)$ qualsevol i el significat de la funció $f(t)\eta(t)$ —la que és nul·la si $t < 0$ —; a la figura 6.2 (b), es mostren la funció $f(t-\tau)$ i la $f(t-\tau)\eta(t-\tau)$, que apareixerà sovint més endavant.

3. Sigui $g(t) = f(at)$, essent a una constant. Aleshores, fent el canvi de variable $t' = at$, tenim

$$\mathcal{L}[f(at)] = \int_0^\infty f(t') e^{-pt'/a} \frac{dt'}{a} = \frac{1}{a} \mathcal{F}\left(\frac{p}{a}\right), \quad a > 0 \quad (TL-09)$$

4. Derivem respecte de p la integral (6.1). Tenim

$$\frac{d\mathcal{F}(p)}{dp} = - \int_0^\infty t f(t) e^{-pt} dt = -\mathcal{L}[t f(t)]$$

I, si derivem successivament, n'obtenim

$$\mathcal{L}[t^n f(t)] = (-1)^n \frac{d^n \mathcal{F}(p)}{dp^n} \quad (TL-10)$$

5. Sigui $g(t) = e^{-at} f(t)$. Aleshores, tenim

$$\mathcal{L}[e^{-at} f(t)] = \int_0^\infty f(t) e^{-(p+a)t} dt = \mathcal{F}(p+a) \quad (TL-11)$$

6. Sigui $g(t) = \frac{df(t)}{dt}$. Aleshores, fent $u = e^{-pt}$, $dv = \frac{df(t)}{dt}$, $v = f(t)$ i $du = -p e^{-pt}$, aplicant la integració per parts (A.69) ens queda

$$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = \left[e^{-pt} f(t)\right]_0^\infty + p \int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt = -f(0) + p \mathcal{F}(p) \quad (TL-12)$$

Si $g(t) = \frac{d^2 f(t)}{dt^2}$, o derivades d'ordre superior, anàlogament es pot veure que

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2 f(t)}{dt^2}\right] = p^2 \mathcal{F}(p) - p f(0) - \frac{df}{dt}(0) \quad (TL-13)$$



7. Sigui ara $g(t) = \int_0^t f(t') dt'$. Fent $u = \int_0^t f(t') dt'$ i $dv = e^{-pt} dt$, i integrant per parts (A.69) trobem que

$$\mathcal{L} \left[\int_0^t f(t') dt' \right] = -\frac{1}{p} \left[e^{-pt} \cdot \int_0^t f(t') dt' \right]_0^\infty + \frac{1}{p} \int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt = \frac{1}{p} \mathcal{F}(p) \quad (TL-14)$$

8. En general, s'anomena *producte de convolució* de les dues funcions $f_1(t)$ i $f_2(t)$, i es representa per $f_1(t) * f_2(t)$, la funció

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t-t') f_2(t') dt' \quad (6.4)$$

Es pot demostrar que aquest producte és commutatiu

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t-t') f_2(t') dt' = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t') f_2(t-t') dt'$$

associatiu i, fins i tot, distributiu respecte de la suma. Fixeu-vos també que, si suposem que $f_1(t)$ i $f_2(t)$ són nul·les per a $t < 0$, llavors

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(t-t') f_2(t') dt' \quad (6.5)$$

Doncs bé, no costa gaire demostrar que la TL del producte de convolució val

$$\mathcal{L}[f_1(t) * f_2(t)] = \mathcal{F}_1(p) \cdot \mathcal{F}_2(p) \quad (TL-15)$$

Observeu que, si prenem $f_1(t) = \eta(t)$ com a cas particular, trobem la propietat demostrada en l'apartat anterior sobre la TL d'una integral.

9. Sigui $f(t)$ una funció nul·la fora de l'interval $[0, T]$. Aleshores, la funció $g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f(t - nT)$ és una funció periòdica basada en ella —v. figura 6.3.

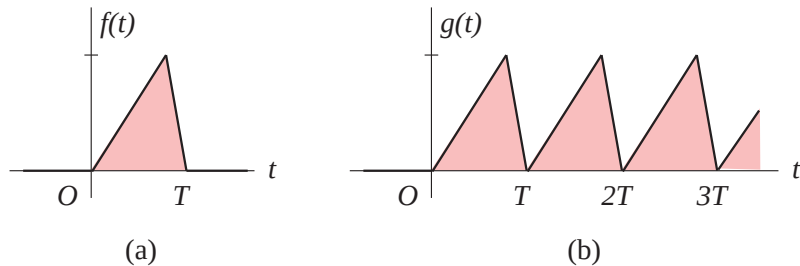


Figura 6.3

Si $\mathcal{F}(p) = \mathcal{L}[f(t)]$, aplicant la propietat (6.3) que acabem de veure i la igualtat (A.65) tenim que

$$\mathcal{L} \left[\sum_{n=0}^{\infty} f(t - nT) \right] = \mathcal{F}(p) \sum_{n=0}^{\infty} e^{-npT} = \frac{\mathcal{F}(p)}{1 - e^{-pT}} \quad (TL-16)$$

Anàlogament, si $g(t)$ és una sèrie alterna de la forma

$$g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n f(t - nT) \quad \text{llavors} \quad \mathcal{L}[g(t)] = \frac{\mathcal{F}(p)}{1 + e^{-pT}} \quad (TL-17)$$



Taula TL de transformacions de Laplace

Funció original	Transformada	
$\eta(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 < t \\ 1, & \text{si } t > 0 \end{cases}$	$\mathcal{F}(p) = \frac{1}{p}$	(TL-01)
$f(t) = t^n$	$\mathcal{F}(p) = \frac{n!}{p^{n+1}}$	(TL-02)
$f(t) = e^{-at}$	$\mathcal{F}(p) = \frac{1}{p+a}$	(TL-03)
$f(t) = \sin \omega t$	$\mathcal{F}(p) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$	(TL-04)
$f(t) = \cos \omega t$	$\mathcal{F}(p) = \frac{p}{p^2 + \omega^2}$	(TL-05)
$f(t) = \delta(t - \tau)$	$\mathcal{F}(p) = e^{-p\tau}$	(TL-06)
Propietats generals de la transformació. Si $\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{F}(p)$ i $\mathcal{L}[g(t)] = \mathcal{G}(p)$, ...		
$g(t) = \lambda f_1(t) + \mu f_2(t)$	$\mathcal{G}(p) = \lambda \mathcal{F}_1(p) + \mu \mathcal{F}_2(p)$	(TL-07)
$g(t) = f(t - \tau) \eta(t - \tau)$	$\mathcal{G}(p) = e^{-p\tau} \mathcal{F}(p)$	(TL-08)
$g(t) = f(at)$	$\mathcal{G}(p) = \frac{1}{a} \mathcal{F}\left(\frac{p}{a}\right)$	(TL-09)
$g(t) = t^n f(t)$	$\mathcal{G}(p) = (-1)^n \frac{d^n \mathcal{F}(p)}{dp^n}$	(TL-10)
$g(t) = e^{-at} f(t)$	$\mathcal{G}(p) = \mathcal{F}(p+a)$	(TL-11)
$g(t) = \frac{df(t)}{dt}$	$\mathcal{G}(p) = p \mathcal{F}(p) - f(0)$	(TL-12)
$g(t) = \frac{d^2 f(t)}{dt^2}$	$\mathcal{G}(p) = p^2 \mathcal{F}(p) - pf(0) - \frac{df}{dt}(0)$	(TL-13)
$g(t) = \int_0^t f(t') dt'$	$\mathcal{G}(p) = \frac{1}{p} \mathcal{F}(p)$	(TL-14)
$g(t) = f_1(t) * f_2(t)$	$\mathcal{G}(p) = \mathcal{F}_1(p) \cdot \mathcal{F}_2(p)$	(TL-15)
$g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f(t - nT)$	$\mathcal{G}(p) = \frac{\mathcal{F}(p)}{1 - e^{-pT}}$	(TL-16)
$g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n f(t - nT)$	$\mathcal{G}(p) = \frac{\mathcal{F}(p)}{1 + e^{-pT}}$	(TL-17)

Vegem ara alguns exemples de com s'apliquen aquestes propietats.

Exemple 6.3. TL d'una funció no simple

Si A , β i ω són constants, trobeu la TL de la funció: $f(t) = A t e^{-\beta t} \sin \omega t$

Solució

Anem per etapes. La TL de la funció $f_1(t) = \sin \omega t$ ja la tenim a (TL-04). La TL de $f_2(t) = A e^{-\beta t} f_1(t)$ ens la dóna l'expressió (TL-11)



$$\mathcal{F}_2(p) = \mathcal{L}[Ae^{-\beta t} \sin \omega t] = A \frac{\omega}{(p + \beta)^2 + \omega^2}$$

I la TL de la funció $f(t) = t f_2(t)$ ens ve donada per la propietat (TL-10), de la qual resulta

$$\mathcal{L}[f(t)] = -\frac{d\mathcal{F}_2(p)}{dp} = 2\omega A \frac{p + \beta}{[(p + \beta)^2 + \omega^2]^2}$$

De forma anàloga, es poden obtenir, per exemple, aquests altres resultats:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\sinh \omega t] &= \frac{\omega}{p^2 - \omega^2} & \mathcal{L}[\cosh \omega t] &= \frac{p}{p^2 - \omega^2} \\ \mathcal{L}[t \sin \omega t] &= \frac{2\omega p}{(p^2 + \omega^2)^2} & \mathcal{L}[t \cos \omega t] &= \frac{p^2 - \omega^2}{(p^2 + \omega^2)^2} \\ \mathcal{L}[t^2 \sin \omega t] &= \frac{6\omega p^2 - 2\omega^3}{(p^2 + \omega^2)^3} & \mathcal{L}[t^2 \cos \omega t] &= \frac{2p^3 - 6\omega^2 p}{(p^2 + \omega^2)^3} \end{aligned}$$

Exemple 6.4. TL de la funció pols o impuls rectangular

Trobeu la TL de la funció *impuls o pols rectangular* definida com —v. figura 6.4—

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t < \tau \\ 1, & \text{si } \tau < t < \tau + \varepsilon \end{cases} \quad (6.6)$$

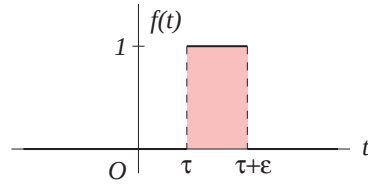


Figura 6.4

Solució

Partim de la funció de Heaviside $\eta(t)$ definida a l'exemple 6.1 i de la qual sabem que la TL és (TL-01), $1/p$ —v. figura 6.5 (a).

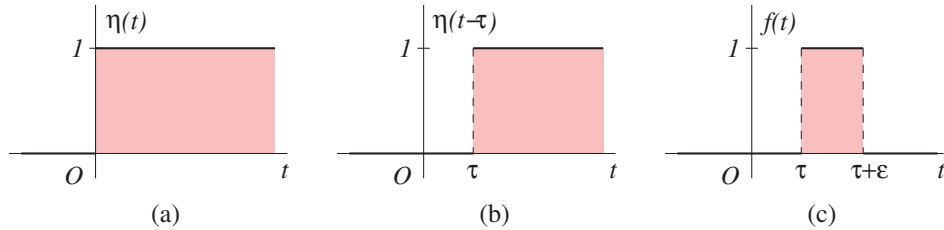


Figura 6.5

La funció $\eta(t - \tau)$ és el mateix salt, però traslladat a $t = \tau$ —v. figura 6.5 (b). La seva TL ve donada per la propietat (TL-08), $e^{-p\tau}/p$. I la funció (6.6) —v. figura 6.5 (c)— podem posar-la com

$$f(t) = \eta(t - \tau) - \eta(t - \tau - \varepsilon)$$

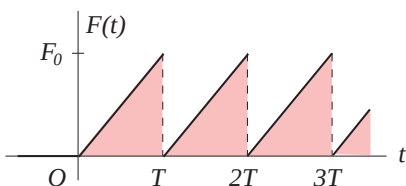
i, per tant, la TL val

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{e^{-p\tau}}{p} (1 - e^{-p\varepsilon}) \quad (6.7)$$

**Exemple 6.5. TL d'una funció periòdica**

Trobeu la TL de la funció periòdica *dent de serra positiva* definida com —v. figura 6.6—

Figura 6.6

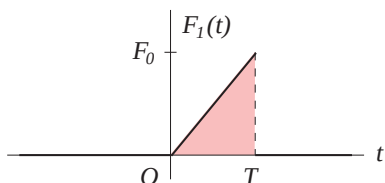


$$F(t) = \begin{cases} F_0 \frac{t}{T}, & \text{si } 0 < t < T \\ F(t) = F(t - T), & \text{si } T < t \end{cases} \quad (6.8)$$

Solució

Introduïm la funció *primera dent de serra*, definida com $F_1(t) = F_0 t/T$, si $0 < t < T$, i $F_1(t) = 0$, si t és fora d'aquest interval. Podem descriure aquesta funció de la forma següent.

Figura 6.7



$$F_1(t) = F_0 \frac{t}{T} [\eta(t) - \eta(t - T)] \quad (1)$$

Aplicant-hi ara les expressions (TL-01), (TL-08) i (TL-10), tenim que la TL de la funció (1) val

$$\mathcal{F}_1(p) = -\frac{d}{dp} \left(\frac{F_0}{T} \frac{1}{p} (1 - e^{-pT}) \right) = \frac{F_0}{T} \frac{1}{p^2} (1 - e^{-pT} (1 + pT))$$

I, quant a la funció periòdica (6.8), per mitjà de la propietat (TL-16), resulta que

$$\mathcal{L}[F(t)] = \frac{F_0}{T} \frac{1}{p^2} \left(1 + \frac{pT}{1 - e^{-pT}} \right) \quad (6.9)$$

Exemple 6.6. La delta de Dirac i les percussions

Sigui la “funció” *delta de Dirac* $\delta(t)$, definida com

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t \neq 0, \\ \infty, & \text{si } t = 0, \end{cases} \quad \text{tal que } \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \delta(t) dt = f(0), \text{ i, en concret, } \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (6.10)$$

Interpreteu-ne el seu significat físic i trobeu-ne la TL.

Solució

La delta de Dirac no és una funció en sentit rigorós però, malgrat això, és molt pràctic treballar-hi com si ho fos, i se n'obtenen resultats correctes. A les figures 6.8 (a) i (b), s'ha representat una funció *impuls rectangular*, de base ε i altura $h = 1/\varepsilon$, de forma que, independentment del valor de ε , l'àrea de l'impuls sempre val 1 —v. figura 6.8 (b).

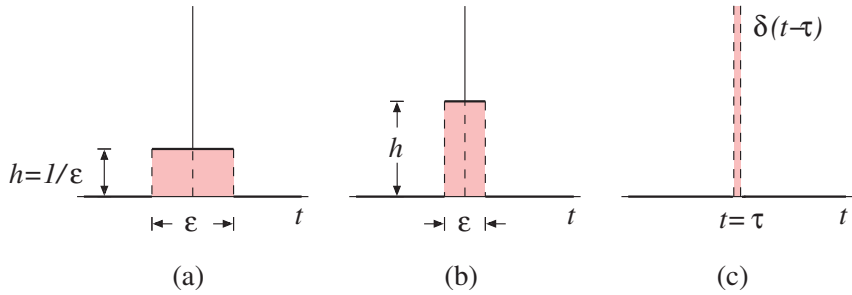


Figura 6.8

Doncs bé, la delta de Dirac $\delta(t - \tau)$ és aquest impuls en el límit en què l'amplada ε tendeix a zero, és a dir, és un impuls infinitament estret i infinitament alt en $t = \tau$ —v. figura 6.8 (c). Un exemple físic d'una delta de Dirac pot ser, per exemple, una *percussió*, és a dir, una força molt intensa durant un interval de temps molt petit. A l'exemple 6.12 i al problema 6.3, veiem un parell d'aplicacions de la delta de Dirac.

Sigui l'impuls unitari de l'exemple 6.4, però ara multiplicat per $1/\varepsilon$, de forma que l'àrea sota el rectangle és, per a qualsevol ε , 1. La TL d'aquesta funció és (6.7), dividida per ε . Doncs bé, el límit d'aquesta expressió quan ε tendeix a zero serà la TL de $\delta(t - \tau)$. Aplicant-hi la regla de L'Hôpital per al càlcul del límit següent, tenim, doncs,

$$\mathcal{L}[\delta(t - \tau)] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{e^{-p\tau}}{p} \frac{1 - e^{-p\varepsilon}}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{e^{-p\tau}}{p} p e^{-p\varepsilon} = e^{-p\tau}$$

També podem obtenir la TL de $\delta(t - \tau)$ si ens fixem que

$$\int_0^t \delta(t' - \tau) dt' = \eta(t - \tau)$$

Ara, per la propietat (TL-14) i per (TL-01), tornem a tenir que $\mathcal{L}[\delta(t - \tau)] = e^{-p\tau}$.

6.2. Aplicacions de la TL a les oscil·lacions

6.2.1. TL i l'estat transitori de les oscil·lacions forçades

En aquesta secció, generalitzarem a una força impulsora $F(t)$ qualsevol allò que al capítol 3 hem vist per a una força impulsora harmònica. Així, partim de l'equació diferencial (3.4) corresponent a un oscil·lador amortit, però ara sotmès a una força externa impulsora $F(t)$ qualsevol en lloc del cas concret $F_0 \cos \omega t$. Amb la notació habitual,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F(t)}{m} \quad (6.11)$$

Suposem que les condicions inicials de l'oscil·lador siguin

$$x(0) = x_0, \quad v(0) = v_0 \quad (6.12)$$

Si en aquesta secció anomenem $\mathcal{X}(p)$ i $\mathcal{F}(p)$ les TL de $x(t)$ i $F(t)/m$, respectivament, és a dir,



$$\mathcal{L}[x(t)] = \mathcal{X}(p) \quad \text{i} \quad \mathcal{L}\left[\frac{1}{m}F(t)\right] = \mathcal{F}(p) \quad (6.13)$$

aleshores, d'acord amb les propietats (TL-12) i (TL-13), tenim que

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2x}{dt^2}\right] = p^2 \mathcal{X}(p) - px_0 - v_0 \quad (6.14)$$

$$\mathcal{L}\left[2\beta \frac{dx}{dt}\right] = 2\beta (p \mathcal{X}(p) - x_0) \quad (6.15)$$

$$\mathcal{L}[\omega_0^2 x] = \omega_0^2 \mathcal{X}(p) \quad (6.16)$$

i la transformada de l'equació diferencial (6.11) és

$$(p^2 + 2\beta p + \omega_0^2) \mathcal{X}(p) - (p + 2\beta)x_0 - v_0 = \mathcal{F}(p) \quad (6.17)$$

de la qual es pot aïllar $\mathcal{X}(p)$ i es té

$$\mathcal{X}(p) = \frac{1}{p^2 + 2\beta p + \omega_0^2} \cdot [\mathcal{F}(p) + (p + 2\beta)x_0 + v_0] \quad (6.18)$$

Si sabem trobar la transformada inversa de (6.18), és a dir, la funció $x(t)$, haurem resolt l'equació diferencial (6.11) amb les condicions inicials corresponents i, en definitiva, haurem resolt el problema de l'estat transitori de l'oscil·lador.

En general, trobar la transformada inversa no és immediat i, de fet, pot arribar a ser força complicat. Si bé no hi ha regles generals per obtenir la transformada inversa, l'experiència i la utilització de taules preparades —bastant més completes que la taula TL de la pàgina 222— permeten acabar trobant $x(t)$.

6.2.2. Transformada inversa de $\mathcal{X}(p)$

La dificultat per trobar la transformada inversa consisteix habitualment a saber reescriure (6.18) —o, en general, la funció $\mathcal{X}(p)$ de què es tracti— en sumes de funcions les transformades inverses de les quals siguin conegudes o estiguin tabulades. Vegem-ne un parell de casos senzills, relacionats amb oscil·ladors no amortits, i després en farem unes consideracions generals.

Exemple 6.7. Transformada inversa de Laplace (sense amortiment)

Trobeu la transformada inversa de les dues funcions

$$\text{a) } \mathcal{Z}_1(p) = \frac{1}{p(p^2 + \omega_0^2)} \quad \text{b) } \mathcal{Z}_2(p) = \frac{1}{p^2(p^2 + \omega_0^2)}$$

Solució

Per trobar la transformada inversa d'aquestes funcions de p , utilitzem el “truquet” següent:



$$\mathcal{Z}_1(p) = \frac{1}{p(p^2 + \omega_0^2)} = \frac{1}{\omega_0^2} \frac{p^2 + \omega_0^2 - p^2}{p(p^2 + \omega_0^2)} = \frac{1}{\omega_0^2} \left(\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2 + \omega_0^2} \right) \quad (6.19)$$

$$\mathcal{Z}_2(p) = \frac{1}{p^2(p^2 + \omega_0^2)} = \frac{1}{\omega_0^2} \frac{p^2 + \omega_0^2 - p^2}{p^2(p^2 + \omega_0^2)} = \frac{1}{\omega_0^2} \left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{\omega_0} \frac{\omega_0}{p^2 + \omega_0^2} \right) \quad (6.20)$$

i ara, amb l'ajuda de (TL-01), (TL-04) i (TL-05) de la taula TL, trobem que

$$\mathcal{L}^{-1}[\mathcal{Z}_1(p)] = \frac{1}{\omega_0^2} (1 - \cos \omega_0 t) \quad \mathcal{L}^{-1}[\mathcal{Z}_2(p)] = \frac{1}{\omega_0^2} \left(t - \frac{1}{\omega_0} \sin \omega_0 t \right) \quad (6.21)$$

6.2.3. Transformació inversa d'un quocient de polinomis

Resulta molt freqüent haver de trobar la transformada inversa d'un quocient de polinomis com ara

$$\mathcal{Z}(p) = \frac{P(p)}{Q(p)} = \frac{a_0 + a_1 p + \dots + a_m p^m}{b_0 + b_1 p + \dots + b_n p^n} \quad (6.22)$$

El que s'ha de fer, en aquests casos, és el desenvolupament de la fracció algebraica (6.22) en suma de fraccions simples. Sense entrar en gaires detalls —que, d'altra banda, es troben en els textos de càlcul en estudiar la integració de funcions racionals—, només recordarem que, per fer aquest desenvolupament, cal conèixer les arrels del polinomi $Q(p)$. Cada arrel dóna lloc a fraccions simples, de manera que, essent A i B dues constants reals, si l'arrel a és:

- real i simple: la fracció és del tipus $\frac{A}{p-a}$;
- real i de multiplicitat k : les fraccions són del tipus $\frac{A}{(p-a)^k}$;
- complexa i simple: la fracció és del tipus $\frac{Ap+B}{p^2+bp+c}$, amb $b^2 - 4c < 0$;
- complexa i de multiplicitat k : les fraccions són del tipus $\frac{Ap+B}{(p^2+bp+c)^k}$, amb $b^2 - 4c < 0$,

Les A i B s'han de determinar igualant la suma de fraccions simples al quocient (6.22). Un cop fet aquest desenvolupament, trobar la transformada inversa de cadascuna de les fraccions simples ja és molt senzill. Fixem-nos que, en aquest cas, hem passat d'un problema amb una equació diferencial —per exemple, la (6.11)— a un altre amb una equació algebraica —trobar les arrels del $Q(p)$ de (6.22)—, la qual cosa, en la majoria dels casos, representa una disminució considerable de dificultat.

Tornant als problemes d'oscil·lacions —equació (6.11), amb $\beta < \omega_0$ —, va molt bé reescriure (6.18) introduint-hi la freqüència $\omega_1^2 = \omega_0^2 - \beta^2$, de forma que quedi

$$\mathcal{X}(p) = \frac{1}{\omega_1} \frac{\omega_1}{(p+\beta)^2 + \omega_1^2} \mathcal{F}(p) + \frac{(p+2\beta)x_0 + v_0}{(p+\beta)^2 + \omega_1^2} \quad (6.23)$$



Com anirem veient amb diversos exemples, és bastant freqüent que, a partir de l'expressió anterior, hàgim de trobar la transformada inversa d'expressions com les que analitzem a l'exemple següent.

Exemple 6.8. Transformada inversa de Laplace (amb amortiment)

Trobeu la transformada inversa de les dues expressions següents, en què $\omega_1^2 = \omega_0^2 - \beta^2$

$$\text{a) } \mathcal{Z}_1(p) = \frac{1}{p[(p+\beta)^2 + \omega_1^2]} \quad \text{b) } \mathcal{Z}_2(p) = \frac{1}{p^2[(p+\beta)^2 + \omega_1^2]}$$

Solució

Primer les descompondrem en fraccions simples.

- a) En el primer cas, tenim una arrel real i dues complexes conjugades. Per tant, establim la igualtat següent:

$$\mathcal{Z}_1(p) = \frac{1}{p[(p+\beta)^2 + \omega_1^2]} = \frac{A}{p} + \frac{B(p+\beta) + C}{(p+\beta)^2 + \omega_1^2} \quad (1)$$

de la qual, desenvolupant-ne la suma i traient les tres potències de p que hi apareixen, p^0 , p i p^2 factor comú, arribem a les tres equacions per A , B i C

$$\begin{cases} 1 = A\beta^2 + A\omega_1^2 \\ 0 = 2A\beta + B\beta + C \\ 0 = A + B \end{cases}$$

d'on resulten $A = 1/\omega_0^2$, $B = -1/\omega_0^2$, $C = -\beta/\omega_0^2$. Així doncs, podem tornar a escriure (1) com

$$\mathcal{Z}_1(p) = \frac{1}{\omega_0^2} \left[\frac{1}{p} - \frac{p+\beta+\beta}{(p+\beta)^2 + \omega_1^2} \right] = \frac{1}{\omega_0^2} \left[\frac{1}{p} - \frac{p+\beta}{(p+\beta)^2 + \omega_1^2} - \frac{\beta}{\omega_1} \frac{\omega_1}{(p+\beta)^2 + \omega_1^2} \right] \quad (6.24)$$

i de la qual, per (TL-01), (TL-04), (TL-05) i (TL-11) de la taula TL, la transformada inversa és

$$\mathcal{L}^{-1}[\mathcal{Z}_1(p)] = \frac{1}{\omega_0^2} \left[1 - e^{-\beta t} \left(\cos \omega_1 t + \frac{\beta}{\omega_1} \sin \omega_1 t \right) \right] \quad (6.25)$$

- b) Per a aquest cas, tenim una arrel amb multiplicitat dos i dues complexes conjugades. Anàlogament a com hem fet en el cas anterior, ara establim la igualtat

$$\mathcal{Z}_2(p) = \frac{1}{p^2[(p+\beta)^2 + \omega_1^2]} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p^2} + \frac{C(p+\beta) + D}{(p+\beta)^2 + \omega_1^2} \quad (2)$$

posant comú denominador i igualant-ne els numeradors, a partir de les quatre potències de p obtenim les quatre equacions per a les constants A , B , C i D



$$\begin{cases} 1 = B\beta^2 + B\omega_1^2 \\ 0 = A\beta^2 + A\omega_1^2 + 2B\beta \\ 0 = 2A\beta + B + C\beta + D \\ 0 = A + C \end{cases}$$

d'on resulten $A = -2\beta/\omega_0^4$, $B = 1/\omega_0^2$, $C = 2\beta/\omega_0^4$ i $D = -1/\omega_0^2 + 2\beta^2/\omega_0^4$. Així doncs, podem tornar a escriure (2) com

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_2(p) &= \frac{1}{\omega_0^4} \left[\frac{-2\beta}{p} + \frac{\omega_0^2}{p^2} - \frac{2\beta(p+\beta) + \omega_0^2 - 2\beta^2}{(p+\beta)^2 + \omega_1^2} \right] = \\ &= \frac{1}{\omega_0^4} \left[-2\beta \frac{1}{p} + \omega_0^2 \frac{1}{p^2} - 2\beta \frac{p+\beta}{(p+\beta)^2 + \omega_1^2} - \frac{\omega_0^2 - 2\beta^2}{\omega_1} \frac{\omega_1}{(p+\beta)^2 + \omega_1^2} \right] \quad (6.26) \end{aligned}$$

de la qual, per (TL-01), (TL-04), (TL-05) i (TL-11) de la taula TL, la transformada inversa és

$$\mathcal{L}^{-1}[\mathcal{Z}_2(p)] = \frac{1}{\omega_0^4} \left[-2\beta + \omega_0^2 t - e^{-\beta t} (2\beta \cos \omega_1 t + (\omega_0^2 - 2\beta^2) \sin \omega_1 t) \right] \quad (6.27)$$

Vegem ara unes aplicacions de la TL a l'estudi dels oscil·ladors forçats.

Exemple 6.9. Resposta d'un oscil·lador a una força de pols triangular

Un oscil·lador de massa m , freqüència pròpia ω_0 i de fricció negligible està inicialment en equilibri i en repòs a l'origen. A partir de $t = 0$, li apliquem la força de pols triangular $F(t)$ següent —v. figura 6.9. Estudieu la resposta d'aquest oscil·lador des de $t = 0$.

$$F(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } |t - T/2| > T/2 \\ 2F_0 \frac{t}{T}, & \text{si } 0 < t \leq \frac{T}{2} \\ 2F_0 \left(1 - \frac{t}{T}\right), & \text{si } \frac{T}{2} \leq t < T \end{cases} \quad (6.28)$$

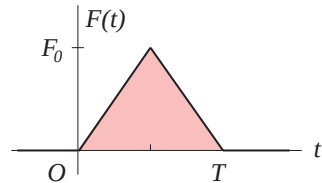


Figura 6.9

Solució

Primer, hem de trobar la TL de la força $F(t)$. Ho podem fer de diverses maneres. Per exemple, aplicant directament la definició (6.1) a (6.28). Però, encara que acabi resultant més llarg, ara ho farem a través de la funció $\eta(t)$ de Heaviside.

La funció *pol triangular* (6.28) és la superposició de les funcions $F_1(t)$ i $F_2(t)$, representades a la figura 6.10, com la (a) i la (b), respectivament. Amb l'ajuda de la funció salt unitari de Heaviside, $\eta(t)$, les funcions $F_1(t)$ i $F_2(t)$ es poden escriure com

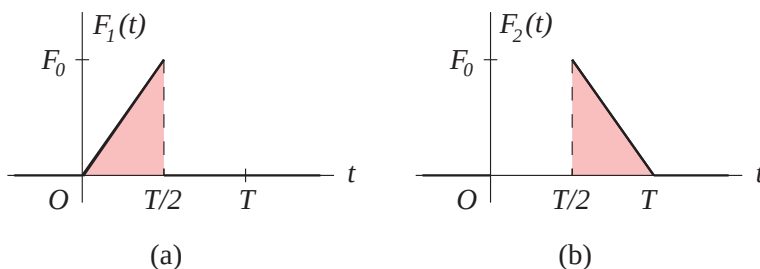
$$F_1(t) = \frac{2F_0}{T} t [\eta(t) - \eta(t - T/2)] \quad \text{i} \quad F_2(t) = 2F_0 \left(1 - \frac{t}{T}\right) [\eta(t - T/2) - \eta(t - T)]$$



I la suma de les dues dóna

$$F(t) = F_1(t) + F_2(t) = 2F_0 [\eta(t - T/2) - \eta(t - T)] + 2F_0 \frac{t}{T} [\eta(t) - 2\eta(t - T/2) + \eta(t - T)]$$

Figura 6.10



A partir de les propietats (TL-01), (TL-08), (TL-10) i simlicant, resulta

$$\mathcal{L}\left[\frac{F(t)}{m}\right] = \mathcal{F}(p) = \frac{2F_0}{mT} \cdot \frac{1 - 2e^{-pT/2} + e^{-pT}}{p^2}$$

Aplicant ara l'equació (6.23), tenim

$$\mathcal{X}(p) = \frac{2F_0}{mT} \frac{1 - 2e^{-pT/2} + e^{-pT}}{p^2 \cdot (p^2 + \omega_0^2)} \quad (1)$$

Utilitzant per a $1/p^2(p^2 + \omega_0^2)$ la descomposició (6.19) que hem vist a l'exemple 6.7, aleshores (1) quedarà

$$\mathcal{X}(p) = \frac{F_0}{m\omega_0^2} \frac{2}{T} \left[\frac{1}{p^2} - \frac{1}{\omega_0} \frac{\omega_0}{p^2 + \omega_0^2} \right] (1 - 2e^{-pT/2} + e^{-pT}) \quad (2)$$

Ara, aplicant a (2) la propietat (TL-08) i les transformades (TL-02) i (TL-04), tenim que

$$\begin{aligned} x(t) = \frac{F_0}{m\omega_0^2} \frac{2}{T} & \left[t - \frac{1}{\omega_0} \sin \omega_0 t - \right. \\ & - 2\eta(t - T/2) \left(t - \frac{T}{2} \right) + \frac{2}{\omega_0} \eta(t - T/2) \sin \omega_0(t - T/2) + \\ & \left. + \eta(t - T) (t - T) - \frac{1}{\omega_0} \eta(t - T) \sin \omega_0(t - T) \right] \end{aligned}$$

o, el que és el mateix,

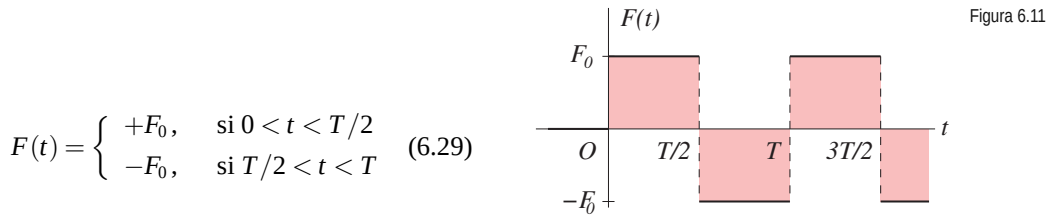
$$\begin{aligned} \text{— si } 0 < t \leq T/2 \quad x(t) &= \frac{F_0}{m\omega_0^2} \frac{2}{T} \left(t - \frac{1}{\omega_0} \sin \omega_0 t \right) \\ \text{— si } T/2 < t \leq T \quad x(t) &= \frac{F_0}{m\omega_0^2} \frac{2}{T} \left[\left(t - \frac{1}{\omega_0} \sin \omega_0 t \right) - 2 \left(t - \frac{T}{2} \right) + \frac{2}{\omega_0} \sin \omega_0(t - T/2) \right] \\ \text{— si } t > T \quad x(t) &= \frac{F_0}{m\omega_0^2} \frac{2}{T} \left[\left(t - \frac{1}{\omega_0} \sin \omega_0 t \right) - 2 \left(t - \frac{T}{2} \right) + \frac{2}{\omega_0} \sin \omega_0(t - T/2) \right. \\ & \quad \left. + (t - T) - \frac{1}{\omega_0} \sin \omega_0(t - T) \right] \end{aligned}$$



En aquest exemple, ha quedat molt ben reflectit un dels grans avantatges de la tècnica de la TL. Trobant la transformada inversa $x(t)$ de la funció (2) $\mathcal{X}(p)$, hem aconseguit, d'un cop, tota la informació sobre la resposta de l'oscil·lador a la força $F(t)$: en una sola funció, hi ha compactats els tres casos possibles per a t , sense haver-nos de preocupar de les condicions inicials, que l'expressió analítica de la força canvia bruscament a $t = T/2$, i torna a canviar a $t = T$, etc. En els exemples següents, torna a quedar palès el que estem dient.

Exemple 6.10. Oscil·lador, sense amortiment, forçat per una ona quadrada

Un oscil·lador de massa m i freqüència pròpia ω_0 , sense amortiment, és sotmès, a partir de $t = 0$, a una força externa periòdica $F(t)$, de període T , del tipus *ona quadrada*, definida com —v. figura 6.11—



Sabent que a l'instant inicial la partícula es trobava en repòs a l'origen, estudieu la resposta de l'oscil·lador a la força externa que hi és aplicada.

Solució

La funció $F(t)$ és una repetició alternada d'una funció impuls semblant a la que ja hem vist a l'exemple 6.4. En aquest cas, el "primer tram" impuls de $F(t)$ és $g(t)/F_0 = \eta(t) - \eta(t - T/2)$, la TL de la qual val, per (TL-01) i (TL-08),

$$\mathcal{L}[g(t)] = F_0 \frac{1}{p} \left(1 - e^{-pT/2} \right)$$

Aplicant ara la propietat (TL-17), considerant que aquí s'alterna la part de la funció que va de 0 a $T/2$, tenim que

$$\mathcal{L}[F(t)] = F_0 \frac{1 - e^{-pT/2}}{p(1 + e^{-pT/2})} \quad (6.30)$$

Aplicant, doncs, aquesta transformada a l'expressió (6.23), en la qual ara $\beta = 0$, ens queda

$$\mathcal{X}(p) = \frac{F_0}{m} \frac{1}{p(p^2 + \omega_0^2)} \frac{1 - e^{-pT/2}}{1 + e^{-pT/2}} \quad (1)$$

Per la descomposició que es mostra a (6.19), podem reescriure (1) de la forma

$$\mathcal{X}(p) = \frac{F_0}{m\omega_0^2} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p^2 + \omega_0^2} \right) \frac{1 - e^{-pT/2}}{1 + e^{-pT/2}} \quad (2)$$



D'altra banda, podem desenvolupar aquest últim factor amb les exponencials com a (A.65)

$$\begin{aligned} \frac{1 - e^{-pT/2}}{1 + e^{-pT/2}} \frac{1 - e^{-pT/2}}{1 - e^{-pT/2}} &= \frac{1 - 2e^{-pT/2} + e^{-pT}}{1 - e^{-pT}} = \\ &= \left(1 - 2e^{-pT/2} + e^{-pT}\right) \sum_{n=0}^{\infty} e^{-npT} = \\ &= 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{-npT} - e^{-(n-1/2)pT}\right) = 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k e^{-kpT/2} \end{aligned}$$

Per tant, la igualtat (2) queda com

$$\mathcal{X}(p) = \frac{F_0}{m\omega_0^2} \left(\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2 + \omega_0^2} \right) \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k e^{-kpT/2} \right] \quad (3)$$

de la qual, aplicant-hi (TL-01), (TL-05) i (TL-08), podem obtenir fàcilment la transformada inversa, que resulta

$$x(t) = \frac{F_0}{m\omega_0^2} \left\{ 1 - \cos \omega_0 t + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \eta(t - kT/2) \cdot \left[1 - \cos \omega_0(t - kT/2) \right] \right\} \quad (4)$$

És a dir,

$$x(t) = \frac{F_0}{m\omega_0^2} \cdot \begin{cases} +1 - \cos \omega_0 t & \text{—si } 0 < t \leq T/2 \\ -1 - \cos \omega_0 t + 2 \cos \omega_0(t - T/2) & \text{—si } T/2 < t \leq T \\ \dots\dots & \dots\dots \\ (-1)^N - \cos \omega_0 t + 2 \sum_{k=1}^N (-1)^k \cos \omega_0(t - kT/2) & \text{—si } \frac{N}{2}T < t \leq \frac{N+1}{2}T \end{cases}$$

Encara podem anar una mica més enllà. Si en aquesta última expressió desenvolupem el $\cos \omega_0(t - kT/2)$, podem posar-la com

$$\text{—si } \frac{N}{2}T < t \leq \frac{N+1}{2}T \quad x(t) = \frac{F_0}{m\omega_0^2} \left[(-1)^N + A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t \right]$$

on les constants A i B valen

$$A = -1 + 2 \sum_{k=1}^N (-1)^k \cos k\omega_0 T/2, \quad B = 2 \sum_{k=1}^N (-1)^k \sin k\omega_0 T/2$$

expressions que, a partir de les igualtats (A.36) i (A.35), prenent $\alpha = \omega_0 T/2 + \pi$, es poden simplificar com

$$A = -2 + \frac{(-1)^N \cos [(N+1/2)\omega_0 T/2]}{\cos \omega_0 T/2}$$

i anàlogament per a B .


Exemple 6.11. Oscil·lador, amb amortiment, forçat per una ona quadrada

Tornem a fer l'exemple 6.10, però ara suposant que l'oscil·lador és sotmès a un amortiment caracteritzat pel paràmetre β .

Solució

Suposem que $\beta < \omega_0$. En aquest cas, l'efecte de l'amortiment és, per (6.23), reescriure l'equació (1) de l'exemple de la forma

$$\mathcal{X}(p) = \frac{F_0}{m} \frac{1}{p[(p+\beta)^2 + \omega_1^2]} \frac{1 - e^{-pT/2}}{1 + e^{-pT/2}} \quad (1)$$

essent, amb la notació habitual, $\omega_1^2 = \omega_0^2 - \beta^2$.

El terme central de (1) es pot expressar en fraccions simples com es mostra a (6.24), en l'exemple 6.8. Així doncs, podem tornar a escriure (1) com

$$\mathcal{X}(p) = \frac{F_0}{m\omega_0^2} \left(\frac{1}{p} - \frac{p+\beta}{(p+\beta)^2 + \omega_1^2} - \frac{\beta}{\omega_1} \frac{\omega_1}{(p+\beta)^2 + \omega_1^2} \right) \frac{1 - e^{-pT/2}}{1 + e^{-pT/2}} \quad (2)$$

Aquesta equació és l'equivalent a la (2) de l'exemple 6.10. Si ara substituïm l'última fracció amb les exponencials per la sèrie corresponent, com hem fet en el pas de (2) a (3) en l'exemple anterior, tenim

$$\mathcal{X}(p) = \frac{F_0}{m\omega_0^2} \left(\frac{1}{p} - \frac{p+\beta}{(p+\beta)^2 + \omega_1^2} - \frac{\beta}{\omega_1} \frac{\omega_1}{(p+\beta)^2 + \omega_1^2} \right) \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k e^{-kpT/2} \right] \quad ((3))$$

Estat transitori

Per mitjà de (TL-01), (TL-03), (TL-05) i (TL-08) de (3), n'obtenim la transformada inversa

$$x(t) = \frac{F_0}{m\omega_0^2} \left\{ 1 - e^{-\beta t} \left(\cos \omega_1 t + \frac{\beta}{\omega_1} \sin \omega_1 t \right) - \right. \\ \left. - 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \eta(t - kT/2) \cdot \left[1 - e^{-\beta t} \left(\cos \omega_1(t - kT/2) + \frac{\beta}{\omega_1} \sin \omega_1(t - kT/2) \right) \right] \right\}$$

o, el que és equivalent, si

$$\frac{N}{2}T < t \leq \frac{N+1}{2}T$$

tenim que

$$x(t) = \frac{F_0}{m\omega_0^2} \left[(-1)^N - e^{-\beta t} \left(\cos \omega_1 t + \frac{\beta}{\omega_1} \sin \omega_1 t \right) + \right. \\ \left. + 2 \sum_{k=1}^N (-1)^k e^{-\beta(t - kT/2)} \left(\cos \omega_1(t - kT/2) + \frac{\beta}{\omega_1} \sin \omega_1(t - kT/2) \right) \right]$$



Com hem fet a l'exemple 6.10, podem tornar a escriure de forma més abreujada l'expressió anterior desenvolupant el $\cos \omega_1(t - kT/2)$ i el $\sin \omega_1(t - kT/2)$ i reagrupant

$$x(t) = \frac{F_0}{m\omega_0^2} \left[(-1)^N + e^{-\beta t} (A \cos \omega_1 t + B \sin \omega_1 t) \right] \quad (5)$$

on els paràmetres A i B dependents de N són

$$A = -1 + 2 \sum_{k=1}^N (-1)^k e^{k\beta T/2} \left[\cos k\omega_1 T/2 - \frac{\beta}{\omega_1} \sin k\omega_1 T/2 \right] \quad (6)$$

$$B = -\frac{\beta}{\omega_1} + 2 \sum_{k=1}^N (-1)^k e^{k\beta T/2} \left[\sin k\omega_1 T/2 + \frac{\beta}{\omega_1} \cos k\omega_1 T/2 \right] \quad (7)$$

Estat estacionari

Vegem com queda l'expressió (5) si t es fa molt gran i l'amortiment és suficient per tal que $\beta T \gg 1$.

En aquestes condicions, els sumatoris de (6) i (7) queden reduïts a l'últim sumand, per al qual tindrem

$$\lim_{t \rightarrow \infty} A e^{-\beta t} \approx (-1)^N 2 e^{-\beta(t - NT/2)} \left(\cos N\omega_1 T/2 - \frac{\beta}{\omega_1} \sin N\omega_1 T/2 \right)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} B e^{-\beta t} \approx (-1)^N 2 e^{-\beta(t - NT/2)} \left(\sin N\omega_1 T/2 + \frac{\beta}{\omega_1} \cos N\omega_1 T/2 \right)$$

Així, (5) queda ara com

$$x(t) \approx (-1)^N \frac{F_0}{m\omega_0^2} \left[1 + 2 e^{-\beta(t - NT/2)} \sin(\omega_1 t + \phi) \right]$$

amb l'angle ϕ donat per

$$\tan \phi = \frac{\sin \phi}{\cos \phi} = \frac{\sin N\omega_1 T/2 + \frac{\beta}{\omega_1} \cos N\omega_1 T/2}{\cos N\omega_1 T/2 - \frac{\beta}{\omega_1} \sin N\omega_1 T/2}$$

6.3. Mètode de Green-Borel

Tornant a les expressions (6.18) i (6.23) s'anomena *funció de transferència* el factor

$$\mathcal{G}(p) = \frac{1}{p^2 + 2\beta p + \omega_0^2}$$

—o l'equivalent a (6.23)— i que depèn exclusivament dels paràmetres de l'oscil·lador. Tal com està formulada la $\mathcal{X}(p)$ de (6.23), podem veure que, per (6.5) i la propietat



(TL-15), la funció $x(t)$ és el producte de convolució de les transformades inverses de $\mathcal{G}(p)$ i $\mathcal{F}(p)$ —més la transformació inversa d'un quocient de polinomis quan hi ha condicions inicials no nul·les.

La transformada inversa de $\mathcal{G}(p)$ és, per (TL-04), la funció

$$g(t) = e^{-\beta t} \sin \omega_1 t \quad (6.31)$$

El segon sumand de (6.23) també el podem posar de la forma

$$x_0 \frac{p + \beta}{(p + \beta)^2 + \omega_1^2} + \frac{\beta x_0 + v_0}{\omega_1} \frac{\omega_1}{(p + \beta)^2 + \omega_1^2}$$

la transformada inversa del qual és, a partir de (TL-04) i (TL-05),

$$e^{-\beta t} \left(x_0 \cos \omega_1 t + \frac{\beta x_0 + v_0}{\omega_1} \sin \omega_1 t \right) \quad (6.32)$$

Així doncs, podem posar la solució de l'equació diferencial (6.11) amb les condicions (6.12), com la suma de (6.32) —on van les condicions inicials— més el producte de convolució $g(t) * F(t)/m$, és a dir,

$$x(t) = \frac{1}{m\omega_1} \int_0^t F(t') e^{-\beta(t-t')} \sin \omega_1(t-t') dt' + \quad (6.33)$$

$$+ e^{-\beta t} \left(x_0 \cos \omega_1 t + \frac{\beta x_0 + v_0}{\omega_1} \sin \omega_1 t \right) \quad (6.34)$$

Suposem que les condicions inicials fossin nul·les, és a dir, que $x_0 = v_0 = 0$. Fixem-nos que, si la força $F(t)$ fos una delta de Dirac en $t = 0$, és a dir, $\delta(t)$, aleshores, de (6.23) i (TL-01) veiem que $\mathcal{X}(p) = \mathcal{G}(p)$, és a dir, la resposta de l'oscil·lador a un impuls $\delta(t)$ és la transformada inversa (6.31) de la funció de transferència del sistema. Per tant, la integral (6.33) ens està dient que la resposta del sistema ara a una força arbitrària $F(t)$ és el producte de convolució de la força per la resposta a un impuls $\delta(t)$.

La recerca de la $x(t)$ a partir de la convolució (6.33) s'anomena *mètode de Green o de Green-Borel*. Vegem ara un parell d'exemples molt senzills d'aplicació d'aquest mètode.

Exemple 6.12. Percussió aplicada a un oscil·lador

Sigui un oscil·lador de paràmetres m , ω_0 , β i $\omega_1^2 = \omega_0^2 - \beta^2$. Si inicialment és a l'origen en repòs, estudieu-ne el moviment si a $t = 0$ se li aplica la *percussió* $I(t) = I_0 \delta(t)$, on $\int_0^\infty I(t) dt = I_0$ és la quantitat de moviment total aplicada a l'oscil·lador.

Solució

Per la definició (6.10) de $\delta(t)$ tenim que

$$\int_{-a}^{+b} f(t) \delta(t) dt = f(0) \quad (6.35)$$



on $f(t)$ és una funció integrable entre $[-a, b]$, $a, b > 0$. Aplicant-hi directament la integral (6.33) del mètode de Green-Borel, per la propietat anterior tenim

$$x(t) = \frac{1}{m\omega_1} I_0 \int_0^t \delta(t') e^{-\beta(t-t')} \sin \omega_1(t-t') dt' = \frac{I_0}{m\omega_1} e^{-\beta t} \sin \omega_1 t$$

Com es podia esperar, se n'obté el mateix resultat que si a la partícula de l'oscil·lador, estant a l'origen, se li comunica una velocitat inicial $v_0 = I_0/m$.

Al problema 6.3 es demana estudiar la resposta de l'oscil·lador si se li aplica una successió infinita de percussions.

Exemple 6.13. Força constant sobtada aplicada a un oscil·lador

Continuem amb el mateix oscil·lador de l'exemple anterior i amb les mateixes condicions inicials. Com serà el seu moviment si ara, en lloc d'aplicar-hi una percussió, hi apliquem, a partir de $t = 0$, una força constant F_0 ?

Solució

Aquest és un cas semblant al d'una molla fixada al sostre a la qual, a $t = 0$, pengem un pes F_0 a l'extrem lliure i el conjunt comença a oscil·lar des del repòs amb un cert amortiment —v. problema 2.10. L'estat final del sistema tornarà a ser el repòs amb la molla allargada un Δx donat per $k\Delta x = F_0$, és a dir, $\Delta x = F_0/(m\omega_0^2)$.

La força aplicada és, matemàticament, de la forma $F(t) = F_0 \eta(t)$. Aplicant-hi la integral de Green-Borel (6.33) tindrem ara

$$x(t) = \frac{F_0}{m\omega_1} \int_0^t e^{-\beta(t-t')} \sin \omega_1(t-t') dt' \quad (1)$$

Fent ara el canvi de variables $z = t - t'$, amb $dt' = -dz$, i utilitzant el resultat (A.76), la integral (1) queda com

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{F_0}{m\omega_1\omega_0^2} \left[e^{-\beta(t-t')} [\beta \sin \omega_1(t-t') + \omega_1 \cos \omega_1(t-t')] \right]_0^t = \\ &= \frac{F_0}{m\omega_0^2} \left[1 - e^{-\beta t} \left(\cos \omega_1 t + \frac{\beta}{\omega_1} \sin \omega_1 t \right) \right] \end{aligned}$$

Com veiem, aquest resultat està totalment d'acord amb el que ja havíem previst per a l'oscil·lador. Per cert, aquesta última expressió de $x(t)$ ja ens ha sortit a (6.25).

6.4. Problemes resolts i problemes proposats

6.4.1. Problemes resolts

Problema 6.1. TL d'una escala i una ona triangular

Siguin les dues funcions (a) i (b) representades a la figura 6.12: la (a), la funció $f(t)$ escala, i la (b) o funció $g(t)$ ona triangular, respectivament. Definiu-les en termes de la funció unitària de Heaviside $\eta(t)$ i, a partir d'aquí, trobeu-ne les TL.

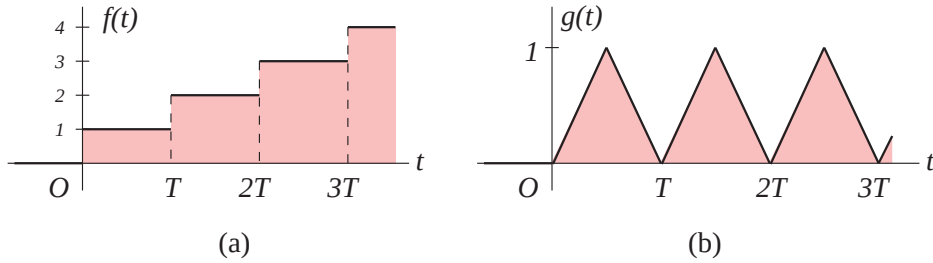


Figura 6.12

Solució

a) En termes de la funció $\eta(t)$, aquesta funció escalonada la podem definir com

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \eta(t - nT)$$

La TL d'aquest sumatori és, per (TL-01) i la propietat (TL-08), o directament, per la (TL-16), la següent:

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{p} \frac{1}{1 - e^{-pT}} \quad (1)$$

b) A l'exemple 6.10, hem definit la funció ona quadrada $F(t)$ i n'hem trobat la TL, equació (6.30). Si prenem $F_0 = 1$, la funció $F(t)$ es relaciona amb l'ona triangular $g(t)$ de la forma

$$\frac{dg(t)}{dt} = \frac{2}{T} F(t)$$

i, com que per (TL-12) tenim que

$$\mathcal{L}[g(t)] = \left(\frac{2}{T} \mathcal{L}[F(t)] + g(0) \right) \frac{1}{p}$$

finalment, n'obtenim

$$\mathcal{L}[g(t)] = \frac{2}{T} \frac{1}{p^2} \frac{1 - e^{-pT/2}}{1 + e^{-pT/2}}$$

Fixeu-vos que també hauríem pogut trobar aquest resultat aplicant la propietat (TL-17) a la funció “triangle únic” donada a (6.28), prenent $F_0 = 1$.

Problema 6.2. Aplicació de la TL a la resolució d'EDO

Apliqueu el mètode de la TL per resoldre les dues equacions diferencials següents:

a) $\frac{d^2x}{dt^2} + x = 2e^t$, amb $x(0) = 1$, $\frac{dx}{dt}(0) = 2$;

b) $\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 4x = 8e^{-2t}$, amb $x(0) = 1$, $\frac{dx}{dt}(0) = 1$.

**Solució**

- a) Aplicant la TL a tota l'equació diferencial, per (TL-03), (TL-12) i (TL-13), ens queda l'equació algebraica

$$p^2 \mathcal{X}(p) - p - 2 + \mathcal{X}(p) = \frac{2}{p-1}$$

de la qual deduïm

$$\mathcal{X}(p) = \frac{p+p^2}{(p^2+1)(p-1)} = \frac{1}{p-1} + \frac{1}{p^2+1}$$

Comparant aquesta última expressió amb (TL-03) i (TL-04), resulta

$$x(t) = \sin t + e^t$$

- b) Fent el mateix que a l'equació de l'apartat (a), arribem a l'equació algebraica

$$(p^2 + 4p + 4) \mathcal{X}(p) = \frac{8}{p+2} + p + 4 + 1$$

d'on trobem

$$\mathcal{X}(p) = \frac{p^2 + 7p + 18}{(p+2)^3} = \frac{8}{(p+2)^3} + \frac{3}{(p+2)^2} + \frac{1}{p+2}$$

i, d'aquí,

$$x(t) = e^{-2t} (1 + 3t + 4t^2)$$

Problema 6.3. Oscil·lador sotmès a una “pinta de Dirac”

Estudieu la resposta de l'oscil·lador amortit de l'exemple 6.12 si ara la força aplicada no és una percussió, sinó una successió de forces, iguals entre si i separades per l'interval de temps T .

Solució

La successió de percussions a què fa referència l'enunciat la podem descriure com el sumatori —*pinta de Dirac*—

$$I(t) = I_0 \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT)$$

la TL del qual val, per (TL-16) i (TL-06),

$$\mathcal{L}[I(t)] = \frac{I_0}{1 - e^{-pT}} = I_0 \sum_{n=0}^{\infty} e^{-npT}$$



La TL de la posició $x(t)$ val, doncs, per (6.23),

$$\mathcal{X}(p) = \frac{I_0}{m\omega_1} \frac{\omega_1}{(p + \beta)^2 + \omega_1^2} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-npT}$$

Per (TL-04), (TL-08) i (TL-11), tenim que la transformada inversa d'aquesta última expressió és

$$x(t) = \frac{I_0}{m\omega_1} \sum_{n=0}^{\infty} \eta(t - nT) e^{-\beta(t - nT)} \sin \omega_1(t - nT)$$

que és com dir

$$x(t) = \frac{I_0}{m\omega_1} \cdot \begin{cases} e^{-\beta t} \sin \omega_1 t & \text{—si } 0 < t \leq T \\ e^{-\beta t} \sin \omega_1 t + e^{-\beta(t-T)} \sin \omega_1(t-T) & \text{—si } T < t \leq 2T \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ \sum_{n=0}^N e^{-\beta(t-nT)} \sin \omega_1(t-nT) & \text{—si } NT < t \leq (N+1)T \end{cases}$$

Si desenvolupem el $\sin \omega_1(t - nT)$ d'aquesta última expressió, el resultat general el podem escriure com

$$\text{si } NT < t \leq (N+1)T \quad x(t) = \frac{I_0}{m\omega_1} e^{-\beta t} (A \sin \omega_1 t + B \cos \omega_1 t)$$

amb els paràmetres A i B que valen

$$A = \sum_{n=0}^N e^{n\beta T} \cos n\omega_1 T \quad B = - \sum_{n=0}^N e^{n\beta T} \sin n\omega_1 T$$

Problema 6.4. Estat transitori degut a una dent de serra positiva

Un oscil·lador de massa m , freqüència pròpia ω_0 i fricció negligible està inicialment en repòs a l'origen. A partir de $t = 0$, hi apliquem la força periòdica $F(t)$ de tipus *dent de serra positiva*, definida com (6.8) a l'exemple 6.5. Estudieu la resposta d'aquest oscil·lador a la força aplicada.

Solució

A l'exemple 6.5, ja hem trobat la TL de la força $F(t)$, equació (6.9). Així doncs, l'aplicació de l'expressió (6.23) ens porta al resultat

$$\mathcal{X}(p) = \frac{F_0}{mT} \frac{1}{p^2 + \omega_0^2} \cdot \left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p} \frac{T e^{-pT}}{1 - e^{-pT}} \right)$$

que podem reescriure com

$$\mathcal{X}(p) = \frac{F_0}{mT} \left[\frac{1}{p^2(p^2 + \omega_0^2)} - \frac{1}{p(p^2 + \omega_0^2)} \left(\frac{T e^{-pT}}{1 - e^{-pT}} \right) \right] \quad (1)$$



En aquesta expressió, apareixen els quocients $1/p^2(p^2 + \omega_0^2)$ i $1/p(p^2 + \omega_0^2)$ dels que ja hem vist, a (6.20) i (6.19), respectivament, de l'exemple 6.7, quina és la seva descomposició en fraccions simples. I, pel que fa al factor amb l'exponencial, resulta convenient desenvolupar-lo en sèrie. Per (A.65), quedarà com

$$\frac{e^{-pT}}{1 - e^{-pT}} = e^{-pT} (1 + e^{-pT} + e^{-2pT} + e^{-3pT} + \dots) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-npT} \quad (2)$$

Així, per (6.20), (6.19) i (2), la $\mathcal{X}(p)$ (1) queda de la forma

$$\mathcal{X}(p) = \frac{F_0}{m\omega_0^2} \frac{1}{T} \left[\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2 + \omega_0^2} - T \left(\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2 + \omega_0^2} \right) \sum_{n=1}^{\infty} e^{-npT} \right] \quad (3)$$

Ara ens queda trobar la transformada inversa de (3). Per les propietats (TL-02) i (TL-04), tenim

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2 + \omega_0^2} \right] = t - \frac{1}{\omega_0} \sin \omega_0 t \quad (4)$$

i, per les (TL-01) i (TL-08),

$$\mathcal{L}^{-1} \left[T \left(\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2 + \omega_0^2} \right) \sum_{n=1}^{\infty} e^{-npT} \right] = T \sum_{n=1}^{\infty} [\eta(t - nT) - \eta(t - nT) \cos \omega_0(t - nT)] \quad (5)$$

Finalment, per (3), (4) i (5), la resposta $x(t)$ de l'oscil·lador queda com

$$x(t) = \frac{F_0}{m\omega_0^2} \frac{1}{\omega_0 T} \left(\omega_0 t - \sin \omega_0 t - \omega_0 T \sum_{n=1}^{\infty} \eta(t - nT) [1 - \cos \omega_0(t - nT)] \right) \quad (6)$$

L'expressió (6) és una forma molt compacta d'escriure que

$$\text{—si } 0 < t \leq T \quad x(t) = \frac{F_0}{m\omega_0^2} \frac{1}{\omega_0 T} (\omega_0 t - \sin \omega_0 t)$$

$$\text{—si } T < t \leq 2T \quad x(t) = \frac{F_0}{m\omega_0^2} \frac{1}{\omega_0 T} [\omega_0(t - T) - \sin \omega_0 t + \omega_0 T \cos \omega_0(t - T)]$$

$$\text{—si } 2T < t \leq 3T$$

$$x(t) = \frac{F_0}{m\omega_0^2} \frac{1}{\omega_0 T} [\omega_0(t - 2T) - \sin \omega_0 t + \omega_0 T [\cos \omega_0(t - T) + \cos \omega_0(t - 2T)]]$$

i, en general,

$$\text{—si } NT < t \leq (N + 1)T$$

$$x(t) = \frac{F_0}{m\omega_0^2} \frac{1}{\omega_0 T} \left[\omega_0(t - NT) - \sin \omega_0 t + \omega_0 T \sum_{n=1}^N \cos \omega_0(t - nT) \right]$$



Si desenvolupem el $\cos \omega_0(t - nT)$, aquesta última expressió la podem posar com

$$\text{si } NT < t \leq (N+1)T \quad x(t) = \frac{F_0}{m\omega_0^2} \frac{1}{\omega_0 T} [\omega_0(t - NT) + A \sin \omega_0 t + B \cos \omega_0 t]$$

on A i B, per (A.36) i (A.35), vénen donades per

$$A = -1 + \omega_0 T \sum_{n=1}^N \sin n\omega_0 T = -1 + \omega_0 T \frac{\sin(N+1)\omega_0 T/2 \cdot \sin N\omega_0 T/2}{\sin \omega_0 T/2}$$

$$B = \omega_0 T \sum_{n=1}^N \cos n\omega_0 T = \omega_0 T \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sin(N+1)\omega_0 T/2}{2 \sin \omega_0 T/2} \right)$$

Problema 6.5. Aplicació del mètode de Green-Borel

Apliqueu el mètode de Green-Borel per trobar l'equació de moviment d'un oscil·lador que es caracteritza pels paràmetres m , ω_0 , β i $\omega_1^2 = \omega_0^2 - \beta^2$, inicialment en repòs a l'origen, sotmès, a partir de $t = 0$, a la força $F(t) = F_0 e^{-\gamma t}$.

Solució

Substituint $F(t) = F_0 e^{-\gamma t}$, la integral (6.33) de Green-Borel pren, en aquest cas, la forma

$$x(t) = \frac{F_0}{m\omega_1} e^{-\gamma t} \int_0^t e^{-\beta(t-t')} \sin \omega_1(t-t') dt'$$

Fent ara el canvi de variables $z = t - t'$, amb $dt' = -dz$, tenint en compte (A.76), ens queda

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{-F_0}{m\omega_1} e^{-\gamma t} \int e^{-\beta z} \sin \omega_1 z dz = \\ &= \frac{-F_0}{m\omega_1} e^{-\gamma t} \left[\frac{e^{-\beta(t-t')} (-\beta \sin \omega_1(t-t') - \omega_1 \cos \omega_1(t-t'))}{\omega_1^2 + \beta^2} \right]_0^t = \\ &= \frac{F_0}{m\omega_0^2} e^{-\gamma t} \left[1 - e^{-\beta t} \left(\cos \omega_1 t - \frac{\beta}{\omega_1} \sin \omega_1 t \right) \right] \end{aligned}$$

6.4.2. Problemes proposats

Problema 6.6. TL d'una rampa de baixada

Trobeu la TL de la funció “baixada en rampa” següent:

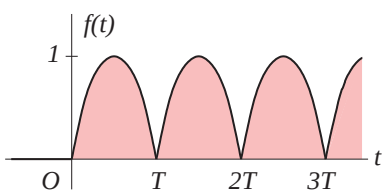
$$F(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ 2-t & \text{si } 1 \leq t < 2 \\ 0, & \text{si } 2 \leq t \end{cases}$$

$$\text{Resp.: } \mathcal{L}[f(t)] = \frac{p - e^{-p} + e^{-2p}}{p^2}$$

**Problema 6.7. TL d'un sinus rectificat**

Trobeu la TL de la funció *sinus rectificat* $f(t)$, de període T , tal que —v. figura 6.13—

Figura 6.13



$$f(t) = \sin \frac{\pi t}{T}, \text{ si } 0 \leq t \leq T \quad (6.36)$$

$$\text{essent } f(t) = 0, \text{ si } t < 0, \text{ i}$$

$$f(t+t) = f(t), \text{ si } t > T.$$

Resp.: $\mathcal{L}[f(t)] = \frac{\pi T}{4q^2 + \pi^2} \frac{e^q + e^{-q}}{e^q - e^{-q}}, \text{ amb } q = \frac{1}{2}pT$

Problema 6.8. TL d'un sinus semirectificat

Continuant en la línia del problema anterior, esbrineu quina és la TL de la funció sinus semirectificat de període T —funció que s'ha mostrat al problema 5.2.

Resp.: $\mathcal{L}[f(t)] = \frac{\pi T/2}{(\pi^2 + q^2)(1 - e^{-q})}, \text{ amb } q = \frac{1}{2}pT$

Problema 6.9. TL inverses

a) Feu la descomposició en fraccions simples de les fraccions

$$\mathcal{F} = \frac{2p+1}{p^2(p^2+1)}, \quad \mathcal{G} = \frac{6p^3-3p^2+3p-1}{p^2(p^2+1)}$$

b) Fent prèviament les corresponents descomposicions, trobeu les funcions originals $f(t)$ de les TL següents:

$$\mathcal{F}_1(p) = \frac{2p+3}{p^3+4p^2+3p}, \quad \mathcal{F}_2(p) = \frac{2p+3}{p^3+4p^2+5p}, \quad \mathcal{F}_3(p) = \frac{1}{(p+2)(p-1)^2}$$

Resp.: a) $\mathcal{F} = \frac{2}{p} - \frac{2}{p^2} - \frac{2p+1}{p^2+1}, \quad \mathcal{G} = \frac{3}{p} - \frac{1}{p^2} - \frac{3p-2}{p^2+1},$

$$\text{b) } f_1(t) = 1 - \frac{e^{-t} - e^{-3t}}{2}, \quad f_2(t) = \frac{3}{5} + \frac{e^{-2t}}{5}(4\sin t - 3\cos t),$$

$$f_3(t) = \frac{1}{9} (e^{-2t} - e^t + 3te^t)$$

Problema 6.10. Resolució d'EDO per la TL

Malgrat que, en aquests casos, no sigui la manera més ràpida de fer-ho, aplicant el mètode de la TL resoleu les equacions diferencials següents:

a) $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} - 2x = 2 + 2t - 2t^2, \text{ amb } x(0) = 4, \frac{dx}{dt}(0) = 1$



b) $\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 3x = 1$, amb $x(0) = 3$, $\frac{dx}{dt}(0) = -2$

c) $\frac{d^2x}{dt^2} + 9x = 18\cos 3t$, amb $x(0) = 0$, $\frac{dx}{dt}(0) = 9$

Resp.: a) $x(t) = 3e^t + e^{-2t} + t^2$, b) $x(t) = \frac{1}{3} + 3e^{-t} - \frac{1}{3}e^{-3t}$,

c) $x(t) = 3(1+t)\sin 3t$

Problema 6.11. Percussió sobre un oscil·lador no amortit

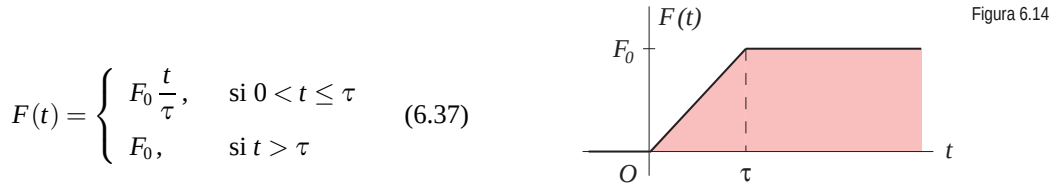
Una massa m lligada a una molla de constant k sense amortiment està oscil·lant lliurement. En un instant determinat, que prenem com $t = 0$, la massa és a x_0 amb una velocitat v_0 . Si a l'instant posterior $t = \tau$ la massa rep una percussió de tipus $I(t) = I_0\delta(t - \tau)$, trobeu la TL de la posició $x(t)$ de la massa i la pròpia $x(t)$.

Resp.: $\mathcal{X}(p) = \frac{x_0 p + v_0}{p^2 + \omega_0^2} + \frac{I_0}{m} \frac{e^{-\tau p}}{p^2 + \omega_0^2}$, amb $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, i

$$x(t) = x_0 \cos \omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t + \eta(t - \tau) \frac{I_0}{m\omega_0} \sin \omega_0(t - \tau)$$

Problema 6.12. Oscil·lador sotmès a una força en rampa

Un oscil·lador no amortit de massa m i freqüència pròpia ω_0 queda sotmès, a partir de $t = 0$, a la força en rampa següent —v. figura 6.14—



Sabent que a l'instant $t = 0$ la partícula es trobava a l'origen amb la velocitat v_0 , trobeu: a) l'expressió analítica única de la força en termes de la funció de Heaviside $\eta(t)$; b) la transformada $\mathcal{X}(p)$ de la posició, i c) la posició $x(t)$ per a qualsevol $t > 0$.

Resp.: a) $F(t) = F_0 \frac{t}{\tau} [\eta(t) - \eta(t - \tau)] + F_0 \eta(t - \tau)$,

b) $\mathcal{X}(p) = \frac{v_0}{p^2 + \omega_0^2} + \frac{F_0}{m\tau} \frac{1 - e^{-p\tau}}{p^2(p^2 + \omega_0^2)}$,

c)

—si $0 < t < \tau$, $x(t) = \frac{F_0}{m\omega_0^2} \frac{t}{\tau} + \left(v_0 - \frac{F_0}{m\omega_0^2} \right) \frac{\sin \omega_0 t}{\omega_0}$; (v. problema 3.7)

—si $t > \tau$, $x(t) = \frac{F_0}{m\omega_0^2} + \left(v_0 - \frac{F_0}{m\omega_0^2} \right) \frac{\sin \omega_0 t}{\omega_0} + \frac{F_0}{m\omega_0^2 \tau} \frac{\sin \omega_0(t - \tau)}{\omega_0}$

**Problema 6.13. Força externa harmònica amortida**

Trobeu la resposta d'un oscil·lador amortit, que és caracteritzat pels paràmetres m , ω_0 i β sotmès a la força externa

$$F(t) = F_0 e^{-\beta t} \sin \omega_0 t$$

Les condicions inicials són $x_0 = v_0 = 0$.

Resp.: $x(t) = \frac{F_0}{m\beta^2} e^{-\beta t} \left(\frac{\omega_0}{\omega_1} \sin \omega_1 t - \sin \omega_0 t \right)$, amb $\omega_1^2 = \omega_0^2 - \beta^2$

Problema 6.14. Utilització del producte de convolució

Utilitzant la propietat fonamental (TL-15) del producte de convolució:

a) trobeu la TL de les funcions següents:

$$f(t) = \int_0^t (t-t')^2 \cos 2t' dt', \quad g(t) = \int_0^t e^{-(t-t')} \sin t' dt'$$

b) trobeu la TL inversa d'aquestes altres funcions:

$$\mathcal{F}(p) = \frac{p}{(p+1)(p^2+4)}, \quad \mathcal{G}(p) = \frac{1}{p^4(p^2+1)}$$

Resp.: a) $\mathcal{F}(p) = \frac{2}{p^2(p^2+4)}$, $\mathcal{G}(p) = \frac{1}{(p+1)(p^2+1)}$

b) $f(t) = \int_0^t e^{-(t-t')} \cos 2t' dt'$, $g(t) = \frac{1}{6} \int_0^t (t-t')^3 \sin t' dt'$

Problema 6.15. Mètode de Green-Borel

Generalitzant el problema 6.13, apliqueu el mètode de Green-Borel per trobar el comportament d'un oscil·lador de les característiques m , ω_0 , β i $\omega_1^2 = \omega_0^2 - \beta^2$, inicialment en repòs a l'origen, sotmès, a partir de $t = 0$, a la força $F(t) = F_0 e^{-\gamma t} \sin \omega t$.



→ 7



Oscil·ladors no lineals

7.1. Desviacions de la linealitat

A la secció §1.5, hem vist com en els casos en què l'energia potencial de la qual deriva una força restauradora es pot desenvolupar en sèrie de Taylor al voltant d'un mínim i existeix el terme quadràtic del desenvolupament, el moviment oscil·latori corresponent és, per a petites amplituds, un MHS. En aquella secció, ens interessava destacar sobretot que el MHS és tan freqüent en la natura i en la tècnica perquè és la conseqüència de la *linealitat* de les forces restauradores, i la linealitat és, en la majoria dels casos, la primera aproximació al comportament de molts sistemes.

Exemples ben coneguts d'aquest fet són els pèndols i les molles. Aquests, com sabem, responen linealment quan les amplituds o les forces aplicades són petites, però deixen de ser lineals quan se sobrepassen uns límits. Per exemple, hi ha algunes forces que presenten una certa simetria en el sentit que, en mòdul, $|F(-x)| = |F(x)|$. Per a aquestes, una primera aproximació no lineal de la força i de l'energia potencial és del tipus

$$F(x) = -kx + \varepsilon x^3, \quad U(x) = \frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{4}\varepsilon x^4 \quad (7.1)$$

A la figura 7.1, es mostren les forces i les energies potencials per a tres casos corrents de desviació de la linealitat. Per tal de fer més palesa la diferència, s'han representat en línia contínua les forces i energies reals i, en discontinua, l'aproximació lineal.

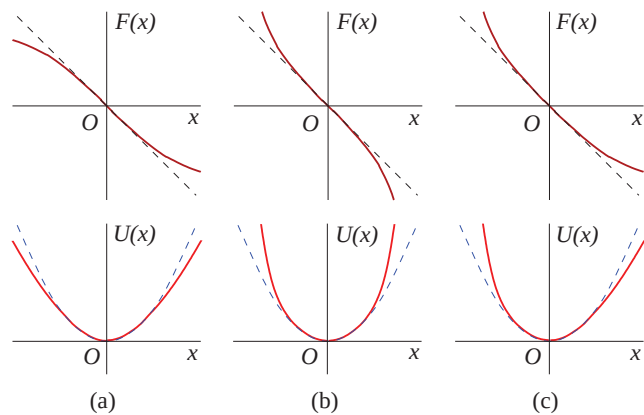


Figura 7.1

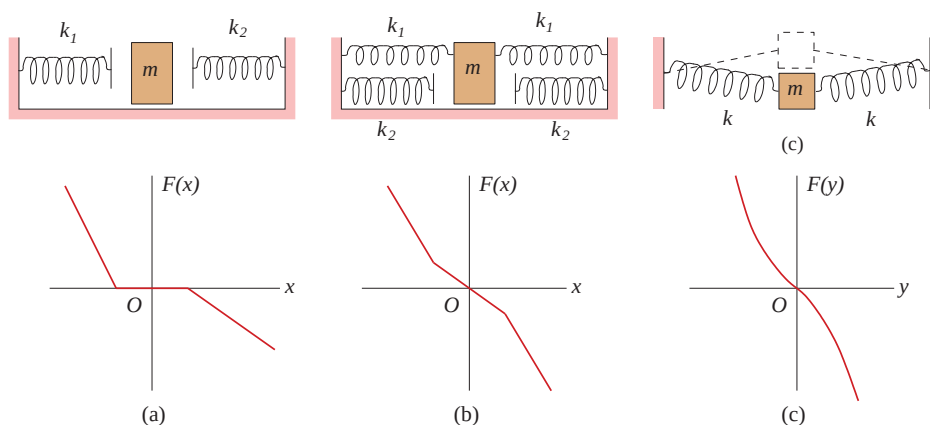
En el cas de la figura 7.1 (a) —anomenat *sistema tou*— $\varepsilon > 0$; és el cas dels pèndols físics, en què el moment del pes val —v. secció §1.3.2 i (A.56)—

$$M(\theta) = -mgh \sin \theta \approx -mgh \cdot \theta + mgh/6 \cdot \theta^3$$

En canvi, en el cas de la figura 7.1 (b) —*sistema dur*— $\varepsilon < 0$: un cop sobrepassat el límit elàstic lineal el sistema es comença a saturar: la força ha d'incrementar-se molt per tal que la molla s'allargui una mica més. Finalment, en el cas de la figura 7.1 (c), s'ha representat un sistema mixt: tou per a les $x > 0$ i dur per a les $x < 0$; la força és del tipus $F(x) = -kx + \varepsilon x^2$, $\varepsilon > 0$.

No cal anar gaire lluny per trobar sistemes no lineals: un sistema perfectament lineal pot deixar-ho de ser només fent algun petit canvi. És el cas dels sistemes molla-massa que s'han representat a les figures 7.2. A (a) i (b), només ha calgut deixar un espai mort entre les molles i la massa per passar de tenir forces restauradores lineals a forces $F(x)$ no lineals dures —v. problema 7.7. En el cas que es representa a la figura 7.2 (c), tenim una partícula lligada a dues molles iguals que, en el punt mitjà d'equilibri, tenen la seva longitud natural i, per tant, no estan tensades. Com sabem, les oscil·lacions longitudinals de la partícula en la direcció de les molles són harmòniques simples. En canvi, com es demana demostrar al problema 7.9, les oscil·lacions transversals no són lineals, ni tan sols les d'amplitud molt petita.

Figura 7.2



En tractar amb sistemes no lineals, s'ha de tenir sempre present que la solució general no es pot obtenir pel principi de superposició, que ara no és vàlid. A més, en els sistemes no lineals poden aparèixer efectes nous que no es donen en els lineals; així, la ressonància en les oscil·lacions forçades no es presenta en la mateixa forma que com l'hem vista a la secció §3.3.2. El tema és de gran interès pràctic i és objecte d'una recerca intensa si bé aquí només en podem fer una petita introducció.

7.2. El pèndol... per a angles no petits

Recordem que l'expressió (1.20) del període del pèndol simple només és vàlida per a amplituds petites, ja que és el resultat d'haver aproximat el $\sin \theta$ per θ a l'equació diferencial (1.16). Si l'amplitud del pèndol no és massa petita, el moviment deixa de ser harmònic simple i el període comença a dependre de l'amplitud de l'oscil·lació.



El que farem ara és millorar l'estudi del moviment del pèndol considerant-ne els efectes no lineals, és a dir, aquells per als quals ja no és vàlid que $\sin \theta \approx \theta$. Ho farem per dues vies:

- a) partint de la conservació de l'energia, de forma semblant a com vam arribar a (1.37);
- b) tractant de resoldre, aproximadament, l'equació diferencial (1.16) del pèndol simple.

7.2.1. Període del pèndol simple amb angles no petits

Comencem aplicant la conservació de l'energia, $E = K + U$. En aquest cas, la lentilla té, en general, una energia cinètica K que val, amb la notació de la secció §1.3, i considerant que la trajectòria és circular,

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m \left(L \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \quad (7.2)$$

Pel que fa a l'energia potencial U , aquesta és gravitatòria. Si prenem com a origen de l'energia potencial el punt més baix de la trajectòria i anomenem h l'altura de la lentilla respecte d'aquest punt, tindrem

$$U = mgh = mgL(1 - \cos \theta) = 2mgL \sin^2 \frac{\theta}{2} \quad (7.3)$$

Sigui ara Θ l'amplitud angular del moviment. Quan $\theta = \Theta \leq \pi$, la partícula no tindrà energia cinètica i tota l'energia serà només potencial. Per (7.3), se segueix, doncs

$$E = 2mgL \sin^2 \frac{\Theta}{2} \quad (7.4)$$

Per (7.2), (7.3) i (7.4), la conservació ens diu que

$$\frac{1}{2}mL^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + 2mgL \sin^2 \frac{\theta}{2} = 2mgL \sin^2 \frac{\Theta}{2}$$

equació de la qual podem simplificar mL i aïllar dt

$$dt = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{L}{g}} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2 \frac{\Theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}}}$$

El període T del pèndol serà quatre vegades el temps d'anar des del mínim, $\theta = 0$, fins al màxim, $\theta = \Theta$

$$T = 2 \sqrt{\frac{L}{g}} \int_0^\Theta \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2 \frac{\Theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}}} \quad (7.5)$$

Aquesta integral no surt a les taules d'integrals usuals. Farem el canvi de variable $\theta \rightarrow z$ donat per



$$z = \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\Theta}{2}} \quad \text{d'on} \quad dz = \frac{1}{2} \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\Theta}{2}} d\theta$$

de manera que, si $\theta = 0$, $z = 0$ i, si $\theta = \Theta$, $z = 1$. Si anomenem $k = \sin \frac{\Theta}{2}$, llavors el període (7.5) queda com

$$T = 4\sqrt{\frac{L}{g}} \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} \quad (7.6)$$

Aquesta integral sí que surt en els textos especialitzats de matemàtiques i diuen d'ella que defineix una funció $F(k)$ anomenada *integral el·líptica completa de primera espècie* —v. apèndix §A.5—, funció que no es pot expressar en termes de funcions elementals.

Si $k^2z^2 \ll 1$, podem fer un desenvolupament en sèrie de l'arrel quadrada, com a (A.64) i, integrant terme a terme (7.6), aconseguim

$$F(k) = \frac{\pi}{2} \left\{ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 k^4 + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 k^6 + \dots \right\}$$

que, substituïda a (7.6), resulta, finalment

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \left\{ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2 \frac{\Theta}{2} + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \sin^4 \frac{\Theta}{2} + \dots \right\} \quad (7.7)$$

Veiem, doncs, que el període T depèn de l'amplitud de l'oscil·lació Θ d'una forma laboriosa. Fixem-nos, però, que si Θ és molt petita, recuperem el període d'un pèndol simple, que hem vist a (1.20). Si Θ és petita, però no tant com abans, podem limitar (7.7) als dos primers termes de la sèrie i substituir $\sin^2 \frac{\Theta}{2} \approx \frac{\Theta^2}{4}$, de manera que l'expressió (7.7) queda de la forma

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \left(1 + \frac{\Theta^2}{16} \right) \quad (7.8)$$

Així, aquest $\Theta^2/16$ representa una primera correcció a la fórmula (1.20), $T = 2\pi\sqrt{L/g}$. Però, malgrat que és una primera correcció, val a dir que l'expressió (7.8) és tan bona que, per a una amplitud de fins i tot $\pi/6$ rad = 30° , l'error relatiu comès per (7.8), respecte de l'expressió (7.7), és només del $-0,024\%$ —uns 21 s menys per dia en un rellotge de pèndol.

7.2.2. Moviment del pèndol: aproximació de tercer ordre

L'equació diferencial (1.16) del pèndol simple és, com hem vist a la secció §1.3.1,

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L} \sin \theta = 0 \quad (7.9)$$



equació que, com hem comentat, no té solució en termes de funcions elementals. En aquella mateixa secció, varem fer l'aproximació lineal $\sin \theta \approx \theta$, vàlida per a angles molt petits, que dóna lloc al MHS del pèndol

$$\theta(t) = \Theta \cos \omega_0 t, \quad \text{amb} \quad \omega_0^2 = \frac{g}{L} \quad (7.10)$$

expressió en què Θ és l'amplitud de l'oscil·lació i en què hem pres la condició inicial que a $t = 0$ el pèndol es trobava en repòs amb l'elongació màxima.

Si el pèndol oscil·la amb una amplitud Θ petita, però “no molt petita”, podem aproximar el sinus fins al tercer ordre, és a dir, posar $\sin \theta \approx \theta - \theta^3/6$, de manera que la equació (7.9) queda com

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \omega_0^2 \theta = \varepsilon \theta^3, \quad \varepsilon = \frac{1}{6} \omega_0^2 \quad (7.11)$$

Com que l'angle θ és petit en tot moment, podem suposar $\varepsilon \theta^3 \ll \omega_0^2 \theta$. Si $\varepsilon \theta^3$ fos estrictament zero, la funció $\theta(t)$ solució de (7.11) seria la (7.10). D'altra banda, sabem per trigonometria, igualtat (A.28), que $\cos^3 \omega t$ està relacionat amb $\cos 3\omega t$. Tot això ens fa pensar que una solució aproximada de l'equació (7.11) podria ser una funció com la següent:

$$\theta(t) = \Theta(\cos \omega t + \lambda \cos 3\omega t) \quad (7.12)$$

on $\lambda \ll 1$ i ω —molt semblant a ω_0 — són paràmetres a determinar. Fem-ho.

Derivant (7.12) i substituint a (7.11), tenim

$$\begin{aligned} & -\omega^2 \Theta(\cos \omega t + 9\lambda \cos 3\omega t) + \omega_0^2 \Theta(\cos \omega t + \lambda \cos 3\omega t) = \\ & = \varepsilon (\Theta^3 \cos^3 \omega t + 3\Theta^3 \lambda \cos^2 \omega t \cos 3\omega t + \dots) \end{aligned} \quad (7.13)$$

Com que l'amplitud Θ ja és bastant petita, Θ^3 encara ho serà més; en conseqüència, negligirem els termes amb $\lambda \Theta^3$, $\lambda^2 \Theta^3$, etc. Desenvolupant el $\cos^3 \omega t$ —(A.27)—, podem tornar a escriure (7.13) com

$$\begin{aligned} & \Theta \cos \omega t \cdot \left[-\omega^2 + \omega_0^2 - \frac{1}{8} \Theta^2 \omega_0^2 \right] + \\ & \Theta \cos 3\omega t \cdot \left[-9\lambda \omega^2 + \lambda \omega_0^2 - \frac{1}{24} \omega_0^2 \Theta^2 \right] = 0 \end{aligned}$$

A més, com que les funcions $\cos \omega t$ i $\cos 3\omega t$ són linealment independents,¹ aleshores l'interior dels dos claudàtors ha de ser zero. Quedant-nos només amb l'aproximació de primer ordre a λ , trobem

$$\omega^2 = \omega_0^2 \left(1 - \frac{1}{8} \Theta^2 \right) \quad \lambda = -\frac{1}{192} \Theta^2 \quad (7.14)$$

¹ A l'apèndix §B.2.1, s'explica què vol dir que dues funcions siguin linealment independents.



En resum, l'elongació $\theta(t)$ d'un pèndol ve donada, en una aproximació de tercer ordre, per

$$\theta(t) \approx \Theta \cos \omega t - \frac{\Theta^3}{192} \cos 3\omega t \quad (7.15)$$

amb un període de

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega_0} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{8}\Theta^2}} \approx \frac{2\pi}{\omega_0} \left(1 + \frac{1}{16}\Theta^2\right) \quad (7.16)$$

que coincideix amb el donat per (7.8).

Veiem, doncs, per (7.15), que les conseqüències del petit terme no lineal en θ^3 a (7.11) són modificar lleugerament la freqüència pròpia i, sobretot, l'aparició del tercer harmònic. A la secció §7.4, en què estudiarem més sistemàticament els efectes dels termes no lineals, veurem que això és general.

7.3. L'espai fàsic

L'estat de moviment d'una partícula que es mou sobre l'eix x queda perfectament determinat si considerem la seva posició x i la seva velocitat $v = \frac{dx}{dt}$. Com que x i v van variant contínuament, després d'un interval de temps determinat, tindrem una successió de punts (x, v) que podrem representar gràficament. El pla o sistema de referència xv en què es fa aquesta representació s'anomena *espai fàsic* i la corba que mostra l'evolució de l'estat x, v de la partícula, *trajectòria* a l'espai fàsic.

Un dels avantatges de treballar amb l'espai fàsic és que molt sovint és més fàcil trobar la trajectòria $v(x)$ de la partícula a l'espai fàsic que l'equació de moviment $x(t)$. Per exemple, si la partícula es mou en un camp de forces conservatiu del qual $U(x)$ és l'energia potencial, aleshores la conservació de l'energia

$$\frac{1}{2}mv^2 + U(x) = E \quad (7.17)$$

ens dóna directament la trajectòria

$$v(x) = \frac{2}{m} \sqrt{E - U(x)} \quad (7.18)$$

En el cas d'un oscil·lador harmònic simple, en què $U(x) = kx^2/2$, podem reescriure (7.17) de la forma

$$\frac{x^2}{\left(\frac{2E}{k}\right)} + \frac{v^2}{\left(\frac{2E}{m}\right)} = 1 \quad (7.19)$$

on veiem que la seva trajectòria en el pla fàsic xv és una el·lipse en què el quocient de semieixos val $\sqrt{k/m} = \omega_0$ i en què l'escala o grandària de l'el·lipse ve determinada per l'energia E .



A la figura 7.3 (a), s'ha representat, a la part superior, la paràbola típica de l'energia potencial d'un oscil·lador harmònic simple amb tres nivells d'energia i, a la part inferior, les tres trajectòries el·líptiques corresponents a l'espai fàsic.

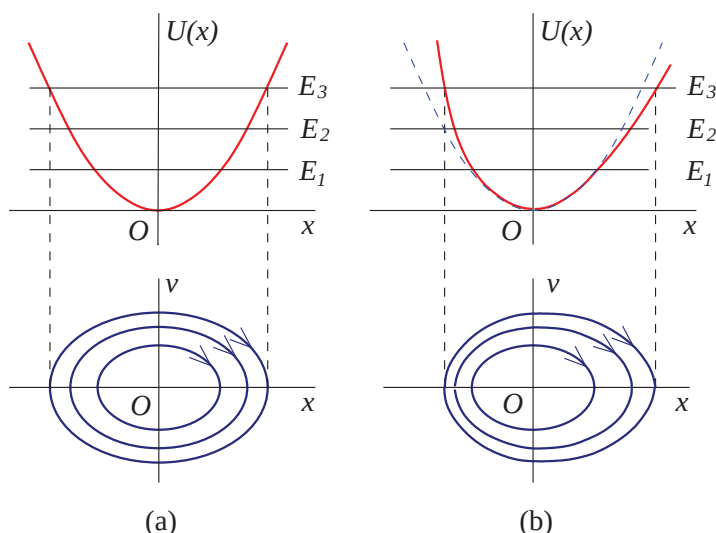


Figura 7.3

A les tres trajectòries representades, hem afegit una fletxa petita per indicar el sentit del moviment de la partícula a l'espai fàsic. En aquest cas, les fletxetes indiquen que, per exemple, si $x > 0$ i $v > 0$, llavors la velocitat de la partícula decreix, com efectivament així és.

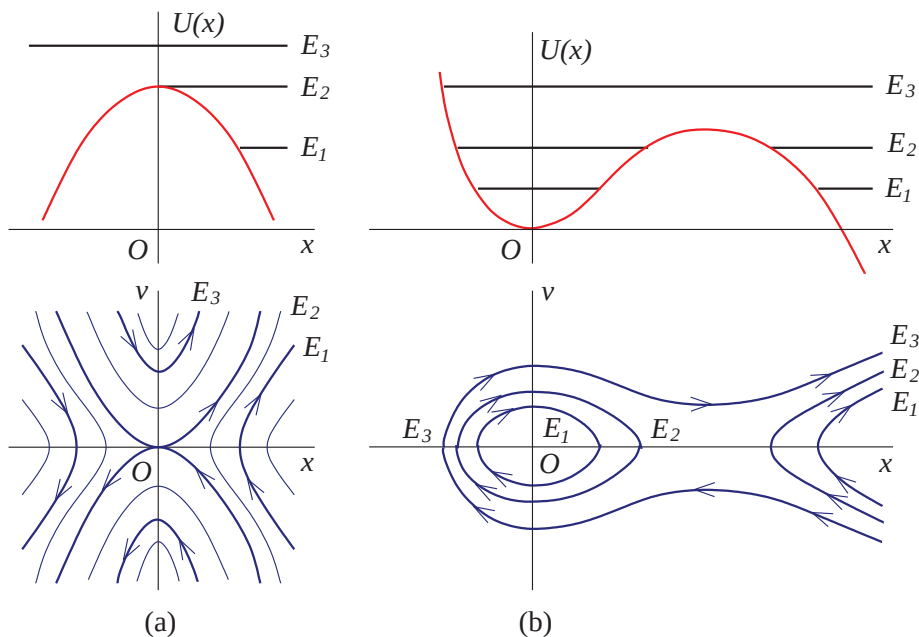
Fixem-nos que, en general, dues trajectòries de l'espai fàsic no poden tallar-se. Si ho fessin en un punt, per exemple, el x_0, v_0 , voldria dir que, per a unes mateixes condicions inicials, les x_0, v_0 , i sota una mateixa força, la partícula podria moure's de dues formes diferents, la qual cosa no té sentit i, a més, entra en contradicció amb el teorema d'unicitat de la solució de l'equació diferencial del moviment.

També convé notar que, si una partícula fa un moviment periòdic —de període T —, aleshores la trajectòria a l'espai fàsic és tancada, ja que $x(t+T) = x(t)$ i $v(t+T) = v(t)$.

A més, com que $v = \frac{dx}{dt}$, d'aquí tenim que, formalment, $T = \oint dt = \oint \frac{dx}{v(x)}$.

Encara que l'energia potencial sigui bastant més complicada que $U(x) = kx^2/2$, l'expressió (7.18) ens permet —ni que sigui qualitativament— representar les trajectòries a l'espai fàsic. Si $U(x)$ val U_0 en $x = x_0$, un mínim relatiu, les trajectòries a l'espai fàsic seran corbes tancades semblants a el·lipses centrades a $(x_0, 0)$. Això és el que es mostra a la figura 7.3 (b) anterior en què, per simplificar, s'ha pres $x_0 = 0$ i $U_0 = 0$. En canvi, al voltant d'un màxim d'energia potencial en què, com ja sabem, el moviment no serà oscil·latori, les trajectòries a l'espai fàsic són corbes que no es tanquen. Així, per exemple, si $U(x) = -kx^2/2$, les trajectòries són hipèrboles. Aquest és el cas que es representa a la figura 7.4 (a): fixeu-vos en la relació entre els diferents nivells d'energia E i les trajectòries.

Figura 7.4



Exemple 7.1. Estudi qualitatiu en el diagrama de fases

Una partícula és sotmesa a la força no lineal

$$F(x) = -kx + cx^2$$

en la qual $c > 0$. Estudieu qualitativament el moviment general de la partícula.

Solució

Aquesta força deriva de l'energia potencial

$$U(x) = - \int F(x) dx = \frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{3}cx^3 \quad (1)$$

Derivant i igualant a zero (1), trobem

$$\frac{dU}{dx} = kx - cx^2 = 0$$

i d'aquí veiem que a $x_0 = 0$ i $x_1 = k/c$ és possible que hi hagi dos extrems. Derivant per segona vegada la $U(x)$, trobem

$$\frac{d^2U}{dx^2} = k - 2cx \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_0 = 0 \quad \rightarrow \quad \left(\frac{d^2U}{dx^2} \right)_{x_0} > 0, \quad \text{és un mínim} \\ x_1 = \frac{k}{c} \quad \rightarrow \quad \left(\frac{d^2U}{dx^2} \right)_{x_1} < 0, \quad \text{és un màxim} \end{cases}$$



A la figura 7.4 (b) es mostra, a dalt, la gràfica de $U(x)$ i, a baix, les trajectòries possibles de la partícula a l'espai fàsic. Les equacions de les trajectòries vénen donades, com ja hem vist abans, per la conservació de l'energia, d'on resulta

$$\frac{x^2 \left(1 - \frac{2c}{3k}x\right)}{\left(\frac{2E}{k}\right)} + \frac{v^2}{\left(\frac{2E}{m}\right)} = 1 \quad (2)$$

Si $c = 0$, aquesta equació correspon a una el·lipse. Si $c > 0$, però l'energia E és tal que $0 < E < E_{\max}$, essent $E_{\max} = U(x_1) = kx_1^2/6$, l'equació (2) representa una corba tancada al voltant de l'origen de (x, v) —moviment oscil·latori: casos de E_1 i E_2 de la figura 7.4 (b)— i una corba oberta lluny d'ell —moviment no periòdic: cas de E_3 , mateixa figura 7.4 (b); per a una energia superior a $E_{\max}$, no importa on es trobi inicialment la partícula: el moviment no serà periòdic.

Exemple 7.2. Espai fàsic d'una oscil·lació amortida

Com són les trajectòries possibles a l'espai fàsic d'una partícula que fa un moviment oscil·latori amortit?

Solució

Si la posició i la velocitat de la partícula vénen donades per

$$x(t) = Ae^{-\beta t} \cos(\omega t + \phi) \quad v(t) = \frac{dx}{dt} = -Ae^{-\beta t} [\beta \cos(\omega t + \phi) + \omega \sin(\omega t + \phi)]$$

Si $T = 2\pi/\omega$, llavors tenim

$$x(t+T) = e^{-\beta T} x(t) \quad v(t+T) = e^{-\beta T} v(t) \quad (1)$$

Siguin (x, v) les coordenades cartesianes d'un punt de l'espai fàsic i (ρ, θ) les coordenades polars corresponents del mateix punt. Com sabem, la relació entre el radi vector ρ i x i v és $\rho^2 = x^2 + v^2$. Doncs bé, si β fos zero, la partícula faria un MHS, la trajectòria seria una el·lipse i el radi vector ρ compliria que $\rho(t+T) = \rho(t)$. Si, com és el nostre cas, $\beta > 0$, aleshores, per (1) tenim que

$$\rho(t+T) = \sqrt{x^2 + v^2} = e^{-\beta T} \rho(t)$$

per la qual cosa veiem que la trajectòria a l'espai fàsic és una mena d'espiral el·líptica orientada cap a l'interior i que tendeix cap a l'origen.

7.4. Mètode de les sèries de pertorbacions

Per resoldre equacions diferencials no lineals, no hi ha cap mètode general. Ara bé, per als casos en què els termes no lineals de l'equació són molt petits en comparació dels lineals, sí que s'han desenvolupat diverses tècniques que troben solucions aproximades de l'equació. D'entre totes elles destaquen, especialment, la de les sèries de pertorbacions de Poisson-Poincaré, de la qual farem una introducció en aquesta mateixa secció, i la de la mitjana, que veurem en la pròxima.



7.4.1. Sèries de pertorbacions

Il·lustrem el mètode amb un exemple concret. Sigui l'equació diferencial no lineal

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon x^3 \quad (7.20)$$

en la qual ε és un paràmetre petit en valor absolut. Generalitzem allò que hem vist a la secció §7.2.2 per al pèndol.

Si ε fos estrictament zero, la solució de (7.52) seria la funció ben coneguda $x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi)$. Doncs bé, el fet que ε sigui petit ens fa pensar que la funció solució de (7.20) pugui desenvolupar-se en la sèrie següent de potències de ε

$$x(t) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \dots \quad (7.21)$$

on hem de determinar les funcions $x_1(t)$, $x_2(t)$, etc. i en la qual, és clar, $x_0(t)$ és la funció esmentada abans per a $\varepsilon = 0$.

Si, a partir de (7.21), desenvolupem x^3 fins a la ε^2 , ens queda

$$x^3 = [x_0 + (\varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \dots)]^3 = x_0^3 + \varepsilon 3x_0^2 x_1 + \varepsilon^2 (3x_0^2 x_2 + 3x_0 x_1^2) + \dots \quad (7.22)$$

Substituint (7.21) i (7.22) a (7.20) tallant en els termes d'ordre superior a ε^2 , (7.20) queda com

$$\begin{aligned} \ddot{x}_0 + \varepsilon \ddot{x}_1 + \varepsilon^2 \ddot{x}_2 + \dots + \omega_0 x_0 + \varepsilon \omega_0 x_1 + \varepsilon^2 \omega_0 x_2 + \dots = \\ = \varepsilon x_0^3 + \varepsilon^2 3x_0^2 x_1 + \dots \end{aligned} \quad (7.23)$$

Com que aquesta equació ha de ser vàlida per a qualsevol ε , aleshores, igualant els coeficients de les diferents potències de ε , resulta el conjunt següent d'equacions diferencials —lineals!—

$$\ddot{x}_0 + \omega_0^2 x_0 = 0 \quad (7.24)$$

$$\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = x_0^3 \quad (7.25)$$

$$\ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 = 3x_0^2 x_1 \quad (7.26)$$

... ..

Si les condicions inicials són, per exemple, a $t = 0$, $x(0) = A$, $\dot{x}(0) = 0$, aleshores, de (7.21) tenim que

$$\left. \begin{aligned} x_0(0) = A, \quad x_1(0) = x_2(0) = \dots = 0 \\ \dot{x}_0(0) = 0, \quad \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = \dots = 0 \end{aligned} \right\} \quad (7.27)$$

Llavors, de (7.24) obtenim

$$x_0(t) = A \cos \omega_0 t \quad (7.28)$$

és a dir, la solució de l'equació (7.20) a l'aproximació lineal. El mètode consisteix a utilitzar aquesta primera funció $x_0(t)$, ara coneguda, a la segona equació (7.25) i resoldre-la per obtenir $x_1(t)$; a continuació, amb x_0 i x_1 , podem passar a la tercera, i així anar fent fins a la precisió que vulguem.



Substituint, doncs, $x_0(t)$ a (7.25) i considerant la relació trigonomètrica (A.28) per al $\cos^3 \omega_0 t$, tenim

$$\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = \frac{3}{4} A^3 \cos \omega_0 t + \frac{1}{4} A^3 \cos 3\omega_0 t \quad (7.29)$$

La solució d'aquesta última equació diferencial és —com es demana a l'exercici B.2 de l'apèndix B—

$$x_1(t) = \frac{A^3}{32\omega_0^2} (12\omega_0 t \sin \omega_0 t - \cos 3\omega_0 t) \quad (7.30)$$

en què apareix el $\sin \omega_0 t$... amb l'amplitud proporcional al temps!

Un terme proporcional al temps com $12\omega_0 t \sin \omega_0 t$, que s'anomena *terme secular*, destrueix la periodicitat de la funció $x_1(t)$ i, per tant, de la $x(t)$. D'altra banda, per la física involucrada en el problema, podem estar segurs que la solució de (7.20) ha de ser una funció periòdica. Així doncs, alguna cosa no va bé.

7.4.2. Eliminació dels termes seculars

L'error està en el plantejament del mètode d'aproximació que estem utilitzant. Tal com l'hem plantejat, la funció $x_0(t)$ té una freqüència ω_0 i les funcions següents $x_1(t)$, $x_2(t)$, etc. en tindran freqüències múltiples. Però la realitat és que precisament un dels efectes més significatius del terme no lineal εx^3 és que el paper que fa la freqüència pròpia ω_0 a tot el sistema ara el fa la freqüència ω lleugerament diferent de ω_0 . Aquesta petita diferència de freqüències és la responsable de l'aparició del terme secular a (7.30) i els que anirien apareixent més a $x_2(t)$, etc. si continuéssim amb l'equació (7.26) i les següents. Però, per què apareixen els termes seculars?

Descomposem l'equació (7.29) en dues de més simples, una per a $x_a(t)$ i una altra per a $x_b(t)$:

$$\ddot{x}_a + \omega_0^2 x_a = \frac{1}{4} A^3 \cos 3\omega_0 t \quad (7.31)$$

$$\ddot{x}_b + \omega_0^2 x_b = \frac{3}{4} A^3 \cos \omega_0 t \quad (7.32)$$

Com que aquestes equacions són lineals, tenim que $x_1(t) = x_a(t) + x_b(t)$. Aquestes dues equacions corresponen a dos oscil·ladors sense amortiment forçats per forces impulsors harmòniques. En el cas de (7.31), la freqüència és $3\omega_0$ —és a dir, tres vegades la pròpia. La resposta de l'oscil·lador, a l'estat estacionari, serà un MHS de la mateixa freqüència $3\omega_0$:

$$x_a(t) = \frac{1}{32} \frac{A^3}{\omega_0^2} \cos 3\omega_0 t$$

L'equació (7.32) correspon a la d'un oscil·lador forçat en què la freqüència de la força externa coincideix amb la pròpia ω_0 . És a dir, estem davant d'un cas de ressonància en què l'amortiment és molt petit i, pel que hem dit al capítol 3, la solució particular

$$x_b(t) = \frac{3}{8} \frac{A^3}{\omega_0} t \sin \omega_0 t$$



correspon a l'estat estacionari, després d'un temps molt llarg en què l'amplitud del MHS seria molt gran. Com veiem, doncs, la solució matemàtica de l'equació (7.32) i, per tant, de la (7.29), amb el seu terme secular, encaixa amb la interpretació física que podem fer del cas.

Comencem desenvolupant la funció $x(t)$ en sèrie, igual com hem fet abans a (7.21)

$$x(t) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \dots \quad (7.33)$$

però ara també desenvoluparem la freqüència en sèrie de potències de ε , de la forma

$$\omega_0^2 = \omega^2 + \mu_1 \varepsilon + \mu_2 \varepsilon^2 + \dots \quad (7.34)$$

expressió en la qual μ_1 , μ_2 , etc. són paràmetres que dependran de ω_0 i de l'amplitud A però independents del temps que anirem determinant sobre la marxa imposant la condició que els termes seculars que hi puguin aparèixer s'anul·lin.

Tornant a substituir (7.33) i (7.22) a (7.20), tenint en compte que ara $\omega_0^2 x$ és el producte de (7.33) per (7.34) i, com hem fet abans, tallant en els termes d'ordre superior a ε^2 , l'equació (7.20) queda d'una forma semblant a la (7.23), de la qual, tornant a igualar els coeficients amb la mateixa potència de ε , obtenim el sistema d'equacions

$$\ddot{x}_0 + \omega^2 x_0 = 0 \quad (7.35)$$

$$\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = x_0^3 - \mu_1 x_0 \quad (7.36)$$

$$\ddot{x}_2 + \omega^2 x_2 = 3x_0^2 x_1 - \mu_1 x_1 - \mu_2 x_0 \quad (7.37)$$

... ..

Amb les mateixes condicions inicials (7.27), la solució de (7.35) és

$$x_0(t) = A \cos \omega t \quad (7.38)$$

funció que substituïm a (7.36) per tal d'obtenir-ne l'equació equivalent a la (7.29) però que ara resulta

$$\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = \left(\frac{3}{4} A^2 - \mu_1 \right) A \cos \omega t + \frac{1}{4} A^3 \cos 3\omega t \quad (7.39)$$

Com hem comentat abans, el responsable de l'aparició del terme secular a (7.30) és el $\cos \omega t$. L'anul·lem, doncs, prenent μ_1 com

$$\mu_1 = \frac{3}{4} A^2 \quad (7.40)$$

de manera que ara ens queda l'equació

$$\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = \frac{1}{4} A^3 \cos 3\omega t \quad (7.41)$$

la solució de la qual, amb les condicions inicials (7.27) imposades, és

$$x_1(t) = \frac{A^3}{32\omega^2} (\cos \omega t - \cos 3\omega t) \quad (7.42)$$



Tenim, doncs, que amb l'exactitud de la primera potència de ε , és a dir, en la primera aproximació no lineal, la solució de l'equació (7.20) és, per (7.38) i (7.42),

$$x(t) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) = A \left(1 + \varepsilon \frac{A^2}{32\omega^2} \right) \cos \omega t - \varepsilon \frac{A^3}{32\omega^2} \cos 3\omega t \quad (7.43)$$

amb la freqüència ω que, també en primera aproximació, val, per (7.34) i (7.40),

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \varepsilon \frac{3A^2}{4\omega_0^2}} \approx \omega_0 \left(1 - \varepsilon \frac{3}{8} \frac{A^2}{\omega_0^2} \right) \quad (7.44)$$

Si, amb una aproximació de primer ordre en ε , ja tenim suficient precisió amb (7.43) i (7.44), podem donar per acabat el càlcul. Si ε no és prou petit o en volem més exactitud, necessitem l'aproximació de segon ordre... o de tercer, etc.

7.4.3. Aproximació de segon ordre

Substituint $x_0(t)$, $x_1(t)$ i μ_1 a l'equació (7.37), considerant les igualtats trigonomètriques (A.27) i (A.37) que desenvolupen el $\cos^3 \omega t$ i el $\cos^2 \omega t \cos 3\omega t$, respectivament, i fent les operacions corresponents, s'arriba a l'equació per a $x_2(t)$

$$\ddot{x}_2 + \omega^2 x_2 = \left(\frac{3A^4}{128\omega^2} - \mu_2 \right) A \cos \omega t - \frac{3A^5}{128\omega^2} \cos 5\omega t \quad (7.45)$$

Observem que, com podíem esperar, hi ha un terme amb $\cos 5\omega t$ i que, durant la manipulació algebraica, s'han cancel·lat els termes amb $\cos 3\omega t$. I, com també esperàvem, hi torna a aparèixer un terme amb $\cos \omega t$, que dóna lloc a una ressonància i, en definitiva, a un terme secular.

Com hem fet anteriorment, anul·larem aquest terme imposant que

$$\mu_2 = -\frac{3A^4}{128\omega^2} \quad (7.46)$$

Per (7.45) i (7.37), ara ens queda l'equació

$$\ddot{x}_2 + \omega^2 x_2 = -\frac{3}{128} \frac{A^5}{\omega^2} \cos 5\omega t \quad (7.47)$$

la solució de la qual, ja amb les condicions inicials (7.27) imposades, és

$$x_2(t) = -\frac{A^5}{1024\omega^4} (\cos \omega t - \cos 5\omega t) \quad (7.48)$$

En definitiva, fins al segon ordre en ε la solució $x(t)$ de l'equació (7.20) és $x = x_0 + x_1 + x_2$, és a dir, per (7.38), (7.42) i (7.48),

$$x(t) = A \left(1 + \varepsilon \frac{A^2}{32\omega^2} - \varepsilon^2 \frac{A^4}{1024\omega^4} \right) \cos \omega t - \varepsilon \frac{A^3}{32\omega^2} \cos 3\omega t + \varepsilon^2 \frac{A^5}{1024\omega^4} \cos 5\omega t \quad (7.49)$$



essent ω la donada per (7.34), (7.40) i (7.46),

$$\omega_0^2 = \omega^2 + \varepsilon \frac{3}{4} \frac{A^2}{\omega_0^2} - \varepsilon^2 \frac{3}{128} \frac{A^4}{\omega^2} \quad (7.50)$$

Negligint tots els termes d'ordre superior a ε^2 de (7.50), podem aïllar ω aplicant les aproximacions

$$\omega = \omega_0 \left[1 - \varepsilon \frac{3}{4\omega_0^2} + \varepsilon^2 \frac{3A^4}{128\omega_0^2} \frac{1}{\omega_0^2 \left(1 - \varepsilon \frac{3}{4\omega_0^2} + \dots \right)} \right]^{1/2} \approx \omega_0 \left[1 - \varepsilon \frac{3}{4\omega_0^2} + \varepsilon^2 \frac{3A^4}{128\omega_0^2} \right]^{1/2}$$

i ara la de l'arrel quadrada en segon ordre. Per (A.68), tenim finalment

$$\omega = \omega_0 \left(1 - \varepsilon \frac{3}{8} \frac{A^2}{\omega_0^2} + \varepsilon^2 \frac{3}{256} \frac{A^4}{\omega_0^4} \right) \quad (7.51)$$

I així podríem continuar desenvolupant fins al tercer ordre de ε , el quart o el que convingués.

7.5. Mètode de Krylov i Bogoliubov

El mètode¹ que veurem ara és bastant general i, en els casos en què funciona, especialment ràpid quan només ens interessa una primera aproximació no lineal.

Considerem una equació diferencial no lineal de la forma

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon f(x, \dot{x}) \quad (7.52)$$

en què ε és un paràmetre petit en valor absolut i $f(x, \dot{x})$ una funció d'aquestes dues magnituds.

Si ε fos estrictament zero, la solució de (7.52) seria la funció ben coneguda $x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi)$. Aquest mètode consisteix a buscar solucions a (7.52) de la forma

$$x(t) = A(t) \cos[\omega_0 t + \phi(t)] \quad (7.53)$$

en les quals, com indica la notació, $A(t)$ i $\phi(t)$ són funcions del temps que hem de determinar.

Si derivem (7.53), tenim

$$\dot{x} = \dot{A} \cos(\omega_0 t + \phi) - (\omega_0 + \dot{\phi}) A \sin(\omega_0 t + \phi)$$

De totes les funcions possibles de la mena (7.53), quedem-nos només amb les que compleixen la condició

¹Alguns autors anomenen mètode de Krylov-Bogoliubov el sistema d'eliminació dels termes seculars que hem vist a la secció 7.4.2.



$$\dot{A} \cos(\omega_0 t + \phi) - \dot{\phi} A \sin(\omega_0 t + \phi) = 0 \quad (7.54)$$

de manera que $\dot{x}$ queda com

$$\dot{x} = -\omega_0 A(t) \sin(\omega_0 t + \phi(t)) \quad (7.55)$$

Fixem-nos que la condició (7.54) limita la varietat de funcions a provar però que, en principi, no representa cap aproximació. De moment, tot segueix essent rigorosament exacte.

Derivant $\dot{x}$, ens queda

$$\ddot{x} = -\omega_0 \dot{A} \sin(\omega_0 t + \phi) - \omega_0^2 A \cos(\omega_0 t + \phi) - \omega_0 A \dot{\phi} \cos(\omega_0 t + \phi) \quad (7.56)$$

i portant (7.55) i (7.56) a (7.52), resulta

$$-\omega_0 \dot{A} \sin(\omega_0 t + \phi) - \omega_0 A \dot{\phi} \cos(\omega_0 t + \phi) = \varepsilon f(x, \dot{x}) \quad (7.57)$$

Si ara en diem

$$\theta(t) = \omega_0 t + \phi(t) \quad (7.58)$$

les equacions (7.54) i (7.57) poden tornar-se a escriure com el sistema

$$\dot{A} \sin \theta + \dot{\phi} A \cos \theta = -\frac{\varepsilon}{\omega_0} f(x, \dot{x})$$

$$\dot{A} \cos \theta - \dot{\phi} A \sin \theta = 0$$

i d'aquí deduïm fàcilment

$$\dot{A} = -\frac{\varepsilon}{\omega_0} f(A \cos \theta, -A \sin \theta) \sin \theta \quad (7.59)$$

$$\dot{\phi} = -\frac{\varepsilon}{\omega_0 A} f(A \cos \theta, -A \sin \theta) \cos \theta \quad (7.60)$$

amb $\dot{\phi} = \dot{\theta} - \omega_0$, per (7.58).

Així, doncs, hem passat de l'equació diferencial (7.52) per a $x(t)$ al sistema anterior de dues equacions per a $A(t)$ i $\phi(t)$. Quin avantatge ha comportat aquest canvi? Doncs que si ε és petit i, per tant, $\dot{A}$ i $\dot{\phi}$ varien molt poc al llarg d'un període —és a dir, l'interval de temps durant el qual θ s'incrementa en 2π —, aleshores, podem aproximar els segons membres de (7.59) i (7.60) per les respectives mitjanes, prenent A , durant un període, com a constant. És a dir,

$$\dot{A} \approx -\frac{\varepsilon}{2\pi\omega_0} \int_0^{2\pi} f(A \cos \theta, -A \sin \theta) \sin \theta d\theta \quad (7.61)$$

$$\dot{\phi} \approx -\frac{\varepsilon}{2\pi\omega_0 A} \int_0^{2\pi} f(A \cos \theta, -A \sin \theta) \cos \theta d\theta \quad (7.62)$$

Fixem-nos que, per a aquelles funcions $f(x, \dot{x})$ per a les quals $\dot{\phi} \neq 0$, la no linealitat fa que la freqüència de l'oscil·lació no sigui ω_0 sinó, en primera aproximació, $\omega = \omega_0 + \dot{\phi}$.



És el cas, per exemple, de $f(x, \dot{x}) = x^3$. Vegem l'aplicació d'aquest mètode a aquest últim cas.

Exemple 7.3. Aplicació del mètode de Krylov i Bogoliubov

Tornem a considerar l'equació diferencial no lineal (7.20)

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon x^3$$

en la qual ε és un paràmetre molt petit. Apliqueu el mètode anterior per resoldre-la en primera aproximació de ε si les condicions inicials són $x(0) = A$ i $\dot{x}(0) = 0$.

Solució

En aquest cas, $f(x, \dot{x}) = x^3 = A \cos^3 \theta$, i les expressions (7.63) i (7.62) queden com

$$\dot{A} \approx -\frac{\varepsilon A^3}{2\pi\omega_0} \int_0^{2\pi} \cos^3 \sin \theta d\theta = 0$$

$$\dot{\phi} \approx -\frac{\varepsilon A^2}{2\pi\omega_0} \int_0^{2\pi} \cos^4 \theta d\theta = -\frac{\varepsilon A^2}{2\pi\omega_0} \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos 2\theta + \frac{1}{8} \cos 4\theta \right) d\theta = -\frac{3}{8} \frac{\varepsilon A^2}{\omega_0}$$

Si $\dot{A} = 0$, aleshores A és constant, mentre que $\phi = \dot{\phi}t + \phi_0$, essent $\phi_0 = 0$ el valor inicial. I, per (7.53), ens quedarà

$$x(t) = A \cos \omega_0 \left(1 - \varepsilon \frac{3}{8} \frac{A^2}{\omega_0^2} \right) t \quad (7.63)$$

resultat que està “bastant” d'acord amb els que hem trobat abans —amb més feina— a (7.44) i (7.51)

7.6. Oscil·ladors no lineals forçats

Com s'ha comentat des del primer moment d'aquest capítol, la no-linealitat dels sistemes implica una sèrie de canvis notables respecte dels casos lineals. El més important és la no-validesa del principi de superposició, la qual cosa pot portar a fenòmens sorprenents i nous que no es donen en els sistemes lineals. Aquest és el cas de la ressonància.

Per exemple, pensem en el típic oscil·lador no lineal d'equació diferencial (7.20) —que hem estudiat a la secció §7.4— al qual ara afegim la força impulsora exterior $F(t) = F_0 \cos \Omega t$.

$$\ddot{x} + (\omega_0^2 - \varepsilon x^2)x = F_0 \cos \Omega t \quad (7.64)$$

Recordem que l'expressió (7.51) proporciona la freqüència “natural” ω d'aquest sistema no lineal i que, com veiem, ara aquesta no és constant sinó que augmenta o disminueix a mesura que l'amplitud A de l'oscil·lació varia. En conseqüència, i al contrari de la ressonància en sistemes lineals, sigui quina sigui la freqüència Ω de la força impulsora l'amplitud de l'oscil·lació forçada no es pot fer mai gaire gran.

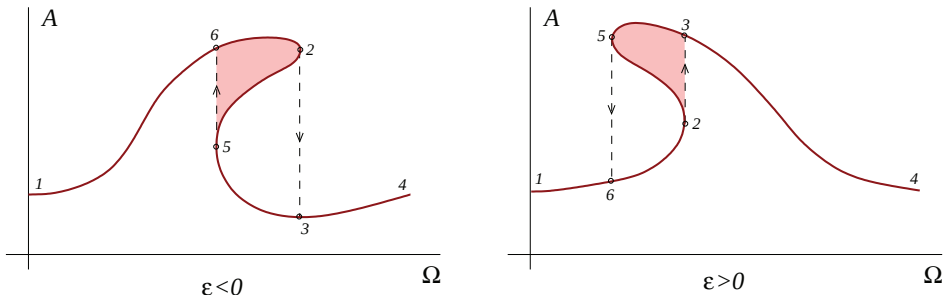


Figura 7.5

A la figura 7.5 s'ha representat qualitativament l'amplitud de l'oscil·lació forçada del sistema donat per (7.64) en funció de la freqüència Ω impulsora. Com ja s'indica, la figura 7.5 esquerra és per a un sistema "dur" ($\varepsilon < 0$) i la figura 7.5 dreta, per a un de "mole" ($\varepsilon > 0$). D'entrada, ja veiem que mostren diferències molt significatives respecte de la figura 3.4 de la secció §3.3.1.

Suposem tots els altres paràmetres constants, és a dir, ω_0^2 , ε i F_0 , i també que, inicialment, la freqüència de la força impulsora, Ω , és molt petita —punt 1 de les dues figures anteriors. Si anem augmentant la freqüència Ω lentament l'amplitud A de l'oscil·lació forçada va creixent, anant del punt 1 al 2, però un cop allà l'amplitud passa bruscament del 2 al 3 —efecte salt— i continua del 3 al 4 de les gràfiques anteriors. Un cop estem en una freqüència Ω alta, per exemple la corresponent al punt 4, si anem disminuint lentament Ω , l'amplitud passarà pel punt 3 fins arribar al 5. Si seguim disminuint Ω , aquí l'amplitud A tornarà a fer un altre salt, passant de la corresponent al punt 5 al 6, i continuarà cap a l'1. Així doncs, al contrari que per als sistemes lineals, en aquests hi pot haver, per a una freqüència impulsora Ω determinada, dues amplituds d'oscil·lació ben diferents.

Per acabar, cal afegir que, també a diferència de les oscil·lacions forçades amb una força restauradora lineal, en les quals aquesta és no lineal, la freqüència d'oscil·lació no és necessàriament la freqüència Ω de la força impulsora, sinó que pot ser més petita que aquesta, la qual cosa dona lloc a les *oscil·lacions subharmòniques*.

7.7. Problemes resolts i problemes proposats

7.7.1. Problemes resolts

Problema 7.1. Correcció de 2n ordre a la velocitat màxima d'un pèndol

Considerem un pèndol simple de longitud L l'amplitud del qual és l'angle Θ , ara no necessàriament petit. Aplicant-hi la conservació de l'energia mecànica, trobeu la velocitat màxima V de la lentilla. D'aquest resultat rigorosament exacte, feu-ne una primera aproximació i comproveu que es correspon amb el que surt de considerar el moviment del pèndol com un MHS de petita amplitud. Del resultat exacte anterior feu-ne una segona aproximació i comproveu que aquesta representa una correcció relativa a la velocitat donada pel MHS de $-\Theta^2/24$.

Solució

Sigui m la massa de la lentilla. Prenent l'origen de l'energia potencial en el punt més baix del pèndol, la conservació de l'energia aplicada entre aquest i el de l'amplitud màxima dona



$$\frac{1}{2}mV^2 = mgL(1 - \cos \Theta)$$

d'on surt

$$V = \sqrt{2gL(1 - \cos \Theta)} \quad (1)$$

Si desenvolupem en sèrie el cosinus com a (A.57) i el substituïm a (1) tenim

$$V = \sqrt{2gL} \left(\frac{\Theta^2}{2} - \frac{\Theta^4}{24} + \dots \right)^{1/2} \quad (2)$$

En una primera aproximació, és a dir, agafant només el primer terme de la sèrie, ens quedarà

$$V \approx V_1 = \Theta \sqrt{gL}$$

D'acord amb l'expressió (1.19), la màxima velocitat lineal de la lentilla del pèndol val

$$V_{(mhs)} = L \omega \Theta = L \sqrt{\frac{g}{L}} \Theta = \Theta \sqrt{gL}$$

amb la qual cosa queda comprovat.

Si fem una segona aproximació a (2) agafant el primer i el segon terme del desenvolupament ens quedarà

$$V \approx V_2 = \sqrt{2gL} \left(\frac{\Theta^2}{2} - \frac{\Theta^4}{24} \right)^{1/2} = \Theta \sqrt{gL} \sqrt{1 - \frac{\Theta^2}{12}} \approx \Theta \sqrt{gL} \left(1 - \frac{\Theta^2}{24} \right)$$

I la correcció relativa de la segona aproximació a la primera és

$$\frac{V_2 - V_1}{V_1} = \frac{\Theta^2}{24} \quad (3)$$

Així, per exemple, per a un angle de $\Theta = 0,1 \text{ rad} = 5,74^\circ$, aquesta correcció es del 0,42%. Fixeu-vos que la correcció (3) és diferent de la correcció de 2n ordre del període donada per (7.8)

Problema 7.2. Oscil·lació amortida per una fricció seca

Un sistema molla-massa disposat sobre una superfície horitzontal rugosa consta d'un bloc de massa m unit a una molla de constant de força k . El bloc se separa una longitud A_0 respecte de la seva posició d'equilibri i es deixa anar, per la qual cosa comença a oscil·lar. La superfície fa una petita força de *fricció seca* sobre el bloc, i els coeficients de fricció dinàmica i estàtica són μ i μ_s , respectivament. Negligint la resistència de l'aire esbrineu:

- la diferència d'amplituds entre dues oscil·lacions consecutives i
- quantes oscil·lacions farà el bloc abans d'aturar-se i a quina distància del punt d'equilibri quedarà en repòs?



Apliqueu els resultats al cas: $m = 0,10 \text{ kg}$, $k = 10 \text{ N/m}$, $A_0 = 0,40 \text{ m}$, $\mu = 0,050$ i $\mu_s = 0,055$.

Solució

- a) D'entrada, notem que, efectivament, es tracta d'una oscil·lació no lineal. Es deixa per al lector dibuixar la gràfica de la força total $F(x)$ que actua sobre la partícula en funció de l'elongació x , com hem fet a la secció §7.1. Primer, fixem-nos que aquesta força, per al mateix punt x , no és la mateixa si la partícula va o si torna.

A causa de la fricció amb la taula, la partícula anirà perdent energia contínuament i, en conseqüència, la seva amplitud anirà disminuint. Com ja sabem, A_0 és l'amplitud inicial del moviment; siguin ara A_1 la màxima elongació del bloc —“amplitud”— després de la primera mitja oscil·lació; A_2 el mateix després de la segona mitja oscil·lació, és a dir, després de la primera oscil·lació completa; $A_3, A_4, \dots$, és a dir, A_n , és l’“amplitud” del moviment després que el bloc hagi efectuat n mitges oscil·lacions —v. figura 7.6.

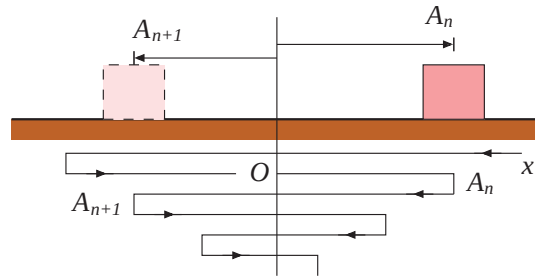


Figura 7.6

La “pèrdua” d'amplitud d'una oscil·lació a la següent, ΔA , serà, doncs,

$$\Delta A = A_n - A_{n+2} \quad (1)$$

La força de fricció seca F_f que actua sobre una partícula en moviment sobre un pla horitzontal val, com és ben sabut: $F_f = \mu N = \mu mg$, on N és la normal que, en aquest cas, coincideix amb el pes del bloc. El treball W_f que fa la força de fricció F_f al llarg del desplaçament del bloc entre A_n i A_{n+1} serà, doncs, en valor absolut

$$|W_f| = \mu mg(A_n + A_{n+1})$$

Per la no-conservació de l'energia, tenim que aquest treball ha de ser igual a la diferència d'energia potencial elàstica entre l'instant de l'elongació màxima de l'oscil·lació n i la $n + 1$, és a dir,

$$\frac{1}{2}kA_n^2 - \frac{1}{2}kA_{n+1}^2 = \mu mg(A_n + A_{n+1}) \quad (2)$$

I com que

$$\frac{1}{2}k(A_n^2 - A_{n+1}^2) = \frac{1}{2}k(A_n - A_{n+1})(A_n + A_{n+1})$$



podem simplificar $(A_n + A_{n+1})$ a (2) i n'obtenim

$$A_n - A_{n+1} = \frac{2\mu mg}{k}$$

Fixem-nos que aquesta diferència i, per tant, ΔA són independents de n , és a dir, del temps. Així doncs, per (1) trobem el que ens demanen

$$\Delta A = \frac{4\mu mg}{k} \quad (3)$$

Substituint valors numèrics, tenim: $\Delta A = 1,96 \text{ cm}$.

b) Quan s'aturarà el bloc en aquest moviment oscil·latori d'amplitud decreixent?

A l'apartat anterior només hem considerat la força de fricció dinàmica, la que actua mentre el bloc està en moviment. Aquesta força frenarà però mai no aturarà definitivament el bloc. En efecte, si aquest s'està movent cap a l'origen, la seva celeritat està creixent i, si s'està movent cap enfora, la força de fricció dinàmica només fa que el bloc s'aturi una mica més aviat del que ho faria si no actués, però com que la força elàstica de la molla ara és màxima, torna a posar en marxa el bloc, ara cap a l'origen. Així doncs, la fricció dinàmica va dissipant l'energia del bloc i reduint-ne l'amplitud però no l'aturarà.

El que aturarà el moviment del bloc serà la força de fricció estàtica que, com la fricció dinàmica, és de mòdul constant, $|F_s| = \mu_s mg$. Aquesta força actua sobre el bloc només durant els instants de temps en els quals el bloc s'atura abans del canvi de sentit del moviment. Això passa cada semioscil·lació, a l'instant en què el valor absolut de l'elongació x és màxima, x_M i, en conseqüència, també és màxima, en valor absolut, la força elàstica, que val $kx_M = kA_n$. Per tant, cada cop que el bloc que s'aturi actuarà la fricció estàtica: si el bloc està prou allunyat de l'origen, la força restauradora és més gran que la de fricció estàtica i començarà una nova semioscil·lació, però, si en una de les aturades la força recuperadora no és prou gran, dominarà la fricció estàtica i allà es quedarà el bloc en repòs sense oscil·lar i amb la molla estirada A_N . Per consegüent, s'aturarà definitivament quan l'amplitud A_N compleixi

$$kA_N \leq \mu_s mg \quad (4)$$

d'on trobem la distància $d = A_N$ a la qual el bloc quedarà en repòs. I, respecte del nombre N de semioscil·lacions que farà abans d'aturar-se definitivament, per (4) i (3), tindrem

$$kA_N = k \left(A_0 - N \frac{\Delta A}{2} \right) = kA_0 - N 2\mu mg \leq \mu_s mg$$

d'on resulta

$$N \geq \frac{kA_0 - \mu_s mg}{2\mu mg}$$

Substituint de nou els valors numèrics, obtenim $N = 40,2 \approx 41$ semioscil·lacions i $d \approx 5,6 \text{ mm}$.



Problema 7.3. Oscil·lacions d'una partícula sobre una paràbola: primera aproximació no lineal

Estudieu el moviment d'una partícula que, per raó del seu propi pes, es desplaça sense fricció sobre la paràbola

$$y = ax^2$$

—v. figura 7.7— de manera que l'eix x és horitzontal i l'eix y és vertical. Si suposem que a l'instant inicial la partícula es troba en repòs en el punt (x_0, ax_0^2) , aplicant-hi la conservació de l'energia trobeu el període de la seva oscil·lació al voltant de l'origen:

- En una aproximació lineal d'oscil·lacions petites. Què vol dir aquí “oscil·lacions petites”?
- En una primera aproximació no lineal.

Solució

Atenció amb aquest problema que, en una primera reflexió, pot desorientar: si bé l'energia potencial és del tipus gravitatori $U = mgy = mga^2x^2$, és a dir, proporcional a x^2 , com la deguda a la força $F = -kx$ del MHS, aquest moviment, en no ser rectilini, no és rigorosament un MHS. Vegem-ho amb detall.

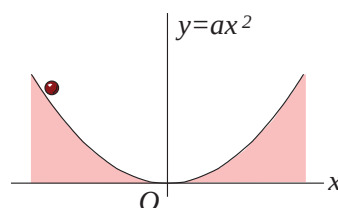


Figura 7.7

Com en tants altres problemes, en aquest aplicar la conservació de l'energia serà molt més pràctic que aplicar la segona llei de Newton, en la qual intervien el pes de la partícula i la reacció normal de la corba sobre ella. Aquesta última força és de lligament, és a dir, la força que juntament amb el pes manté la partícula sobre la corba. Amb el mètode energètic, podem prescindir-ne totalment ja que no fa treball. Com que no hi ha fricció en el desplaçament de la partícula, es conserva l'energia mecànica E , suma de la potencial gravitatòria U més la cinètica K . A $t = 0$, no hi ha energia cinètica, i la potencial, prenent l'origen d'energia potencial en $y = 0$, val

$$E = mgy_0 = mga^2x_0^2 \quad (2)$$

En un instant qualsevol t , tindrem

$$U = mgy = mga^2x^2 \quad (3)$$

i

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 \right] = \frac{1}{2}m \left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right] \left(\frac{dx}{dt} \right)^2$$

que, per (1), podem posar com

$$K = \frac{1}{2}m(1 + 4a^2x^2) \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \quad (4)$$



De (3) i (4), es dedueix

$$\frac{1}{2}m(1+4a^2x^2)\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + mgax^2 = E \quad (5)$$

equació que, com assenyalàvem abans, expressa la conservació de l'energia. Si la derivem respecte del temps i simplifiquem, tenim

$$(1+4a^2x^2)\frac{d^2x}{dt^2} + 4a^2x\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + 2gax = 0 \quad (6)$$

equació diferencial del moviment per a x i que, clarament, no és lineal. Consegüentment, la partícula no fa un MHS.

a) Ara bé, si tenim

$$4a^2x^2 \ll 1 \quad (7)$$

$$2a\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \ll g \quad (8)$$

és a dir, si l'oscil·lació és de poca amplitud, l'equació (6) queda simplificada com l'equació diferencial d'un MHS

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2gax = 0$$

i un període de $T = 2\pi\sqrt{\frac{1}{2ga}}$.

D'altra banda, si comparem aquest període amb el d'un pèndol simple, veiem que $1/2a$ fa el paper de la longitud L del pèndol. Diguem, doncs, que $L = 1/2a$. També tenim que, per conservació de l'energia, la celeritat v_{max} amb què passa la partícula pel punt d'equilibri $O = (0,0)$ és la màxima i, si parteix de x_0 , val $v_{max} = \sqrt{2gy_0} = \sqrt{2gax_0^2}$. Per tant, (8), és a dir, $2av^2 \ll g$, amb (7), queda com

$$4a^2v^2 \leq 4a^2v_{max}^2 = 8ga^3x_0^2 \ll 2ga$$

és a dir, $4a^2x_0^2 = \left(\frac{x_0}{L}\right)^2 \ll 1$. Així doncs, “oscil·lacions petites”, en aquest cas, vol dir que l'amplitud x_0 sigui molt més petita que la longitud $L = 1/2a$ del pèndol simple equivalent.

b) Per al cas general en què no podem fer l'aproximació a un MHS, podem calcular el període considerant que aquest és, per simetria, quatre vegades el temps d'anar de $x = x_0$ a l'origen $x = 0$. De (5) i (2), acaba sortint

$$v = \frac{dx}{dt} = \sqrt{2ga}\sqrt{\frac{x_0^2 - x^2}{1 + 4a^2x^2}} \quad (9)$$



Així doncs, el període ve donat per la integral

$$T = 4 \int_0^{x_0} \frac{dx}{v} = \frac{4}{\sqrt{2ga}} \int_0^{x_0} \sqrt{\frac{1+4a^2x^2}{x_0^2-x^2}} dx$$

o, el que és el mateix,

$$T = \frac{4}{\sqrt{2ga}} \int_0^1 \sqrt{\frac{1+c^2z^2}{1-z^2}} dz \quad \text{amb} \quad z = \frac{x}{x_0}, \text{ i } c^2 = 4a^2x_0^2 \quad (10)$$

Aquesta integral és una *integral el·líptica completa de segona espècie* com la (A.98) de l'apèndix §A.5; (10) no té, per tant, primitiva en termes de funcions elementals si bé es pot donar com la sèrie (A.101). Però nosaltres mateixos, si $c^2z^2 \ll 1$, podem fer l'aproximació $\sqrt{1+c^2z^2} \approx 1 + c^2z^2/2$. Llavors, considerant (A.71) i (A.72), la integral (8) dona

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{2ga}}{4} T &\approx \int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{1-z^2}} + \frac{c^2}{2} \frac{z^2}{\sqrt{1-z^2}} \right) dz = \\ &= \left[\arcsin z - \frac{c^2 z \sqrt{1-z^2}}{4} + \frac{c^2}{2} \arcsin z \right]_0^1 = \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{1}{2} c^2 \right) \end{aligned}$$

i, per (10),

$$T \approx 2\pi \sqrt{\frac{1}{2ga}} (1 + a^2 x_0^2)$$

aproximació vàlida fins al segon ordre en ax_0 .

Problema 7.4. Mètode de les pertorbacions: en segon ordre

Sigui l'equació diferencial no lineal

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon x^2 \quad (7.65)$$

en què el valor absolut de ε és un paràmetre petit. Sabent que les condicions inicials són $x(0) = A$, $\dot{x}(0) = 0$, apliqueu el mètode de les pertorbacions de la secció §7.4 per trobar la funció $x(t)$ aproximada fins al segon ordre en ε .

Solució

Desenvoluparem la funció $x(t)$ i la freqüència ω_0^2 en sèrie de potències de ε com a (7.33) i (7.34). Elevem al quadrat la sèrie per a $x(t)$ i fem el producte $\omega_0^2 x$. Negligint els termes d'ordre superior a ε^2 , si substituïm tot a l'equació (7.65) i iguaem els factors amb la mateixa potència de ε obtenim les equacions

$$\ddot{x}_0 + \omega^2 x_0 = 0 \quad (7.66)$$

$$\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = x_0^2 - \mu_1 x_0 \quad (7.67)$$

$$\ddot{x}_2 + \omega^2 x_2 = 2x_0 x_1 - \mu_1 x_1 - \mu_2 x_0 \quad (7.68)$$

... ..



Amb les condicions inicials de l'enunciat, la solució $x_0(t)$ de (7.66) és $x_0(t) = A \cos \omega t$, que, substituïda a la (7.67), ens dona per a $x_1(t)$

$$\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = \frac{A^2}{2} - \mu_1 A \cos \omega t + \frac{A^2}{2} \cos 2\omega t \quad (7.69)$$

Si, com hem dit a la secció §7.4, volem que no apareguin termes seculars a $x(t)$, hem de prendre $\mu_1 = 0$ perquè desaparegui el terme amb $\cos \omega t$. La nova equació diferencial, amb les condicions inicials $x_1(0) = 0$ i $\dot{x}_1(0) = 0$ incloses té, com a solució,

$$x_1(t) = \frac{A^2}{6\omega^2} (3 - 2 \cos \omega t - \cos 2\omega t) \quad (7.70)$$

Així, doncs, en una primera aproximació $\omega = \omega_0$ i

$$x(t) = \varepsilon \frac{A^2}{2\omega_0^2} + A \left(1 - \varepsilon \frac{A}{3\omega_0^2} \right) \cos \omega_0 t - \varepsilon \frac{A^2}{6\omega_0^2} \cos 2\omega_0 t \quad (7.71)$$

Per a una segona aproximació, substituïm x_0 , x_1 i μ_1 a l'equació (7.68). Simplificant, queda com

$$\ddot{x}_2 + \omega^2 x_2 = -\frac{A^3}{3\omega^2} + \left(\frac{5}{6} \frac{A^3}{\omega^2} - \mu_2 A \right) \cos \omega t - \frac{A^3}{3\omega^2} \cos 2\omega t - \frac{A^3}{6\omega^2} \cos 3\omega t \quad (7.72)$$

Perquè el $\cos \omega t$ no doni termes seculars, hem d'imposar $\mu_2 = 5A^2/6\omega^2$, per la qual cosa ω quedarà, en una segona aproximació, tal que $\omega_0^2 = \omega^2 + \varepsilon^2 \mu_2$. Treballant fins a ε^2 , ens queda que

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \varepsilon^2 \frac{5}{6} \frac{A^2}{\omega_0^2}} = \omega_0 \sqrt{1 - \varepsilon^2 \frac{5A^2}{6\omega_0^2} \frac{1}{(\omega_0^2 - \varepsilon^2 \mu_2)}} \approx \omega_0 \left(1 - \varepsilon^2 \frac{5}{12} \frac{A^2}{\omega_0^4} \right) \quad (7.73)$$

Pel que fa a $x_2(t)$, satisfà l'equació

$$\ddot{x}_2 + \omega^2 x_2 = -\frac{A^3}{3\omega^2} - \frac{A^3}{3\omega^2} \cos 2\omega t - \frac{A^3}{6\omega^2} \cos 3\omega t$$

amb les condicions $x_2(0) = 0$ i $\dot{x}_2(0) = 0$. La solució de l'equació amb aquestes condicions inicials és

$$x_2(t) = -\frac{A^3}{3\omega^4} + \frac{35}{144} \frac{A^3}{\omega^4} \cos \omega t + \frac{A^3}{9\omega^4} \cos 2\omega t - \frac{A^3}{48\omega^4} \cos 3\omega t \quad (7.74)$$

I, finalment, $x(t)$ serà, en una segona aproximació,

$$x(t) = \varepsilon \frac{A^2}{2\omega^2} - \varepsilon^2 \frac{A^3}{3\omega^4} + A \left(1 - \varepsilon \frac{A}{3\omega^2} + \varepsilon^2 \frac{35}{144} \frac{A^2}{\omega^4} \right) \cos \omega t - \left(\varepsilon \frac{A^2}{6\omega^2} - \varepsilon^2 \frac{A^3}{9\omega^4} \right) \cos 2\omega t - \varepsilon^2 \frac{A^3}{48\omega^4} \cos 3\omega t$$

amb ω donada per (7.73).



7.7.2. Problemes proposats

Problema 7.5. El principi de superposició no és vàlid

Una partícula està sotmesa a la força restauradora no lineal $F = -kx^n$, amb n enter, $n > 1$. Així, la seva equació de moviment és

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x + \varepsilon x^n = 0$$

Demostreu que el principi de superposició no és vàlid per a aquesta equació.

Problema 7.6. Moviment periòdic no harmònic simple

En el mecanisme representat a la figura 7.8, una roda gira a la velocitat angular constant ω al voltant del seu centre C . A la distància R del centre de la roda està articulada la barra BA , de tal forma que el seu altre extrem A està obligat a moure's sobre l'eix DE . És clar que aquest moviment és oscil·latori, però no és un MHS. Si $R \ll L$, comproveu que, en una primera aproximació, en el moviment de l'extrem A apareix un harmònic superior de freqüència 2ω . Així, el moviment de A al voltant del punt mitjà és

$$x(t) \approx R \cos \omega t + \frac{1}{4} \frac{R^2}{L} \cos 2\omega t + L - \frac{1}{4} \frac{R^2}{L}$$

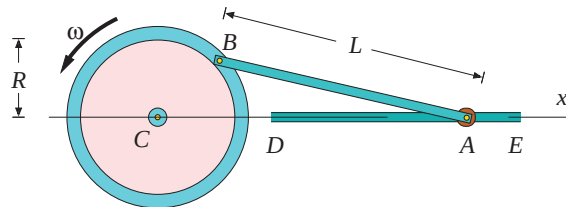


Figura 7.8

Problema 7.7. Molles i oscil·lador no lineal

Una partícula de massa m està entre dues molles diferents, de constants k_1 i k_2 —v. figura 7.9, (a) i (b). Ara bé, en aquest problema, les molles tenen la longitud natural justa per arribar a tocar la massa centrada sense fer cap força. En un primer muntatge, (a), lliguem les molles a la massa i deixem que aquesta oscil·li. Com sabem, en aquest cas l'oscil·lació serà harmònica simple. A continuació, muntatge (b), desenganxem les molles de les masses i tornem a fer oscil·lar el sistema. Doncs bé, feu una gràfica de la força total sobre la massa en funció de x i comproveu que el sistema, a (b), deixa de ser totalment lineal i, per tant, aquestes oscil·lacions ja no són estrictament harmòniques simples, si bé la seva freqüència és independent de l'“amplitud” de l'oscil·lació. Feu les gràfiques de la força en funció de l'elongació x , i la de x respecte del temps. Quant val la relació ω_b/ω_a entre la freqüència del cas (b) i la del cas (a)?

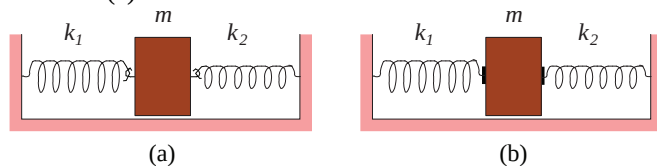
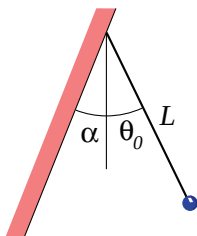


Figura 7.9

Resp.: $\frac{\omega_b}{\omega_a} = \frac{2\sqrt{k_1 k_2}}{(\sqrt{k_1} + \sqrt{k_2})\sqrt{k_1 + k_2}}$

Problema 7.8. Pèndol simple i pèndol no lineal

Figura 7.10



Un pèndol simple constituït per una barra molt prima de longitud L i una boleta penja d'una paret que està inclinada un angle α respecte de la vertical —v. figura 7.10. La barra se separa un angle θ_0 ($\theta_0 > \alpha$) de la vertical en direcció perpendicular a la paret i es deixa caure per tal que oscil·li. Suposant els angles α i θ_0 petits i que el xoc de la boleta amb la paret és completament elàstic, trobeu el període de l'oscil·lació en funció de l'“amplitud” θ_0 .

$$\text{Resp.: } T = \sqrt{\frac{L}{g}} \left(\pi + 2 \arcsin \frac{\alpha}{\theta_0} \right)$$

Problema 7.9. Oscil·lador no lineal 100%

Una partícula està unida a dues molles iguals tal com s'indica a la figura 7.11 (a). En aquest estat, les molles tenen la seva longitud natural L_0 . A continuació, es desplaça la partícula una distància x en la direcció perpendicular a la de les molles, essent $x \ll L_0$ —v. figura 7.11 (b).

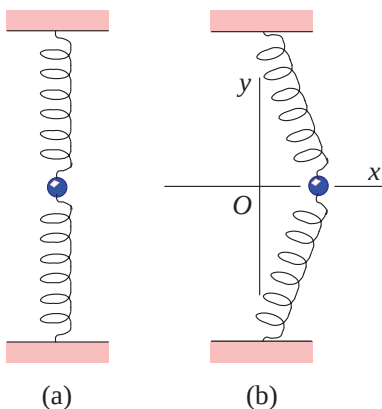
- a) Demostreu que, aproximadament, la força resultant que actua sobre la partícula ve donada per

$$F_x \approx -k \frac{x^3}{L_0^2}$$

és a dir, es tracta d'una força restauradora no lineal; per tant, el moviment de la partícula serà oscil·latori però no un MHS.

- b) La massa de la partícula és $m = 0,1 \text{ kg}$, la longitud natural de les molles $L_0 = 1 \text{ m}$ i la seva constant de força $k = 500 \text{ N/m}$. Si la partícula s'ha desplaçat inicialment la distància $x_0 = 6 \text{ cm}$ des de l'origen i després s'ha deixat anar, esbrineu la velocitat amb què passarà per aquest punt.

Figura 7.11



$$\text{Resp.: b) } v = \frac{x_0^2}{L_0} \sqrt{\frac{k}{2m}} = 0,18 \text{ m/s}$$



Problema 7.10. Electrò oscil·lant entre dos ions positius

Tornant a l'apartat (a) del problema 1.61 de l'electrò que oscil·la transversalment entre dos ions positius, trobeu ara l'equació diferencial del moviment de l'electrò en una segona aproximació i comproveu que és del tipus: $\ddot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon x^3$. Quant val ε ? I quant $\varepsilon x^3 / \omega_0^2 x$?

Resp.: $\varepsilon = 6 \frac{\omega_0^2}{a^2}$, $\frac{\varepsilon x^3}{\omega_0^2 x} = 3 \left(\frac{x}{a}\right)^2$

Problema 7.11. Període d'un pèndol simple

Un rellotge de pèndol simple té el període exacte d'1 s si l'elongació angular és 0.

- Utilitzant l'aproximació en Θ_0^2 de la sèrie (7.16), esbrineu els segons que s'endarrerirà al cap d'un dia aquest rellotge si el pèndol es fa oscil·lar amb una elongació de 5° .
- I quant de temps en l'ordre Θ_0^4 ?

Resp.: a) $\theta_0 = 5^\circ = 0,0873$ rad, $\theta_0^2/16 = 4,76 \times 10^{-4}$, $\Delta t = 86400 \times \theta_0^2/16 = 41,2$ s,
b) 0,025 s

Problema 7.12. L'espai fàsic

Una partícula està sotmesa a l'energia potencial $U(x)$ donada per

$$U(x) = \frac{1}{2}k(1 - \varepsilon x^2)x^2$$

en què $\varepsilon > 0$ i $\varepsilon x^2 < 1$ en tot moment. Representeu gràficament $U(x)$ i, a partir d'aquí, trajectòries possibles a l'espai fàsic.

Problema 7.13. Període aproximat d'una oscil·lació

Sigui A l'amplitud de les oscil·lacions d'una partícula unida a una molla l'energia potencial de la qual ve donada per l'expressió

$$U(x) = \frac{1}{2}k(1 + \alpha x^2)x^2$$

amb k i α positius, i $\alpha \ll k$. Feu un desenvolupament aproximat de l'arrel quadrada de l'equació (1.37) fins a la primera potència de α . Integrant terme a terme, demostreu que el període de les oscil·lacions ve donat, en una aproximació de primer ordre, per

$$T = T_0(1 - 3\alpha A^2)$$

on T_0 és el període que tindria la partícula si α fos 0.

Problema 7.14. Pertorbacions de tipus x^2

La força a la qual està sotmesa una partícula deguda a una molla lleugerament no lineal ve donada, aproximadament, per



$$F = -k(1 + \alpha x)x, \quad \text{amb } |\alpha x| \ll 1$$

Apliqueu el mètode de les pertorbacions per trobar una aproximació $x(t)$ de primer ordre en α que expliqui el moviment. En primer ordre, quin és el detall més significatiu d'aquest moviment? Comproveu que aquesta solució de primer ordre és compatible amb la més complexa que hem vist al problema resolt 7.4.

Resp.: $x(t) = A \cos \omega_0 t + \alpha \frac{A^2}{6} (\cos 2\omega_0 t - 3)$, amb $\omega_0^2 = k/m$. L'aparició d'un segon harmònic: $2\omega_0$.

Problema 7.15. Pertorbacions de tipus $|\dot{x}| \dot{x}$

Una partícula lligada a una molla de constant k està sotmesa a una petita força de fricció quadràtica en la velocitat

$$F_f = -\gamma |\dot{x}| \dot{x}$$

on γ és una constant petita. Suposant, per exemple, que parteix del repòs en $x(0) = A$, estudieu pel mètode de les pertorbacions en primer ordre el moviment d'aquesta partícula. Fixeu-vos que, com a oscil·lador sotmès a una fricció no lineal, té punts comuns amb el problema 7.2. En aquest últim hem vist que la diferència entre dues amplituds consecutives després de mitja oscil·lació era constant. Quant val, en aquest cas, el quocient entre dues amplituds consecutives?

Resp.: $\frac{A_{n+1}}{A_n} = 1 - \gamma \frac{4}{3} A_n$

Problema 7.16. Pertorbacions de tipus x^5

Segui l'equació diferencial següent corresponent a la dinàmica d'un oscil·lador lleugerament no lineal

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon x^5$$

en què εx^5 representa una petita pertorbació a l'oscil·lador harmònic. Sabent que les condicions inicials són $x(0) = A$, $\dot{x}(0) = 0$, apliqueu el mètode de les pertorbacions en primer ordre en ε , en què se suposa que

$$x(t) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t), \quad \text{i} \quad \omega_0^2 = \omega^2 + \varepsilon \mu$$

per trobar una aproximació a la funció $x(t)$. Heu d'utilitzar la igualtat (A.29).

Resp.: $x(t) = A \cos \omega t - \varepsilon \frac{A^5}{\omega^2} \left(\frac{5}{128} \cos 3\omega t + \frac{1}{384} \cos 5\omega t \right)$, amb $\omega^2 = \omega_0^2 - \varepsilon \frac{5}{8} A^4$

Problema 7.17. Mètode de Krylov i Bogoliubov per a un amortiment viscos molt feble

Comproveu que els resultats que proporciona aquest mètode amb una equació com $\ddot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon \dot{x}$ són coherents amb els exactes d'una oscil·lació amb una mica d'amortiment viscos —v. capítol 2— amb $\beta \ll \omega_0$ i $\beta t \ll 1$.


Problema 7.18. Mètode de Krylov i Bogoliubov per a x^5

Apliqueu aquest mètode a l'equació no lineal del problema 7.16 per esbrinar una primera aproximació de la solució. Compareu el resultat trobat amb l'obtingut pel mètode de les pertorbacions.

Heu d'utilitzar: $\int_0^{\pi/2} \cos^6 t \, dt = 15\pi/96$.

Problema 7.19. Pertorbacions de tipus $\mu x^2 + \nu x^3$

Considerem l'equació diferencial següent corresponent a la dinàmica d'un oscil·lador lleugerament no lineal

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \mu x^2 + \nu x^3$$

en què μ i ν són petits i $\mu x^2 + \nu x^3$ són, doncs, una petita pertorbació a l'oscil·lador harmònic. Apliqueu el mètode de les pertorbacions fins a segon ordre en μ i ν per comprovar que la funció $x(t)$ següent és una solució de segon ordre en μ i ν .

$$x(t) = A \cos \omega t + \frac{\mu A^2}{2\omega_0^2} - \frac{\mu A^2}{6\omega_0^2} \cos 2\omega t + \frac{A^3}{16\omega_0^2} \left(\frac{\mu^2}{3\omega_0^2} + \frac{\nu}{2} \right) \cos 3\omega t$$

$$\text{amb } \omega = \omega_0 \left(1 - \nu \frac{3A^2}{8\omega_0^2} + \mu^2 \frac{5A^2}{12\omega_0^4} \right).$$



Sistemes d'oscil·ladors i ones

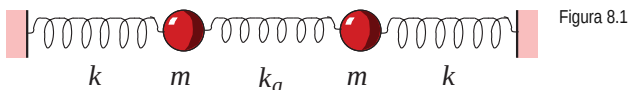
Fins ara, hem considerat oscil·ladors o sistemes simples l'estat dels quals queda descrit només amb un sol paràmetre, per exemple, un allargament x , un angle θ , etc. Però, en molts casos d'interès pràctic, els sistemes són més complexos i consten d'un nombre determinat de parts o partícules més o menys interdependents. Per tal d'especificar la posició de cadascuna de les partícules o parts d'un sistema, fins i tot tenint en compte els lligams que tenen entre si, necessitem un nombre mínim de paràmetres superior a 1, l'anomenat *nombre de graus de llibertat*. Si els paràmetres que descriuen l'estat d'aquests sistemes presenten oscil·lacions aquestes s'anomenen *oscil·lacions acoblades* i són l'objecte d'estudi d'aquest capítol.

Els oscil·ladors acoblats, com els oscil·ladors simples, poden ser de naturalesa molt diferent però, com veurem, tots presenten trets comuns. Així doncs, comencem presentant el tema amb un exemple molt senzill de dos oscil·ladors per tal que apareguin els conceptes més importants amb la mínima dificultat. A continuació, generalitzem el mètode per tractar un nombre qualsevol d'oscil·ladors i, finalment, l'apliquem a un cas molt important, la corda discreta, l'estudi de la qual ens portarà a l'aparició del moviment ondulatori. El final del capítol representa, doncs, el pont entre les oscil·lacions simples d'una massa lligada a una molla i la propagació d'una ona elàstica a través d'un medi continu.

8.1. Oscil·ladors acoblats. Modes normals

8.1.1. Dos oscil·ladors acoblats

Considerem el sistema que es presenta a la figura 8.1: dos oscil·ladors iguals de tipus molla-massa, de constants k i m , lligats per una molla de constant k_a .

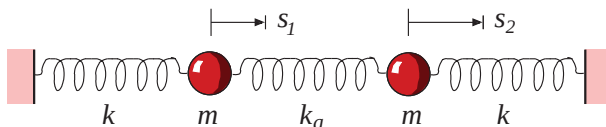


El sistema només pot efectuar oscil·lacions longitudinals en la direcció de les molles, que prenem com a eix x , al voltant de les posicions corresponents d'equilibri, x_1 i x_2 , que prenem com a orígens de coordenades¹ s_1 i s_2 de les partícules —v. figura 8.2. Així, si en

¹ Podríem denominar x_1 i x_2 els propis desplaçaments de les partícules respecte de les posicions corresponents

un instant determinat les partícules estan a s_1 i s_2 , això vol dir que, respecte de l'origen de l'eix x , estan a $x_1 + s_1$ i $x_2 + s_2$, i que la molla 1 s'ha allargat s_1 i la molla 2 ho ha fet $s_2 - s_1$, actuant sobre 1 la força restauradora $F_1 = -ks_1 - k_a(s_1 - s_2)$, i anàlogament, amb la 2, essent la força $F_2 = -ks_2 - k_a(s_2 - s_1)$.

Figura 8.2



Aleshores, la segona llei de Newton aplicada a cadascuna d'elles donarà

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 s_1}{dt^2} &= -ks_1 - k_a(s_1 - s_2) \\ m \frac{d^2 s_2}{dt^2} &= -ks_2 - k_a(s_2 - s_1) \end{aligned} \quad (8.1)$$

Aquestes dues equacions es poden reescriure de la forma següent:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 s_1}{dt^2} + \frac{k + k_a}{m} s_1 &= \frac{k_a}{m} s_2 \\ \frac{d^2 s_2}{dt^2} + \frac{k + k_a}{m} s_2 &= \frac{k_a}{m} s_1 \end{aligned} \quad (8.2)$$

en què resulta evident que les oscil·lacions acoblades són una mena d'oscil·lacions forçades, la qual cosa ens fa pensar, després d'haver vist el capítol 3, que el moviment de les partícules serà la superposició de dos MHS de freqüències diferents.

Aquest parell d'igualtats constitueix un *sistema de dues equacions diferencials*, ja que les dues funcions incògnites, s_1 i s_2 , estan presents en cadascuna de les dues equacions. En general, un sistema d'equacions diferencials pot ser molt difícil de resoldre, però aquest cas és molt fàcil si utilitzem el "truquet" següent. Consisteix a introduir-hi les dues noves variables ξ_1 i ξ_2 , que s'anomenen *coordenades normals*, definides com

$$\xi_1 = s_1 + s_2, \quad \xi_2 = s_1 - s_2 \quad \text{de manera que} \quad s_1 = \frac{\xi_1 + \xi_2}{2}, \quad s_2 = \frac{\xi_1 - \xi_2}{2} \quad (8.3)$$

En efecte, si sumem i restem les dues equacions (8.2) i considerem ξ_1 i ξ_2 , obtenim

$$\frac{d^2 \xi_1}{dt^2} = -\frac{k}{m} \xi_1 \quad \frac{d^2 \xi_2}{dt^2} = -\frac{k + 2k_a}{m} \xi_2 \quad (8.4)$$

és a dir, dues equacions diferencials però que ja no formen un sistema, sinó que es poden resoldre independentment una de l'altra. Sovint, d'això se'n diu que s'ha reduït a un sistema d'equacions diferencials separables. De fet, les dues equacions (8.4) corresponen a les equacions de dos MHS independents, un per a la ξ_1 i un altre per a la ξ_2 , que podem representar de la forma següent:

d'equilibri i així no hauria calgut introduir s_1 i s_2 , però s'ha fet així per tal de facilitar la notació en el pas de les oscil·lacions de sistemes discrets a sistemes continus que es fa a la secció §8.5.



$$\xi_1(t) = 2A \cos(\omega_1 t + \phi_1) \quad \xi_2(t) = 2B \cos(\omega_2 t + \phi_2) \quad (8.5)$$

en què A , B , ϕ_1 i ϕ_2 depenen de les quatre condicions inicials, i ω_1 i ω_2 són les anomenades *frequències pròpies o normals*

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k+2k_a}{m}} \quad (8.6)$$

Així, tenim, per (8.3), que el moviment de les partícules és la superposició dels dos MHS (8.5):

$$\begin{aligned} s_1(t) &= A \cos(\omega_1 t + \phi_1) + B \cos(\omega_2 t + \phi_2) \\ s_2(t) &= A \cos(\omega_1 t + \phi_1) - B \cos(\omega_2 t + \phi_2) \end{aligned} \quad (8.7)$$

8.1.2. Oscil·ladors acoblats i modes normals d'oscil·lació

Abans d'extreure conclusions generals sobre els oscil·ladors acoblats, vegem-ne alguns casos particulars molt significatius.

Comencem suposant que les velocitats inicials de les dues masses són nul·les. Això simplifica una mica la notació i no en fa perdre la generalitat. Així doncs, substituint a les derivades de (8.7) el fet que, si $t = 0$, llavors $\dot{s}_1(0) = \dot{s}_2(0) = 0$, resulta que $\phi_1 = \phi_2 = 0$ i, per tant, les coordenades de les partícules queden ara com

$$\begin{aligned} s_1(t) &= A \cos \omega_1 t + B \cos \omega_2 t \\ s_2(t) &= A \cos \omega_1 t - B \cos \omega_2 t \end{aligned} \quad (8.8)$$

Considerem ara els dos casos sobre les condicions inicials de les posicions.

- a) El cas en què les dues masses tenen el mateix desplaçament inicial s_0 : a $t = 0$, tenim $s_1(0) = s_2(0) = s_0$. Substituint a (8.8) trobem

$$\left. \begin{aligned} s_0 &= A + B \\ s_0 &= A - B \end{aligned} \right\} \text{ d'on } A = s_0, B = 0, \text{ i les oscil·lacions queden com}$$

$$s_1(t) = s_2(t) = s_0 \cos \omega_1 t \quad (8.9)$$

És a dir, com era previsible, les dues partícules fan exactament el mateix moviment sense que intervingui la molla d'acoblament. Aquest tipus d'oscil·lacions s'anomenen *oscil·lacions concordants* o de *concordància de fase*. A la figura 8.3, es representen els oscil·ladors en un instant t en què estan amb la màxima elongació i al cap d' $1/4$ i $1/2$ de període $2\pi/\omega_1$.

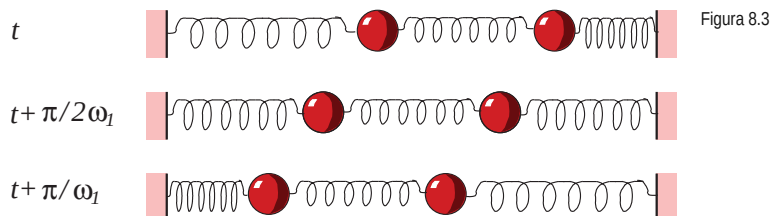


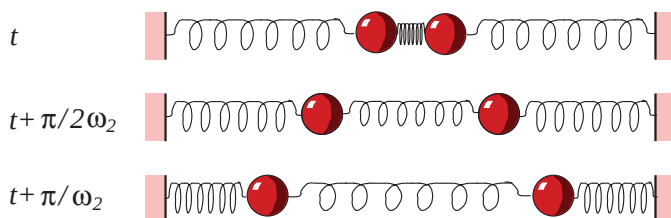
Figura 8.3

- b) El cas en què les dues masses es desplacen la mateixa distància però en sentits oposats: a $t = 0$, $s_1(0) = s_0$ i $s_2(0) = -s_0$. D'aquí es troba que $A = 0$ i $B = s_0$, és a dir,

$$s_1(t) = -s_2(t) = s_0 \cos \omega_2 t \quad (8.10)$$

Així doncs, el moviment de les partícules —com també es podia esperar— és simètric. Aquest segon tipus d'oscil·lacions s'anomenen *oscil·lacions contraposades* o d'*oposició de fase*. Com hem fet per al cas concordant de la figura 8.3, a continuació s'il·lustra l'oposició en haver representat les partícules de l'oscil·lador en tres instants que abasten mig període $2\pi/\omega_2$ —v. figura 8.4.

Figura 8.4



Aquestes dues formes tan particulars d'oscil·lar, les concordants i les contraposades, són les dues més simples en què poden fer-ho les partícules i s'anomenen *modes normals d'oscil·lació*, cadascun d'ells amb la freqüència pròpia corresponent. A partir de les expressions generals (8.8) i les concretes (8.9) i (8.10), veiem que les oscil·lacions generals de les partícules són la superposició dels MHS modes normals d'oscil·lació.

En realitat, això no és una casualitat i els resultats que acabem de trobar per a aquest cas es poden generalitzar. Com es demostra en textos superiors de mecànica:

En qualsevol sistema lineal de N d'oscil·ladors acoblats, existeixen N coordenades normals ξ_i , $i = 1, 2, \dots, N$ que fan separables les N equacions diferencials del sistema, en què cada coordenada normal i oscil·la a una freqüència pròpia ω_i —modes normals. Com que el sistema és lineal, l'oscil·lació general del sistema és la superposició dels N MHS corresponents a les N freqüències ω_i .

A la pròxima secció, insistirem una mica més sobre tot això. Però, primer, acabem aquesta amb unes consideracions sobre l'energia.

8.1.3. Energia del sistema i acoblament

L'energia dels dos oscil·ladors acoblats amb què hem començat la subsecció anterior és la suma de les energies cinètiques de les dues partícules i de les potencials de les tres molles. És a dir,

$$E = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}ks_1^2 + \frac{1}{2}ks_2^2 + \frac{1}{2}k_a(s_1 - s_2)^2 \quad (8.11)$$

Desenvolupant el binomi i reagrupant els termes, l'energia es pot escriure d'aquesta altra forma més interessant

$$E = \left\{ \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}(k + k_a)s_1^2 \right\} + \left\{ \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}(k + k_a)s_2^2 \right\} - k_a s_1 s_2 \quad (8.12)$$



en què es fa palès que l'energia del sistema és la suma de les energies de les dues partícules i de l'energia d'acoblament $-k_a s_1 s_2$ deguda a la interacció entre les partícules.

Observeu que, com que no hi ha friccions, l'energia total E del sistema es conserva però no la de cada partícula per separat, que fins i tot pot arribar a fer-se zero en algun moment. Això queda molt ben reflectit en el cas particular següent.

- Suposem el cas en què es desplaça inicialment només una partícula: si $t = 0$, llavors $s_1(0) = s_0$ i $s_2(0) = 0$. Substituint aquestes condicions a (8.8) s'arriba a

$$\left. \begin{array}{l} s_0 = A + B \\ 0 = A - B \end{array} \right\} \text{ d'on } A = B = \frac{s_0}{2}, \text{ tenint així}$$

$$s_1(t) = \frac{s_0}{2} (\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t) \quad s_2(t) = \frac{s_0}{2} (\cos \omega_1 t - \cos \omega_2 t)$$

Per trigonometria, (A.25), podem posar aquestes expressions d'una forma més convenient:

$$\begin{aligned} s_1(t) &= s_0 \cos \left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \right) \cos \left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t \right) \\ s_2(t) &= s_0 \sin \left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \right) \sin \left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t \right) \end{aligned} \quad (8.13)$$

Si, com passa sovint, l'acoblament entre els oscil·ladors és feble —és a dir, si $k_a \ll k$ —, llavors $\omega_1 \approx \omega_2 = \omega$ i $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2 \approx 0$. Comparant aquest cas amb el que hem vist a la secció §4.2.4, veiem que els dos moviments són *pulsacions* de la mateixa amplitud efectiva $A_{ef} = s_0 \cos(\Delta\omega t/2)$ i de la mateixa freqüència ω , però desfasades $\pi/2$ rad entre si, com s'ha representat a la figura 8.5. És el cas de les *oscil·lacions acoblades polsants*, en què la posició i la velocitat —i, per tant, l'energia— d'una de les partícules es fan zero en un cert instant i, per tant, l'energia de l'altra és màxima, ja que $k_a s_1 s_2 = 0$. Al cap de $\pi/\Delta\omega$, passarà just el contrari, tot d'acord amb (8.12).

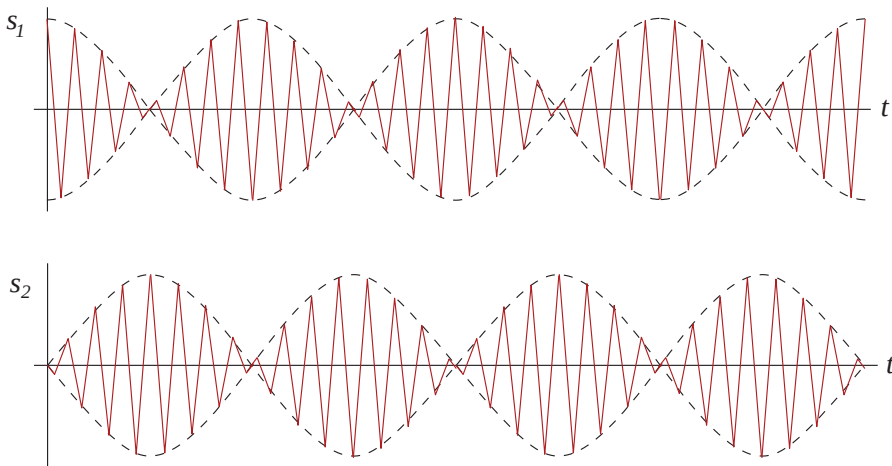


Figura 8.5

Per conservació de l'energia

A la secció §1.6, hem vist la utilitat d'expressar la conservació de l'energia en aquells sistemes oscil·lants en què succeeix. Aquest és el cas dels dos oscil·ladors acoblats d'aquesta secció en què, com no hi ha cap mena de fricció, l'energia total del sistema s'ha de conservar. Així doncs, la derivada respecte del temps de l'expressió (8.11) sobre l'energia ha de ser igual a zero:

$$\frac{dE}{dt} = 0 = m \frac{d^2 s_1}{dt^2} v_1 + m \frac{d^2 s_2}{dt^2} v_2 + k s_1 v_1 + k s_2 v_2 - k_a (s_1 - s_2) (v_1 - v_2)$$

Traient v_1 i v_2 com a factors comuns podem posar la suma anterior com

$$v_1 \cdot \left\{ m \frac{d^2 s_1}{dt^2} + (k + k_a) s_1 - k_a s_2 \right\} + v_2 \cdot \left\{ m \frac{d^2 s_2}{dt^2} + (k + k_a) s_2 - k_a s_1 \right\} = 0$$

Ara bé, com que v_1 i v_2 són independents l'una de l'altra, aquesta suma només pot ser nul·la en tot moment si ho és cadascun dels dos sumands i, per tant, si ho són els interiors de les claus, la qual cosa ens porta directament a retrobar les dues equacions del moviment (8.1).

Exemple 8.1. Dos pèndols acoblats per una molla

Un dels exemples d'oscil·ladors acoblats més simples d'estudiar i fàcils de realitzar s'aconsegueix acoblant dos pèndols iguals, penjats del sostre i separats una distància d . Com es mostra a la figura 8.6, l'acoblament s'efectua per mitjà d'una molla de constant k de la mateixa longitud natural d i que els lliga per punts situats a les distàncies a dels punts de suspensió respectius.

- Si la massa, el moment d'inèrcia i la distància entre els punts de suspensió i els corresponents centres de masses dels pèndols són m , I i h , respectivament, quines són les freqüències pròpies del sistema? I els modes normals d'oscil·lació?
- En quines condicions l'acoblament dels pèndols serà dèbil? Si és així, quant val el període de les pulsacions?

Solució

Figura 8.6

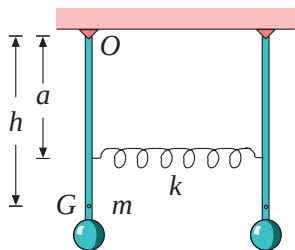
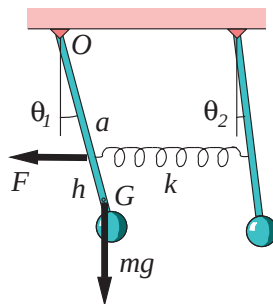


Figura 8.7



- Suposem que, en un instant determinat els pèndols 1 i 2 formen uns angles θ_1 i θ_2 amb la vertical, respectivament, positius en el sentit antihorari —v. figura 8.7. Si, com és habitual en l'estudi dels pèndols, suposem que aquests angles són sempre petits, el moment del pes mg del pèndol 1 respecte del seu punt de suspensió val, com



ja sabem, $-mgh \sin \theta_1 \approx -mgh \theta_1$ —recordeu l'exemple 1.3. D'altra banda, la molla romandrà sempre horitzontal fent la força $F = -ka(\theta_1 - \theta_2)$ i el moment aF sobre el pèndol 1. Naturalment, la situació és anàloga per al pèndol 2.

Així doncs, la segona llei de Newton per a la rotació aplicada a aquests dos pèndols proporciona les dues equacions acoblades següents:

$$I \frac{d^2 \theta_1}{dt^2} = -mgh \theta_1 - ka^2 (\theta_1 - \theta_2)$$

$$I \frac{d^2 \theta_2}{dt^2} = -mgh \theta_2 + ka^2 (\theta_1 - \theta_2)$$

Aquestes dues equacions són formalment equivalents a les (8.1), de manera que el comportament dels dos pèndols també ha de ser idèntic al de les dues masses d'aquell exemple. Així, les dues freqüències pròpies són, per analogia amb les vistes a (8.6):

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{mgh}{I}} \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{mgh + 2ka^2}{I}} \quad (1)$$

que es corresponen amb el mode normal de les oscil·lacions concordants i el de les contraposades, respectivament.

- b) Pel que hem vist a la secció §8.1.2, si $2ka^2 \ll mgh$, llavors $\omega_1 \approx \omega_2$ i l'acoblament serà feble. Així, en aquest cas, només cal girar lleugerament un dels pèndols i mantenir l'altre en la posició d'equilibri per tal que comencin a fer oscil·lacions polsants. Aquestes seran de període

$$T_{puls} = \frac{1}{2} \frac{2\pi}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{\pi}{\Delta\omega}$$

que —com es pot comprovar— desenvolupant la ω_2 de (1) i aplicant $2ka^2 \ll mgh$, resulta, aproximadament, $T_{puls} \approx \frac{mgh}{ka^2} T$, essent T el període dels pèndols sense acoblar.

En el problema 8.23 es presenta un sistema ben diferent però equivalent al d'aquest exemple.

8.2. Sistemes d'oscil·ladors acoblats

En aquesta secció, generalitzem el mètode anterior per tractar els sistemes d'oscil·ladors i trobar totes les freqüències pròpies del sistema. De qualsevol manera, per tal de no complicar innecessàriament el problema, primer considerem un sistema de tres partícules i quatre molles iguals —v. figura 8.8— com ara el de la secció anterior.

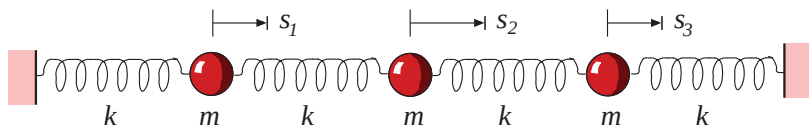


Figura 8.8



Denotem amb punts les derivades respecte del temps: $\dot{s} = \frac{ds}{dt}$, $\ddot{s} = \frac{d^2s}{dt^2}$, etc. Amb aquesta notació les equacions del moviment, una per a cada partícula, són

$$\begin{aligned} m\ddot{s}_1 &= -ks_1 - k(s_1 - s_2) &= -2ks_1 + ks_2 \\ m\ddot{s}_2 &= +k(s_1 - s_2) - k(s_2 - s_3) &= +ks_1 - 2ks_2 + ks_3 \\ m\ddot{s}_3 &= +k(s_2 - s_3) - ks_3 &= +ks_2 - 2ks_3 \end{aligned} \quad (8.14)$$

A la vista de la secció anterior, podem sospitar que el moviment de les partícules serà una superposició de MHS. Si, per tal de simplificar, suposem que les velocitats inicials de les partícules són nul·les, podem assajar aquests MHS:

$$s_1 = A_1 \cos \omega t \quad s_2 = A_2 \cos \omega t \quad s_3 = A_3 \cos \omega t \quad (8.15)$$

on: a) la freqüència ω l'hem de determinar a partir de les característiques de l'oscil·lador, i b) les amplituds A_1 , A_2 i A_3 a partir de les posicions inicials. Substituint (8.15) a (8.14), trobem

$$\left. \begin{aligned} -m\omega^2 A_1 \cos \omega t &= -2kA_1 \cos \omega t + kA_2 \cos \omega t \\ -m\omega^2 A_2 \cos \omega t &= +kA_1 \cos \omega t - 2kA_2 \cos \omega t + kA_3 \cos \omega t \\ -m\omega^2 A_3 \cos \omega t &= +kA_2 \cos \omega t - 2kA_3 \cos \omega t \end{aligned} \right\}$$

Traient-ne el $\cos \omega t$ comú, ens queda un sistema homogeni de tres equacions algebraïques per a les tres incògnites A_1 , A_2 i A_3 i el paràmetre —desconegut— ω^2 . Les funcions (8.15) seran la solució de les equacions (8.14) si i només si el sistema anterior té solució no trivial.

Aquestes tres equacions, que ens proporcionen la freqüència pròpia ω i les relacions A_2/A_1 i A_3/A_1 corresponents, s'escriuen en forma matricial com

$$\begin{pmatrix} 2k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & 2k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = m\omega^2 \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}$$

o també

$$\begin{pmatrix} 2k - m\omega^2 & -k & 0 \\ -k & 2k - m\omega^2 & -k \\ 0 & -k & 2k - m\omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = 0 \quad (8.16)$$

Si el lector està una mica familiaritzat amb l'àlgebra lineal, de seguida haurà reconegut en aquesta formulació matricial un *problema d'autovalors* —les ω — i de *vectors propis* —vectors de components (A_1, A_2, A_3) —, molt freqüents en física. Com sabem per àlgebra, aquest sistema d'equacions lineals homogeni (8.16) té solució no trivial si i només si el determinant del sistema és zero. Imposant aquesta condició tenim, doncs, l'anomenada *equació característica* del sistema

$$0 = \begin{vmatrix} 2 - m\omega^2/k & -1 & 0 \\ -1 & 2 - m\omega^2/k & -1 \\ 0 & -1 & 2 - m\omega^2/k \end{vmatrix} = (2 - m\omega^2/k) [(2 - m\omega^2/k)^2 - 2] \quad (8.17)$$



Aquesta és una equació de tercer grau en $\gamma = (2 - m\omega^2/k)$ de la qual és immediat trobar $\gamma = 0$ i $\gamma = \pm\sqrt{2}$. Per tant, les tres freqüències pròpies són

$$\omega_1^2 = \frac{2k}{m} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad \omega_2^2 = \frac{2k}{m}, \quad \omega_3^2 = \frac{2k}{m} \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad (8.18)$$

Com que $(2k - m\omega_1^2) = k\sqrt{2}$, substituint ara ω_1 en el sistema (8.16), queda

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -1 & 0 \\ -1 & \sqrt{2} & -1 \\ 0 & -1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{d'on resulten:} \quad A_2 = A_1\sqrt{2}, \quad A_3 = A_1$$

A continuació, es fa el mateix per als altres dos modes, ω_2 i ω_3 . Si ara anomenem B_1 i C_1 les amplituds de l'oscil·lació de la partícula 1 en els modes 2 i 3, respectivament, n'obtenim

$$\begin{aligned} \text{Mode 1:} \quad \omega_1 &= \omega_2 \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \rightarrow A_2 = A_1\sqrt{2}, \quad A_3 = A_1 \\ \text{Mode 2:} \quad \omega_2 &= \frac{2k}{m} \rightarrow B_2 = 0, \quad B_3 = -B_1 \\ \text{Mode 3:} \quad \omega_1 &= \omega_2 \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \rightarrow C_2 = -C_1\sqrt{2}, \quad C_3 = C_1 \end{aligned} \quad (8.19)$$

Observant aquests resultats de les A_i —sobretot els signes—, podem veure que en el mode normal 1 de ω_1 l'oscil·lació de les tres masses és del tipus que, en el problema dels dos oscil·ladors acoblats, en dèiem *concordant*. També veiem que, en aquest cas, hi ha dos tipus d'oscil·lacions *contraposades*: les corresponents als modes 2 i 3.

També és interessant adonar-se que, al contrari del que en una primera impressió podria semblar, NO existeix un “mode normal superconcordant” en què $s_1 = s_2 = s_3$ —és a dir, $A_1 = A_2 = A_3$ — i en què les dues molles centrals no treballen, amb una freqüència $\omega^2 = 2k/3m$. Si aquest cas existís, ens hauria sortit com un dels modes normals solució de (8.16). També podem comprovar directament que aquest cas no pot donar-se substituint $s_1 = s_2 = s_3$ a les equacions (8.14) i veient que en surt un sistema incompatible.

El moviment general de cada partícula és la superposició de (8.15) en els tres modes normals. És a dir:

$$\begin{aligned} &\text{mode 1} \qquad \text{mode 2} \qquad \text{mode 3} \\ s_1(t) &= A_1 \cos \omega_1 t + B_1 \cos \omega_2 t + C_1 \cos \omega_3 t \\ s_2(t) &= A_2 \cos \omega_1 t + B_2 \cos \omega_2 t + C_2 \cos \omega_3 t \\ s_3(t) &= A_3 \cos \omega_1 t + B_3 \cos \omega_2 t + C_3 \cos \omega_3 t \end{aligned}$$

que, utilitzant les amplituds relatives resumides a (8.19), es pot simplificar com

$$\begin{aligned} s_1(t) &= A \cos \omega_1 t + B \cos \omega_2 t + C \cos \omega_3 t \\ s_2(t) &= A\sqrt{2} \cos \omega_1 t - C\sqrt{2} \cos \omega_3 t \\ s_3(t) &= A \cos \omega_1 t - B \cos \omega_2 t + C \cos \omega_3 t \end{aligned}$$



Com que ja hem suposat des del principi que les velocitats inicials són zero, llavors només apareixen a l'expressió general tres constants arbitràries, la A , B i C , que es determinen a partir de les tres posicions inicials.

Si, per exemple, aquestes són: a $t = 0$, $s_1(0) = s_0$, $s_2(0) = s_3(0) = 0$, llavors, per substitució a (8.20), trobem que

$$\left. \begin{array}{l} s_0 = A + B + C \\ 0 = A\sqrt{2} - C\sqrt{2} \\ 0 = A - B + C \end{array} \right\} \text{ d'on surten } A = C = \frac{s_0}{4}, \quad B = \frac{s_0}{2}. \text{ Així,}$$

$$s_1(t) = \frac{s_0}{4} (\cos \omega_1 t + 2 \cos \omega_2 t + \cos \omega_3 t)$$

$$s_2(t) = \frac{s_0 \sqrt{2}}{4} (\cos \omega_1 t - \cos \omega_3 t)$$

$$s_3(t) = \frac{s_0}{4} (\cos \omega_1 t - 2 \cos \omega_2 t + \cos \omega_3 t)$$

D'altra banda, per saber quines posicions inicials haurien de tenir les partícules per tal que les oscil·lacions fossin en un mode normal pur, per exemple l'1, només cal imposar a (8.20) que $t = 0$ i $B = C = 0$, i en resulta: $s_1(0) = s_3(0) = s_0$ i $s_2 = s_0 \sqrt{2}$. Fent el mateix per als altres dos modes, se n'obtenen els resultats que es resumeixen aquí.

$$\begin{array}{ll} \text{Mode 1: } s_1(0) = s_3(0) = s_0, & s_2(0) = s_0 \sqrt{2} \quad \left\{ \begin{array}{l} s_1(t) = s_3(t) = s_0 \cos \omega_1 t \\ s_2(t) = s_0 \sqrt{2} \cos \omega_1 t \end{array} \right. \\ \text{Mode 2: } s_1(0) = -s_3(0) = s_0, & s_2(0) = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} s_1(t) = -s_3(t) = s_0 \cos \omega_2 t \\ s_2(t) = 0 \end{array} \right. \\ \text{Mode 3: } s_1(0) = s_3(0) = s_0, & s_2(0) = -s_0 \sqrt{2} \quad \left\{ \begin{array}{l} s_1(t) = s_3(t) = s_0 \cos \omega_3 t \\ s_2(t) = -s_0 \sqrt{2} \cos \omega_3 t \end{array} \right. \end{array}$$

Generalització

Imaginem ara que estem davant d'un problema amb N oscil·ladors en comptes de 3: què hauriem de fer? Assajar N funcions harmòniques com les (8.15) en les N equacions diferencials del sistema, per obtenir-ne un sistema homogeni d'equacions algebraiques com ara el (8.16) i, a partir d'ell, l'equació característica equivalent a la (8.17) —ara, però, de grau N —, que, un cop resolta, ens proporcionaria les N freqüències pròpies ω_n , $n = 1, \dots, N$. Aquestes poden ser totes diferents o, com en els casos anomenats *degenerats*, n'hi poden haver dues d'iguals o més. A partir de cada ω_n , la resolució del sistema d'equacions algebraiques equivalent al (8.16) ens donaria les amplituds relatives $A_i^{(n)}$, una per a cada mode n i cada partícula i . El moviment general de la partícula i és la superposició

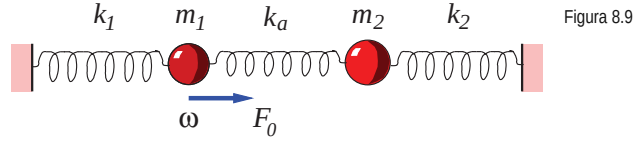
$$s_i(t) = \sum_{n=1}^N A_i^{(n)} \cos \omega_n t$$

on trobem les N^2 amplituds $A_i^{(n)}$ a partir de les N posicions inicials. Això és, precisament, el que farem a la pròxima secció.



8.3. Oscil·ladors acoblats forçats

8.3.1. Estat estacionari dels oscil·ladors acoblats forçats



Tenim el sistema següent —v. figura 8.9— en el qual la massa m_1 està sotmesa a la força externa

$$F(t) = F_0 \cos \omega t \quad (8.20)$$

La segona llei de Newton per als dos cossos pren la forma

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{s}_1 &= -k_1 s_1 - k_a(s_1 - s_2) + F_0 \cos \omega t \\ m_2 \ddot{s}_2 &= +k_a(s_1 - s_2) - k_2 s_2 \end{aligned}$$

que es poden tornar a escriure com

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{s}_1 + (k_1 + k_a) s_1 - k_a s_2 &= F_0 \cos \omega t \\ m_2 \ddot{s}_2 - k_a s_1 + (k_a + k_2) s_2 &= 0 \end{aligned} \quad (8.21)$$

Pel que sabem sobre les oscil·lacions forçades i sobre els oscil·ladors acoblats, podem suposar que, un cop ben establert l'estat estacionari, les dues masses es mouran fent MHS de la mateixa freqüència ω que la de la força externa amb amplituds A i B . Com que no hi ha fricció, el desfasament entre aquests dos MHS $s_1(t)$ i $s_2(t)$ i la força externa $F(t)$ és zero o π radianys —canvi de signe. Així doncs, a (8.21) provem

$$s_1(t) = A_1 \cos \omega t \quad s_2(t) = A_2 \cos \omega t \quad (8.22)$$

i, un cop simplificat el $\cos \theta$ comú, ens queda

$$\begin{pmatrix} k_1 + k_a - m_1 \omega^2 & -k_a \\ -k_a & k_a + k_2 - m_2 \omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (8.23)$$

Aplicant la *regla de Cramer* a aquest sistema trobem les amplituds A_1 i A_2 (8.22) corresponents als MHS de l'estat estacionari

$$A_1 = \frac{\begin{vmatrix} F_0 & -k_a \\ 0 & k_a + k_2 - m_2 \omega^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} k_1 + k_a - m_1 \omega^2 & -k_a \\ -k_a & k_a + k_2 - m_2 \omega^2 \end{vmatrix}} = \frac{(k_a + k_2 - m_2 \omega^2) F_0}{(k_1 + k_a - m_1 \omega^2)(k_a + k_2 - m_2 \omega^2) - k_a^2} \quad (8.24)$$

$$A_2 = \frac{\begin{vmatrix} k_1 + k_a - m_1 \omega^2 & F_0 \\ -k_a & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} k_1 + k_a - m_1 \omega^2 & -k_a \\ -k_a & k_a + k_2 - m_2 \omega^2 \end{vmatrix}} = \frac{k_a F_0}{(k_1 + k_a - m_1 \omega^2)(k_a + k_2 - m_2 \omega^2) - k_a^2} \quad (8.25)$$

En la *ressonància*, aquestes amplituds es fan màximes —de fet, infinites. Això passarà a les freqüències ω que anul·len els determinants denominadors anteriors, els quals, d'altra banda, com sabem per la secció anterior, són, com en el cas d'un sol oscil·lador, les dues freqüències pròpies ω_1 i ω_2 donades a (8.56).

Aquest resultat es pot generalitzar:

En un sistema de N oscil·ladors acoblats, hi ha N freqüències de ressonància, que són les freqüències pròpies del sistema.

8.3.2. Absorbidors de vibracions

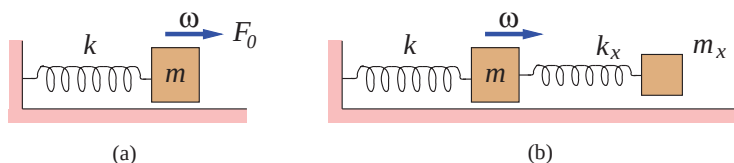
En el valor de l'amplitud A_1 de (8.24) de la secció anterior no haurà passat desapercibuda la resta $k_a + k_2 - m_2\omega^2$ del numerador: si la relació entre aquestes magnituds és tal que la resta dona zero ¡la massa m_1 no oscil·larà gens! D'alguna manera el segon oscil·lador absorbeix les vibracions forçades del primer.

Aquest fet es pot aprofitar per reduir l'amplitud de vibracions forçades quan es fa indesitjablement gran. Quan s'aplica aquest segon oscil·lador per a que redueixi les oscil·lacions forçades se'n diu que és un *absorbidor de vibracions*. Veiem-ho amb un exemple.

Exemple 8.2. Absorbidor de vibracions

Considerem un sistema molla-massa de paràmetres k i m que està sotmès a una força impulsora externa tipus $F(t) = F_0 \cos \omega t$ —v. figura 8.10 (a) següent. Negligint friccions esbrineu les característiques k_x , m_x que hauria de tenir un altre sistema molla-massa per tal que aplicat al primer —v. figura 8.10 (b)— les vibracions forçades estacionàries d'aquest desapareguessin.

Figura 8.10



Solució

Si s_1 i s_2 són les elongacions de les dues masses respecte de les corresponents posicions d'equilibri, les equacions de moviment dels dos oscil·ladors són

$$m\ddot{s}_1 = -ks_1 - k_x(s_1 - s_2) + F_0 \cos \omega t \quad (8.26)$$

$$m_x\ddot{s}_2 = -k_x(s_2 - s_1) \quad (8.27)$$

En l'estat estacionari, les dues masses es mouran amb la freqüència de la força impulsora i, com que no hi ha friccions, en fase amb ella. És a dir, de la forma

$$s_1 = A \cos \omega t \quad s_2 = B \cos \omega t \quad (2)$$

Així que, substituint (2) a les equacions anteriors i simplificant $\cos \omega t$, trobem el sistema de dues equacions algebraïques per a les amplituds A i B



$$\begin{pmatrix} k + k_x - m\omega^2 & -k_x \\ -k_x & k_x - m_x\omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aplicant la regla de Cramer aquest sistema es resol i se n'obté

$$A = \frac{k_x - m_x\omega^2}{(k + k_x - m\omega^2)(k_x - m_x\omega^2) - k_x^2} F_0 \quad (8.28)$$

$$B = \frac{k_x}{(k + k_x - m\omega^2)(k_x - m_x\omega^2) - k_x^2} F_0$$

Així doncs, només cal que l'absorbidor afegit satisfaci la condició

$$\frac{k_x}{m_x} = \omega^2 \quad (8.29)$$

per tal que la massa m no oscil·li. Aquest resultat es podria també enunciar dient que

La freqüència pròpia de l'absorbidor de vibracions — $\omega_x^2 = k_x/m_x$ — ha de coincidir amb la freqüència de la força impulsora externa.

Els absorbidors de vibracions s'usen, sobretot, quan la freqüència ω de la força externa s'acosta bastant a la pròpia ω_0 de l'oscil·lador original. En aquest cas, l'absorbidor el que fa és canviar la freqüència ω_0 de ressonància de l'oscil·lador per les dues ω_1 , ω_2 —ben diferents de ω — del sistema oscil·lador-absorbidor. En el cas bastant habitual en

què $\omega \approx \omega_0 = \sqrt{k/m}$, llavors $A = 0$, si $\frac{k_x}{m_x} \approx \frac{k}{m}$.

8.4. Oscil·lacions acoblades transversals: la corda discreta

A la figura següent, es presenta sobre l'eix x una successió de N partícules iguals de massa m , lligades cadascuna amb l'anterior i amb la següent per molles iguals, de longitud h i constant de força k . Sense pretendre fer un estudi detallat d'aquest sistema, anomenat *corda discreta* —v. figura 8.11— podem fer algunes consideracions senzilles que ens portaran de les *oscil·lacions* d'un sistema discret d'oscil·ladors acoblats a les *ones* d'un sistema continu.

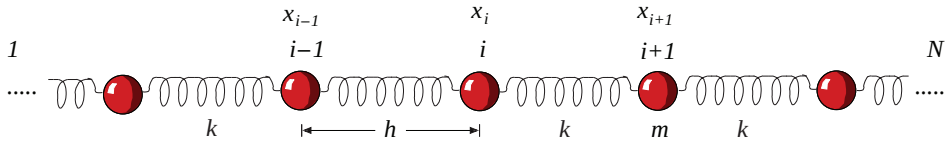


Figura 8.11

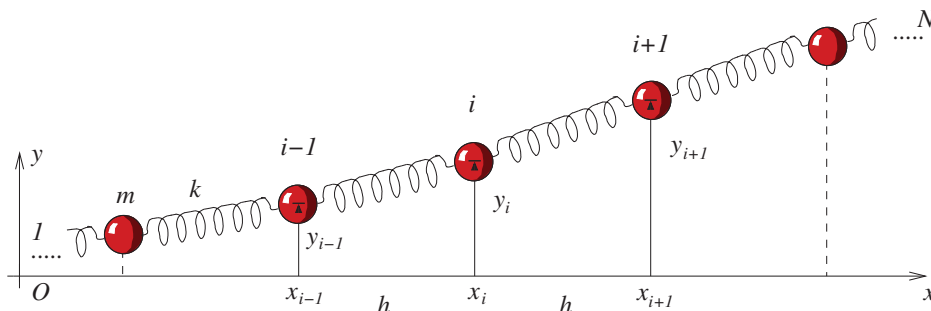
En els exemples que hem tractat fins ara de sistemes acoblats de molles i masses, hem tingut present en tot moment que l'única possibilitat que hi havia per al moviment del sistema eren les vibracions longitudinals. Ara, en canvi, considerarem el cas en què les partícules només poden moure's en la direcció perpendicular —o transversal— al sistema de molles.

De les N partícules del sistema, de moment ens fixem només en tres de consecutives qualssevol, la $i-1$, la i i la $i+1$, $i > 1$, de posicions, sobre l'eix x , $x_{i-1} = x_i - h$, x_i i



$x_{i+1} = x_i + h$, respectivament, i que oscil·laran al llarg del temps, en la direcció de l'eix y al voltant de la posició d'equilibri $y = 0$. Així, les tres partícules anteriors estaran, en un moment determinat, a y_{i-1} , y_i i y_{i+1} —v. figura 8.12.

Figura 8.12



Com és immediat de comprovar, l'estudi de les oscil·lacions transversals d'aquest sistema quan no hi ha cap tensió externa aplicada i, per tant, les forces que s'originen sobre les partícules provenen de l'allargament de les molles és, matemàticament, molt complicat, ja que les forces que apareixen sobre la partícula són *no lineals*, ni tan sols considerant oscil·lacions petites —v. problema 7.9.

Afortunadament, però, té molt més interès el cas en què, sobre el sistema de N molla-massa, hi ha aplicada una tensió externa F , és a dir, el sistema es manté tens tirant dels dos extrems, $i = 1$ i $i = N$, amb una tensió F en sentits oposats —v. figura 8.13.

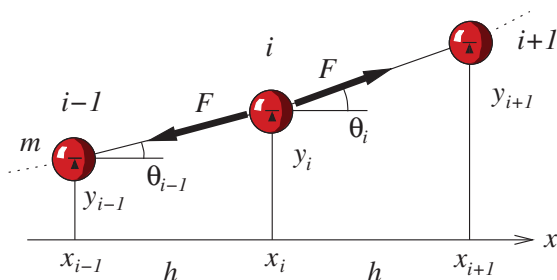
Figura 8.13



Si en aquest cas considerem, a més, que la tensió és prou forta i les oscil·lacions al voltant de $y = 0$ són molt petites, podem fer l'aproximació següent —v. figura 8.14:

La força total que actua sobre la partícula i és la suma vectorial de les tensions que fan sobre ella les partícules $i - 1$ i $i + 1$, tensions que, en mòdul, seran iguals a F i que només variaran una mica en la direcció segons els angles petits θ_{i-1} i θ_i .

Figura 8.14



Amb aquestes suposicions, la força total que actua sobre la partícula i en la direcció y és, doncs, la suma d'aquestes dues components:



$$F_{i(\text{esq})} = -F \sin \theta_{i-1} \approx -F \tan \theta_{i-1} = -F \left(\frac{y_i - y_{i-1}}{h} \right)$$

$$F_{i(\text{dret})} = +F \sin \theta_i \approx +F \tan \theta_i = +F \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h} \right)$$

Així, l'equació del moviment transversal de la partícula i , $i = 2, \dots, N-1$, és, per aplicació de la segona llei de Newton,

$$m \frac{d^2 y_i}{dt^2} = F \left[\frac{y_{i+1} - y_i}{h} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h} \right] \quad (8.30)$$

De la mateixa manera, si considerem que els dos extrems del sistema de molles estan fixos a $y = 0$, llavors les equacions per a les partícules 1 i N són, com és fàcil de comprovar,

$$m \frac{d^2 y_1}{dt^2} = F \left[\frac{y_2 - y_1}{h} - \frac{y_1}{h} \right], \quad m \frac{d^2 y_N}{dt^2} = F \left[\frac{y_{N-1} - y_N}{h} - \frac{y_N}{h} \right] \quad (8.31)$$

Així, ens queda el sistema de N equacions diferencials següent:

$$\begin{aligned} \frac{mh}{F} \frac{d^2 y_1}{dt^2} &= -2y_1 + y_2 \dots\dots +0 +0 +0 \dots\dots +0 +0 \\ &\dots \dots \\ \frac{mh}{F} \frac{d^2 y_i}{dt^2} &= +0 +0 \dots\dots +y_{i-1} -2y_i +y_{i+1} \dots +0 +0 \\ &\dots \dots \\ \frac{mh}{F} \frac{d^2 y_N}{dt^2} &= +0 +0 \dots\dots +0 +0 +0 \dots\dots +y_{N-1} -2y_N \end{aligned}$$

Modes normals d'oscil·lació

A partir de les equacions (8.32) apliquem la tècnica vista a la secció §8.2 per trobar les N freqüències pròpies d'oscil·lació. Si suposem que les N velocitats inicials de les partícules són zero només cal substituir en aquestes equacions funcions de prova tipus $y_i(t) = A_i \cos \omega t$, $i = 1, \dots, N$, obtenint un conjunt de N equacions algebraïques que ens porta a l'equació característica del sistema, equivalent a la (8.17), però per a N . És a dir,

$$\begin{vmatrix} \chi & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & \chi & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \chi & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & \chi & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & \chi \end{vmatrix} = 0 \quad \text{amb} \quad \chi = 2 - \frac{h}{F} m \omega^2 \quad (8.32)$$

Com es dedueix en textos superiors de mecànica, les freqüències pròpies ω_n , solucions de (8.32) vénen donades per l'expressió

$$\omega_n^2 = \frac{2F}{mh} \left(1 - \cos \left[\frac{n\pi}{N+1} \right] \right) \quad (8.33)$$



en què n és un nombre enter qualsevol, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$, si bé, com veiem d'aquí mateix,

- si $n < 0$, $\omega_{-n}^2 = \omega_n^2$;
- per a $n = 0$, $\omega_0 = 0$, és a dir, no hi ha oscil·lacions: el moviment de les partícules es redueix a una simple translació;
- a partir de $n > N$, les ω_n es van repetint i no n'apareixen de noves; així, per exemple, si $N = 8$, per (8.33) tenim que $\omega_9 = \omega_0 = 0$, $\omega_{10} = \omega_8$, $\omega_{11} = \omega_7$, etc.

Així doncs, “només” hi ha N freqüències pròpies d'oscil·lació.

I, pel que fa als modes normals d'oscil·lació, com es pot comprovar substituint aquestes ω_n en les equacions algebraïques que relacionen les A_i —equivalents a les (8.16) de la secció anterior—, a cada ω_n li corresponen N amplituds $A_i^{(n)}$, donades per

$$A_i^{(n)} = \mathcal{A}_n \sin\left(\frac{ni\pi}{N+1}\right), \quad \text{on} \quad i = 1, \dots, N, \quad n = 1, \dots, N \quad (8.34)$$

on les $\mathcal{A}_n$ són les constants arbitràries que depenen de les posicions inicials. Igual que amb les ω_n , també és immediat veure que només hi ha N amplituds $A_i^{(n)}$ diferents.

Per tant, el moviment de la partícula i , com a superposició dels N modes normals, ve donat per la suma

$$y_i(t) = \sum_{n=1}^N \mathcal{A}_n \sin\left(\frac{ni\pi}{N+1}\right) \cdot \cos \omega_n t \quad (8.35)$$

Finalment, si les velocitats inicials no fossin nul·les, llavors hauríem d'assajar, a més de $y_i = A_i \cos \omega t$, solucions del tipus $y_i(t) = B_i \sin \omega t$, i superposar tots dos resultats. Així, l'expressió anterior (8.35) es generalitza de la forma

$$y_i(t) = \sum_{n=1}^N \sin\left(\frac{ni\pi}{N+1}\right) [\mathcal{A}_n \cos \omega_n t + \mathcal{B}_n \sin \omega_n t] \quad (8.36)$$

Abans de continuar fent el pas al continu, concretament amb un parell d'exemples el que acabem de veure.

Exemple 8.3. Modes normals d'oscil·lació transversal

Apliqueu la teoria que acabem de veure sobre la corda discreta a les oscil·lacions transversals dels casos $N = 3$ i $N = 5$.

Solució

a) Per a $N = 3$ partícules

El cas de 3 partícules en oscil·lacions longitudinals ja l'hem estudiat a la secció §8.2. Com que les equacions diferencials dels dos casos, longitudinal (8.14), i transversal (8.30) i (8.31), són matemàticament equivalents, podem esperar que els resultats d'ara siguin molt similars als d'abans. I, en efecte, així és. Per tant, per (8.33), tenim que les freqüències pròpies per a $N = 3$ són



$$\omega_1^2 = \frac{2F}{mh} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad \omega_2^2 = \frac{2F}{mh}, \quad \omega_3^2 = \frac{2F}{mh} \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad (8.37)$$

que, llevat del coeficient inicial, es corresponen a les trobades a (8.18). I, pel que fa a les amplituds $A_i^{(n)}$ de (8.34), substituint $N = 3$ i i i n , d'1, 2 i 3, trobem els valors

$$\begin{array}{ccccc} & n=1 & n=2 & n=3 & \\ i=1 & \mathcal{A}_1 & \mathcal{A}_2 & \mathcal{A}_3 & \\ i=2 & \sqrt{2}\mathcal{A}_1 & 0 & -\sqrt{2}\mathcal{A}_3 & \\ i=3 & \mathcal{A}_1 & -\mathcal{A}_2 & \mathcal{A}_3 & \end{array} \quad (8.38)$$

és a dir, les mateixes que les obtingudes a (8.20) per al cas longitudinal. Naturalment, els valors concrets de $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ i $\mathcal{A}_3$ dependran de les tres posicions inicials.

A les figures 8.15 (a), (b) i (c) es representen les posicions y_i de les tres partícules en els tres modes normals d'oscil·lació a l'instant inicial $t = 0$ en què $y_i = A_i^{(n)}$, d'acord amb (8.38). A més, a la figura 8.15 (d), es mostren les posicions a intervals de temps $1/8$ de període, per al mode normal $n = 2$. Fixeu-vos que, en aquest mode, la partícula $i = 2$ no oscil·la gens.

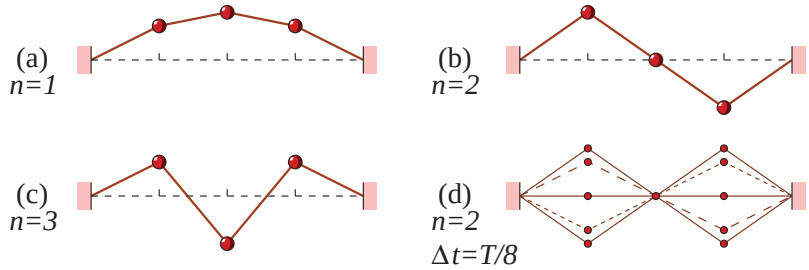


Figura 8.15

b) Per a $N = 5$ partícules

Substituint a (8.33), ara trobem

$$\omega_1^2 = \frac{F}{mh}(2 - \sqrt{2}), \quad \omega_2^2 = \frac{F}{mh}, \quad \omega_3^2 = \frac{2F}{mh}, \quad \omega_4^2 = \frac{3F}{mh}, \quad \omega_5^2 = \frac{F}{mh}(2 + \sqrt{2}) \quad (8.39)$$

I, substituint $N = 5$ i i i n a (8.34), trobem les $A_i^{(n)}$

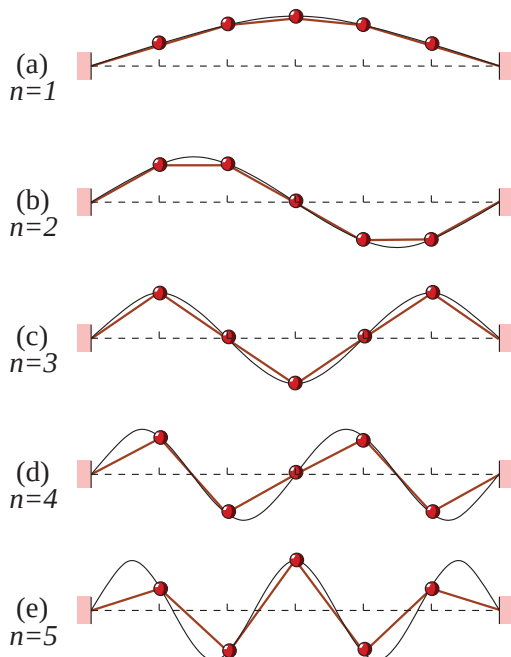
Mode	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$	$i = 5$	
$n = 1 \quad \mathcal{A}_1$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	
$n = 2 \quad \mathcal{A}_2$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	
$n = 3 \quad \mathcal{A}_3$	1	0	-1	0	1	
$n = 4 \quad \mathcal{A}_4$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	
$n = 5 \quad \mathcal{A}_5$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	(8.40)

Com hem fet abans, també ara hem esquematitzat aquests 5 modes normals —v. figures 8.16 de la (a) fins a la (e). Com que les amplituds $A_i^{(n)}$ vénen donades per (8.34), a més de les partícules i les molles —en línia contínua gruixuda— també s'ha representat la gràfica de la funció

$$a_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{6h}\right) \quad (8.41)$$

per poder observar amb més claredat com encaixen les partícules en les gràfiques d'aquests sinus.

Figura 8.16



8.5. Pas al continu: ones transversals i longitudinals

8.5.1. Oscil·lacions i ones transversals

L'equació (8.30) pot ser reescrita de la forma

$$\frac{\left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h}\right) - \left(\frac{y_i - y_{i-1}}{h}\right)}{h} - \left(\frac{\mu}{F}\right) \frac{d^2 y_i}{dt^2} = 0 \quad (8.42)$$

Reprement el fil teòric de la secció anterior, ara ens preguntem què passa si h i m tendeixen cap a 0 mentre que N ho fa cap a infinit, de forma que la longitud total $L = (N + 1)h \approx Nh$ i la densitat lineal $\mu = Nm/(N + 1)h \approx m/h$ del sistema de molles i masses es mantenen constants. Vegem-ho.

En aquestes condicions, les partícules tendeixen a estar tan pròximes que, en comptes d'estudiar les N funcions del temps $y_i(t)$ per a cada partícula i , és més convenient passar



a la funció $y(x, t)$ del temps t i de l'espai x . En definitiva, es passa d'un *sistema discret* de N partícules a un *sistema continu* —una corda ordinària— dependent de la posició x :

$$\left. \begin{array}{l} y_i(t) \\ i = 1, 2, \dots, N \end{array} \right\} \longrightarrow \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}} \longrightarrow y(x, t)$$

Però, a més, recordant la definició de derivada parcial com a límit, tenim que

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y_i - y_{i-1}}{h} &= \left[\frac{\partial y}{\partial x} \right]_x & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y_{i+1} - y_i}{h} &= \left[\frac{\partial y}{\partial x} \right]_{x+h} \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left[\frac{\partial y}{\partial x} \right]_{x+h} - \left[\frac{\partial y}{\partial x} \right]_x}{h} &= \left[\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right]_x \end{aligned}$$

Diguem-ne ara

$$c = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \quad (8.43)$$

Així doncs, en el pas al continu fent els límits corresponents, l'equació en diferències finites (8.42) es transforma en l'*equació en derivades parcials de segon ordre* següent, que es denomina *equació d'ona*

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (8.44)$$

Qualsevol magnitud física y que depengui de la posició x i del temps t , $y(x, t)$, que satisfà una igualtat com la (8.44), és una *ona*. Així, en els sistemes —com una corda tensa— que estan inicialment en equilibri:

una ona és una pertorbació de l'estat d'equilibri que es propaga endavant i endarrere pel sistema a una celeritat constant determinada per les pròpies característiques d'aquest.

Infinitos modes normals d'oscil·lació

Per al càlcul de les freqüències pròpies d'oscil·lació quan $N \rightarrow \infty$, hem d'aplicar aquest límit a l'expressió (8.33). Per això, hem de tenir present el desenvolupament de Maclaurin del cosinus fins a segon ordre, (A.57):

$$\cos x \approx 1 - \frac{1}{2}x^2 + \dots \quad \text{si } 0 < x \ll 1$$

que, aplicat a (8.33), dona lloc a

$$\omega_n^2 = \lim_{\substack{m, h \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}} \frac{2F}{mh} \left(1 - \cos \frac{n\pi}{N+1} \right) \approx \frac{2F}{mh} \left(1 - 1 + \frac{1}{2} \frac{n^2 \pi^2}{N^2} \right) = n^2 \pi^2 \frac{F}{NmNh}$$

i, com que $\mu = Nm/L$ i $L = Nh$, llavors tenim

$$\omega^2 = n^2 \pi^2 \frac{F}{\mu L^2}$$



o, el que és el mateix,

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = n \frac{c}{2L} \quad (8.45)$$

on hem introduït la celeritat c de les ones transversals (8.43).

Pel que fa a les amplituds $A_i^{(n)}$ donades a (8.34), com que $x_i = (i-1)h$, tindrem, quan $N \rightarrow \infty$, que

$$\text{si } N \rightarrow \infty \quad \text{llavors} \quad \frac{n i \pi}{N+1} \approx n \pi \frac{x_i + h}{Nh} \approx \frac{n \pi x}{L}$$

i, per tant, quedaran com

$$A_i^{(n)} = \mathcal{A}_n \sin\left(\frac{n \pi x}{L}\right) \quad (8.46)$$

Així doncs, per al cas continu, l'expressió (8.35) es transforma en aquesta altra

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n \sin\left(n \frac{\pi x}{L}\right) \cos\left(n \frac{2\pi c t}{2L}\right) \quad (8.47)$$

Si, com és molt habitual, anomenem *longitud d'ona* λ_n i *període* T_n a

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \quad T_n = \frac{2L}{nc} = \frac{\lambda_n}{c}$$

llavors, (8.47) es pot posar com

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_n} x\right) \cos\left(\frac{2\pi}{T_n} t\right) \quad (8.48)$$

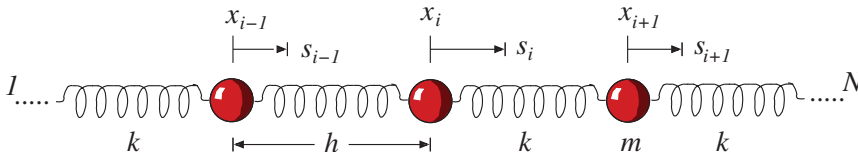
Fixeu-vos que, si prenem una x concreta, la funció $y(t)$ que en resulta és una sèrie de Fourier en t com les que vèiem al capítol 5, i també, si prenem un instant t concret, la $y(x)$ és una sèrie de Fourier en x . La funció $y(x, t)$ de (8.48) és, doncs, *la superposició d'ones estacionàries en una corda de longitud L amb els dos extrems, $x = 0$ i $x = L$, fixats, és a dir, tals que $y(0, t) = y(L, t) = 0$.*

8.5.2. Oscil·lacions i ones longitudinals

Per acabar aquest capítol, vegem com de les oscil·lacions longitudinals també sorgeixen ones longitudinals.

Com s'ha fet a tot aquest capítol, designem s_{i-1} , s_i i s_{i+1} els desplaçaments longitudinals respecte de la posició corresponent d'equilibri de les partícules $i-1$, i i $i+1$, respectivament —v. figura 8.17.

Figura 8.17





Amb aquesta notació, l'equació del moviment per a la partícula i és

$$m \frac{d^2 s_i}{dt^2} = k(s_{i+1} - s_i) - k(s_i - s_{i-1}) \quad (8.49)$$

igualtat que també es pot posar de la forma següent:

$$\frac{\left(\frac{s_{i+1} - s_i}{h}\right) - \left(\frac{s_i - s_{i-1}}{h}\right)}{h} - \left(\frac{m}{kh^2}\right) \frac{d^2 s_i}{dt^2} = 0 \quad (8.50)$$

Aquesta equació és, matemàticament, idèntica a l'equació (8.42). Això vol dir que, si fem el pas al límit $N \rightarrow \infty$ i $h, m \rightarrow 0$, mantenint, com abans, la densitat μ i la longitud L del sistema constants, la igualtat (8.50) se'ns transformarà en una equació d'ona com ara la (8.44), però per al desplaçament $s(x, t)$, amb una celeritat de propagació c_ℓ donada per

$$c_\ell^2 = \lim_{\substack{m, h \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}} \frac{kh^2}{m} = \frac{1}{\mu} \cdot \lim_{\substack{m, h \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}} kh \quad (8.51)$$

és a dir,

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} - \frac{1}{c_\ell^2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0 \quad (8.52)$$

D'altra banda, què significa el límit (8.51)? Vegem-ho.

De la igualtat (1.15) de l'exemple 1.2, sabem que, si unim en sèrie N molles iguals de constant de força individual k , n'obtenim una molla resultant de constant $K = k/N$. Per tant, si apliquem a aquesta molla resultant —de constant $K = k/N$ i longitud $L = Nh$ — una força F , s'allargarà el percentatge $\Delta L/L$ donat per

$$F = -K \Delta L = -\frac{k}{N} \Delta L = -\mathcal{F} \frac{\Delta L}{L} \quad \text{essent} \quad \mathcal{F} = \frac{k}{N} L = kh$$

Així doncs, $\mathcal{F}$ és la força necessària que caldria aplicar a la molla per tal que s'allargués el percentatge $\Delta L/L = 1$.

Per tant, la celeritat c_ℓ donada a (8.51) es pot posar com

$$c_\ell = \sqrt{\frac{\mathcal{F}}{\mu}} \quad (8.53)$$

Observeu que $\mathcal{F}$, igual que μ , —i, per extensió, c_ℓ — és una característica de la molla independent de la longitud d'aquesta, a diferència de k o k/N , que sí que en depenen.

Naturalment, per a aquestes ones longitudinals també són vàlids els raonaments que hem vist sobre els infinits modes normals n i freqüències pròpies: només cal canviar la tensió externa F pel paràmetre del sistema $\mathcal{F} = kh$.

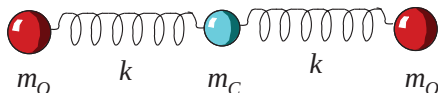
8.6. Problemes resolts i problemes proposats

8.6.1. Problemes resolts

Problema 8.1. Oscil·lacions acoblades de la molècula de CO_2

Una partícula de massa m_o està unida per mitjà d'una molla de constant k a una altra de massa m_c , i aquesta a una tercera de massa m_o per una altra molla idèntica a la primera —v. figura 8.18—, en un conjunt que constitueix un sistema d'oscil·ladors longitudinals acoblats.

Figura 8.18



- Trobeu l'equació característica del sistema i, a partir d'ella, les freqüències pròpies i els modes normals de les oscil·lacions lineals. Comproveu que una de les solucions de l'equació característica és zero i que, per tant, només hi ha dos modes normals.
- Per la química, sabem que la molècula de CO_2 respon a un model com ara aquest sistema que acabem d'exposar, en què les partícules són els àtoms d'oxigen i de carboni, de masses atòmiques relatives 16 i 12, respectivament. En aquest cas, quin és el quocient entre les dues freqüències pròpies de la molècula en vibració longitudinal?
- Trobeu els dos modes normals d'oscil·lació longitudinal.

Solució

- Després d'aplicar la segona llei de Newton a cada partícula, les equacions del moviment són

$$\begin{aligned} m_o \ddot{s}_1 &= -k(s_1 - s_2) &= -ks_1 + ks_2 \\ m_c \ddot{s}_2 &= +k(s_1 - s_2) - k(s_2 - s_3) &= +ks_1 - 2ks_2 + ks_3 \\ m_o \ddot{s}_3 &= +k(s_2 - s_3) &= +ks_2 - ks_3 \end{aligned}$$

Provant

$$s_1 = A_1 \cos \omega t \quad s_2 = A_2 \cos \omega t \quad s_3 = A_3 \cos \omega t$$

resulta

$$\left. \begin{aligned} -m_o \omega^2 A_1 &= -kA_1 + kA_2 \\ -m_c \omega^2 A_2 &= +kA_1 - 2kA_2 + kA_3 \\ -m_o \omega^2 A_3 &= +kA_2 - kA_3 \end{aligned} \right\}$$

és a dir,

$$\begin{pmatrix} k - m_o \omega^2 & -k & 0 \\ -k & 2k - m_c \omega^2 & -k \\ 0 & -k & k - m_o \omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = 0 \quad (1)$$



equació característica

$$\begin{vmatrix} k - m_o \omega^2 & -k & 0 \\ -k & 2k - m_c \omega^2 & -k \\ 0 & -k & k - m_o \omega^2 \end{vmatrix} = (k - m_o \omega^2) [(k - m_o \omega^2)(2k - m_c \omega^2) - 2k^2] = 0$$

d'on surten les freqüències pròpies corresponents als tres modes normals:

$$\omega_1^2 = \frac{k}{m_o} \quad \omega_2^2 = \frac{k(m_c + 2m_o)}{m_o m_c} \quad \omega_3 = 0$$

b) Pel que fa a la molècula de CO_2 , el quocient ω_2/ω_1 , amb $m_o/m_c = 16/12$, val

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \sqrt{1 + 2 \frac{m_o}{m_c}} = 1,91$$

c) Si substituïm ω_1^2 a (1), es dedueix que $A_2 = 0$, $A_3 = -A_1$, és a dir, $s_1(t) = -s_2(t)$, $s_3 = 0$, que es correspon amb el mode normal de les oscil·lacions contraposades —v. figura 8.19 (a). Si substituïm ω_2^2 a (1) ara trobem que $s_1(t) = s_3(t) = -\frac{m_c}{2m_o} s_2$ —v. figura 8.19 (b).

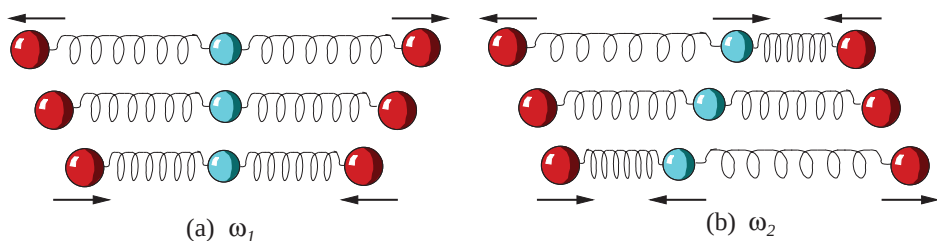


Figura 8.19

Problema 8.2. Dos oscil·ladors acoblats

A la figura 8.20, s'han representat dues partícules iguals de massa m , lligades per dues molles de la mateixa constant k a una paret fixa. El sistema descansa sobre una superfície horitzontal sense fricció.

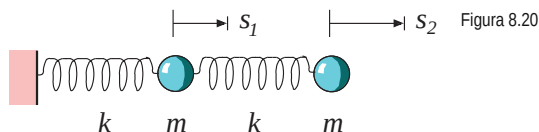


Figura 8.20

Esbrineu:

- Les dues freqüències pròpies.
- Els modes normals de vibració del sistema.
- Canviaria res de substancial si el conjunt pengés verticalment del sostre i estigués sotmès al pes de les partícules?

**Solució**

a) En aquest cas, les equacions del moviment són

$$\begin{aligned} m\ddot{s}_1 &= -ks_1 - k(s_1 - s_2) = -2ks_1 + ks_2 \\ m\ddot{s}_2 &= -k(s_2 - s_1) = +ks_1 - ks_2 \end{aligned}$$

Provant solucions del tipus

$$s_1 = A_1 \cos \omega t \quad s_2 = A_2 \cos \omega t$$

resulta

$$\left. \begin{aligned} -m\omega^2 A_1 &= -2kA_1 + kA_2 \\ -m\omega^2 A_2 &= +kA_1 - kA_2 \end{aligned} \right\}$$

és a dir,

$$\begin{pmatrix} 2k - m\omega^2 & -k \\ -k & k - m\omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = 0 \quad (1)$$

equació característica

$$\begin{vmatrix} 2k - m\omega^2 & -k \\ -k & k - m\omega^2 \end{vmatrix} = (2k - m\omega^2)(k - m\omega^2) - k^2 = (m\omega^2)^2 - 3k(m\omega^2) + k^2 = 0$$

de la qual surten les freqüències pròpies corresponents als dos modes normals:

$$\omega_1^2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \frac{k}{m} \quad \omega_2^2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \frac{k}{m}$$

b) Pel que fa als modes normals:

- Si ara substituïm ω_1^2 a (1) trobem que

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}+1}{2} & -1 \\ -1 & \frac{\sqrt{5}-1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{d'on:} \quad A_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} A_1$$

- Si substituïm ω_2^2 a (1), trobem que

$$\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{5}-1}{2} & -1 \\ -1 & -\frac{\sqrt{5}+1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{d'on:} \quad B_2 = -\frac{\sqrt{5}-1}{2} B_1$$



Així, el moviment general del sistema és la superposició dels dos modes normals

$$s_1(t) = A \cos \omega_1 t + B \cos \omega_2 t$$

$$s_2(t) = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2} \right) A \cos \omega_1 t - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right) B \cos \omega_2 t$$

on les constants A i B queden determinades per les posicions inicials.

- c) Només canviaria que les molles serien una mica més llargues per tal que aquests estiraments compensessin els pesos de les masses, però no canviarien ni els períodes, ni les amplituds, ni els modes d'oscil·lació.

Problema 8.3. Dos oscil·ladors... acoblats per un amortidor comú

A la figura 8.21, es presenta el cas de dos oscil·ladors simples de tipus molla-massa iguals, interconnectats per mitjà d'un amortidor comú.

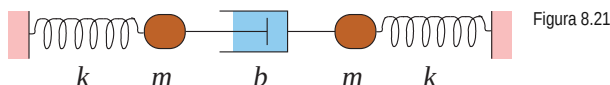


Figura 8.21

Si k , m i b són les constants de les molles, les masses i l'amortidor, respectivament, llavors:

- Esbrineu les equacions diferencials del moviment de les dues masses en funció dels desplaçaments s_1 i s_2 i, fent el canvi de variables, $\xi_1 = s_1 + s_2$, $\xi_2 = s_1 - s_2$, reescriu-les en aquestes variables separables. Quines són les freqüències pròpies del sistema?
- Comproveu que, en el moviment general del sistema, hi ha un estat transitori inicial per passar, un temps després, a un estat estacionari.

Solució

- Després d'aplicar-hi la segona llei de Newton, trobem les dues equacions del moviment

$$\begin{aligned} m\ddot{s}_1 &= -ks_1 - b(\dot{s}_1 - \dot{s}_2) \\ m\ddot{s}_2 &= -ks_2 + b(\dot{s}_1 - \dot{s}_2) \end{aligned} \quad (1)$$

Llavors, fent el canvi,

$$\xi_1 = s_1 + s_2 \quad \xi_2 = s_1 - s_2 \quad (2)$$

les equacions (1) es poden reescriure en variables separables com

$$\ddot{\xi}_1 = -\frac{k}{m}\xi_1 \quad \ddot{\xi}_2 = -\frac{k}{m}\xi_2 - \frac{2b}{m}\dot{\xi}_2$$

És a dir, a ξ_1 li correspon l'equació diferencial d'un MHS i a ξ_2 , una oscil·lació harmònica amortida —v. secció §2.2. Per tant,



$$\xi_1(t) = 2A \cos(\omega_0 t + \phi) \quad \xi_2(t) = 2B e^{-\beta t} \cos(\omega_1 t + \varphi)$$

on, pel que sabem d'aquests moviments, les constants β , ω_0 i ω_1 —aquestes dues últimes, les freqüències pròpies del sistema— valen

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \beta = \frac{b}{m}, \quad \omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

i A , B , ϕ i φ depenen de les condicions inicials.

b) Així, l'equació general del moviment serà la superposició

$$s_1(t) = \frac{\xi_1 + \xi_2}{2} = A \cos(\omega_0 t + \phi) + B e^{-\beta t} \cos(\omega_1 t + \varphi)$$

$$s_2(t) = \frac{\xi_1 - \xi_2}{2} = A \cos(\omega_0 t + \phi) - B e^{-\beta t} \cos(\omega_1 t + \varphi)$$

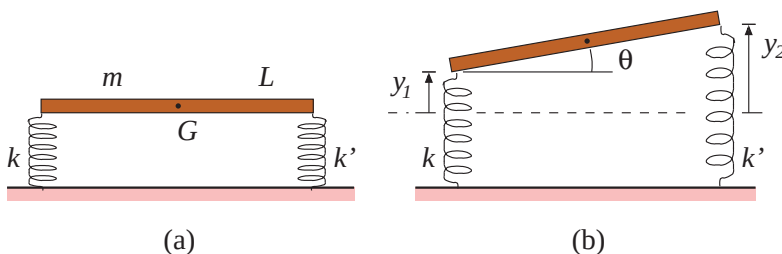
Fixem-nos que, com ara en les oscil·lacions forçades, hi ha un estat transitori inicial i un estat estacionari al qual s'arriba quan l'exponencial s'ha fet gairebé zero. En aquest últim, les velocitats de les dues masses són pràcticament iguals i, per tant, no hi ha fricció viscosa. Així doncs,

$$s_{1\text{est}}(t) = s_{2\text{est}}(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi)$$

Problema 8.4. Oscil·lacions acoblades: barra sobre dues molles, I

Un barra homogènia de longitud L i massa m està suspesa horitzontalment en equilibri per l'acció de dues molles verticals de constants k i k' —v. figura 8.22 (a). En un moment determinat es treu la barra de l'equilibri i tant el seu centre de masses G com la inclinació θ de la barra amb l'horitzontal comencen a efectuar oscil·lacions —v. figura 8.22 (b). Les molles i el centre de la barra masses només poden desplaçar-se verticalment i la inclinació de la barra és, en tot moment, petita.

Figura 8.22



Suposeu que $k' = k$. Observant la simetria d'aquest cas, trobeu quins són els dos modes normals d'oscil·lació de la barra. Quant valen les freqüències pròpies corresponents? De les dues, una és immediata; l'altra porta una mica més de feina.

Nota: Fixeu-vos que el pes de la barra, constant, es compensa amb una encongiment inicial de les molles i, per tant, aquí no fa cap paper i es pot negligir.



Solució

Si $k' = k$, els dos modes normals són:

- el concordant: $y_1(t) = y_2(t) = A \cos \omega_1 t$, $\theta(t) = 0$, amb $\omega_1^2 = \frac{2k}{m}$, i
- el contraposat: $y_2(t) = -y_1(t) = B \cos \omega_2 t$, $\theta(t) = \frac{2B}{L} \cos \omega_2 t$, i com que, per la segona llei de Newton per a la rotació, tenim que

$$\frac{1}{12} m L^2 \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\frac{L}{2} k (2y) = -\frac{k}{2} L^2 \frac{2y}{L} \approx -\frac{k}{2} L^2 \theta$$

acaba resultant: $\omega_2^2 = \frac{6k}{m}$.

Problema 8.5. Oscil·lacions acoblades: barra sobre dues molles, II

Suposem que al problema anterior no hi ha simetria sinó que: $k' = 2k$.

- Plantegeu la segona llei de Newton per al desplaçament del centre de masses i per a la rotació de la barra i d'aquí trobeu les equacions diferencials del moviment en funció dels dos allargaments de les molles respecte de la posició inicial d'equilibri, y_1 i y_2 .
- Trobeu l'equació característica del sistema i les seves freqüències pròpies.

Solució

- Aplicant la segona llei de Newton per a la translació del centre de masses i per a la rotació de la barra entorn seu, tenim

$$\begin{aligned} m \frac{1}{2} \frac{d^2 (y_2 + y_1)}{dt^2} &= -k y_1 - k' y_2 \\ I_G \frac{d^2 \theta}{dt^2} &= \frac{L}{2} (k y_1 - k' y_2) \end{aligned} \quad (1)$$

Considerant que $k' = 2k$ i que

$$\tan \theta \approx \theta = \frac{y_2 - y_1}{L}, \quad I_G = \frac{1}{12} m L^2$$

llavors les equacions (1) es poden posar com

$$\begin{aligned} \frac{m}{k} \frac{d^2 (y_2 + y_1)}{dt^2} &= -2y_1 - 4y_2 \\ \frac{m}{k} \frac{d^2 (y_2 - y_1)}{dt^2} &= +6y_1 - 12y_2 \end{aligned} \quad (8.54)$$



I, restant i sumant aquestes equacions, resulten

$$\begin{aligned}\frac{m}{k} \frac{d^2 y_1}{dt^2} &= -4y_1 + 4y_2 \\ \frac{m}{k} \frac{d^2 y_2}{dt^2} &= +2y_1 - 8y_2\end{aligned}\quad (8.55)$$

b) Llavors, l'equació característica és

$$\begin{vmatrix} 4k - m\omega^2 & -4k \\ -2k & 8 - m\omega^2 \end{vmatrix} = (m\omega^2)^2 - 12k(m\omega^2) + 24k^2 = 0$$

d'on resulten les dues freqüències pròpies

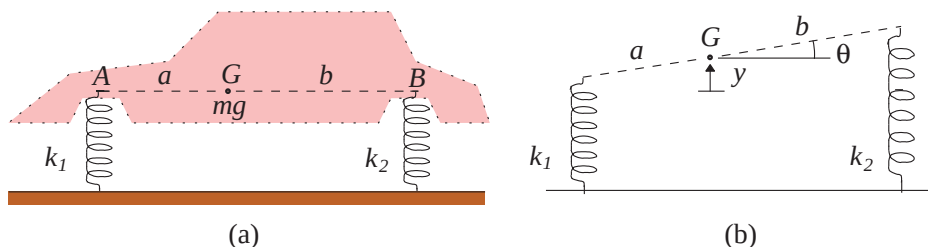
$$\omega^2 = \left(6 \pm \sqrt{12}\right) \frac{k}{m}$$

és a dir, $\omega_1 = 3,076\sqrt{k/m}$ i $\omega_2 = 1,592\sqrt{k/m}$.

Problema 8.6. Oscil·lacions longitudinals normals d'un cotxe

Per tal d'estudiar les vibracions longitudinals d'un cotxe, aquest es pot esquematitzar, en una primera aproximació, com una barra AGB , de massa m , que descansa sobre dos parells de molles i en què G , el centre de masses, és a la distància $\overline{AG} = a$ de la primera molla, de constant k_1 , i a la $\overline{GB} = b$ de la segona, de constant k_2 —v. figura 8.23 (a).

Figura 8.23



Per concretar, suposem que les dades sobre el cotxe són: la massa $m = 1400$ kg; les distàncies $\overline{AG} = a = 1,20$ m i $\overline{GB} = b = 1,80$ m; les constants dels parells de molles són $k_1 = 128$ kN/m i $k_2 = 140$ kN/m, i el radi de gir del cotxe respecte del centre G és $R_g = 1,40$ m.

Plantegeu les equacions del moviment per a les coordenades y i θ que es mostren a la figura 8.23 (b), és a dir, y , o elongació vertical del centre de masses G , i θ , o angle de gir θ de AGB , i esbrineu les dues freqüències normals de vibració.

Solució

Aplicant la segona llei de Newton per a la translació del centre de masses G i per a la rotació del cotxe “ AGB ” al voltant de G , tenim

$$\begin{aligned}m\ddot{y} &= -k_1(y - a\theta) - k_2(y + b\theta) \\ I\ddot{\theta} &= ak_1(y - a\theta) - bk_2(y + b\theta)\end{aligned}$$



és a dir,

$$\begin{aligned}\ddot{y} + \alpha y + \beta \theta &= 0 \\ \ddot{\theta} + \gamma y + \delta \theta &= 0\end{aligned}$$

amb

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{k_1 + k_2}{m} = 191,4 \text{ rad/s}^2 & \beta &= \frac{k_2 b - k_1 a}{m} = 70,29 \text{ m/s}^2 \\ \gamma &= \frac{k_2 b - k_1 a}{I} = \frac{\beta}{R_g^2} = 35,86 \text{ m}^{-1} \cdot \text{s}^2 & \delta &= \frac{k_1 a^2 + k_2 b^2}{I} = 232,5 \text{ s}^{-2}\end{aligned}$$

Provant les funcions $y = A \cos \omega t$ i $\theta = \Theta \cos \omega t$, trobem

$$\begin{aligned}(\alpha - \omega^2)A + \beta \Theta &= 0 \\ \gamma A + (\delta - \omega^2)\Theta &= 0\end{aligned}$$

Les freqüències ω que fan que aquest sistema tingui solució no trivial són les arrels d'igualar el determinant del sistema a zero, és a dir,

$$(\alpha - \omega^2)(\delta - \omega^2) - \beta\gamma = 0$$

i, per tant,

$$\omega^4 - \lambda \omega^2 + \mu = 0, \quad \text{amb } \lambda = \alpha + \delta = 423,9 \text{ s}^{-2}, \quad \mu = \alpha\delta - \beta\gamma = 4,199 \times 10^4 \text{ s}^{-4}$$

d'on resulten $\omega_1 = 12,56 \text{ rad/s}$, i $\omega_2 = 16,31 \text{ rad/s}$, o, el que és equivalent, els períodes $0,500 \text{ s}$ i $0,385 \text{ s}$.

Problema 8.7. Oscil·lacions acoblades forçades.

Un bloc de massa m sobre el qual actua la força harmònica $F(t) = F_0 \cos \omega t$ està unit per mitjà d'una molla de constant k a l'extrem inferior d'una barra homogènia de massa M i longitud L , que penja per l'extrem superior O del sostre com una mena de pèndol físic —v. figura 8.24.

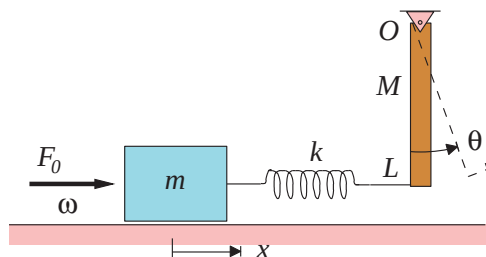


Figura 8.24

Sabent que els moviments del pèndol, la molla i el bloc estan en el mateix pla vertical, que les oscil·lacions de la barra són de petita amplitud i que les friccions són negligibles:

- a) Si $L = 0,5 \text{ m}$, $m = M = 1 \text{ kg}$, $k = 100 \text{ N/m}$, estudieu el moviment del bloc a l'estat estacionari.



- b) Per a quina freqüència ω el bloc no oscil·larà?
- c) I per a quines freqüències ω el sistema entrarà en ressonància? Compareu aquestes freqüències amb freqüències significatives de les parts del sistema: molla-massa, pèndol físic, barra lligada a molla.

Solució

- a) L'equació del moviment rectilini del bloc i la del moviment angular de la barra per a les coordenades x i θ , respectivament, vénen donades per l'aplicació de la segona llei de Newton per a la translació del bloc i per a la rotació del pèndol. Prenent l'origen de x a la posició del bloc corresponent a la longitud natural del bloc i la barra penjant verticalment, i prenent els moments de les forces respecte del centre de rotació O , tenim

$$m\ddot{x} = -k(x - L\theta) + F_0 \cos \omega t$$

$$\left(\frac{1}{3}ML^2\right)\ddot{\theta} = -Mg\frac{L}{2}\theta - k(L\theta - x)L$$

on ja hem substituït el moment d'inèrcia I_O de la barra respecte del seu extrem O pel valor $ML^2/3$. A l'estat estacionari, els moviments d'ambdós cossos seran harmònics simples de la mateixa freqüència ω que la força impulsora F i, com que no hi ha fricció, en fase amb aquesta. Així, podem suposar oscil·lacions forçades del tipus

$$x(t) = A \cos \omega t, \quad \theta(t) = \Theta \cos \omega t \quad (2)$$

Substituint x i θ a les equacions anteriors i simplificant el $\cos \omega t$ comú, queda el sistema següent de dues equacions algebraïques amb dues incògnites:

$$\begin{pmatrix} k - m\omega^2 & -kL \\ -kL & kL^2 + Mg\frac{L}{2} - \frac{1}{3}ML^2\omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ \Theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aplicant la regla de Cramer, resollem aquest sistema trobant

$$A = \frac{\begin{vmatrix} F_0 & -kL \\ 0 & (kL^2 + Mg\frac{L}{2} - \frac{1}{3}ML^2\omega^2) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} k - m\omega^2 & -kL \\ -kL & (kL^2 + Mg\frac{L}{2} - \frac{1}{3}ML^2\omega^2) \end{vmatrix}} = \frac{3k + k_p - M\omega^2}{mM\omega^4 - (kM + 3km + k_p m)\omega^2 + kk_p} F_0$$

$$A = \frac{329,4 - \omega^2}{\omega^4 - 429,4\omega^2 + 2943} \quad \text{amb} \quad k_p = \frac{3g}{2L}M = 29,43 \text{ N/m} \quad (1)$$

- b) Observant el numerador anterior, veiem que el bloc no oscil·larà si

$$\omega = \sqrt{\frac{3k + k_p}{M}} = 18,15 \text{ rad/s}$$



Ho podem comparar amb les freqüències més significatives del sistema:

- Freqüència molla-massa: $\omega_m = \sqrt{\frac{k}{m}} = 10,00 \text{ rad/s}$
- Freqüència pèndol-barra: $\omega_p = \sqrt{\frac{3g}{2L}} = 5,425 \text{ rad/s}$
- Freqüència molla-barra: $\omega_b = \sqrt{\frac{3k}{M}} = 17,32 \text{ rad/s}$

- c) La ressonància s'assolirà a les freqüències en què s'anul·li el denominador de (1), és a dir, en les dues freqüències pròpies solucions de

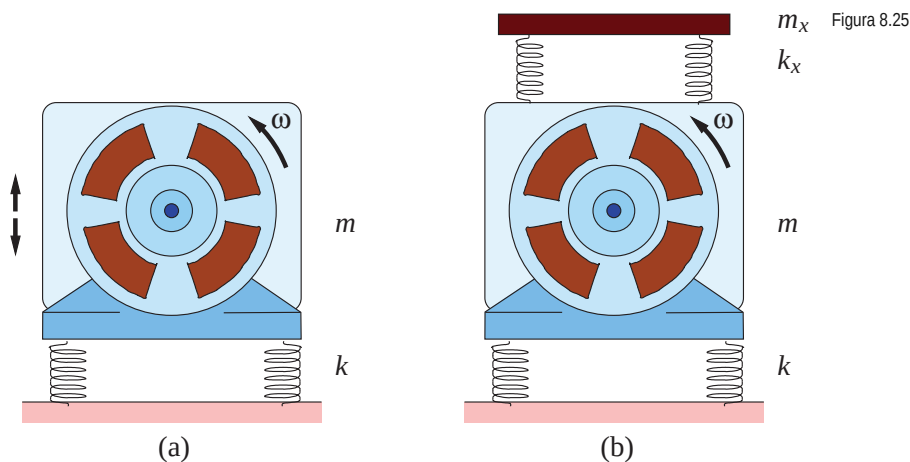
$$\omega^4 - 429,4 \omega^2 + 2943 = 0$$

equació biquadrada de la qual resulta: $\omega^2 = 214,7 \pm 207,8 \text{ rad}^2/\text{s}^2$, és a dir: $\omega_1 = 20,55 \text{ rad/s}$ i $\omega_2 = 2,64 \text{ rad/s}$. De fet, del denominador de (1), amb ω^4 , veiem que l'amplitud A és pràcticament nul·la per a totes les ω excepte les ω_1 i ω_2 pròpies del sistema.

Problema 8.8. Absorbidor de les vibracions forçades d'un motor

Un motor giratori pesant està fixat al terra a través d'unes potes elàstiques —que actuen com unes molles: v. figura 8.25 (a). La velocitat angular del motor ω_m coincideix, aproximadament, amb freqüència natural del sistema motor-potes, ω_0 , la qual cosa, provoca unes vibracions molestes. Es pretén reduir-les col·locant sobre el motor un altre sistema molla-massa per tal que n'absorbeixi les vibracions —v. figura 8.25 (b).

- a) Quina massa m_x i quina constant de força k_x ha de tenir l'absorbidor, relatives a la massa m i constant k de les potes, per tal que elimini les vibracions i, a més a més, les dues noves freqüències pròpies del conjunt motor-absorbidor difereixin, com a mínim, un 20% de ω ?
- b) Apliqueu els resultats a un cas en què la massa del motor és $m = 32 \text{ kg}$ i gira a $\omega_m = 5000 \text{ rpm}$.



**Solució**

- a) Amb l'absorbidor col·locat sobre el motor, tenim un sistema de dos oscil·ladors acoblats amb una de les masses, el motor, sotmesa a una força externa harmònica. Tal com es dedueix a l'exemple 8.2, l'amplitud de l'oscil·lació forçada del motor ve donada per l'expressió (8.28), que és

$$A = \frac{k_x - m_x \omega_m^2}{(k + k_x - m \omega_m^2)(k_x - m_x \omega_m^2) - k_x^2} F_0 \quad (1)$$

en la qual F_0 és l'amplitud de la força ocasionada pel gir del motor, valor desconegut però que és irrellevant en aquest cas.

De la primera condició —que s'eliminin les vibracions del motor—, trobem, veient (1), que $k_x/m_x = \omega_m^2$. D'altra banda, la freqüència natural de vibracions del motor amb potes és $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, que, segons l'enunciat, coincideix bastant bé amb ω_m . Per tant, s'eliminen les vibracions del motor si

$$\frac{k_x}{m_x} = \omega_m^2 \approx \frac{k}{m} \quad (2)$$

Els valors de k_x i m_x per separat els trobarem imposant la segona condició, la del 25%. En efecte, com sabem de l'exemple 8.2, les dues freqüències pròpies del conjunt motor-absorbidor són les arrels del polinomi a ω^4 del denominador de l'equació (1)

$$(k + k_x - m\omega^2)(k_x - m_x\omega^2) - k_x^2 = 0$$

Dividint la igualtat per kk_x , queda

$$\left(1 + \frac{k_x}{k} - \frac{m}{k} \omega^2\right) \left(1 - \frac{m_x}{k_x} \omega^2\right) = 0$$

que també podem posar, per (2), com

$$\left(1 + \frac{k_x}{k} - \frac{\omega^2}{\omega_m^2}\right) \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_m^2}\right) - \frac{k_x}{k} = 0 \quad (3)$$

Si anomenem $\Omega = \frac{\omega}{\omega_m}$ i $K = \frac{k_x}{k}$, llavors (3) es pot reescriure com

$$\Omega^4 - (2 + K)\Omega^2 + 1 = 0 \quad (4)$$

igualtat que ens confirma el que ja sabíem: el sistema motor-absorbidor tindrà dues freqüències pròpies, relacionades amb Ω_1 i Ω_2 , les solucions de (4). Però no oblidem que en aquesta equació la incògnita és K i que Ω ens ve donat per l'enunciat:

$$\Omega_1 \leq 0,80, \quad \Omega_2 \geq 1,20 \quad (5)$$

Així, de (4)

$$K = \frac{\Omega^4 - 2\Omega^2 + 1}{\Omega^2} \quad (6)$$



d'on trobem

- si $\Omega = \Omega_1 = 0,80$, per (6): $K_1 = 0,203$;
- si $\Omega = \Omega_2 = 1,20$, per (6): $K_2 = 0,134$.

Quin d'aquests dos valors de K triem? Dependrà de les dues Ω solució de (4):

$$\Omega^2 = 1 + \frac{K}{2} \pm \sqrt{K + \frac{K^2}{4}} \quad (6)$$

expressió de la qual resulta

- si $K = K_1 = 0,203$, per (6): $\Omega_1 = 0,800$ i $\Omega_2 = 1,250$;
- si $K = K_2 = 0,134$, per (6): $\Omega_1 = 0,834$ i $\Omega_2 = 1,200$.

Dels dos valors possibles de K , només $K = \frac{k_x}{k} = 0,203$ satisfà les condicions (5) de l'enunciat. Així, per (2), hem trobat que les característiques de l'absorbidor que ens demana l'enunciat han de ser:

$$k_x = 0,203k \quad \text{i} \quad m_x = 0,203m$$

- b) Amb les dades finals de l'enunciat, resulten: $m_x = 0,203 \times 32 = 6,50 \text{ kg}$ i, com que $\omega_0 \approx \omega_m = 523,6 \text{ rad/s}$, llavors: $k_x \approx 0,203 \cdot m\omega_m^2 = 1,78 \times 10^6 = 17,8 \text{ kN/cm}$.

Problema 8.9. La corda discreta per a $N = 3$: oscil·lacions forçades

A la segona partícula del sistema de tres oscil·ladors idèntics molla-massa representats a la figura 8.26, se li aplica la força impulsora $f(t) = f_0 \cos \omega t$. Sabent que la tensió inicial F a què estan les molles és relativament gran i que les oscil·lacions transversals de les tres partícules seran petites:

- Esbrineu-ne el moviment a l'estat estacionari.
- Hi ha alguna freqüència per a la qual no hi hauria moviment?
- I per a quines freqüències es presentarà la ressonància de les oscil·lacions?

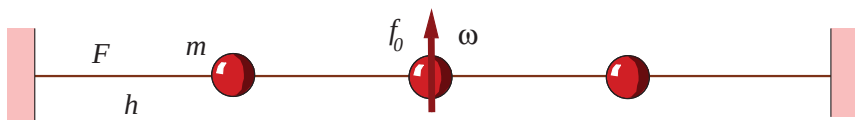
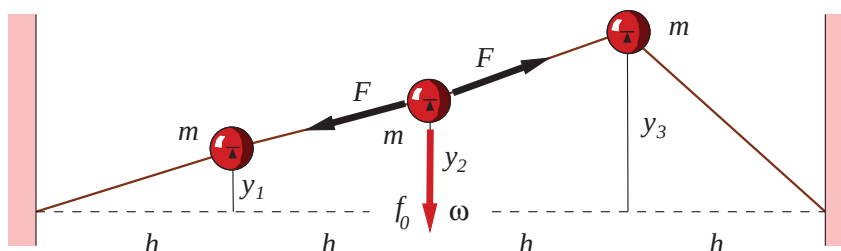


Figura 8.26

Solució

- a) Siguin y_1, y_2, y_3 les elongacions de les tres partícules en un instant qualsevol —v. figura 8.27, en què s'han representat les tres partícules i, per a la segona, les tres forces que actuen sobre ella: les dues tensions F , de mòdul igual però direccions diferents, i l'externa f_0 .

Figura 8.27



La segona llei de Newton, aplicada a les tres partícules, ens proporciona les tres equacions diferencials del moviment, que són

$$m \frac{d^2 y_1}{dt^2} = -F \frac{y_1}{h} - F \frac{y_1 - y_2}{h}$$

$$m \frac{d^2 y_2}{dt^2} = -F \frac{y_2 - y_1}{h} - F \frac{y_2 - y_3}{h} + f_0 \cos \omega t$$

$$m \frac{d^2 y_3}{dt^2} = -F \frac{y_3 - y_2}{h} - F \frac{y_3}{h}$$

Les equacions de moviment anteriors també es podem reescriure de la forma

$$\frac{mh}{F} \frac{d^2 y_1}{dt^2} = -2y_1 + y_2$$

$$\frac{mh}{F} \frac{d^2 y_2}{dt^2} = +y_1 - 2y_2 + y_3 + \frac{h}{F} f_0 \cos \omega t$$

$$\frac{mh}{F} \frac{d^2 y_3}{dt^2} = +y_2 - 2y_3$$

Provant

$$y_1 = A_1 \cos \omega t \quad y_2 = A_2 \cos \omega t \quad y_3 = A_3 \cos \omega t$$

en resulta el sistema de tres equacions amb les tres incògnites A_1 , A_2 i A_3

$$\begin{pmatrix} 2 - \frac{mh}{F} \omega^2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 - \frac{mh}{F} \omega^2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 - \frac{mh}{F} \omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Com ja hem fet en el problema 8.7, l'aplicació de la regla de Cramer a aquest sistema ens permet trobar les amplituds A_1 , A_2 i A_3 corresponents als MHS de l'estat estacionari. Així, trobem

$$A_1 = A_3 = \frac{W^2 (2W^2 - \omega^2)}{D} m^2 f_0 \quad A_2 = \frac{(2W^2 - \omega^2)^2}{D} m^2 f_0 \quad (1)$$



amb W i D que valen

$$W^2 = \frac{F}{mh}, \quad D = (\omega/W)^6 - 6(\omega/W)^4 + 10(\omega/W)^2 - 4 \quad (2)$$

b) De (1), observem que els numeradors de les amplituds A_i es fan zero si

$$\omega^2 = 2W^2 = \frac{2F}{mh}.$$

Per contra, les A_i és fan màximes —teòricament infinites— si ω és una de les tres freqüències pròpies ω_i arrels del polinomi (2), és a dir, les solucions de l'equació bicúbica $D = 0$. Aplicant-hi les fórmules per a les solucions de les equacions cúbiques —que podem trobar, per exemple, al *Manual de Fórmulas y Tablas de Matemática Aplicada*, de Spiegel, Abellanas i Liu— trobem les tres ω_i que, com es pot comprovar, són

$$\omega_1^2 = 2W^2 \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad \omega_2^2 = 2W^2, \quad \omega_3^2 = 2W^2 \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

8.6.2. Problemes proposats

Problema 8.10. Dos oscil·ladors acoblats

Si, en el cas dels dos oscil·ladors representats a la secció §8.1.1 amb què hem començat aquest capítol, considerem el cas general amb tres molles i dues partícules diferents entre si, de constants i masses, k_1 , m_1 , k_a , m_2 , i k_2 , respectivament, trobeu l'equació característica i les dues freqüències pròpies d'oscil·lació.

Resp.:

$$\omega^2 = \frac{k_1 + k_a}{2m_1} + \frac{k_a + k_2}{2m_2} \pm \sqrt{\left(\frac{k_1 + k_a}{2m_1} + \frac{k_a + k_2}{2m_2}\right)^2 - \frac{k_1 k_a + k_1 k_2 + k_a k_2}{m_1 m_2}} \quad (8.56)$$

Problema 8.11. Molla-massa acoblada a un pèndol

Com s'il·lustra a la figura 8.28, el punt de suspensió d'un pèndol simple està unit a un bloc que llisca sense fricció sobre una superfície horitzontal i que està lligat a una molla fixada a una paret. La longitud i la massa del pèndol, així com la constant de la molla i la massa del bloc són, respectivament, L , m_1 , k i m_2 .

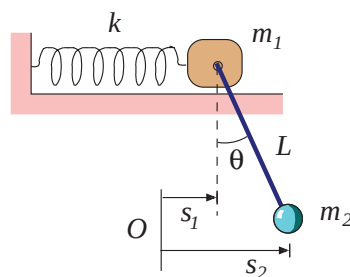


Figura 8.28

- Si les oscil·lacions del pèndol són de petita amplitud, esbrineu, fent-ne les aproximacions habituals, les equacions del moviment de les dues masses per als desplaçaments horitzontals s_1 i s_2 corresponents.
- Suposant ara $m_1 = m_2 = m$, esbrineu les dues freqüències pròpies del sistema.



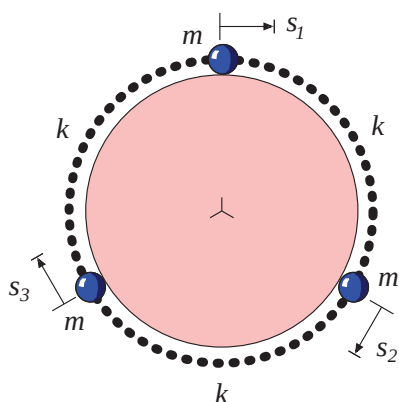
Resp.: a) $m_1 \ddot{s}_1 = -ks_1 + m_2 g \frac{s_2 - s_1}{L}$, $m_2 \ddot{s}_2 = -m_2 g \frac{s_2 - s_1}{L}$;

b) $\omega^2 = \frac{k}{2m} + \frac{g}{L} \pm \sqrt{\left(\frac{k}{2m}\right)^2 + \left(\frac{g}{L}\right)^2}$

Problema 8.12. Oscil·lacions acoblades de tres partícules

A la figura 8.29, es mostra un sistema de tres partícules idèntiques, de massa m , que es desplacen sense fricció sobre una guia circular. Si les partícules estan lligades entre si per molles ideals idèntiques de constant de força k que s'adapten a les guies circulars, trobeu-ne: a) l'equació característica; b) les freqüències pròpies del sistema, i c) els modes normals.

Figura 8.29



Resp.: a) $(\chi + 1)(\chi^2 - \chi - 2) = 0$, amb $\chi = 2 - m\omega^2/k$; b) $\omega_1 = 0$, $\omega_2^2 = \omega_3^2 = \frac{3k}{m}$,
c) mode 1: $s_1 = s_2 = s_3 = C_1 t + C_2$; mode 2: $s_1 = -s_2 = A \cos \omega_2 t$, $s_3 = 0$,
que poden ser indistintament la 1, la 2 o la 3.

Problema 8.13. Tres pèndols simples acoblats per dues molles iguals

Tres pèndols simples iguals, de longitud L i lentilles de masses m , estan acoblats entre si dos a dos per mitjà de dues molles iguals de constant k . Les molles estan lligades a les barres dels pèndols pels seus punts centrals, és a dir, a la distància $L/2$ de la lentilla. Trobeu-ne l'equació característica i les tres freqüències pròpies d'oscil·lació.

Resp.: $(mgL + kL^2/4 - mL^2\omega^2)[(mgL + kL^2/4 - mL^2\omega^2)$
 $(mgL + kL^2/2 - mL^2\omega^2) - k^2L^4/8] = 0$ d'on resulten:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{L}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{g}{L} + \frac{k}{4m}}, \quad \omega_3 = \sqrt{\frac{g}{L} + \frac{3k}{4m}}$$

Problema 8.14. Oscil·lacions de dues barres

Una barra de longitud L i massa m que només pot girar al voltant del seu extrem O està lligada per l'altre extrem a una molla de constant k —v. figura 8.30. De l'extrem



d'aquesta barra penja una altra molla, que també està lligada a l'extrem d'una altra barra articulada en O' . Aquestes segones molla i barra són idèntiques a les primeres. Esbrineu les dues freqüències pròpies del sistema.

Resp.: $\omega^2 = \frac{9 \pm 3\sqrt{5}}{2} \frac{k}{m}$

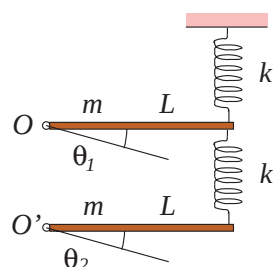


Figura 8.30

Problema 8.15. Oscil·lacions acoblades: modes normals

Quatre molles iguals de constant k i dos cossos de la mateixa massa m —com els que es representen a la figura 8.31— estan penjats del sostre. Les dues molles estan unides per una barra de massa negligible que pot pivotar al voltant del seu punt mitjà fix O . Sense escriure'n cap equació encara, imagineu quins són els dos modes d'oscil·lació normal del sistema. Ara sí, escrivint, plantegeu les equacions del moviment, trobeu-ne les dues freqüències pròpies i confirmeu que els dos modes normals que en resulten són els que s'han imaginat anteriorment.

Resp.: $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{2m}}$

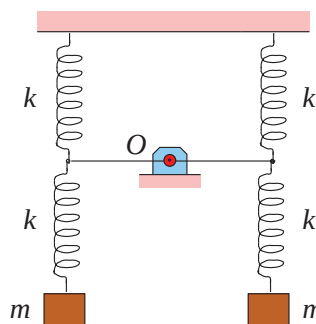


Figura 8.31

Problema 8.16. Oscil·lacions normals d'una taula sobre molles

Tenim una taula o placa rectangular homogènia, de massa m i costats a i b , disposada horitzontalment sobre quatre molles verticals iguals, de constant k , unides al terra —v. figura 8.32. Per consideracions de simetria, esbrineu quins són els tres modes normals d'oscil·lació de la placa i les freqüències pròpies corresponents.

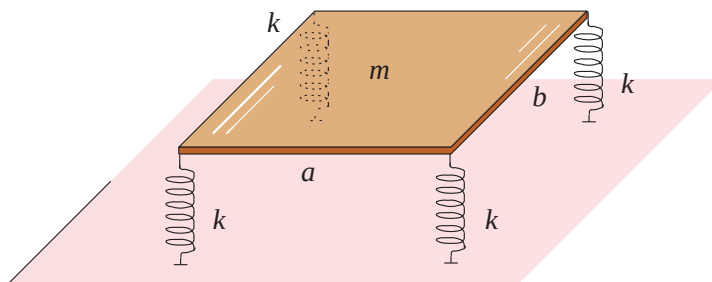


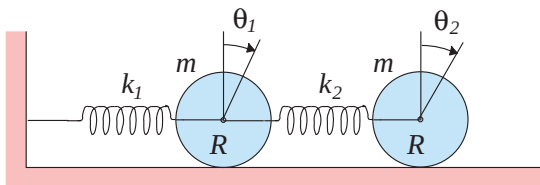
Figura 8.32

Resp.: $\omega_1 = \sqrt{\frac{4k}{m}}, \omega_2 = \omega_3 = \sqrt{\frac{12k}{m}}$

Problema 8.17. Oscil·lacions acoblades de dos cilindres units per molles

Com podem apreciar a la figura 8.33, dos cilindres iguals, de massa m i radi R , que roden sense lliscar sobre una superfície horitzontal, estan acoblats entre si per una molla de

Figura 8.33

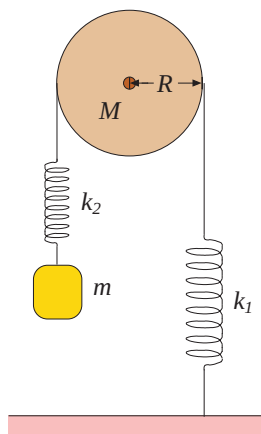


constant k , i un d'ells unit a una paret fixa per mitjà d'una altra molla com l'anterior. Trobeu les dues equacions de moviment dels cilindres en funció dels dos angles θ_1 i θ_2 girats.

Resp.: $\frac{3m}{2}\ddot{\theta}_1 - k_2\theta_2 + (k_1 + k_2)\theta_1 = 0, \quad \frac{3m}{2}\ddot{\theta}_2 + k_2\theta_2 - k_2\theta_1 = 0$

Problema 8.18. Oscil·lacions acoblades amb una politja

Figura 8.34



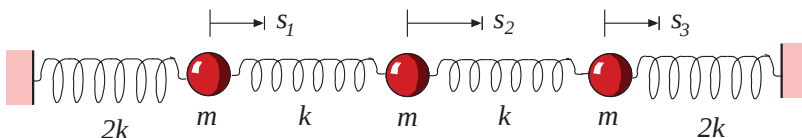
Tal com s'indica a la figura 8.34, una politja cilíndrica de massa M i radi R , lligada al terra per una molla de constant k_1 , s'acoba al bloc de massa m per mitjà de la molla de constant k_2 . Sabent que la corda que fa girar el cilindre no llisca, trobeu: a) les equacions de moviment del bloc i de la politja i l'equació característica corresponent, i b) si $k_1 = k_2 = k$ i $M = m$, les freqüències pròpies del sistema.

Resp.: a) $m\ddot{x} = -k_2(x - R\theta),$
 $\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\ddot{\theta} = -k_1R^2\theta - k_2R(R\theta - x);$
 $\omega^4 - \left(\frac{k_2M + 2(k_1 + k_2)m}{mM}\right)\omega^2 + \frac{2k_1k_2}{mM} = 0,$
 b) $\omega_1 = 0,6622\sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega_2 = 2,136\sqrt{\frac{k}{m}}$

Problema 8.19. Moviment general de 3 oscil·ladors acoblats

Siguin els tres oscil·ladors acoblats de la figura 8.35, en què les tres masses són iguals a m i les constants de les molles, $2k, k, k$ i $2k$, respectivament.

Figura 8.35



Esbrineu: a) les freqüències pròpies del sistema i b) les equacions generals del moviment de les partícules. c) Concretueu les equacions anteriors trobant les amplituds per al cas en què a $t = 0$ estan totes en els punts d'equilibri corresponents i en repòs excepte la segona massa, que, des de $s_2 = 0$, surt disparada amb una velocitat inicial v_0 cap a la tercera partícula.



Resp.: a) $\omega_1^2 = \frac{k}{m}$, $\omega_2^2 = \frac{3k}{m}$, $\omega_3^2 = \frac{4k}{m}$;

b) Si A_n i ϕ_n , per a $n = 1, 2, 3$, són constants que depenen de les condicions inicials, llavors el moviment més general ve donat per

$$\begin{pmatrix} s_1(t) \\ s_2(t) \\ s_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) \\ A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) \\ A_3 \cos(\omega_3 t + \phi_3) \end{pmatrix}$$

c) $s_1(t) = s_3(t) = \frac{v_0}{3\omega_1} \sin \omega_1 t - \frac{v_0}{3\omega_3} \sin \omega_3 t$,

$$s_2(t) = \frac{2v_0}{3\omega_1} \sin \omega_1 t + \frac{v_0}{3\omega_3} \sin \omega_3 t$$

Problema 8.20. Oscil·lacions acoblades forçades, 1

En el sistema de dos oscil·ladors representats a la figura 8.36 la paret a la qual està unit el primer vibra efectuant un MHS d'amplitud a i freqüència angular ω . Esbrineu les amplituds dels moviments de les dues partícules a l'estat estacionari.

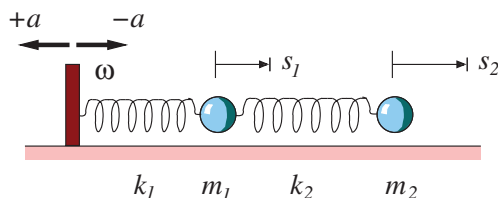


Figura 8.36

Resp.: $s_1 = A_1 \cos \omega t$, $s_2 = A_2 \cos \omega t$, $A_1 = \frac{k_1(k_2 - m_2 \omega^2)a}{D}$, $A_2 = \frac{k_1 k_2 a}{D}$,

amb $D = m_1 m_2 \omega^4 - (k_1 m_2 + k_2 m_1 + k_2 m_2) \omega^2 + k_1 k_2$

Problema 8.21. Oscil·lacions acoblades forçades, 2

En el sistema de dos oscil·ladors longitudinals representats a la figura 8.37, les constants de les molles són k_1 , k_a i k_2 , respectivament, mentre que les dues masses són iguals a m . Si sobre la primera partícula actua la força externa harmònica $F_1 \cos \omega t$ i sobre la segona, la $F_2 \cos \omega t$, ambdues en la direcció de les molles, esbrineu els moviments d'ambdues partícules a l'estat estacionari.

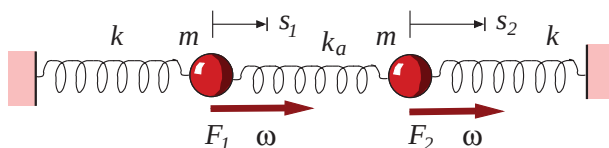


Figura 8.37

Resp.: $s_1 = A_1 \cos \omega t$, $s_2 = A_2 \cos \omega t$,

$$A_1 = \frac{F_1(k_a + k_2 - m\omega^2) + F_2 k_a}{m^2 D}, \quad A_2 = \frac{F_2(k_a + k_1 - m\omega^2) + F_1 k_a}{m^2 D},$$

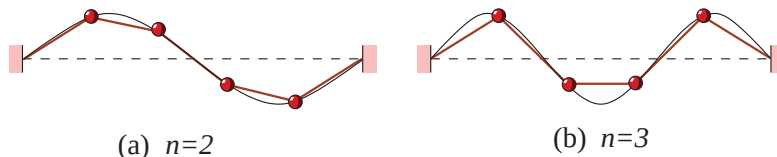
amb $D = m^2 \omega^4 - m(k_1 + 2k_a + k_2) \omega^2 + k_a(k_1 + k_2) + k_1 k_2$

Problema 8.22. Sobre la corda discreta

Com hem vist a l'exemple 8.3, podem esquematitzar fàcilment els N modes normals d'oscil·lació —sense fer cap càlcul— representant la gràfica de la funció $a_n(x)$ de (8.41) entre $x = 0$ i $x = Nh = L$: les partícules estaran sobre la corba sinusoidal a $x = ih$, $i = 1, \dots, N$. Reflexioneu què passaria per a $N = 4$.

Resp.: Per exemple, per a $n = 2$ i $n = 3$ —de $N = 4$ — queden, com es mostra a la figura 8.38,

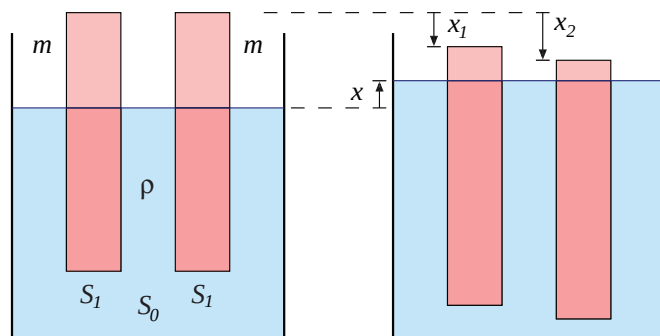
Figura 8.38



Problema 8.23. Principi d'Arquimedes i oscil·ladors acoblats

Al problema 1.7 hem vist com un bloc flotador de secció recta constant efectua oscil·lacions harmòniques simples pujant i baixant del líquid quan se'l treu de l'estat d'equilibri. Considerem ara un recipient cilíndric alt, de secció recta S_0 , amb líquid de densitat ρ fins a un nivell determinat, amb dos flotadors idèntics, de massa m i secció recta S_1 . A la figura 8.39 esquerra, es mostra el sistema en equilibri. Està clar que si, des de la posició d'equilibri, un flotador s'enfonsa x_1 i l'altre x_2 , llavors el nivell del líquid pujarà l'altura x —amb signes!— donada per $(x_1 + x_2)S_1 = -x(S_0 - 2S_1)$ i, si un flotador fa pujar el nivell del líquid en el recipient, això afecta l'altre flotador —v. figura 8.39 dreta. Tenim, doncs, dos oscil·ladors, els dos flotadors, amb l'acoblament que fa el líquid. Suposant que el líquid no se surti del recipient, ni els flotadors toquin el fons, etc., estudeu les oscil·lacions acoblades del sistema i esbrineu quant valen les dues freqüències pròpies. Fixeu-vos que aquest oscil·lador és equivalent al de molles i masses de l'exemple 8.1. En quines condicions hi haurà oscil·lacions polsants?

Figura 8.39



Resp.: $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, $\omega_2 = \sqrt{\frac{k+2k_a}{m}}$, amb $k = \rho g S_1$, $k_a = k \frac{S_1}{S_0 - 2S_1}$. Si $S_1 \ll S_0$.







Repàs de matemàtiques

A.1. Trigonometria

A.1.1. Triangles

- Per al triangle rectangle de la figura A.1 (a), tenim

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} \quad \cos \alpha = \frac{b}{c} \quad \tan \alpha = \frac{a}{b} \quad (\text{A.1})$$

$$\sec \alpha = \frac{c}{b} \quad \operatorname{cosec} \alpha = \frac{c}{a} \quad \cotg \alpha = \frac{b}{a} \quad (\text{A.2})$$

i d'aquestes definicions tenim, entre altres relacions,

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad \cotg \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} \quad (\text{A.3})$$

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} \quad \operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha} \quad (\text{A.4})$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad \sec^2 \alpha - 1 = \tan^2 \alpha \quad (\text{A.5})$$

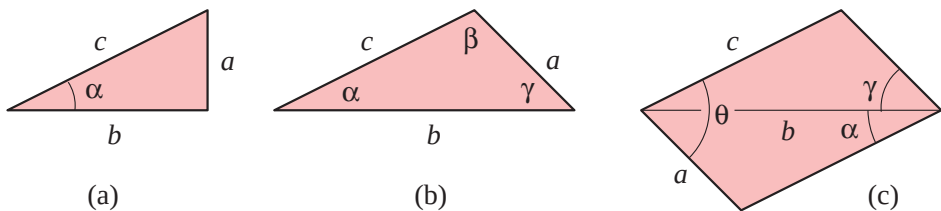


Figura A.1

- Per a un triangle qualsevol com el de la figura A.1 (b) anterior, tenim

$$\text{Suma dels angles:} \quad \alpha + \beta + \gamma = \pi \quad (\text{A.6})$$

$$\text{Llei dels sinus:} \quad \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} \quad (\text{A.7})$$



$$\text{Llei del cosinus: } b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta \quad (\text{A.8})$$

$$\text{Llei de la tangent: } \frac{a+b}{a-b} = \frac{\tan \frac{1}{2}(\alpha + \beta)}{\tan \frac{1}{2}(\alpha - \beta)} \quad (\text{A.9})$$

$$\text{Si } p = \frac{1}{2}(a+b+c), \quad \sin \alpha = \frac{2}{bc} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad (\text{A.10})$$

$$\text{Àrea del triangle: } A = \frac{1}{2}bc \sin \alpha \quad (\text{A.11})$$

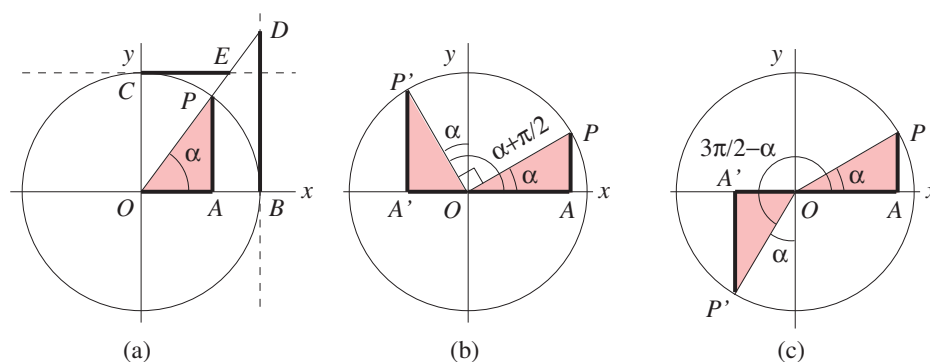
- Del rombe de la figura A.1 (c), tenim

$$\text{Mòdul de la suma de dos vectors: } b^2 = a^2 + c^2 + 2ac \cos \theta, \quad \theta = \alpha + \gamma \quad (\text{A.12})$$

A.1.2. Trigonometria

A la figura A.2 (a), mostrem una circumferència de radi la unitat i un punt P sobre ella. Els punts P , O i A determinen un triangle rectangle, i els segments OA i OP l'angle α .

Figura A.2



Amb la notació de la figura A.2, tenim que els valors de les funcions trigonomètriques de l'angle α són les longituds dels segments corresponents

$$\sin \alpha = \overline{AP} \quad \cos \alpha = \overline{OA} \quad \tan \alpha = \overline{BD} \quad \cotg \alpha = \overline{CE}$$

però amb signe: el sinus i la tangent són negatius si $\overline{AP}$ i $\overline{BD}$ van dirigits cap a les y decreixents, i el cosinus i la cotangent són negatius si $\overline{OA}$ i $\overline{CE}$ van dirigits cap a les x decreixents.

Aquesta representació gràfica de les funcions sinus, cosinus, etc. va molt bé com a regla mnemotècnica per recordar ràpidament relacions entre els valors de les funcions trigonomètriques d'un angle amb els del seu complementari, suplementari, etc. Per exemple, de la figura A.2 (b) veiem immediatament que

$$\cos \left(\alpha + \frac{\pi}{2} \right) = \overline{OA'} = -\overline{AP} = -\sin \alpha$$

I de la figura A.2 (c), per exemple

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \overline{A'P'} = -\overline{OA} = -\cos \alpha$$

En general, els resultats més importants són

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha \quad \cos(-\alpha) = \cos \alpha \quad (\text{A.13})$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \cos \alpha \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \mp \sin \alpha \quad (\text{A.14})$$

$$\sin(\pi \pm \alpha) = \mp \sin \alpha \quad \cos(\pi \pm \alpha) = -\cos \alpha \quad (\text{A.15})$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} \pm \alpha\right) = -\cos \alpha \quad \cos\left(\frac{3\pi}{2} \pm \alpha\right) = \pm \sin \alpha \quad (\text{A.16})$$

Atenció: Fixem-nos que $\sin \alpha = \sin(\pi - \alpha)$, de manera que el coneixement del sinus d'un angle no el determina, ni tan sols entre 0 i 2π . En efecte, hi ha dos valors possibles: α i $\pi - \alpha$. Per exemple, l'arcsinus de $1/2$ igual pot ser $\alpha = \pi/6$ que $\alpha = 5\pi/6$. Quin dels dos angles és el bo? Depèn de les altres dades del cas; si sabem, per exemple, que el $\cos \alpha$ és negatiu, llavors, $\alpha = 5\pi/6$. I el mateix es pot dir de les altres funcions trigonomètriques. Cal anar amb molt de compte amb les calculadores: les funcions $\arcsin x$, $\arccos x$, etc. només retornen un dels dos angles possibles i ha de ser el propi usuari, amb totes les dades del problema, qui ha de decidir quin dels dos angles és el que correspon al seu cas.

α	$0 = 0^0$	$\frac{\pi}{6} = 30^0$	$\frac{\pi}{4} = 45^0$	$\frac{\pi}{3} = 60^0$	$\frac{\pi}{2} = 90^0$	Sinus, cosinus i tangent d'alguns angles
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	
$\tan \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	

A.1.3. Igualtats trigonomètriques d'ús freqüent

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \quad (\text{A.17})$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \quad (\text{A.18})$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} \quad (\text{A.19})$$

$$A \sin \alpha + B \cos \alpha = \sqrt{A^2 + B^2} \sin(\alpha + \phi), \quad \text{amb } \tan \phi = B/A \quad (\text{A.20})$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \quad (\text{A.21})$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \quad (\text{A.22})$$



$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \quad (\text{A.23})$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \quad (\text{A.24})$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha) \quad (\text{A.25})$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha) \quad (\text{A.26})$$

$$\cos^3 \alpha = \frac{1}{4}(3 \cos \alpha + \cos 3\alpha) \quad (\text{A.27})$$

$$\sin^3 \alpha = \frac{1}{4}(3 \sin \alpha - \sin 3\alpha) \quad (\text{A.28})$$

$$\cos^5 \alpha = \frac{1}{16}(10 \cos \alpha + 5 \cos 3\alpha + \cos 5\alpha) \quad (\text{A.29})$$

També tenim

$$\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} \quad \cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} \quad (\text{A.30})$$

$$\sin \alpha = \frac{\tan \alpha}{\pm \sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} \quad \cos \alpha = \frac{1}{\pm \sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} \quad (\text{A.31})$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}} \quad \tan \alpha = \frac{\pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}{\cos \alpha} \quad (\text{A.32})$$

Altres igualtats d'interès són

$$\sin[(m+1)\alpha] = 2 \sin m\alpha \cos \alpha - \sin[(m-1)\alpha] \quad (\text{A.33})$$

$$\cos[(m+1)\alpha] = 2 \cos m\alpha \cos \alpha - \cos[(m-1)\alpha] \quad (\text{A.34})$$

$$\frac{1}{2} + \cos \alpha + \cos 2\alpha + \dots + \cos N\alpha = \frac{\sin[(N+1/2)\alpha]}{2 \sin(\alpha/2)} \quad (\text{A.35})$$

$$\sin \alpha + \sin 2\alpha + \dots + \sin N\alpha = \frac{\sin[(N+1)\alpha/2] \cdot \sin(N\alpha/2)}{\sin(\alpha/2)} \quad (\text{A.36})$$

A.1.4. Exercicis proposats de trigonometria

Problema A.1. Igualtats trigonomètriques

Demostreu les igualtats trigonomètriques següents:

a) $\tan \left(\alpha - \frac{3\pi}{2} \right) = -\frac{1}{\tan \alpha},$

b) $\tan \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) = -\frac{1}{\tan \alpha}$

$$c) \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4},$$

$$d) \tan \frac{5\pi}{12} = 2 + \sqrt{3},$$

$$e) \cos \frac{5\pi}{4} = \frac{-\sqrt{2}}{2}$$

$$f) \cos 3\alpha = 4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha,$$

$$g) \sin 3\alpha = 3\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha,$$

$$h) \tan 2\alpha = \frac{2\tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

$$i) \cos^4 \alpha = \frac{1}{8}(3 + 4\cos 2\alpha + \cos 4\alpha)$$

j) així com

$$\cos^2 \alpha \cos 3\alpha = \frac{1}{4} \cos \alpha + \frac{1}{2} \cos 3\alpha + \frac{1}{4} \cos 5\alpha \quad (\text{A.37})$$

A.1.5. Funcions hiperbòliques

- Definicions:

$$\sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}, \quad \cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \quad \operatorname{tgh} = \frac{\sinh t}{\cosh t} \quad (\text{A.38})$$

- Algunes relacions útils:

$$\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1 \quad (\text{A.39})$$

$$\sinh(t_1 \pm t_2) = \sinh t_1 \cosh t_2 \pm \cosh t_1 \sinh t_2 \quad (\text{A.40})$$

$$\cosh(t_1 \pm t_2) = \cosh t_1 \cosh t_2 \pm \sinh t_1 \sinh t_2 \quad (\text{A.41})$$

$$\sinh 2t = 2 \sinh t \cosh t \quad (\text{A.42})$$

$$\cosh 2t = \cosh^2 t + \sinh^2 t \quad (\text{A.43})$$

$$\sinh t_1 + \sinh t_2 = 2 \sinh \frac{t_1 + t_2}{2} \cosh \frac{t_1 - t_2}{2} \quad (\text{A.44})$$

$$\sinh t_1 - \sinh t_2 = 2 \cosh \frac{t_1 + t_2}{2} \sinh \frac{t_1 - t_2}{2} \quad (\text{A.45})$$

$$\cosh t_1 + \cosh t_2 = 2 \cosh \frac{t_1 + t_2}{2} \cosh \frac{t_1 - t_2}{2} \quad (\text{A.46})$$

$$\cosh t_1 - \cosh t_2 = 2 \sinh \frac{t_1 + t_2}{2} \sinh \frac{t_1 - t_2}{2} \quad (\text{A.47})$$



- Funcions hiperbòliques inverses:

$$\sinh^{-1} t = \ln(t + \sqrt{t^2 + 1}), \quad -\infty < t < \infty \quad (\text{A.48})$$

$$\cosh^{-1} t = \ln(t + \sqrt{t^2 - 1}), \quad t \geq 1 \quad (\text{A.49})$$

- Període de les funcions hiperbòliques: $2\pi i$

$$\sinh(t + 2k\pi i) = \sinh t, \quad \cosh(t + 2k\pi i) = \cosh t \quad (\text{A.50})$$

- Relacions entre les funcions hiperbòliques i les trigonomètriques:

$$\sin(it) = i \sinh t, \quad \cos(it) = \cosh t, \quad \tan(it) = i \tanh t \quad (\text{A.51})$$

$$\sin^{-1}(it) = i \sinh^{-1} t, \quad \cos^{-1} t = \pm i \cosh^{-1} t, \quad \tan^{-1}(it) = i \tanh^{-1} t \quad (\text{A.52})$$

- Equació diferencial de la qual són solució: $\frac{d^2 x}{dt^2} + \alpha x = 0$. Si $\omega = \sqrt{|\alpha|}$, llavors

• si $\alpha > 0$: $x(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$

• si $\alpha < 0$: $x(t) = A \cosh \omega t + B \sinh \omega t$

on A i B estan determinades per les condicions inicials.

A.2. Sèries de Taylor i aproximacions de funcions

Recordem que una funció $y = f(x)$ que té derivades contínues de tots els ordres en un interval de la variable independent x es pot desenvolupar en *sèrie de Taylor* al voltant del punt x_0 de la forma

$$f(x) = f(x_0) + \left(\frac{df}{dx}\right)_{x_0} (x - x_0) + \frac{1}{2!} \left(\frac{d^2 f}{dx^2}\right)_{x_0} (x - x_0)^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{d^3 f}{dx^3}\right)_{x_0} (x - x_0)^3 + \dots \quad (\text{A.53})$$

Si $x_0 = 0$, el desenvolupament anterior sovint s'anomena *sèrie de Maclaurin*. A continuació, es mostren les sèries —i els respectius radis de convergència— que resulten d'aplicar aquest desenvolupament a les funcions següents:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \quad -\infty < x < +\infty \quad (\text{A.54})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \quad -\infty < x < +\infty \quad (\text{A.55})$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - \dots \quad |x| < \frac{\pi}{2} \quad (\text{A.56})$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots \quad -\infty < x < +\infty \quad (\text{A.57})$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots \quad -1 < x \leq 1 \quad (\text{A.58})$$

- Si $|x| \ll 1$, aproximacions en primer ordre de les funcions anteriors són

$$\sin x \approx x, \quad \cos x \approx 1, \quad \tan x \approx x \quad (\text{A.59})$$

$$e^x \approx 1 + x, \quad \ln(1 + x) \approx x \quad (\text{A.60})$$

En ocasions, convé una *aproximació de segon ordre* del cosinus que, per (A.55), és

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2} \quad (\text{A.61})$$

Si $|x| < 1$, el desenvolupament de la funció $(1 + x)^q$ és

$$(1 + x)^q = 1 + qx + \frac{q(q-1)}{2!}x^2 + \frac{q(q-1)(q-2)}{3!}x^3 - \dots \quad (\text{A.62})$$

que constitueix l'anomenada *sèrie binomial*. Aquest resultat es pot estendre amb facilitat a desenvolupaments com, per exemple, el següent. Si $x = e^{-pt}$, $p > 0$, $t > 0$, aleshores, tenim

$$\frac{1}{1 - e^{-pt}} = 1 + e^{-pt} + e^{-2pt} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-npt} \quad (\text{A.63})$$

Si $|x| \ll 1$, una aproximació en primer ordre de la sèrie binomial (A.62) és

$$(1 + x)^q \approx 1 + qx \quad (\text{A.64})$$

Per exemple, si $|x| \ll 1$

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x, \quad \frac{1}{1+x} \approx 1 - x, \quad \frac{1}{(1-x^2)^{3/2}} \approx 1 + \frac{3}{2}x^2 \quad (\text{A.65})$$

o també, per (A.62), en segon ordre

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 \quad (\text{A.66})$$

A continuació es mostren dues taules amb els errors relatius de les aproximacions lineals anteriors per a diversos valors de x .

θ (rad)	θ ($^\circ$)	$\sin \theta$	$ER^{(1)} \sin$	$\cos \theta$	$ER^{(2)} \cos$	$\tan \theta$	$ER^{(3)} \tan$	Errors relatius (ER) en les aproximacions lineals del sinus, el cosinus i la tangent
0,001	$\approx 0^0,057$	0,00100	$-1,7 \times 10^{-7}$	1,00000	$-5,0 \times 10^{-7}$	0,00100	$+3,3 \times 10^{-7}$	
0,01	$\approx 0^0,57$	0,01000	$-1,7 \times 10^{-5}$	0,99995	$-5,0 \times 10^{-5}$	0,01000	$+3,3 \times 10^{-5}$	
0,1	$\approx 5^0,7$	0,09983	$-1,7 \times 10^{-3}$	0,99500	$-5,0 \times 10^{-3}$	0,10033	$+3,3 \times 10^{-3}$	
0,2	$\approx 11^0,5$	0,19867	$-6,7 \times 10^{-3}$	0,98007	$-2,0 \times 10^{-2}$	0,20271	$+1,3 \times 10^{-2}$	
0,4	$\approx 22^0,9$	0,38941	$-2,7 \times 10^{-2}$	0,92106	$-8,6 \times 10^{-2}$	0,42279	$+5,4 \times 10^{-2}$	
0,8	$\approx 45^0,8$	0,717	$-1,2 \times 10^{-1}$	0,697	$-4,3 \times 10^{-1}$	1,030	$+2,2 \times 10^{-1}$	



Errors relatius (ER) en les aproximacions lineals de l'exponencial, el logaritme i la binomial

x	e^x	$ER^{(4)} e^x$	$\ln(1+x)$	$ER^{(5)} \ln(1+x)$	$\sqrt{1+x}$	$ER^{(6)} \sqrt{1+x}$
0,001	1,00100	$5,0 \times 10^{-7}$	0,00999	$-5,0 \times 10^{-4}$	1,00050	$-1,3 \times 10^{-7}$
0,01	1,01005	$5,0 \times 10^{-5}$	0,00995	$-5,0 \times 10^{-3}$	1,00499	$-1,2 \times 10^{-5}$
0,1	1,10517	$4,7 \times 10^{-3}$	0,09531	$-4,9 \times 10^{-2}$	1,04881	$-1,2 \times 10^{-3}$
0,2	1,22140	$1,7 \times 10^{-2}$	0,18232	$-9,7 \times 10^{-2}$	1,09545	$-4,1 \times 10^{-3}$
0,4	1,49182	$6,2 \times 10^{-2}$	0,33647	$-1,9 \times 10^{-2}$	1,18322	$-1,4 \times 10^{-2}$
0,8	2,226	$1,9 \times 10^{-1}$	0,588	$-3,6 \times 10^{-1}$	1,342	$-4,4 \times 10^{-2}$

Nota: Els errors relatius de les taules anteriors, ER , s'han estimat a partir del primer terme no lineal del desenvolupament de Taylor corresponent, tal com s'indica a continuació.

$$(1): ER = \frac{\sin \theta - \theta}{\sin \theta} \approx -\frac{\theta^3/6}{\theta} = -\frac{\theta^2}{6}$$

$$(2): ER = \frac{\cos \theta - 1}{\cos \theta} \approx -\frac{\theta^2/2}{1} = -\frac{\theta^2}{2}$$

$$(3): ER = \frac{\tan \theta - \theta}{\tan \theta} \approx +\frac{\theta^3/3}{\theta} = +\frac{\theta^2}{3}$$

$$(4): ER = \frac{e^x - (1+x)}{e^x} \approx \frac{x^2/2}{1+x} \approx +\frac{x^2}{2}$$

$$(5): ER = \frac{\ln x - x}{\ln x} \approx -\frac{x^2/2}{x} \approx -\frac{x}{2}$$

$$(6): ER = \frac{\sqrt{1+x} - (1 + \frac{1}{2}x)}{\sqrt{1+x}} \approx +\frac{x^2/8}{1 + \frac{1}{2}x} \approx -\frac{x^2}{8}$$

Exemple A.1. Aproximació d'una funció transcendent

a) La funció $F(x)$ està definida per la integral següent:

$$F(x) = \int_0^x e^{-at^2} dt \quad (1)$$

Feu una aproximació de la funció $F(x)$ vàlida per a valors de $|x|$ petits.

b) Aproveiteu aquest resultat per obtenir una aproximació a la funció estadística $\text{fer}(x)$

$$\text{fer}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt \quad (2)$$

de la qual sabem que $\text{fer}(\infty) = 1$ i, per tant, $\text{fer}(0) = 1/2$.

Solució

a) Aquesta integral no té primitiva en termes de funcions elementals. Però sí que podem desenvolupar en sèrie de Maclaurin la funció exponencial $f(t) = e^{-at^2}$ i integrar (1) terme a terme. Per al desenvolupament, fem:

- Primera derivada a $t = 0$: $f'(t) = -2at e^{-at^2}$, d'on surt: $f'(t = 0) = 0$.
- Continuant la derivació es troba: $f''(t = 0) = -2a$, $f'''(t = 0) = 0$, la segona i la tercera derivada $f''(t) = -2a e^{-at^2} (1 + 2at^2 e^{-at^2})$, d'on surt: $f''(t = 0) = -2a$



d'on tenim, per (A.53),

$$f(t) = e^{-at^2} \approx 1 - at^2 \quad (3)$$

desenvolupament aproximat fins al tercer ordre (t^3).

Ara, per (1) i (3), la funció $F(x)$ queda, aproximadament, com:

$$F(a, x) \approx \int_0^x (1 - at^2) dt = x - \frac{1}{3}ax^3 \quad (4)$$

correcte fins al quart ordre (x^4).

b) Pel que fa a la funció $\text{fer}(x)$, comparant (1) amb (2) i per (4) tenim que

$$\text{fer}(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [F(x)]_{a=1/2} \approx \frac{1}{2} + \frac{x - \frac{x^3}{6}}{\sqrt{2\pi}} \quad (5)$$

Per a $x = 0,100$, $x = 0,500$ i $x = 1,00$, l'aproximació (5) proporciona 0,5398, 0,6912 i 0,832, respectivament, mentre que els valors corresponents que apareixen a les taules estadístiques són 0,5398, 0,6915 i 0,8413. Veiem, doncs, que l'aproximació és molt bona a tot $0 \leq x \leq 0,5$. De qualsevol manera, encara que no coneguéssim els valors tabulats de $\text{fer}(x)$, podríem fer una estimació bastant acurada de l'error comès per (5) a partir del desenvolupament de (3) incloent-hi el terme amb t^4 .

A.2.1. Exercicis proposats sobre l'aproximació de funcions

Problema A.2. Límit de les aproximacions

Quin valor màxim de θ podem prendre si volem que les dues aproximacions:

$$\sin \theta \approx \theta \quad \cos \theta \approx 1$$

siguin vàlides amb un error absolut inferior a $0,5 \times 10^{-4}$ —tres xifres exactes?

Resp.: $|\theta| < 0,14 \text{ rad} = 8,3^\circ$

Problema A.3. Aproximació de funcions

Demostreu les aproximacions següents:

a) Si $a \gg b$: $\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 \cos^2 \theta}} \approx \frac{1}{a} \left(1 - \frac{b^2}{2a^2} \cos^2 \theta \right)$

b) Si $|x| \ll 1$, i β i k constants: en primer ordre: $e^{-\beta x} \cos kx \approx 1 - \beta x$, i, en segon ordre: $e^{-\beta x} \cos kx \approx 1 - \beta x + \frac{\beta^2 - k^2}{2} x^2$

c) Demostreu que, si $|x| \ll 1$: $e^{-x^2} \approx \cos^2 x$.



A.3. Algunes integrals freqüents

A.3.1. Algunes integrals indefinides

- Mètode de la integració per parts

Siguin $u(t)$ i $v(t)$ dues funcions de t . Aleshores, tenim que $d(u \cdot v) = u dv + v du$, i, per tant

$$\int u dv = uv - \int v du \quad (\text{A.67})$$

- Algunes integrals indefinides de funcions algebraiques

$$\int \sqrt{a^2 - t^2} dt = \frac{1}{2} t \sqrt{a^2 - t^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{t}{a} \quad (\text{A.68})$$

$$\int \frac{dt}{\sqrt{a^2 - t^2}} = \arcsin \frac{t}{a} \quad (\text{A.69})$$

$$\int \frac{t^2 dt}{\sqrt{a^2 - t^2}} = -\frac{t \sqrt{a^2 - t^2}}{2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{t}{a} \quad (\text{A.70})$$

- Integrals indefinides trigonomètriques

$$\int \sin^2 t dt = \frac{t}{2} - \frac{1}{4} \sin 2t \quad (\text{A.71})$$

$$\int \cos^2 t dt = \frac{t}{2} + \frac{1}{4} \sin 2t \quad (\text{A.72})$$

$$\int \tan at dt = -\frac{1}{a} \ln |\cos at| \quad (\text{A.73})$$

$$\int e^{at} \sin bt dt = \frac{e^{at}(a \sin bt - b \cos bt)}{a^2 + b^2} \quad (\text{A.74})$$

$$\int e^{at} \cos bt dt = \frac{e^{at}(a \cos bt + b \sin bt)}{a^2 + b^2} \quad (\text{A.75})$$

$$\int e^{at} \sin^2 bt dt = \frac{e^{at}}{a^2 + 4b^2} \left[(a \sin bt - 2b \cos bt) \sin bt + \frac{2b^2}{a} \right] \quad (\text{A.76})$$

A.3.2. Algunes integrals trigonomètriques definides

A continuació presentem una llista breu d'algunes integrals definides amb sinus i cosinus d'aparició freqüent. Aquí m i n són dos nombres enters, i ω un nombre real qualsevol.



$$\int_0^{2\pi/\omega} \sin \omega t \, dt = \int_0^{2\pi/\omega} \cos \omega t \, dt = \int_0^{2\pi/\omega} \sin \omega t \cos \omega t \, dt = 0 \quad (\text{A.77})$$

$$\int_0^{2\pi/\omega} \sin m\omega t \, dt = \int_0^{2\pi/\omega} \cos m\omega t \, dt = 0 \quad (\text{A.78})$$

$$\int_0^{2\pi/\omega} \sin^2 m\omega t \, dt = \int_0^{2\pi/\omega} \cos^2 m\omega t \, dt = \frac{\pi}{\omega} \quad (\text{A.79})$$

$$\int_0^{2\pi/\omega} \sin m\omega t \sin n\omega t \, dt = \int_0^{2\pi/\omega} \cos m\omega t \cos n\omega t \, dt = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ \pi/\omega & \text{si } m = n \end{cases} \quad (\text{A.80})$$

$$\int_0^{2\pi/\omega} \sin m\omega t \cos n\omega t \, dt = 0 \quad (\text{A.81})$$

$$\int_0^\pi \sin m\theta \sin n\theta \, d\theta = \int_0^\pi \cos m\theta \cos n\theta \, d\theta = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ \pi/2 & \text{si } m = n \end{cases} \quad (\text{A.82})$$

$$\int_0^\pi \sin m\theta \cos n\theta \, d\theta = \begin{cases} 0 & \text{si } m+n \text{ senar} \\ 2m/(m^2 - n^2) & \text{si } m+n \text{ parell} \end{cases} \quad (\text{A.83})$$

Altres integrals definides d'us freqüent són

$$\int_0^\infty e^{-at^2} \, dt = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad (\text{A.84})$$

$$\int_0^\infty e^{-at^2} \cos \omega t \, dt = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\omega^2/4a} \quad (\text{A.85})$$

A.4. Valor mitjà d'una funció

En general, donada la funció $x = x(t)$, integrable a l'interval $[t_1, t_2]$, es defineix el *valor mitjà* de la funció en aquest interval, que representarem per $\langle x \rangle$, com el quocient

$$\langle x \rangle = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} x(t) \, dt \quad (\text{A.86})$$

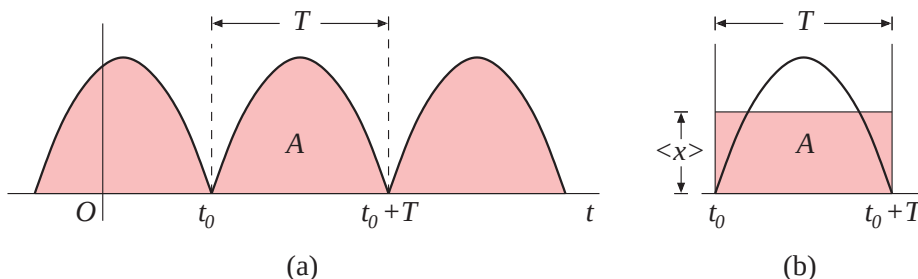
Si la funció $x(t)$ és periòdica, el valor mitjà de la funció es calcula com a (A.86), però prenent $t_1 = t_0$, i $t_2 = t_0 + T$, essent T el període de la funció $x(t)$, és a dir,

$$\langle x \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \, dt \quad (\text{A.87})$$

A la figura A.3 (a), s'ha representat una funció periòdica i, a la figura A.3 (b), el significat geomètric que té el valor mitjà $\langle x \rangle$ de la funció. Si la integral de (A.87) dona l'àrea A determinada per la funció entre t_0 i $t_0 + T$, $\langle x \rangle$ ha de ser l'altura del rectangle de longitud T tal que $\langle x \rangle \cdot T = A$.



Figura A.3



Recordem que, si una funció es fa negativa al llarg d'un interval determinat, la integral corresponent que hi ha a (A.87) també es fa negativa. Això vol dir que, si tenim una funció tal que al llarg d'un període canvia de signe de manera que la seva integral és 0, el seu valor mitjà també és 0, com és previsible. Aquest és el cas de les funcions $\sin t$, $\cos t$, etc.

Exemple A.2. Valors mitjans de $|\sin t|$ i de $\sin^2 t$

Esbrineu quins són els valors mitjans de les funcions següents al llarg d'un període:

a) $x = \sin t$, b) $x = |\sin t|$, c) $x = \sin^2 t$

Solució

a) Funció $x = \sin t$

Aquesta funció pren els mateixos valors positius i negatius i, com acabem de veure, el seu valor mitjà és 0. Efectivament, com que el seu període és $T = 2\pi$, aplicant-hi la definició (A.87) tenim:

$$\langle \sin t \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin t \, dt = \frac{1}{2\pi} (-\cos 2\pi + \cos 0) = 0 \quad (\text{A.88})$$

b) Funció $x = |\sin t|$

En prendre el valor absolut de la funció anterior, el període queda reduït a la meitat, $T = \pi$. Consegüentment, tenim

$$\langle |\sin t| \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin t \, dt = \frac{2}{\pi} \quad (\text{A.89})$$

c) Funció $x = \sin^2 t$

Igualment, en elevar al quadrat el sinus el període, també queda reduït a la meitat. Utilitzant la igualtat trigonomètrica (A.25), tindrem:

$$\langle \sin^2 t \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin^2 t \, dt = \frac{1}{\pi} \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (1 - \cos 2t) \, dt = \frac{1}{\pi} \frac{1}{2} \pi = \frac{1}{2} \quad (\text{A.90})$$

És immediat comprovar que en aquests tres casos s'obtenen els mateixos resultats posant:

- ωt en comptes de t en els sinus de les funcions anteriors, essent ω una constant;
- cosinus en comptes del sinus.

A.4.1. Exercicis proposats sobre valor mitjàs de funcions

Problema A.4. Valor mitjà d'una funció

Trobeu el valor mitjà de la funció periòdica definida a la figura A.4:

$$x(t) = |t| = \begin{cases} t, & \text{si } 0 < t < \pi \\ -t, & \text{si } -\pi < t < 0 \end{cases} \quad (\text{A.91})$$

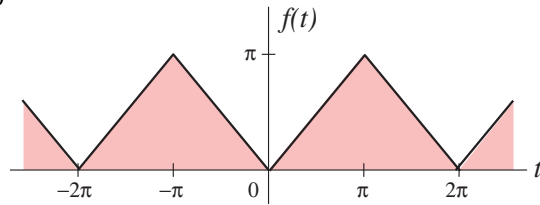


Figura A.4

Resp.: $\langle x \rangle = \frac{\pi}{2}$

Problema A.5. Valor mitjà quadràtic

El *valor mitjà quadràtic* d'una funció $x = x(t)$ a l'interval $[t_1, t_2]$, que representem per $\sqrt{\langle x^2 \rangle}$, es defineix com l'arrel quadrada del valor mitjà de la funció al quadrat, és a dir,

$$\sqrt{\langle x^2 \rangle} = \sqrt{\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} x^2(t) dt}$$

Trobeu el valor mitjà quadràtic de les dues funcions: a) $x(t) = \sin t$, i b) la funció $f(t)$ periòdica definida per la figura A.5:

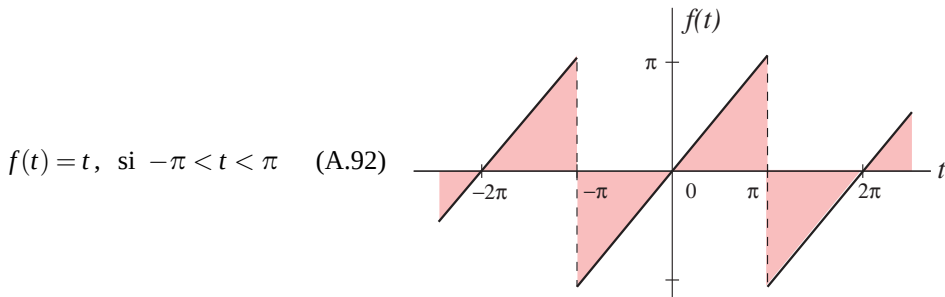


Figura A.5

Resp.: a) $\sqrt{\langle x^2 \rangle} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, b) $\sqrt{\langle f^2 \rangle} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$

A.5. Integrals el·líptiques

Com que en bastants problemes d'oscil·lacions apareixen *integrals el·líptiques*, n'incloem aquest resum breu.

Les integrals el·líptiques són aquelles de la forma:

$$\int \mathcal{R}(x, r) dx, \quad \text{amb} \quad r = \sqrt{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4} \quad (\text{A.93})$$



on $\mathcal{R}$ representa una funció racional de x i r . Aquestes integrals no es poden calcular en termes d'expressions finites de funcions elementals. Es pot demostrar que qualsevol integral com l'anterior pot reduir-se a una dels tres tipus següents:

si $0 < k < 1$ i $u = \sin \varphi$,

- Integral el·líptica de primera espècie

$$F(k, \phi) = \int_0^\phi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = \int_0^u \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}} = F(k, u) \quad (\text{A.94})$$

- Integral el·líptica de segona espècie

$$E(k, \phi) = \int_0^\phi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi = \int_0^u \sqrt{\frac{1 - k^2 z^2}{1 - z^2}} dz = E(k, u) \quad (\text{A.95})$$

- Integral el·líptica de tercera espècie

$$\begin{aligned} \Pi(k, n, \phi) &= \int_0^\phi \frac{d\varphi}{(1 + n \sin^2 \varphi) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = \int_0^u \frac{dz}{(1 + n z^2) \sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}} = \\ &= \Pi(k, n, u) \end{aligned} \quad (\text{A.96})$$

Si a les integrals anteriors fem $\phi = \pi/2$ i, per tant, $u = 1$, s'anomenen *integrals el·líptiques completes* de primera, etc. espècie. Fent desenvolupaments en sèrie, es troba, per a les dues primeres:

$$F(k, \phi = \pi/2, u = 1) = \frac{\pi}{2} \left\{ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 k^4 + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 k^6 + \dots \right\} \quad (\text{A.97})$$

$$E(k, \phi = \pi/2, u = 1) = \frac{\pi}{2} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 - \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \frac{k^4}{3} - \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \frac{k^6}{5} - \dots \right\} \quad (\text{A.98})$$

Com es mostra a la secció §7.2.1, el període exacte del pèndol simple per a oscil·lacions no petites depèn de l'amplitud d'aquestes segons una integral el·líptica de primera espècie com la (A.97).



→ B



Equacions diferencials ordinàries (EDO)

Una equació diferencial és una igualtat que conté funcions desconegudes i les seves derivades. Malgrat que a la física apareguin moltes menes d'equacions diferencials, en aquesta explicació breu ens limitem al cas de les *equacions diferencials ordinàries (EDO) lineals a coeficients constants*, que essent de les més senzilles són de gran interès en camps com el de les oscil·lacions, els circuits elèctrics, etc.

B.1. EDO lineals a coeficients constants

L'aplicació matemàtica de moltes lleis bàsiques de la física acaba sovint en una equació diferencial. La segona llei de Newton n'és un bon exemple. Vegem un parell de casos com a introducció a les equacions diferencials.

Exemple B.1. EDO de variables separables

Estudieu el moviment d'un cos que cau des d'una altura determinada en el si de l'aire. El cos comença a caure sense velocitat inicial i es pren com a punt de partida l'origen d'un sistema de coordenades en què l'eix x és vertical dirigit cap avall.

Solució

Sigui m la massa del cos. Aquest és sotmès a dues forces: el seu pes, mg , constant, i la força de fricció viscosa amb l'aire, que és de sentit contrari a la velocitat v i que suposem proporcional a aquesta, és a dir, $-bv$, essent b una constant positiva. La suma d'aquestes dues forces és igual a la massa per l'acceleració del cos

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = mg - b \frac{dx}{dt} \quad (1)$$

on $\frac{dx}{dt}$ és la velocitat v i $\frac{d^2x}{dt^2}$ és l'acceleració com a derivada segona del desplaçament x respecte del temps t . Aquesta equació és una equació diferencial —si bé bastant senzilla, com veurem.



Resoldre una equació diferencial és trobar la funció $x(t)$ més general que la satisfà, i aquesta funció $x(t)$ s'anomena *solució general* de l'equació.

L'equació (1) anterior és bastant fàcil de resoldre perquè podem integrar-la directament només posant la velocitat com la derivada del desplaçament, $v = \frac{dx}{dt}$, i l'acceleració com la derivada de la velocitat: $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt}$. Així, podem tornar a escriure (1) com

$$m \frac{dv}{dt} = mg - bv$$

i, en conseqüència,

$$\int \frac{dv}{g - \frac{b}{m}v} = \int dt, \quad \text{és a dir,} \quad \int \frac{dv}{v - \frac{mg}{b}} = -\frac{b}{m} \int dt$$

d'on resulta, integrant

$$\ln\left(v - \frac{mg}{b}\right) = -\frac{b}{m}t + C, \quad \text{o, també,} \quad \ln \frac{v - \frac{mg}{b}}{C_1} = -\frac{b}{m}t$$

i traient l'exponencial

$$v(t) = \frac{mg}{b} + C_1 e^{-bt/m} \quad (2)$$

on C és la *constant arbitrària* que apareix després de la integració i $C_1 = \ln C$.

Si volem trobar la posició x en funció del temps, $x(t)$, només cal tornar a integrar (2), ja que $v = \frac{dx}{dt}$. Per tant,

$$x(t) = \int v(t) dt = \int \left(\frac{mg}{b} + C_1 e^{-bt/m} \right) dt = \frac{mg}{b}t - \frac{m}{b}C_1 e^{-bt/m} + C_2 \quad (3)$$

on ara C_2 és la segona constant arbitrària apareguda en fer una nova integral.

La $x(t)$ (3) representa la *família* de funcions que satisfan l'equació diferencial (1); cada funció concreta dependrà dels valors de C_1 i C_2 . Per determinar aquestes dues constants, necessitem saber dos detalls concrets de la funció. En problemes de mecànica —com aquest— aquests detalls són molt sovint les *condicions inicials* de la partícula o el cos: on era i amb quina velocitat a l'instant inicial. En aquest cas, l'enunciat diu que, a $t = 0$, la partícula era a l'origen de l'eix x i tenia una velocitat inicial nul·la. Aleshores, substituint aquestes condicions a (3) i a la seva derivada, la velocitat (2), tenim:

$$\left. \begin{aligned} x(0) &= 0 = -\frac{m}{b}C_1 + C_2 \\ v(0) &= 0 = +\frac{mg}{b} + C_1 \end{aligned} \right\}$$



d'on resulta $C_1 = -\frac{mg}{b}$ i $C_2 = -\frac{m^2g}{b^2}$. Finalment, (2) i (3) queden com

$$v(t) = \frac{mg}{b} \left(1 - e^{-bt/mt}\right)$$

$$x(t) = \frac{m}{b} \left(gt + \frac{mg}{b}(e^{-bt/m} - 1)\right)$$

A diferència d'aquest exemple, en general, les equacions diferencials no poden ser integrades directament. Vegem-ne un altre exemple. Considerem el cas d'una partícula de massa m , unida per una molla de constant de força k i que, per tant, li fa una força $-kx$. L'aplicació de nou de la segona llei de Newton ens porta a la igualtat

$$m \frac{dv}{dt} = -kx \quad (\text{B.1})$$

equació que ja no és integrable directament i en la qual apareixen dues funcions, la v i la x . Bé, això últim és fàcil d'arreglar, ja que la velocitat v és la derivada de la posició x i, per tant, (B.1) queda com

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx \quad (\text{B.2})$$

que segueix sense ser integrable directament com tampoc ho era la (B.1).

L'equació (B.2) encara es pot complicar una mica més. Si la partícula, a més de rebre la força que li fa la molla, és sotmesa, com és bastant freqüent, a una força de fricció proporcional a la velocitat, aleshores l'aplicació de la segona llei de Newton dóna l'equació

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx - k' \frac{dx}{dt} \quad (\text{B.3})$$

on k' és la constant de proporcionalitat de la força de fricció.

B.2. Equacions homogènies

Aquesta equació (B.3) pot reordenar-se i escriure's en general

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a \frac{dx}{dt} + bx = 0 \quad (\text{B.4})$$

on a i b són constants (les k'/m i k/m , respectivament, en el nostre exemple).

Des del punt de vista matemàtic, aquesta igualtat s'anomena *equació diferencial ordinària (EDO), lineal, a coeficients constants i homogènia*

- *equació diferencial*, ja que hi apareixen derivades de la funció $x(t)$;
- *ordinària*, perquè la funció x només depèn d'una variable, la t .
- *lineal*, perquè la funció $x(t)$ i les seves derivades apareixen elevades a la potència 1.
- *de segon ordre*, ja que la derivada més alta que apareix és una derivada segona.



- *a coeficients constants*, ja que la a i la b que hi apareixen són constants i no funcions de t .
- *homogènia*, perquè a la dreta del signe igual tenim un 0; en cas que aquesta suma no fos 0 sinó una funció $f(t)$, l'equació diferencial seria *no homogènia*. De moment, només ens preocuparem de les equacions homogènies.

Les equacions diferencials com la (B.4) tenen les propietats següents:

- Sigui c una constant qualsevol. Si $x_1(t)$ és una solució de (B.4), la funció $c x_1(t)$ també ho és.
- Si $x_1(t)$ i $x_2(t)$ són dues solucions de (B.4), la suma de les dues, $x_1(t) + x_2(t)$, també ho és. Aquesta propietat es coneix com el *principi de la superposició* i, igual com l'anterior, es demostra per substitució a l'equació (B.4). La propietat següent es demostra en els textos de matemàtiques i diu:

La solució general de l'equació homogènia (B.4) és una combinació lineal de dues solucions, $x_1(t)$ i $x_2(t)$, que siguin linealment independents, és a dir, com veurem a continuació, que la $x_2(t)$ no sigui proporcional a la $x_1(t)$.

B.2.1. N funcions linealment independents

En general, si l'EDO homogènia és d'ordre N , la solució general és la combinació lineal de N funcions $x_1(t)$, ..., $x_N(t)$ linealment independents solucions de l'EDO. Linealment independents vol dir que, si $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ són constants, si per a qualsevol t

$$\lambda_1 x_1(t) + \lambda_2 x_2(t) + \dots + \lambda_N x_N(t) = 0, \text{ aleshores } \lambda_1 = \dots = \lambda_N = 0$$

Com es demostra en els textos de matemàtiques, N funcions són linealment dependents si i només si el determinant següent de les funcions i les seves derivades —anomenat *wronskià*— és 0, és a dir, si

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_N \\ \frac{dx_1}{dt} & \frac{dx_2}{dt} & \cdots & \frac{dx_N}{dt} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{d^N x_1}{dt^N} & \frac{d^N x_2}{dt^N} & \cdots & \frac{d^N x_N}{dt^N} \end{vmatrix} = 0$$

És molt fàcil comprovar que, per a $N = 2$, aquesta condició es redueix al fet que x_2 sigui proporcional a x_1 .

Amb tot això que ja sabem vegem com podem trobar la solució general de l'equació diferencial (B.4). Com es fa molt sovint quan es tracta amb equacions diferencials, agafem una funció $x(t)$ i la substituïm a l'equació (B.4): si la verifica és una solució; si no, no ho és i hem d'assajar una altra funció.

L'experiència —més de 250 anys d'història— amb aquesta mena d'equacions fa que ens decidim per provar una funció exponencial com ara



$$x(t) = e^{rt} \quad (\text{B.5})$$

essent r un paràmetre que determinarem després. Com que

$$\frac{dx}{dt} = r e^{rt} \quad \text{i} \quad \frac{d^2x}{dt^2} = r^2 e^{rt} \quad (\text{B.6})$$

substituint (B.5) i (B.6) a (B.4) trobem

$$r^2 + ar + b = 0 \quad (\text{B.7})$$

És a dir, la funció (B.5) és una solució de la (B.4) de manera que r compleixi l'equació de segon grau (B.7), anomenada *equació característica*. Però aquesta equació té, en general, aquestes dues solucions

$$r_1 = -\frac{a}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4b} \quad \text{i} \quad r_2 = -\frac{a}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4b} \quad (\text{B.8})$$

Si $r_1 \neq r_2$, llavors les funcions:

$$x_1(t) = e^{r_1 t} \quad \text{i} \quad x_2(t) = e^{r_2 t}$$

són linealment independents i, en conseqüència, una combinació lineal d'aquestes dues és la solució general de l'equació diferencial (B.4):

$$x(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} \quad (r_1 \neq r_2) \quad (\text{B.9})$$

Fixem-nos que, segons siguin a i b , les dues arrels r_1 i r_2 , $r_1 \neq r_2$ (B.8), de l'equació característica poden ser reals o complexes. Si són reals, la funció solució (B.9) ja està bé com està. Si són complexes, la combinació (B.9) continua essent vàlida com a solució de (B.4), però hi ha una manera alternativa d'escriure la solució (B.9). En efecte, siguin $-\beta$ i ω les parts real i imaginària, respectivament, del nombre complex r_1 ; per (B.8) tenim

$$r_1 = -\beta + i\omega \quad r_2 = -\beta - i\omega \quad (\text{B.10})$$

Per la identitat d'Euler (C.12), podem posar les exponencials de (B.9) de la forma

$$x(t) = C_1 e^{-\beta t} e^{+i\omega t} + C_2 e^{-\beta t} e^{-i\omega t} = \quad (\text{B.11})$$

$$= e^{-\beta t} \{(C_1 + C_2) \cos \omega t + i(C_1 - C_2) \sin \omega t\} \quad (\text{B.12})$$

Com hem vist a l'exemple B.2.1, la solució general de l'equació de segon ordre (B.4) ha de contenir dues —i només dues— constants arbitràries, ja que en resoldre-la és com si féssim dues integracions. D'acord amb això, transformem aquesta expressió (B.12) fent el següent. Prenguem —podem fer-ho— les constants C_1 i C_2 com a complexes —serien quatre constants reals arbitràries!—, però una complexa conjugada de l'altra —tornem a dues constants reals—, de manera que $C_1 + C_2 = A_1$, i $C_1 - C_2 = -iA_2$ i, per tant, la solució general, continuï contenint dues constants reals, ara la A_1 i la A_2 . Amb aquest canvi de notació, la funció $x(t)$ (B.12) queda com

$$x(t) = e^{-\beta t} (A_1 \cos \omega t + A_2 \sin \omega t)$$



o, introduint les dues noves constants A_0 i ϕ_0 , donades per $A_1 = A \cos \phi_0$ i $A_2 = A \sin \phi_0$, podem posar finalment, com a solució general de l'equació diferencial (B.4), quan les arrels de l'equació característica són complexes,

$$x(t) = Ae^{-\beta t} \cos(\omega t + \phi_0) \quad (\text{B.13})$$

Pel que fa al cas en què les arrels són iguals, $r_1 = r_2 = r$, podem comprovar que la funció $x(t) = t e^{rt}$ també satisfà l'equació diferencial (B.4). I, com que aquesta funció i la (B.5) són linealment independents, la solució general de (B.4) per a aquest cas serà, doncs, la combinació lineal

$$x(t) = C_1 e^{rt} + C_2 t e^{rt} \quad (r_1 = r_2 = r) \quad (\text{B.14})$$

Exemple B.2. Equacions homogènies

Esbrineu la solució general de les dues equacions diferencials següents:

$$\text{a) } \frac{d^2x}{dt^2} + 5\frac{dx}{dt} + 4x = 0, \quad \text{b) } \frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 5x = 0$$

Solució

Pel que acabem de veure, hem de trobar les arrels de les equacions característiques. Tenim, doncs,

$$\text{a) } r^2 + 5r + 4 = 0, \text{ d'on resultan:}$$

$$r = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = \begin{cases} -1 \\ -4 \end{cases}$$

essent, per tant, la solució general de l'equació

$$x(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-4t}$$

$$\text{b) } r^2 + 2r + 5 = 0, \text{ d'on ara resulten}$$

$$r = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 20}}{2} = \begin{cases} 1 + 2i \\ 1 - 2i \end{cases}$$

La solució general de l'equació és, doncs,

$$x(t) = e^{-t} (C_1 e^{i2t} + C_2 e^{-i2t}) = Ae^{-t} \cos(2t + \phi_0)$$

En ambdós casos, les constants C_1 , C_2 , i/o A i ϕ_0 es trobarien a partir de dues dades sobre les funcions, per exemple, les condicions inicials.

B.3. Equacions no homogènies

Una equació diferencial lineal, de segon ordre, a coeficients constants, però *no homogènia* és una equació com la següent



$$\frac{d^2x}{dt^2} + a \frac{dx}{dt} + bx = f(t) \quad (\text{B.15})$$

és a dir, és com l'equació homogènia (B.4) però amb la funció $f(t)$ en comptes del 0. Vegem quina és la solució general de l'equació (B.15).

Sigui $x_h(t)$ la solució general de la versió homogènia de l'equació (B.15), és a dir, l'equació (B.4). Recordem que aquesta funció $x_h(t)$ conté dues constants arbitràries. I sigui ara $x_p(t)$ una funció —que anomenarem *solució particular*— que, sense contenir constants arbitràries, satisfà l'equació no homogènia (B.15). Vegem com la suma de les dues

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) \quad (\text{B.16})$$

satisfà l'equació no homogènia (B.15):

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a \frac{dx}{dt} + bx = \underbrace{\left(\frac{d^2x_h}{dt^2} + a \frac{dx_h}{dt} + bx_h \right)}_{=0} + \underbrace{\left(\frac{d^2x_p}{dt^2} + a \frac{dx_p}{dt} + bx_p \right)}_{=f(t)} = f(t)$$

Per tant, la funció suma (B.16) és la solució general de l'equació no homogènia (B.15), ja que satisfà l'equació i conté dues constants arbitràries.

Com és ben fàcil de demostrar, la solució particular $x_p(t)$ és única, la qual cosa vol dir que podem anar provant funcions fins que en trobem una que satisfaci l'equació (B.15): aquesta és la solució particular.

Hi ha alguns mètodes per trobar les solucions particulars de les equacions no homogènies, si bé el tipus de funció $f(t)$ que és —i l'experiència— suggereixen bastant ràpidament quines funcions provar. Vegem-ho en aquests dos exemples.

Exemple B.3. Equació no homogènia, 1

Trobeu la solució general de l'equació diferencial següent:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2 \frac{dx}{dt} + x = 3t^2 + 1 \quad (1)$$

Solució

Com acabem de veure, la solució general $x(t)$ d'aquesta equació no homogènia és la suma de la solució general $x_g(t)$ de la mateixa equació, però homogeneïtzada

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2 \frac{dx}{dt} + x = 0$$

més la solució particular $x_p(t)$ de l'equació $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$.

Trobat les arrels de l'equació característica, ja tindrem la $x_g(t)$. En aquest cas, les arrels són iguals i valen $r = -1$. Per (B.14), tenim doncs, que la solució general és

$$x_g(t) = C_1 e^{-t} + C_2 t e^{-t} \quad (2)$$



D'altra banda, com que $f(t) = 3t^2 + 1$, provarem, com a solució particular, la funció

$$x_p(t) = a + bt + ct^2 \quad (3)$$

en què els coeficients a , b i c els determinarem després d'imposar que aquesta funció satisfaci l'equació (1). Així, doncs, derivant una, i una altra vegada, la funció (3), tindrem, per (1)

$$2c + 2(b + 2ct) + (a + bt + ct^2) = 3t^2 + 1 \quad (4)$$

Aquesta igualtat només es pot verificar per a tot t si

$$c = 3 \qquad b = -12 \qquad a = 19 \quad (5)$$

de manera que la solució general de l'equació no homogènia (1) és, per (2), (3) i (5)

$$x(t) = C_1 e^{-t} + C_2 t e^{-t} + 19 - 12t + 3t^2 \quad (6)$$

No s'han de confondre el significat de les dues constants arbitràries, la C_1 i la C_2 , amb el dels coeficients a , b i c de la solució particular, el valor dels quals hem determinat a (4) per substitució de $x_p(t)$ a l'equació diferencial.

Els valors de les dues constants C_1 i C_2 depenen de cada problema concret i es troben a partir de les *condicions inicials* —o altres d'equivalents. Per exemple, si ens diuen que

$$x(t=0) = 0 \qquad \text{i} \qquad \left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=0} = 0$$

aleshores, imposant aquestes condicions a (6) i a la seva derivada, tenim

$$C_1 = -19 \qquad C_2 = -7$$

i la funció (6) ara quedaria concretada com

$$x(t) = 19(1 - e^{-t}) - (12 + 7e^{-t})t + 3t^2$$

Exemple B.4. Equació no homogènia, 2

Trobeu la solució general de l'equació diferencial següent:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 6x = 2\sin 3t \quad (1)$$

Solució

L'equació característica és $r^2 + 2r + 6 = 0$, que té les dues arrels $-1 \pm i2\sqrt{2}$. Per tant, la solució general de la versió homogènia de (1) és

$$x_h(t) = A_0 e^{-t} \cos(2\sqrt{2}t + \phi_0) \quad (2)$$

essent A_0 i ϕ_0 les dues constants arbitràries.



Pel que fa a la solució particular de (1), veient que $f(t) = 2 \sin 3t$ provarem la funció

$$x_p(t) = A \sin 3t + B \cos 3t$$

Derivant i substituint $x_p(t)$ a (1) trobem

$$-9A \sin 3t - 9B \cos 3t + 6A \cos 3t - 6B \sin 3t + 6A \sin 3t + 6B \cos 3t = 2 \sin 3t$$

és a dir,

$$\sin 3t \cdot (-3A - 6B) + \cos 3t \cdot (6A - 3B) = 2 \sin 3t$$

Per tal que la igualtat sigui vàlida per a tot t , A i B han de satisfer

$$\left. \begin{aligned} -3A - 6B &= 2 \\ +6A - 3B &= 0 \end{aligned} \right\}$$

d'on resulten $B = \frac{-4}{15}$ i $A = \frac{-2}{15}$, i, per tant,

$$x_p(t) = \frac{-2}{15}(\sin 3t + 2 \cos 3t) \quad (3)$$

La solució general de (1) serà, doncs, la suma de (2) més (3)

$$x(t) = A_0 e^{-t} \cos(2\sqrt{2}t + \phi_0) + \frac{-2}{15}(\sin 3t + 2 \cos 3t)$$

B.4. Equacions lineals a coeficients variables

Per a aquestes equacions, només comentarem que no hi ha cap mètode o sistema general per resoldre-les. Algunes molt importants en física, com ara les de Bessel, Legendre, etc., han estat molt ben estudiades i donen lloc a funcions especials que es troben tabulades en els llibres especialitzats. Altres es poden resoldre fent desenvolupaments en sèrie de potències. En algunes ocasions el canvi de variable adient pot simplificar bastant l'equació i quedar transformada en una equació diferencial a coeficients constants molt més simple. Com exemple, podeu demostrar que l'equació diferencial següent, que és lineal però no a coeficients constants, —anomenada d'Euler o Cauchy—

$$t^2 \frac{d^2x}{dt^2} + at \frac{dx}{dt} + bx = f(t)$$

en la qual a i b són constants i $f(t)$ una funció de t , es converteix en la més senzilla a coeficients constants

$$\frac{d^2x}{du^2} + (a-1) \frac{dx}{du} + bx = f(e^u)$$

fent el canvi de variable: $t = e^u$.

**B.5. Exercicis proposats sobre EDO****Problema B.1. Equació no homogènia**

Esbrineu les solucions generals de les EDO següents:

a) $\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} = 5,$

b) $\frac{d^2x}{dt^2} - 6\frac{dx}{dt} + 9x = e^{2t}$

c)) Trobeu la funció $x(t)$ que satisfà l'EDO següent:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 3x = 2, \quad \text{amb les condicions inicials: } x(0) = 1, \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = 0$$

Resp.: a) $x(t) = C_1 + C_2 e^{-4t} + \frac{5}{4}t$, b) $x(t) = C_1 e^{3t} + C_2 t e^{3t} + e^{2t}$,

c) $x(t) = \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{6}e^{-3t} + \frac{2}{3}$

Problema B.2. Equació no homogènia

Trobeu la solució de l'equació diferencial següent:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = \frac{3}{4}A \cos \omega_0 t + \frac{1}{4}A \cos 3\omega_0 t,$$

amb les condicions inicials: $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$. Quina és la contribució del terme amb $3/4A \cos \omega_0 t$ en la solució?

Resp.: $x(t) = \frac{F_0}{32\omega_0^2} (12\omega_0 t \sin \omega_0 t - \cos 3\omega_0 t).$

Fer aparèixer el terme secular amb $t \sin \omega_0 t$







Representació complexa d'oscil·lacions

C.1. Nombres complexos

Forma binòmica. Sigui $i = \sqrt{-1}$ la *unitat imaginària*, és a dir, i és tal que $i^2 = -1$, i siguin x i y nombres reals. Un nombre complex z representat en *forma binòmica* s'expressa com $z = x + yi$, on x és la *part real* del nombre complex i y , la *part imaginària*. Dos nombres complexos són iguals si i només si tenen iguals les parts real i imaginària. Els nombres $z = x + yi$ i $\bar{z} = x - yi$ són els *complexos conjugats* un de l'altre.

Els nombres complexos z_1 i z_2 es podem sumar, restar, multiplicar per un nombre real, multiplicar entre ells i dividir. Si x_1, y_1, x_2, y_2 i p són nombres reals, tenim

$$z_1 + z_2 = (x_1 + y_1i) + (x_2 + y_2i) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i \quad (C.1)$$

$$z_1 - z_2 = (x_1 + y_1i) - (x_2 + y_2i) = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i \quad (C.2)$$

$$p \cdot z = p(x + yi) = px + pyi \quad (C.3)$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + y_1i) \cdot (x_2 + y_2i) = (x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + y_1x_2)i \quad (C.4)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + y_1i}{x_2 + y_2i} = \frac{x_1 + y_1i}{x_2 + y_2i} \cdot \frac{x_2 - y_2i}{x_2 - y_2i} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \left(\frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} \right) i \quad (C.5)$$

Forma trigonomètrica i polar. El conjunt dels nombres complexos formen un *espai vectorial* de dimensió 2; són, en conseqüència, vectors amb dues components que es poden representar gràficament en el pla xy , com mostrem a la figura C.1 (a).

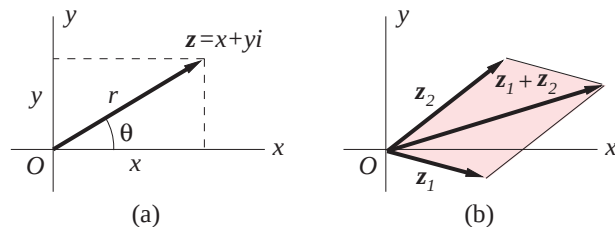


Figura C.1



Com a vectors, per exemple, la seva suma compleix la regla del paral·lelogram —v. figura C.1 (b)— i, igual com podem expressar-los de forma binòmica —les dues components, x i y —, també podem descriure'ls en *forma polar*, donant el seu *mòdul*, $r = |z|$, i l'angle, θ , que forma el vector amb l'eix real, anomenat sovint, *argument* —v. figura C.1 (a). La relació entre la part real i la imaginària, i el mòdul i l'argument és, doncs

$$\left. \begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan \theta &= \frac{y}{x} \end{aligned} \right\} \iff \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad (\text{C.6})$$

Així doncs, podem posar z en *forma trigonomètrica* com

$$z = x + iy = r(\cos \theta + i \sin \theta) \quad (\text{C.7})$$

o, en forma *polar*, simplement com (r, θ) . La forma trigonomètrica o la polar dels nombres complexos és molt útil en les multiplicacions i les divisions, ja que

$$r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \cdot r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)] \quad (\text{C.8})$$

$$\frac{r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)}{r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)] \quad (\text{C.9})$$

Teorema de De Moivre. Si p és un nombre real qualsevol, es té que

$$z^p = [r(\cos \theta + i \sin \theta)]^p = r^p (\cos p\theta + i \sin p\theta) \quad (\text{C.10})$$

D'aquesta igualtat s'obtenen les n arrels n -èsimes d'un nombre complex: si n és un nombre enter positiu

$$z^{1/n} = r^{1/n} \left(\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right), \quad \text{amb } k = 0, 1, 2, \dots, n-1 \quad (\text{C.11})$$

Forma exponencial. Desenvolupant en sèrie de Maclaurin les funcions $e^{i\theta}$, $\cos \theta$ i $\sin \theta$ —v. secció A.2— i comparant, trobem la coneguda *igualtat d'Euler*

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad (\text{C.12})$$

que relaciona la funció exponencial amb els nombres complexos. D'aquesta identitat i la corresponent a $e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta$, resulten

$$\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \quad \cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad (\text{C.13})$$

Observem que aquesta exponencial, igual com les funcions trigonomètriques, és una funció periòdica $e^{i\theta} = e^{i(\theta + 2\pi n)}$, amb $n = 0, 1, 2, \dots$

Així doncs, el mateix nombre complex z es pot escriure de les tres formes

$$z = x + yi = r(\cos \theta + i \sin \theta) = r e^{i\theta} \quad (\text{C.14})$$



Amb la forma exponencial, les multiplicacions, divisions, etc. amb nombres complexos queden així de simples

$$\mathbf{z}_1 \cdot \mathbf{z}_2 = (r_1 e^{i\theta_1}) \cdot (r_2 e^{i\theta_2}) = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)} \quad (\text{C.15})$$

$$\frac{\mathbf{z}_1}{\mathbf{z}_2} = \frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)} \quad (\text{C.16})$$

$$\mathbf{z}^p = (r e^{i\theta})^p = r^p e^{ip\theta} \quad (\text{C.17})$$

Fixem-nos, finalment, que $i = e^{i\pi/2}$ i que, per tant, multiplicar un nombre real o complex per la unitat imaginària i és afegir $\pi/2$ al seu argument. Per exemple:

$$i \cdot (1 + i\sqrt{3}) = e^{i\pi/2} \cdot 2e^{i\pi/3} = 2e^{i5\pi/6} = -\sqrt{3} + i$$

Exemple C.1. Operacions amb dos nombres complexos

Siguin els nombres complexos $\mathbf{z}_1 = 3 + 4i$ i $\mathbf{z}_2 = -2 + 3i$. Sumeu-los, resteu-los, multipliqueu-los i dividiu-los.

Solució

Tindrem

$$r_1 = |\mathbf{z}_1| = \sqrt{\mathbf{z}_1 \cdot \overline{\mathbf{z}_1}} = \sqrt{(3 + 4i) \cdot (3 - 4i)} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

$$\theta_1 = \arctan \frac{4}{3} = 0,9273 \text{ rad}$$

Per tant,

$$\mathbf{z}_1 = 3 + 4i = 5(\cos 0,9273 + i \sin 0,9273) = 5e^{i0,9273}$$

Anàlogament,

$$r_2 = |\mathbf{z}_2| = \sqrt{(-2 + 3i) \cdot (-2 - 3i)} = 3,6056$$

$$\theta_2 = \arctan \left(\frac{+3}{-2} \right) = -0,9828 + \pi = 2,1588 \text{ rad}$$

—molta atenció a l'argument θ_2 : no és el que dona directament la calculadora, $-0,9828$ rad, sinó aquest més π . I ara

$$\mathbf{z}_2 = -2 + 3i = 3,6056(\cos 2,1588 + i \sin 2,1588) = 3,6056e^{i2,1588}$$

Així doncs, tindrem:

- Suma: $\mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2 = (3 + 4i) + (-2 + 3i) = 1 + 7i$
- Resta: $\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2 = (3 + 4i) - (-2 + 3i) = 5 + i$



- Multiplicació: $z_1 \cdot z_2 = (3 + 4i) \cdot (-2 + 3i) = -6 + 9i - 8i - 12 = -18 + i$

$$z_1 \cdot z_2 = 5e^{i0,9273} \cdot 3,6056e^{i2,1588} = 18,028e^{i3,0861}$$

Podem comprovar aquesta última multiplicació trobant la forma polar de $z = -18 + i$:

$$|z| = \sqrt{325} = 18,028 \quad \arctan\left(\frac{1}{-18}\right) = -0,05550 + \pi = 3,0861$$

- Divisió: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{5e^{i0,9273}}{3,6056e^{i2,1588}} = 1,3867e^{-i1,2315}$

En forma binòmica, seria

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3 + 4i}{-2 + 3i} \cdot \frac{-2 - 3i}{-2 - 3i} = \frac{6 - 17i}{13}$$

Comprovem que els dos resultats són equivalents:

$$\left| \frac{6 - 17i}{13} \right| = \frac{1}{13} \sqrt{325} = 1,3867 \quad \arctan\left(\frac{-17}{6}\right) = -1,2315$$

C.2. Funcions complexes de variable real

Dues funcions reals de variable real, per exemple, $f(t)$ i $g(t)$, unides de la forma

$$Z(t) = f(t) + ig(t)$$

constitueixen una funció complexa —ja que té part real i part imaginària— de la variable real t . Aquestes funcions tenen un tractament analític molt semblant al de les funcions reals de variable real, només cal anar amb compte a treballar per separat la part real de la imaginària. Vegem-ho amb un exemple.

Exemple C.2. MHS en format complex

Sigui la funció complexa de variable real

$$Z(t) = A e^{i\omega t} \quad (\text{C.18})$$

on t és una variable real, ω és una constant real, però A és una constant complexa. Estudiem la funció i trobem-ne les derivades i integrals.

Solució

Si $A = A_0 e^{i\phi_0}$, és a dir, si A_0 i ϕ_0 són el mòdul i l'argument, respectivament, de la constant complexa A , llavors la funció (C.18) també es pot escriure com

$$Z(t) = A_0 e^{i(\omega t + \phi_0)} \quad (\text{C.19})$$



Així doncs, per (C.12) les parts real i imaginària de la funció (C.18) i/o (C.19) són

$$X(t) = \operatorname{Re} \mathbf{Z}(t) = A_0 \cos(\omega t + \phi_0), \quad Y(t) = \operatorname{Im} \mathbf{Z}(t) = A_0 \sin(\omega t + \phi_0) \quad (\text{C.20})$$

essent

$$\mathbf{Z}(t) = X(t) + iY(t)$$

I ara, per (C.20) la derivada de $\mathbf{Z}(t)$ respecte de t val

$$\frac{d\mathbf{Z}(t)}{dt} = \frac{dX(t)}{dt} + i \frac{dY(t)}{dt} = -\omega A_0 \sin(\omega t + \phi_0) + i \omega A_0 \cos(\omega t + \phi_0)$$

que, per (C.19) i per (C.18) veiem que és igual a posar

$$\frac{d\mathbf{Z}(t)}{dt} = i\omega A_0 e^{i(\omega t + \phi_0)} = i\omega \mathbf{Z}(t) \quad (\text{C.21})$$

I la derivada segona, igualment

$$\frac{d^2\mathbf{Z}(t)}{dt^2} = i\omega \cdot i\omega \mathbf{Z}(t) = -\omega^2 \mathbf{Z}(t) \quad (\text{C.22})$$

És a dir, la funció $\mathbf{Z}(t)$, (C.18), satisfà l'equació diferencial de segon ordre

$$\frac{d^2\mathbf{Z}(t)}{dt^2} + \omega^2 \mathbf{Z}(t) = 0 \quad (\text{C.23})$$

i, per tant, tant la part real com la imaginària, $X(t)$ i $Y(t)$, també són solucions d'aquesta equació diferencial.

Pel que fa a la integral de $\mathbf{Z}(t)$, anàlogament a la derivada, s'arriba a

$$\int \mathbf{Z}(t) dt = \int X(t) dt + i \int Y(t) dt = \dots = \frac{1}{i\omega} \mathbf{Z}(t) + \mathbf{C} \quad (\text{C.24})$$

essent $\mathbf{C}$ una constant complexa arbitrària.

En resum, derivar la funció $\mathbf{Z}(t)$ és multiplicar-la per $i\omega$ i integrar-la, dividir-la per $i\omega$, com en la funció exponencial real.

Anàlogament, per a una *ona harmònica* en forma complexa expressada com

$$\mathbf{Z}(x, t) = \mathbf{A} e^{i(kx - \omega t)}$$

derivar-la parcialment respecte de x o t també és equivalent a multiplicar la funció per $-ik$ o $-i\omega$, respectivament. Així, per exemple, $\frac{\partial^2 \mathbf{Z}}{\partial t^2} = -\omega^2 \mathbf{Z}$.

C.3. Representació complexa de les oscil·lacions

La utilització dels nombres complexos simplifica bastant les expressions en les quals apareixen funcions harmòniques sinusoidals i les seves derivades.



Amb la notació complexa, la força impulsora (3.1) es pot escriure com

$$F_0 \cos \omega t = \operatorname{Re}\{F_0 e^{i\omega t}\} \quad (\text{C.25})$$

I podem escriure una equació diferencial equivalent a la (3.4) de les oscil·lacions forçades per a la funció complexa $\mathbf{z}(t)$ de la forma

$$\frac{d^2 \mathbf{z}}{dt^2} + 2\beta \frac{d\mathbf{z}}{dt} + \omega_0^2 \mathbf{z} = \frac{F_0}{m} e^{i\omega t} \quad (\text{C.26})$$

Aquesta equació és una igualtat entre funcions complexes. Com que dos nombres complexos són iguals si i només si són iguals les respectives parts reals i parts imaginàries, l'equació (C.26) representa un sistema de dues equacions diferencials simultànies de funcions reals: una per a la part real i una altra per a la part imaginària. Per raó de la *linealitat*, l'equació per a la part real és la mateixa que l'equació diferencial (3.4): en comptes de $\mathbf{z}(t)$ hi haurà $x(t)$ i en comptes de $e^{i\omega t}$ hi haurà $\cos \omega t$. L'equació per a la part imaginària no té cap interès especial ja que és equivalent a la real però amb $\sin \omega t$.

En definitiva, si ens trobem amb l'equació per a les oscil·lacions forçades (3.4) —o una altra de semblant— la “tècnica” consisteix a substituir-la, matemàticament, per l'equació equivalent complexa (C.26) —o la que li correspongui— i resoldre aquesta última, això sí, tenint ben clar que del resultat que n'obtinguem només tindrà “sentit físic” la part real de la funció solució $\mathbf{z}(t)$.

Quins avantatges té aquest mètode davant del que hem utilitzat al capítol §3? Fonamentalment, que totes les expressions resulten més manejables, com ara veurem. En efecte, amb la fórmula (C.12) com a referència, fixem-nos que, si derivem respecte de t l'exponencial $e^{i\omega t}$, tenim

$$\frac{d e^{i\omega t}}{dt} = -\omega \sin \omega t + i\omega \cos \omega t = i\omega e^{i\omega t}$$

és a dir, derivar l'exponencial $e^{i\omega t}$ és igual a multiplicar la funció per $i\omega$. I derivar-la dues vegades és multiplicar-la per $(i\omega)^2 = -\omega^2$. Consegüentment, si de cara a resoldre l'equació diferencial (C.26) provem una funció $\mathbf{z}(t)$ que sigui de la mena

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{A}_0 e^{i\omega t} \quad (\text{C.27})$$

en què, com veiem per la notació, $\mathbf{A}_0$ és una constant complexa, ens quedarà, un cop substituïda $\mathbf{z}(t)$ a (C.26) i simplificada l'exponencial comuna

$$(-\omega^2 + 2\beta\omega i + \omega_0^2) \mathbf{A}_0 = \frac{F_0}{m}$$

d'on surt directament que la funció (C.27) és la solució particular de (C.26) sempre que $\mathbf{A}_0$ sigui

$$\mathbf{A}_0 = \frac{F_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2 + i2\beta\omega} \quad (\text{C.28})$$



Si ara introduïm el nou paràmetre complex *impedància*, $\mathbf{Z}$, com

$$\mathbf{Z} = m \left(\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega} + i 2\beta \right) = \left(\frac{k}{\omega} - m\omega \right) + i b \quad (\text{C.29})$$

llavors la $\mathbf{A}_0$ de (C.28) pot posar-se com

$$\mathbf{A}_0 = \frac{F_0}{\omega \mathbf{Z}} \quad (\text{C.30})$$

Aquesta constant complexa $\mathbf{Z}$ la podem reescriure de forma exponencial com el seu mòdul $|\mathbf{Z}| = Z$ per l'exponencial del seu argument, γ , on

$$Z = |\mathbf{Z}| = m \sqrt{\frac{(\omega_0^2 - \omega^2)^2}{\omega^2} + 4\beta^2} \quad (\text{C.31})$$

$$\tan \gamma = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (\text{C.32})$$

I la solució $\mathbf{z}(t)$, per (C.27) queda com

$$\mathbf{z}(t) = \frac{F_0}{\omega} \frac{e^{i\omega t}}{\mathbf{Z}} = \frac{F_0}{\omega Z} e^{i(\omega t - \gamma)} \quad (\text{C.33})$$

I, finalment, d'aquí veiem que la part real de la solució $\mathbf{z}(t)$ queda, doncs, com

$$x(t) = \text{Re}\{\mathbf{z}(t)\} = \frac{F_0}{\omega Z} \cos(\omega t - \gamma) \quad (\text{C.34})$$

I la velocitat, la derivada de la posició $x(t)$ respecte de t , val ara

$$v(t) = -\frac{F_0}{Z} \sin(\omega t - \gamma) = \frac{F_0}{Z} \cos(\omega t - \gamma + \frac{\pi}{2}) \quad (\text{C.35})$$





Oscil·lacions elèctriques

En aquesta secció, veurem l'analogia que hi ha entre les oscil·lacions mecàniques que hem estudiat als quatre primers capítols i les oscil·lacions elèctriques que es produeixen en circuits elèctrics amb resistència R , autoinducció L i capacitat C , els més senzills de tots, que es representen en les tres figures D.1.

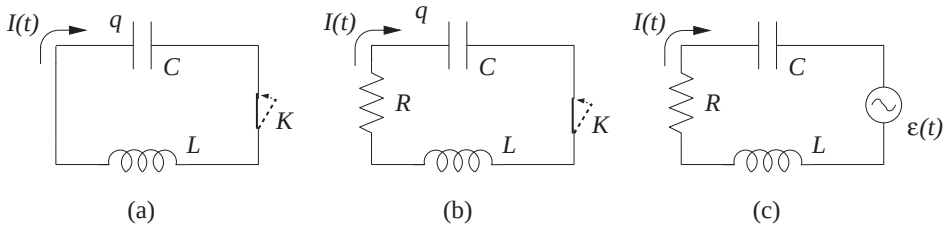


Figura D.1

D.1. Oscil·lacions elèctriques harmòniques

A la figura D.1 (a), hi ha l'esquema d'un circuit elèctric format per una autoinducció de valor L —en el SI mesurada en H, henrys— i un condensador de capacitat C —en el SI mesurada en F, farads.

Amb l'interruptor K tancat per tal que hi pugui circular el corrent d'intensitat I a través de l'autoinducció i vagi carregant el condensador de la forma

$$q(t) = \int_{t_0}^t I dt \quad \text{és a dir,} \quad I = \frac{dq}{dt} \quad (1)$$

La diferència de potencial en borns del condensador i de l'autoinducció val, com sabem per la definició de capacitat i la llei de Faraday,

$$\Delta V_c = \frac{q}{C} = \frac{1}{C} \int_0^t I dt \quad \Delta V_L = L \frac{dI}{dt} \quad (2)$$

En aquest circuit, no hi ha cap tipus de força electromotriu (FEM) externa aplicada; per tant, la llei d'Ohm generalitzada —la suma algebraica de diferències de potencial al llarg de la malla igual a la suma algebraica de FEM— queda reduïda a



$$L \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t I dt = 0 \quad (3)$$

Derivant l'equació, eliminem la integral i trobem

$$\frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{1}{LC} I = 0 \quad (4a)$$

que és l'equació diferencial per a la intensitat I , equació d'una dependència en el temps del tipus MHS de $\omega_0^2 = 1/LC$. Si considerem (1) i (3), també n'obtenim el mateix tipus d'equació per a la càrrega q del condensador

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{1}{LC} q = 0 \quad (4b)$$

Per tant, la càrrega $q(t)$ ve donada per

$$q(t) = q_{\max} \cos(\omega_0 t + \phi), \quad \text{amb } \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} \quad (5)$$

en la qual $q_{\max}$ i ϕ depenen de les condicions inicials. En un circuit LC com aquest, és molt freqüent partir d'un condensador carregat inicialment amb una q_0 . A $t = 0$, es tanca l'interruptor K i el corrent I va descarregant el condensador... Com que en aquest cas tenim: si $t = 0$, $q(0) = q_0$, de (5) tenim que $q_{\max} = q_0$, $\phi = 0$. Per tant, de (5) tenim que $q(t) = q_0 \cos \omega_0 t$, i per (1)

$$I(t) = -\omega_0 q_0 \sin \omega_0 t \quad (6)$$

on el signe menys simplement ens indica que durant el primer semiperíode el corrent elèctric descarregarà el condensador en comptes de carregar-lo.

Un circuit CL com aquest s'anomena *oscil·lador* i és un element bàsic en molts circuits electrònics com els sintonitzadors —ràdio o televisió—, etc. Si, com és bastant habitual, el condensador és de capacitat C variable, llavors la freqüència pròpia ω_0 de l'oscil·lador LC es pot modificar com es vulgui, és a dir, es pot *sintonitzar*.

D.2. Oscil·lacions elèctriques amortides

En els circuits oscil·ladors LC reals, no es pot evitar que sempre hi hagi una certa resistència elèctrica R —en el SI mesurada en Ω , ohms. En aquest cas, el circuit anterior passaria a ser com el que s'ha representat a la figura D.1 (b). Com que la caiguda de tensió en borns de la resistència R és proporcional a la intensitat I que circula de la forma

$$\Delta V_R = RI \quad (8)$$

—lei d'Ohm— llavors l'equivalent a l'equació (4a) per a la I és

$$\frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dI}{dt} + \frac{1}{CL} I = 0 \quad (9)$$



i, anàlogament, per a la càrrega q . Comparant aquestes equacions amb la (2.2) d'un moviment mecànic amortit, veiem que L fa el paper de la massa m ; R , el de la constant de fricció b , i $1/C$, el de la constant elàstica k . Així, com hem vist a la secció §2.2, la intensitat I —i/o la càrrega q — de (9) serà oscil·lant si

$$\frac{R}{2L} < \sqrt{\frac{1}{LC}} \quad \text{és a dir, si} \quad R^2 < \frac{4L}{C} \quad (10)$$

Així, tornant al cas de la descàrrega del condensador a través de l'autoinducció i la resistència, pel que hem vist a la secció 2.2 i per analogia amb (6), tenim

$$q(t) = q_0 e^{-\beta t} \cos \omega_1 t, \quad \text{essent} \quad \beta = \frac{R}{2L}, \quad \omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \quad (11)$$

i $I = \frac{dq}{dt}$. Es tracta, doncs, d'una oscil·lació elèctrica amortida.

D.3. Oscil·lacions elèctriques forçades: corrent altern

Considerem ara el circuit de la figura D.1 (c) anterior, en què hi ha una resistència R , un condensador C i una autoinducció *en sèrie* amb una FEM $\mathcal{E}$. Pel que hem vist fins ara, la llei d'Ohm generalitzada esmentada abans, aplicada a aquest circuit dóna

$$\mathcal{E} = RI + L \frac{dI(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int I(t) dt$$

o, per a la càrrega q del condensador,

$$\mathcal{E}(t) = R \frac{dq}{dt} + L \frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{1}{C} q$$

Si la FEM $\mathcal{E}$ depèn del temps d'una forma harmònica com la força impulsora (3.1) que vèiem al capítol §3,

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \cos \omega t \quad (12)$$

tindrem l'equació diferencial

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{CL} q = \frac{1}{C} \mathcal{E}_0 \cos \omega t \quad (13)$$

que és matemàticament idèntica a l'equació (3.2) d'una oscil·lació mecànica forçada sinusoidalment. Això vol dir que tots els resultats i els conceptes que hem vist al capítol §3 sobre els estats transitori i estacionari, la ressonància, la impedància, el desfasament entre la força i la velocitat —ara entre la FEM i la intensitat— etc., són totalment vàlids per a aquest circuit elèctric. Veiem doncs, que amb un simple canvi de nom de les magnituds pot utilitzar-se l'estudi del comportament d'un sistema oscil·lant mecànic per preveure el comportament d'un sistema elèctric equivalent o, encara millor, a l'inrevés. Naturalment, aquesta analogia no es limita als circuits de la figura D.1, sinó que es pot estendre a casos més complexos. L'estat estacionari de les oscil·lacions elèctriques harmòniques forçades



per una FEM sinusoidal en un circuit amb *RCL* s'anomena *corrent altern*. Per tot això, va molt bé establir les equivalències que mostrem a la taula següent.¹

Equivalències entre
oscil·lacions mecàniques
i elèctriques (analogia
força-tensió)

Mecànica			Electricitat		
Magnitud	Símbol	Unitat	Magnitud	Símbol	Unitat
elongació	x	m	càrrega	q	C
velocitat	v	m s^{-1}	intensitat	I	A
massa	m	kg	autoinducció	L	H
constant	k	N m^{-1}	(capacitat) ⁻¹	C^{-1}	F^{-1}
amortiment	b	kg s^{-1}	resistència	R	Ω
força impulsora	F	N	tensió, f.e.m.	$\mathcal{E}$	V
Exemples					
impedància	Z_{mec}	kg s^{-1}	impedància	Z_{elec}	Ω
freq. ressonància	$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$	rad s^{-1}	freq. ressonància	$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$	rad s^{-1}
factor Q	$Q = \frac{\omega_0}{2\beta}$	—	factor Q	$Q = \frac{\omega_0 L}{R}$	—
... ..	...	...		...	...

Així, per exemple, la impedància mecànica ve donada, de forma complexa, per (C.29). Per tant, la impedància elèctrica d'un circuit *RCL* sèrie serà, per la taula anterior,

$$Z_{mec} = \left(\frac{k}{\omega} - m\omega \right) + ib \quad \Longleftrightarrow \quad Z_{elec} = \left(\frac{1}{C\omega} - L\omega \right) + iR$$

Consegüentment, la impedància elèctrica d'un circuit *RCL* en sèrie serà, per la taula anterior,

$$Z_{elec} = \left(\frac{1}{C\omega} - L\omega \right) + iR$$

I en un circuit elèctric hi haurà ressonància en l'energia, és a dir, serà màxima la intensitat del corrent elèctric, quan en el sistema mecànic equivalent sigui màxima l'amplitud de la velocitat: $\omega = \omega_0 = \sqrt{k/m}$, i, en conseqüència, en l'elèctric, $\omega = \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$.

Per acabar vegem-ne un parell d'exemples més. A la figura D.2 (a), s'esquematitza un oscil·lador mecànic format per una massa m lligada a una paret per mitjà de dues molles i un amortidor. Com es pot demostrar, els circuits que es mostren a les figures D.2 (b) i (c) són equivalents a aquest oscil·lador mecànic.

¹ De fet, en l'estudi de les analogies entre els sistemes mecànics i els circuits elèctrics s'utilitzen dos casos: l'analogia força-tensió —que és la que es mostra en aquesta taula— i l'analogia força-intensitat. En aquesta segona, la magnitud equivalent a la força F és, naturalment, la intensitat de corrent I , i l'equivalent a la massa m , per exemple, no és l'autoinducció L sinó la capacitat C .

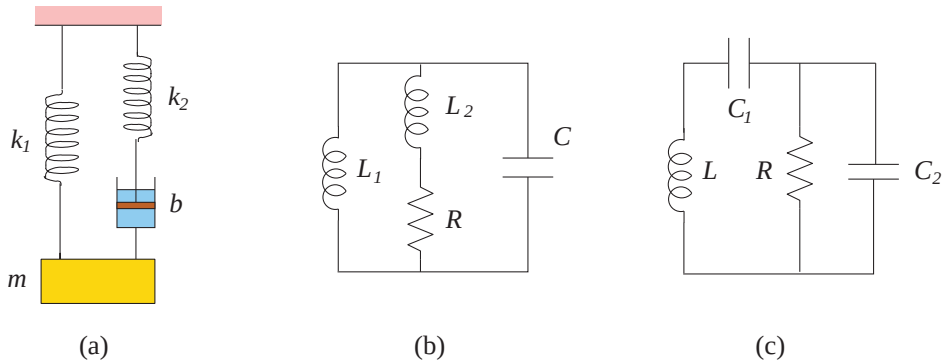


Figura D.2

A la figura D.3 (a), es mostra un altre oscil·lador mecànic, però aquest forçat per la força F . A la figura D.3 (b), hi ha la versió elèctrica de l'oscil·lador. Fixeu-vos que el paper de la força F el fa la FEM $\mathcal{E}$. Si F és constant —per exemple, el pes mg —, llavors $\mathcal{E}$ també serà constant, per exemple, la FEM d'una bateria o pila. Si F és una força harmònica, $\mathcal{E}$ serà una FEM alterna, etc.

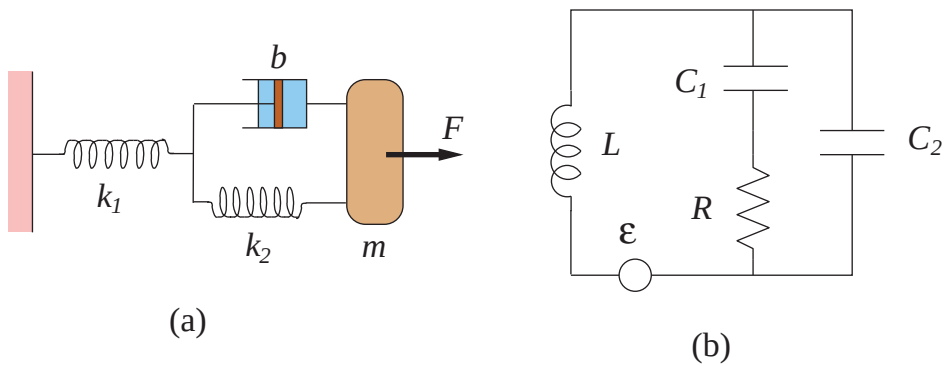


Figura D.3



Bibliografia

A continuació, es presenta una selecció breu de textos que tracten sobre oscil·lacions i que poden ser útils com a referències per tal de consolidar o ampliar coneixements. Se n'han fet dues llistes. En aquesta primera s'inclouen els manuals de mecànica general que tenen un nivell similar o només lleugerament més alt que el d'aquest llibre. Estan ordenats de menys a més dificultat.

- Tipler, P.A.; Mosca, G.: *Física per a la ciència i la tecnologia, Vol. 1 i 2*.
Traducció al català de la 6a edició original. Editorial Reverté, Barcelona, 2011.
- Jaén, X.; Bohigas, X.; Calaf, J.; Font, J.; Muntasell, J.: *Mecànica per a l'Enginyeria*.
Edicions UPC, Barcelona, 2007.
- Roller, D.E.; Blum, R.: *Física. Mecánica, ondas y termodinámica*.
Editorial Reverté, Barcelona, 1983.
- French, A.P.: *Vibraciones y ondas*.
Editorial Reverté, Barcelona, 2006.
- Ortega, M.R.: *Lecciones de Física (Mecánica 2)*. Editat per l'autor, 2009.
http://www.uco.es/~fa1orgim/fisica/monytex/cat_1f.htm
- Marion, J.B.: *Dinámica clásica de las partículas y los sistemas*.
Editorial Reverté, Barcelona, 1995.
- Meriam, J.L.; Kraige, L.G.: *Mecánica para ingenieros. Dinámica*.
3a edición. Editorial Reverté, Barcelona, 2000.
- Fernández-Rañada, A.: *Dinámica clásica*.
Fondo de Cultura Económica, México, 2004.

En aquesta segona llista, hi ha relació breu, ordenada alfabèticament, de textos més tècnics centrats en l'estudi pràctic de les vibracions mecàniques en enginyeria.

- Kelly, S.G.: *Theory and Problems of Mechanical Vibrations*.
Schaum's Outline, McGraw-Hill, 1996.
- Meirovitch, L.: *Analytical Methods in Vibrations*.
Prentice Hall, 1967.
- Meirovitch, L.: *Fundamentals of Vibrations*.
Waveland Pr. Inc., 2010.



Minorsky, N.: *Nonlinear Oscillations*.

R.E. Krieger, Malabar, 1983.

Rao, S.: *Mechanical Vibrations*.

4th edition, Pearson/Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, USA, 2004.

Seto, W.W.: *Vibraciones mecánicas*.

McGraw-Hill Interamericana Editores, serie Schaum, 1970.

Steidel, R.F.: *Introducción al estudio de las vibraciones mecánicas*.

Editorial Continental, México, 1991.

I, com a formulari matemàtic general i per a qüestions sobre equacions diferencials, es poden recomanar aquests dos:

Spiegel, M.; Abellanas, L.; Liu, J.: *Manual de fórmulas y tablas de matemática aplicada*. McGraw-Hill Interamericana Editores, serie Schaum, 2005.

Simmons, G.F.; Krantz, S.G.: *Ecuaciones diferenciales*.

McGraw-Hill, 2007.

Índex alfabètic

- absorbidor de vibracions, 288, 307
- amortidor, 95, 104, 105, 108, 111, 114, 121, 122, 140, 144, 146, 159, 160, 212, 301
- amortiment crític, 103–105, 114, 115, 121
- amplada de banda, 208
- amplada del pic de freqüències, 205
- amplitud
 - de l'oscil·lació forçada, 128, 130, 145, 154–157, 159
 - de la força impulsora, 136, 144, 160
 - del MHS, 14, 16, 19
 - efectiva de les pulsacions, 168, 281
 - efectiva, amb amortiment, 99
 - en oscil·lacions acoblades, 284–287, 289, 292, 293, 299, 300, 308, 310, 314
- aproximació de funcions, 251, 324
- arccosinus, arcsinus, etc., 17, 321
- Arquimedes, principi d', 49, 316
- associació de molles, 21, 50
- autovalors, 284, 286, 287, 291
- centre de masses, 24, 64
 - teorema de Pappus-Guldin, 64
- centre instantani de rotació, 64
- circuit *RCL*, 356, 357
- conservació
 - de l'energia, 22, 35, 37, 56, 68, 252, 263, 265
 - de la quant. de moviment, 32, 52, 54, 56, 105
 - del moment angular, 178
- constant de força *k*, 18, 19
- constant de temps, 96, 102, 128
- coordenades normals, 278, 280
- corda contínua, 295
- corda discreta, 277, 289–297, 309, 316
 - oscil·lacions forçades, 309
- corrent altern, 357
- Coulomb, llei de, 91
- Cramer, regla de, 287, 289, 306, 310
- de l'oscil·lació forçada
 - amplitud, 159
- decreixement exponencial, 96, 97, 99, 102, 104, 336
- dilatació lineal per temperatura, 82
- Dirac, funció delta de, 224, 235, 238
- energia potencial, 30, 32, 34, 36, 37, 39, 41, 68, 70, 72, 75, 77, 90, 91, 112, 249, 252, 254, 263, 265, 267, 273, 280
- equació d'ona, 295, 297
- equació diferencial, 18, 97, 113, 159, 237, 242, 256, 324, 335–351
 - no homogènia, 126, 149, 150, 287, 337, 340
 - sistema de dues o més ED, 278, 284, 286, 287, 291, 304–306, 310
- equació en derivades parcials, 295, 297



- equació transcendent, 76, 117
- espectre de freqüències, 190, 201–203
- estat estacionari, 128, 140, 160, 234, 287, 288, 302, 357
- estat transitori, 128, 140, 160, 217, 225, 226, 233, 239, 302, 357
- estructura, 13
- factor de qualitat Q , 102, 103, 108, 119–121, 138, 139, 141, 142, 155–157
- fase inicial, 14, 17, 32, 79, 80, 109, 118
- fasor, 15, 165–167, 173, 176, 185
- força central, 176
- Fourier
 - anàlisi de, 190, 204
 - coeficients de, 189, 194, 206, 208
 - condicions de Dirichlet, 190, 201
 - espectre de freqüències, 190, 201–203
 - igualtat de Parseval, 190, 207
 - integral de, 200, 202
 - sèrie de, 126, 189–215, 296
 - transformada de, 206, 215
- freqüència, 14
 - de les pulsacions, 168, 281
 - espectre de freqüències, 190, 201
 - fonamental, 190
 - harmònics superiors, 190
- freqüència pròpia, 98, 289
- freqüències pròpies o normals, 279, 280, 283, 288, 291, 292, 298–316
- fricció seca, 47, 88, 264
- fricció viscosa, 95, 117, 335
- funció $f(t) =$
 - delta de Dirac, 224, 235, 238
 - dent de serra, 193
 - dent de serra positiva, 210, 212, 213, 215, 224, 239
 - escala, 236
 - gaussiana, 207
 - ona quadrada, 192, 195, 231, 233
 - ona quadrada positiva, 191
 - ona triangular, 236
 - ona triangular positiva, 193
 - paràboles, 209
 - parella, senar, 190, 193, 215
 - periòdica, 189, 221
 - pinta de Dirac, 238
 - pols finit $\cos^2$, 214
 - pols harmònic finit, 204
 - pols rectangular, 202, 211, 215, 223
 - pols triangular, 229
 - salt unitari de Heaviside, 218, 223, 224, 229, 231, 233, 236, 239, 240, 243
 - sinus de qt , 215
 - sinus rectificat, 197, 209, 215, 242
 - sinus semirectificat, 209, 242
- funcions hiperbòliques, 323
- funcions linealment independents, 127, 251, 338
- graus de llibertat, 277
 - cas amb N , 286, 289, 292
 - cas amb tres, 283, 312–314
- Green-Borel, mètode de, 234, 236, 241, 244
- Heaviside
 - funció salt unitari de, 218, 223, 224, 229, 231, 233, 236, 239, 240, 243
- Heisenberg, principi d'incertesa de, 206
- Hooke, llei de, 19, 25
- impedància, 130, 132, 142, 157, 159, 357, 358
 - representació complexa, 353
 - triangle de la, 132
- impedància elèctrica, 358
- integral el·líptica, 250, 269, 331
- integral trigonomètrica, 200, 328
- Krylov i Bogoliubov, mètode de, 260, 262, 274, 275
- Laplace, transformació de, 217–246
 - funció de transferència, 234
 - producte de convolució, 221, 235, 244
 - propietats, 219
 - taula de transformades, 222
 - transformació inversa, 218, 226, 227, 242
- Lissajous, figures de, 171–173, 181, 184–186
- massa reduïda, 53, 56, 88, 91, 153
- mètode de conservació de l'energia, 37, 41, 69, 70, 72, 75, 78, 89, 90, 249, 267, 282
- mètode de Rayleigh, 37–39
- mesura de g , 25, 59, 87
- modes normals d'oscil·lació, 279, 280, 291–293
- molla de massa no negligible, 72, 87



- moment d'inèrcia, 24, 60
 - d'un cercol resp. diàmetre, 57
 - d'un cilindre, 29, 69
 - d'una barra, 27
 - d'una esfera, 71
 - d'una partícula, 40
 - d'una placa rectangular, 85
 - radi de gir, 304
 - teorema de Steiner, 58–60, 64
- moviment circular uniforme, 15
- moviment harmònic simple, 13–92, 128, 163–188
- Newton, segona llei de, 18, 23, 28, 96, 97, 126, 149, 150, 183, 212, 278, 287, 291, 304, 306, 310, 337
- Newton, segona llei per a la rotació, 24, 27, 40, 61, 75, 283, 304, 306
- nombres complexos, 347, 349
- Ohm, llei d', 355–357
- ona, 294, 295
 - longitudinal, 296, 297
 - transversal, 294, 296
- oscil·lació
 - adiabàtica d'un gas, 91
 - d'un electró, 91, 273
 - d'un flotador, 49, 316
 - d'un líquid en un tub, 71
 - no harmònica simple, 35, 43, 44, 247–276
 - quasiharmònica simple, 33
- oscil·lació amortida, 97–356
 - d'un oscil·lador no lineal, 264, 274
 - molt amortida, 100, 118, 121
 - molt poc amortida, 100, 111, 118–120
- oscil·lació elèctrica, 19, 359
- oscil·lació en representació complexa, 350–353
- oscil·lació forçada, 125–160, 189, 194, 199, 213, 225, 248
 - amplitud, 128, 130, 145, 154–157, 159, 315
 - amplitud de la velocitat, 132
 - desfasament, 127, 131, 156, 357
 - elèctrica, 357
 - en una corda discreta, 309
 - factor de qualitat Q , 141, 142
 - oscil·lacions acoblades, 305
 - oscil·ladors acoblats, 287, 315
 - potència mitjana, 137
- potència mitjana, 138, 141, 155–158
- representació complexa, 351
- ressonància, 130, 132–136, 138–142, 145, 147, 148, 154, 155, 157–160
- oscil·lació harmònica simple, 13–92, 128
- oscil·lacions acoblades, 277–316
 - amplituds, 284–287, 289, 292, 293, 299, 300, 308, 310, 314
 - concordants, 279, 283, 285
 - contraposades, 280, 283, 285
 - energia de l'acoblament, 281
 - polsants, 281, 283
- oscil·lador elèctric, 356
- oscil·lador forçat
 - factor de qualitat Q , 103
 - factor de qualitat Q , 102, 138, 139, 155–157
- oscil·lador no lineal, 43, 247–276
 - dur o tou, 248, 263
 - forçat, 262
 - efecte salt, 263
 - oscil·lació subharmònica, 263
 - mètode de Krylov i Bogoliubov, 260, 262, 274, 275
 - mètode de les sèries de pertorbacions, 255, 269, 273–275
 - terme secular, 257, 259, 270
- oscil·ladors acoblats
 - forçats, 287
 - oscil·lació forçada, 315
- pèndol
 - angles no petits, 248
 - cònic el·líptic, 170
 - cicloïdal, 77
 - de torsió, 25
 - de torsió bifilar, 65
 - horitzontal, 87
 - pèndols acoblats, 282, 312
 - rellotge de, 25, 82, 119, 250, 273
- pèndol físic, 24, 25, 38, 58, 59, 82–84, 282, 305
 - amb molla, 26
 - període mínim, 58, 83
 - reversible o de Kater, 59
 - segon centre d'oscil·lació, 83
- pèndol simple, 22, 23, 57, 71, 82, 134, 169, 173, 249, 250, 263, 268, 272, 273, 311, 312



- paràmetre d'amortiment, 98, 142
- percussió, 224, 235, 243
- període, 14, 19, 34, 189, 253
- principi de superposició, 24, 126, 164, 178, 189, 248, 262, 271, 280, 338
- problema dels dos cossos, 52, 55, 82, 88, 151
- pulsacions, 167, 168, 281
- punt d'equilibri, 18, 33
 - estable, 18, 33, 36, 74, 86, 89–91
 - inestable, 33, 36, 62, 90, 91
- Rayleigh, mètode de, 37–39
- regla de Cramer, 287, 289, 306, 310
- ressonància, 130, 132–136, 138, 140–142, 144, 145, 147, 148, 154–159, 248, 257, 259, 262, 288, 289, 306, 307, 309, 357, 358
 - amplada de la, 139, 145, 157, 158, 160
 - paramètrica, 135, 144, 145, 160
- sintonitzar, 140, 356
- sistema, 13
- sistemes d'oscil·ladors acoblats, 277–316
- sobreamortiment, 104, 114, 122
- Steiner, teorema de, 58–60, 64
- superposició d'oscil·lacions, 128, 141, 150, 151, 154, 163–189, 278–280, 284–286, 292, 301, 302
- Taylor, sèrie de, 23, 34, 114, 324
- temps de relaxació, 96
- trajectòria
 - cònica, 169
 - el·líptica, 169, 171, 176, 178, 180, 184, 186
 - fig. de Lissajous, 171–173, 181, 184–186
- trajectòria en l'espai fàsic, 252, 253, 255, 273
- trigonometria, 319–323
- valor mitjà d'una funció, 120, 137, 329
- valor mitjà quadràtic d'una funció, 331
- vibració, 13
- vibracions d'un motor, 135, 136, 145, 146, 154, 158, 160, 288, 307
 - absorbidor, 288, 307
 - transmissibilitat, 147
- xoc, 31, 51, 56, 88, 272



UNIVERSITAT POLITÈCNICA
DE CATALUNYA
BARCELONATECH



iniciativa
digital politècnica
Publicacions Acadèmiques UPC

→ **UPCGRAU**

Oscil·lacions. Teoria i problemes →

Jaume Calaf Zayas

En col·laboració amb el Servei de Llengües i Terminologia de la UPC

Primera edició: setembre de 2011

Disseny i dibuix de la coberta: Jordi Soldevila

Disseny maqueta interior: Jordi Soldevila

Maquetació: Mercè Aicart

© Jaume Calaf Zayas, 2012

© Iniciativa Digital Politècnica, 2012
Oficina de Publicacions Acadèmiques Digitals de la UPC
Jordi Girona Salgado 31,
Edifici Torre Girona, Planta 1, 08034 Barcelona
Tel.: 934 015 885 Fax: 934 054 101
www.upc.edu/idp
E-mail: info.idp@upc.edu

Dipòsit legal: B-17950-2012

ISBN: 978-84-7653-916-3

Qualsevol forma de reproducció, distribució, comunicació pública o transformació d'aquesta obra només es pot fer amb l'autorització dels seus titulars, llevat de l'excepció prevista a la llei. Si necessiteu fotocopiar o escanejar algun fragment d'aquesta obra, us he d'adreçar al Centre Espanyol de Drets Reprogràfics (CEDRO), <<http://www.cedro.org>>.

Índex

Pròleg	9
1. Oscil·lacions harmòniques simples	13
1.1. Cinemàtica i dinàmica del MHS	14
1.2. Sistema molla-massa	19
1.3. Pèndols. MHS angular	22
1.4. Energia potencial elàstica	30
1.5. Oscil·lacions al voltant d'un punt d'equilibri estable	32
1.6. Mètode de la conservació de l'energia	37
1.7. Problemes resolts i problemes proposats	41
2. Oscil·lacions amortides	95
2.1. Força de fricció viscosa	95
2.2. Oscil·lacions harmòniques amortides	97
2.3. Energia de les oscil·lacions amortides	101
2.4. Amortiment crític i sobreamortiment	103
2.5. Problemes resolts i problemes proposats	107
3. Oscil·lacions forçades	125
3.1. Oscil·lacions forçades	125
3.2. Estats transitori i estacionari	126
3.3. Impedància i ressonància	130
3.4. Vibracions produïdes per màquines giratòries	135
3.5. Potència mitjana absorbida per l'oscil·lador	137
3.6. Factor de qualitat Q i amplada de la ressonància	138
3.7. Problemes resolts i problemes proposats	140



4. Superposició de MHS	163
4.1. Linealitat i superposició	163
4.2. Superposició de dos MHS de la mateixa direcció	164
4.3. Superposició de dos MHS de direccions perpendiculars	169
4.4. Problemes resolts i problemes proposats	175
5. Oscil·lacions i sèries de Fourier	189
5.1. Sèries de Fourier (SF)	189
5.2. Sèries de Fourier i estats estacionaris	194
5.3. Integral de Fourier	200
5.4. Anàlisi de Fourier d'un pols harmònic finit	204
5.5. La transformada de Fourier	206
5.6. Problemes resolts i problemes proposats	208
6. Oscil·lacions i transformació de Laplace	217
6.1. Transformació de Laplace (TL)	217
6.2. Aplicacions de la TL a les oscil·lacions	225
6.3. Mètode de Green-Borel	234
6.4. Problemes resolts i problemes proposats	236
7. Oscil·ladors no lineals	247
7.1. Desviacions de la linealitat	247
7.2. El pèndol... per a angles no petits	248
7.3. L'espai fàsic	252
7.4. Mètode de les sèries de pertorbacions	255
7.5. Mètode de Krylov i Bogoliubov	260
7.6. Oscil·ladors no lineals forçats	262
7.7. Problemes resolts i problemes proposats	263
8. Sistemes d'oscil·ladors i ones	277
8.1. Oscil·ladors acoblats. Modes normals	277
8.2. Sistemes d'oscil·ladors acoblats	283
8.3. Oscil·ladors acoblats forçats	287
8.4. Oscil·lacions acoblades transversals: la corda discreta	289
8.5. Pas al continu: ones transversals i longitudinals	294
8.6. Problemes resolts i problemes proposats	298
A. Repàs de matemàtiques	319
A.1. Trigonometria	319
A.2. Sèries de Taylor i aproximacions de funcions	324
A.3. Algunes integrals freqüents	328
A.4. Valor mitjà d'una funció	329
A.5. Integrals el·líptiques	331

B. Equacions diferencials ordinàries (EDO)	335
B.1. EDO lineals a coeficients constants	335
B.2. Equacions homogènies	337
B.3. Equacions no homogènies	340
B.4. Equacions lineals a coeficients variables	343
B.5. Exercicis proposats sobre EDO	344
C. Representació complexa d'oscil·lacions	347
C.1. Nombres complexos	347
C.2. Funcions complexes de variable real	350
C.3. Representació complexa de les oscil·lacions	351
D. Oscil·lacions elèctriques	355
D.1. Oscil·lacions elèctriques harmòniques	355
D.2. Oscil·lacions elèctriques amortides	356
D.3. Oscil·lacions elèctriques forçades: corrent altern	357
E. Bibliografia	361
Índex alfabètic	363

Pròleg

Les oscil·lacions són presents en tot el que ens envolta: en la temperatura del nostre indret, en les variacions del nivell del mar degudes a les marees, en la quantitat de taques solars, en els electrocardiogrames o, centrant-nos més en sistemes menys complexos i més fàcils d'analitzar, en els pèndols dels rellotges, en les vibracions d'un motor rotatori, en les oscil·lacions elèctriques dels aparells electrònics i, és clar, en les ones, en tota mena d'ones, siguin sonores, electromagnètiques, sísmiques, de torsió, etc.

Els temes relacionats amb les oscil·lacions o vibracions es troben tant en les assignatures de física general dels primers cursos universitaris com en les assignatures tècniques d'especialització dels últims cursos d'enginyeria. L'objectiu d'aquest llibre és, doncs, presentar les oscil·lacions partint d'un nivell elemental fins arribar a un nivell mitjà que faci de pont entre els estudis bàsics i els superiors o els tècnics.

La formació física de l'estudiantat el primer any d'estudis universitaris és, sobretot, de mecànica. Encara no sol conèixer bé l'electromagnetisme, ni l'elasticitat, ni la teoria de màquines. Això condiciona que el llibre tracti, fonamentalment, sobre oscil·ladors mecànics relativament simples, constituïts per molles, barres, amortidors, pèndols, etc. Això sí, convé insistir que la majoria de conceptes, mètodes i resultats que es presenten en l'estudi d'aquestes oscil·lacions mecàniques són, d'alguna forma, generalitzables a tota mena d'oscil·ladors. Així, el fenomen de la ressonància és fonamental en les vibracions forçades d'estructures, com també ho és en els circuits elèctrics *LC* —en la sintonització de les emissores de ràdio— i en tants altres casos.

El text s'ha dividit en dos blocs de quatre capítols cadascun i quatre apèndixs. Els quatre primers capítols conformen el bloc bàsic elemental sobre oscil·lacions típic dels cursos de primer any de física a la universitat: 1) oscil·lacions harmòniques simples, el capítol bàsic i al que es dediquen més exemples i problemes; 2) oscil·lacions amortides; 3) oscil·lacions forçades, i 4) superposició d'oscil·lacions. El segon bloc va més enllà de la física elemental i utilitza les matemàtiques amb una mica més de profunditat. Als dos primers capítols s'introdueixen dues eines molt potents: 5) les sèries i l'anàlisi de Fourier, i 6) la transformació de Laplace, per continuar amb 7) els oscil·ladors no lineals i 8) els sistemes d'oscil·ladors acoblats i una introducció a les ones. Aquests últims quatre capítols s'han



redactat perquè siguin pràcticament independents entre si; així, per exemple, es pot passar del capítol 4 directament als sistemes d'oscil·ladors del capítol 8 sense necessitat d'haver vist els anteriors.

Dins de cada capítol se'n poden distingir tres parts. A la primera se'n fa el desenvolupament teòric i se n'exposen els casos més generals, amb els exemples corresponents. A la segona part hi ha un conjunt de problemes resolts, seleccionats especialment per tal de millorar la comprensió de la teoria i, sobretot, l'aplicació als casos pràctics. A la tercera, el capítol acaba amb una col·lecció d'enunciats de problemes perquè l'estudiantat, ara sí, posi a prova l'experiència adquirida i consolidi els seus coneixements aplicant-los per si mateix als casos proposats. Després de cada enunciat es troba la resposta analítica a les qüestions plantejades per facilitar-ne la comprovació. La part més important del temps d'estudi ha de ser la dedicada a pensar i resoldre aquests problemes proposats.

Els coneixements previs que es necessiten per seguir el text són, essencialment, en física: la mecànica elemental, és a dir, les lleis de Newton i els principis de conservació per a les partícules, els sistemes i els sòlids rígids. En cap moment no s'usa la dinàmica de Lagrange, però s'insisteix força en el mètode de la conservació de l'energia, la qual cosa facilita molt el camí a l'aplicació de la mecànica analítica. Tampoc no s'utilitza la representació complexa; en un primer nivell no aporta conceptualment res de nou i, en canvi, pot ser una complicació addicional innecessària. Però és molt còmoda i àmpliament utilitzada en els nivells superiors, per la qual cosa a l'apèndix C s'exposa com es fa i quins avantatges pràctics presenta una descripció de les oscil·lacions amb funcions complexes. Pel que fa al coneixement de matemàtiques, se suposa que l'alumnat està familiaritzat amb les derivades, les integrals i els desenvolupaments de Taylor. Les equacions diferencials, les sèries de Fourier, la transformació de Laplace, els problemes d'autovalors i altres eines i mètodes matemàtics que van sorgint al llarg del text es van explicant des del principi, pas a pas, a mesura que van apareixent.

A l'apèndix A hi ha un recull de fórmules matemàtiques que convé tenir a mà i que permeten seguir el text amb més comoditat. A l'apèndix B es presenta una introducció breu de les equacions diferencials ordinàries, lineals i a coeficients constants. De l'apèndix C, ja n'hem parlat abans i a l'apèndix D, es fa una introducció de les oscil·lacions elèctriques i del corrent altern, insistint en l'analogia formal amb les oscil·lacions mecàniques. En acabar els apèndixs, s'inclou una breu bibliografia sobre textos de mecànica general i, especialment, alguns de més tècnics sobre vibracions que poden ser d'interès per a qui vulgui aprofundir en els problemes pràctics de l'enginyeria. Finalment, s'inclou un índex alfabètic de conceptes i mètodes que facilita la localització dels diferents punts tractats, tant on s'introdueixen per primer cop com on van apareixent posteriorment.

Des d'aquí vull agrair a tots els membres del Departament de Física i Enginyeria Nuclear de l'ETSEIAT de la UPC i, en particular, als professors de Física II dels graus en Tecnologies Industrials, Tecnologies Aeroespacials i Vehicles Aeroespacials, la seva col·laboració i el suport constant que he rebut en l'elaboració d'aquest material.

L'autor



Oscil·lacions harmòniques simples

Un *sistema* és un conjunt d'elements simples, relacionats entre si, que constitueixen un tot orgànic sotmès a determinades lleis. Són exemples senzills de sistemes de dos elements una massa lligada a una molla, un circuit *LC* en sèrie o un gas ideal tancat en un èmbol cilíndric rígid amb una paret mòbil. En tots tres sistemes, hi ha una magnitud representativa de l'estat en què es troben; en el de molla-massa és l'elongació de la molla; en el circuit *LC*, la càrrega del condensador, i en el gas tancat pot ser la seva pressió. Un sistema està en *equilibri* quan la seva magnitud característica es manté constant en el temps.

Donada la magnitud característica d'un sistema es diu que fa una *oscil·lació* si, treient el sistema de l'equilibri, durant un temps determinat la magnitud va variant al voltant del seu valor inicial. Si aquesta variació es va repetint de la mateixa manera cada cert interval de temps, llavors es parla d'*oscil·lació periòdica*, essent aquest interval de temps el *període*. L'invers del període s'anomena *frequència* i la diferència entre el valor màxim de la magnitud i el valor en l'equilibri, *amplitud*. Els sistemes en què la magnitud característica que estem considerant oscil·la s'anomenen *oscil·ladors*.

Els oscil·ladors poden ser de naturalesa ben diferent; per exemple, en els sistemes mecànics intervien masses i acceleracions i oscil·la la posició relativa dels elements del sistema; en els sistemes elèctrics intervien autoinduccions, capacitats, etc. i, en aquest cas, el que oscil·la és la intensitat del corrent elèctric; els sistemes electromecànics són una combinació dels dos tipus anteriors, etc.

Dintre dels oscil·ladors mecànics, n'hi ha un gran grup que són de tipus *elàstic*, és a dir, aquells en què la causa de l'oscil·lació és la propietat elàstica d'algun element del sistema. Una *estructura* és un sistema de sòlids, cadascun d'ells caracteritzat per la seva massa, la seva forma geomètrica, etc., connectats entre si; per exemple, una cadira, un pont o un avió.

La paraula *vibració* s'empra sovint com a sinònim d'oscil·lació, però es fa servir, sobretot, per parlar d'oscil·lacions mecàniques elàstiques, particularment quan aquestes són de petita amplitud i freqüència alta. L'anàlisi de les vibracions que experimentarà una es-



estructura és tan important que sovint n'acaba determinant el disseny. Doncs bé, de totes les oscil·lacions o vibracions que poden tenir una partícula, un sòlid o una estructura, una de les més senzilles d'estudiar, de les més abundants i la més important de totes és la que correspon a un *moviment harmònic simple* (MHS).

1.1. Cinemàtica i dinàmica del MHS

1.1.1. Cinemàtica del MHS

Una partícula que es desplaça sobre l'eix x fa un *moviment harmònic simple* (MHS) si la seva posició x depèn del temps t en la forma

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi) \quad (1.1)$$

on A , ω i ϕ són les constants següents:

- x és l'*elongació* o el desplaçament de la partícula respecte d'un cert origen del eix x ;
- A és l'*amplitud* del moviment, essent $-A \leq x \leq +A$.
- ω és la *pulsació* o *frequència angular* del moviment. Es mesura en rad/s. L'angle $(\omega t + \phi)$ és la *fase* del moviment; per tant,
- ϕ és la *fase inicial*.

Per trigonometria —vegeu, si cal, l'apèndix §A.1.2—, notem que

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi) = A \sin(\omega t + \phi') \quad \text{si} \quad \phi' = \phi + \pi/2$$

Derivant (1.1), trobem la velocitat i l'acceleració de la partícula

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \phi) = \omega A \cos(\omega t + \phi + \frac{\pi}{2}) \quad (1.2)$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \phi) = \omega^2 A \cos(\omega t + \phi + \pi) = -\omega^2 x \quad (1.3)$$

El MHS és un cas particular d'*oscil·lació* o *moviment oscil·latori periòdic*, ja que després de cada *període* $T = 2\pi/\omega$ la partícula torna a estar en la mateixa posició, amb la mateixa velocitat. És a dir, en qualsevol instant t , se satisfà

$$x(t + T) = x(t) \quad (1.4)$$

L'invers del període s'anomena *frequència*, que representem per f i que es relaciona amb la freqüència angular ω a través d'un factor 2π

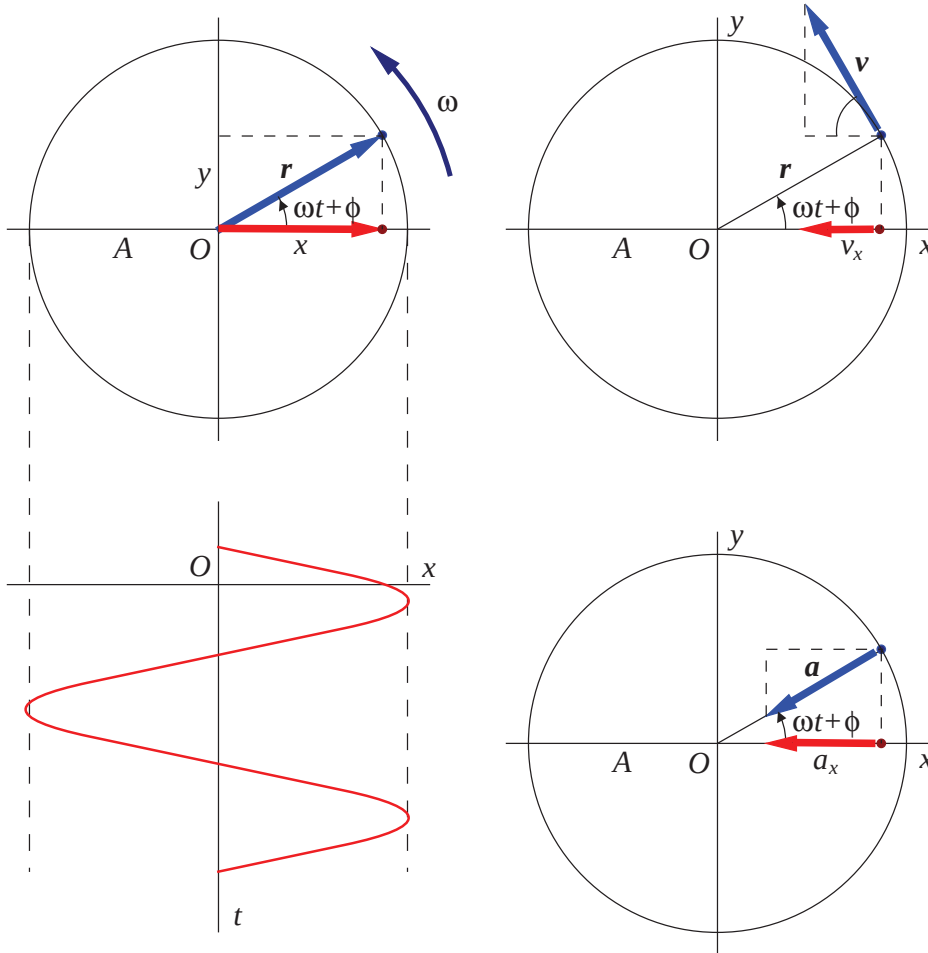
$$\frac{1}{T} = f = \frac{\omega}{2\pi} \quad (1.5)$$

En un MHS, la freqüència f és el nombre d'*oscil·lacions* —anar i tornar— que fa la partícula per unitat de temps. La freqüència es mesura en cicles/s, unitat que coneixem com a Hz, *hertz*.



Com es mostra a la primera de les figures 1.1, el MHS està molt relacionat amb el *moviment circular uniforme* (MCU). En efecte, l'expressió (1.1) és la coordenada x d'una partícula que fa un MCU de radi A a la velocitat angular ω . El vector posició d'aquesta partícula —anomenat *fasor*— forma, en l'instant t , un angle $\omega t + \phi$ amb l'eix x .

Figura 1.1



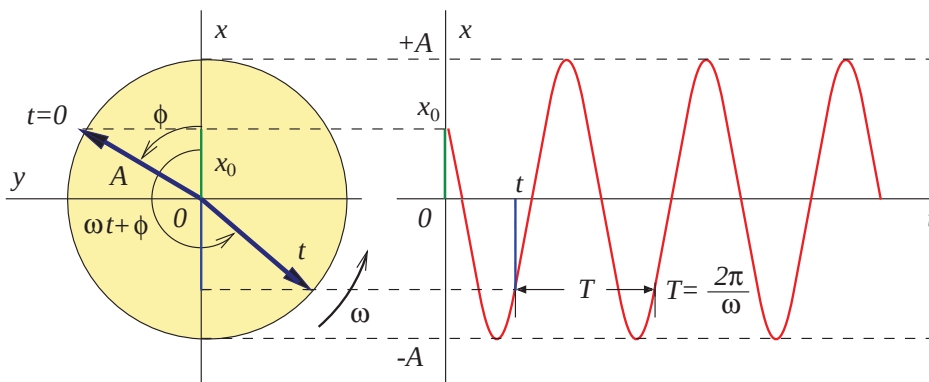
Naturalment, la component y del fasor també descriu un MHS sobre l'eix y , però amb un sinus en lloc d'un cosinus. Les altres dues figures 1.1 indiquen les relacions entre les components x de la velocitat $\mathbf{v}$ i l'acceleració $\mathbf{a}$ de la partícula que fa el MCU i les corresponents de la que fa el MHS.

A la figura 1.2, hi veiem el fasor representat dues vegades:

- en $t = 0$, formant un angle ϕ amb l'eix x i essent x_0 la seva primera component;
- en un determinat instant t , quan l'angle és $\omega t + \phi$ i la primera component és x .



Figura 1.2

**Exemple 1.1. Posició, velocitat i acceleració en un MHS**

D'una partícula que efectua un MHS sabem que, a $t_1 = 16$ s, la seva posició respecte de l'origen, la seva velocitat i la seva acceleració són, respectivament

$$x_1 = 9,80 \text{ cm}, \quad v_1 = 132 \text{ cm/s}, \quad a_1 = -4743,2 \text{ cm/s}^2$$

Trobeu l'expressió de l'elongació x en funció del temps t .

Solució

La posició de la partícula queda determinada per la funció

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi) \quad (1)$$

de la qual hem de calcular els tres paràmetres que hi intervenen: ω , A i ϕ , a partir de les tres dades x_1 , v_1 , a_1 .

- Càlcul de ω

Com que $a = -\omega^2 x$, veiem immediatament que $\omega = \sqrt{\frac{-a_1}{x_1}} = 22,00 \text{ rad/s}$

- Càlcul de A

Si derivem (1) n'obtenim la velocitat

$$v(t) = -\omega A \sin(\omega t + \phi) \quad (2)$$

I per (1) i (2) podem fer

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{v^2}{\omega^2 A^2} = \cos^2(\omega t + \phi) + \sin^2(\omega t + \phi) = 1$$

D'aquí trobem una relació general entre la posició i la velocitat en el mateix instant i l'amplitud A del moviment

$$A = \sqrt{x^2 + \frac{v^2}{\omega^2}} \quad (1.6)$$

Aplicant-hi els valors de x_1 i v_1 de l'enunciat, resulta $A = 11,491 \text{ cm}$



- Càlcul de ϕ

A partir dels valors de x_1 i de l'A acabada de trobar, per (1) tenim

$$\cos(\omega t_1 + \phi) = \frac{x_1}{A} = 0,85285$$

i la fase $\varphi = \omega t_1 + \phi$ resulta ser¹

$$\varphi = \omega t_1 + \phi = \arccos 0,85285 = \begin{cases} \varphi_a = 0,54937 \text{ rad} \\ \varphi_b = 2\pi - \varphi_a = 5,73381 \text{ rad} \end{cases}$$

Quin dels dos angles possibles, φ_a i φ_b , és el que correspon al nostre problema? Com es mostra a la figura 1.3, aquesta qüestió ens la respon el signe de la velocitat, que en aquest cas és positiu ($v_1 = +132 > 0$).

I per (2) tenim

- a) $\sin \varphi_a > 0$ és a dir $v < 0$ i, per tant, no ens interessa.
 b) $\sin \varphi_b < 0$ és a dir $v > 0$ és el que busquem.

Així doncs, $\varphi = \varphi_b = 5,73381 \text{ rad}$. I ϕ valdrà

$$\begin{aligned} \phi = \varphi_b - \omega t_1 &= -346,26619 \text{ rad} \times \frac{1 \text{ volta}}{2\pi \text{ rad}} = -55,109976 \text{ voltes} \\ &\equiv 0,890024 \text{ volta} \times \frac{2\pi \text{ rad}}{1 \text{ volta}} = 5,59219 \text{ rad} \end{aligned}$$

Consegüentment, l'equació del moviment de la partícula, $x(t)$, en cm, és

$$x(t) = 11,491 \cos(22,000 \cdot t + 5,5922)$$

que també podríem escriure com $x(t) = 7,3232 \sin \omega t + 8,8551 \cos \omega t$, i d'altres formes equivalents.

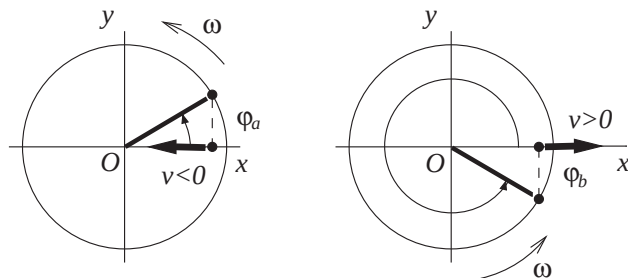


Figura 1.3

¹ Recordem que, donat un nombre x , amb $-1 \leq x \leq +1$, hi ha dos angles $\varphi = \arccos x$, entre 0 i 2π , tals que $\cos \varphi = x$. Si, dels dos, φ_a és el més petit, $0 \leq \varphi_a \leq \pi$, l'altre és $\varphi_b = 2\pi - \varphi_a$, ja que $\cos \varphi_b = \cos(2\pi - \varphi_a)$. Quan un usuari introdueix un nombre en una calculadora i li demana que en trobi l'arccosinus, la calculadora, per sistema, només mostra l'angle φ_a més petit dels dos possibles. I és l'usuari qui ha d'acabar la feina decidint quin dels dos possibles és el que li correspon al seu cas i amb el qual ha de continuar treballant. Notem que, com que $\sin \varphi_a > 0$ i $\sin \varphi_b < 0$, només cal saber el signe del sinus de l'angle que busquem per poder esbrinar quin dels dos és el que ens convé.



1.1.2. Dinàmica del MHS

Com ja hem vist a l'equació (1.3), $a = -\omega^2 x$. La segona llei de Newton, $F = ma$, ens indica quina és la força que produeix un MHS

$$F = -m\omega^2 x = -kx \quad (1.7)$$

on hem definit la *constant de força* k com

$$k = m\omega^2 \quad \text{o, equivalentment,} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (1.8)$$

La força s'anul·la en $x = 0$. Per tant, aquest és un *punt d'equilibri*. A més, $x = 0$ és un *punt d'equilibri estable*: una partícula desplaçada a l'esquerra del punt d'equilibri, $x < 0$, rep una força cap a la dreta, $F > 0$, i a l'inrevés, si la partícula és desplaçada a la dreta, $x > 0$, rep la força cap a l'esquerra, $F < 0$. Així, la partícula mai no s'allunya gaire del punt d'equilibri.

Una força d'aquesta mena s'anomena *força restauradora o recuperadora*.

A més, si el mòdul de la força és proporcional al desplaçament x , com en (1.7), en diem *força restauradora lineal*.

Les forces restauradores donen lloc, en general, als moviments oscil·latoris; les forces restauradores lineals, als MHS. A la secció §1.5 hi insistirem més.

La relació entre l'acceleració a i el desplaçament x , $a = -\omega^2 x$, és una de les característiques més significatives del MHS. Substituint la a per la derivada segona, trobem que

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \quad (1.9)$$

Aquesta igualtat és una *equació diferencial de segon ordre*. Una equació diferencial és una igualtat en què participen una funció i/o algunes de les seves derivades. Aquesta equació en concret s'anomena de *segon ordre* perquè la derivada més alta que hi apareix és la segona.

Les equacions diferencials apareixen en tots els camps de les ciències. Així, per exemple, la segona llei de Newton porta sempre a equacions diferencials com ara la (1.9), en les quals l'acceleració és la responsable que siguin de segon ordre. En l'estudi de les oscil·lacions amortides i en el de les forçades dels pròxims dos capítols tornarem a parlar-ne.

En general, qualsevol magnitud q depenent del temps que satisfaci una equació diferencial semblant a la (1.9) com ara

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \omega^2 q = 0 \quad (1.10)$$

—on ω^2 és una constant positiva— fa una *oscil·lació harmònica simple*, de freqüència angular ω , i amb totes les altres característiques del MHS. El sistema en què la magnitud q satisfà l'equació diferencial anterior s'anomena *oscil·lador harmònic simple*.



Els exemples més típics i senzills d'oscil·lacions no mecàniques són les *oscil·lacions elèctriques*, que s'expliquen breument i es comparen amb les mecàniques a l'apèndix §D.

Tornant a la mecànica, una partícula de massa m sotmesa a una força $F = -kx$ fa un MHS l'expressió del qual depèn dels tres paràmetres A , ω i ϕ :

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

Si les condicions inicials de la partícula a $t = 0$ són $x = x_0$ i $v = v_0$, tenim que

$$x_0 = A \cos \phi \quad \text{i} \quad v_0 = -\omega A \sin \phi$$

d'on, combinant aquestes dues equacions, resulta

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} \quad \text{i} \quad \tan \phi = -\frac{v_0}{\omega x_0} \quad (1.11)$$

Per (1.8) tenim que el període val $T = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{m/k}$. És a dir, al contrari que A i ϕ ,

el període del MHS d'un oscil·lador —mecànic, elèctric o de la mena que sigui— és independent de les seves condicions inicials només depèn dels seus paràmetres k i m .

En general, les oscil·lacions no harmòniques simples degudes a forces restauradores no lineals tenen períodes que sí que depenen de les condicions inicials i, en particular, de l'amplitud de l'oscil·lació.

1.2. Sistema molla-massa

El sistema molla-massa és un dels molts exemples que hi ha de forces recuperadores lineals.

Considerem una molla de massa negligible, amb un dels seus extrems fixat i l'altre unit a un bloc o partícula de massa m , en què està tot el conjunt en un pla horitzontal sense fricció.

Si les variacions de la longitud natural de la molla, diguem-ne x —positives o negatives—, són prou petites que no ultrapassin el límit elàstic de la molla, un fet experimental —*lei de Hooke* de l'elasticitat— ens assegura que la força que exerceix la molla sobre el bloc ve donada per l'expressió (1.7), $F = -kx$, on k és la *constant de força* característica de la molla.

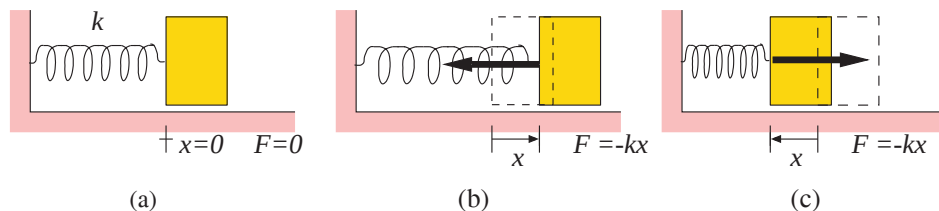
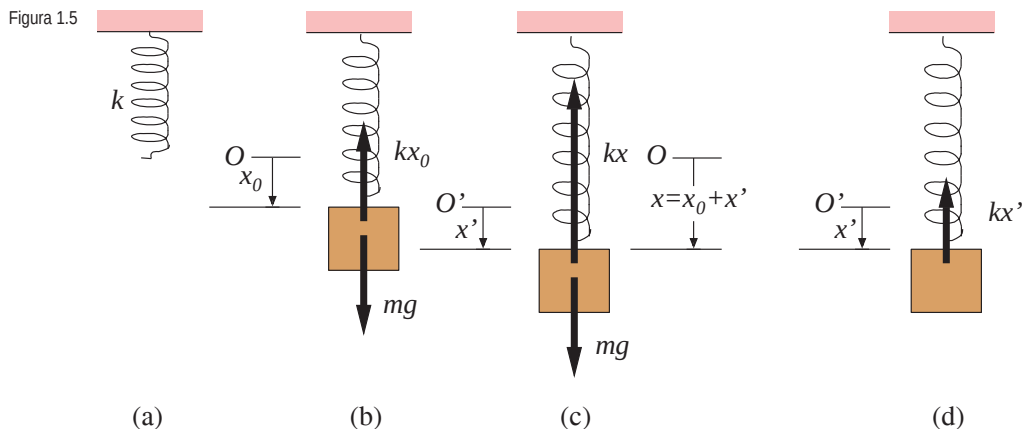


Figura 1.4

Fixem-nos en les figures 1.4. En la (a), el bloc està inicialment en la posició d'equilibri, que prenem com a $x = 0$. Si el retirem d'aquesta posició i el deixem anar —v. figures (b) i (c)— farà un MHS de freqüència angular ω donada per (1.8).

I què succeeix si fixem un extrem d'aquesta mateixa molla al sostre i a l'altre hi pengem el bloc verticalment? Estudiem-ho per etapes —v. figura 1.5.



Pengem la molla del sostre sense el bloc. Com que suposem que la molla no té massa pròpia, no s'allarga gens —v. figura 1.5 (a). L'extrem lliure determina l'origen O de l'eix x , que prenem positiu cap avall. A continuació, hi pengem el bloc i deixem que, molt lentament, per raó del seu pes, mg , la molla es vagi estirant i el bloc baixant. En estirar-se, la molla fa una força amunt sobre el bloc que, després d'haver baixat l'altura x_0 , acaba compensant el seu pes. El bloc està en equilibri en el punt O' —v. figura 1.5 (b)—, i es compleix

$$mg - kx_0 = 0 \quad (1.12)$$

Si el fem baixar encara més fins a x —v. figura 1.5 (c)—, ara la força que fa la molla és kx , i la força resultant sobre el bloc, tenint en compte (1.12), és

$$mg - kx = kx_0 - kx = -k(x - x_0) = -kx' \quad (1.13)$$

és a dir, és la força que faria la molla si s'hagués estirat $x' = x - x_0$, o sigui, si s'estirés només des de la posició d'equilibri O' —v. figura 1.5 (d).

La força neta que actua sobre el bloc penjat, (1.13), continua essent recuperadora lineal de constant k . En conseqüència, si el traiem de l'equilibri, farà un MHS amunt i avall, el període del qual, per (1.8) i (1.12), valdrà

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{x_0}{g}}$$

Com a resum, podem dir que el tractament d'un problema amb un sistema molla-massa penjat verticalment és idèntic al que faríem si el moviment del conjunt fos horitzontal però prenent l'origen d'elongacions en el nou punt d'equilibri O' .



Exemple 1.2. Associacions de dues molles

A la figura 1.6, s'hi han representat tres formes en què podem unir una partícula a dues molles de constants k_1 i k_2 . Estudieu, per als tres casos, quina hauria de ser la constant k d'una sola molla que fes l'efecte de totes dues.

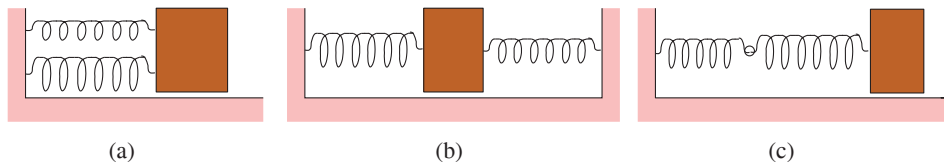


Figura 1.6

Solució

Suposem que els tres blocs de la figura 1.6 estan en els seus punts d'equilibri. Això implica que les molles dels casos (a) i (c) tenen la seva longitud natural. Les dues molles del cas (b) poden mantenir en equilibri el bloc estant-hi totes dues estirades o comprimides, però en aquest exemple suposem que també tenen la seva longitud natural. Bé, doncs, tal com es veu a la figura 1.7 desplaçem els blocs una distància x fora de la posició d'equilibri.

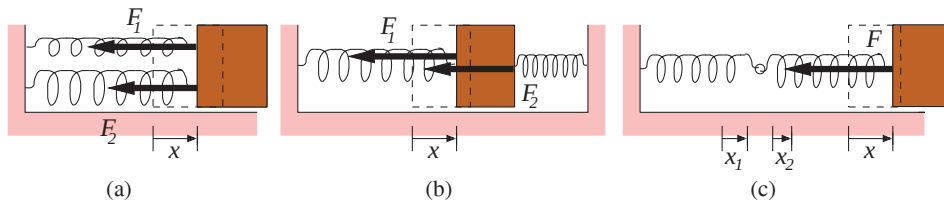


Figura 1.7

Cas (a). Aquestes molles s'han allargat la mateixa longitud x , per la qual cosa fan sobre el bloc les forces $F_1 = -k_1x$ i $F_2 = -k_2x$. La força resultant F sobre el bloc és la suma d'ambdues

$$F = F_1 + F_2 = -k_1x - k_2x = -(k_1 + k_2)x$$

de manera que si hi hagués només una molla i l'allarguéssim x , la força que faria sobre el bloc seria $F = -kx$, amb la constant de força k . Per tant,

$$k = k_1 + k_2 \quad (1.14)$$

Cas (b). En aquest cas, una molla s'allarga x i l'altra es comprimeix $-x$; en conseqüència, totes dues fan força en el mateix sentit, el contrari a l'allargament. La força resultant F val

$$F = F_1 + F_2 = -k_1x - k_2x = -(k_1 + k_2)x$$

que és equivalent en tot al cas anterior.

Cas (c). Aquest és diferent dels casos anteriors. Si desplaçem el bloc la distància x , les molles s'allarguen les longituds x_1 i x_2 , de manera que $x_1 + x_2 = x$. D'altra banda, l'única molla que fa força sobre el bloc és la que està en contacte amb ell. Si —com és habitual— suposem que les molles no tenen massa apreciable, aleshores la força F que fa aquesta

molla l'aplica sobre el bloc i sobre l'altra molla, i és la mateixa força F que fa la primera molla sobre la paret a la qual està lligada. És a dir, si F és la força que rep el bloc pel fet de separar-se x del seu punt d'equilibri, i k és la constant de força de la hipotètica molla equivalent a aquestes dues, tenim les dues igualtats

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = x \\ F = -k_1 x_1 = -k_2 x_2 = -kx \end{cases}$$

d'on surt, $k_1 x_1 = k_2 x_2 = k(x_1 + x_2)$. I, d'aquí, obtenim que

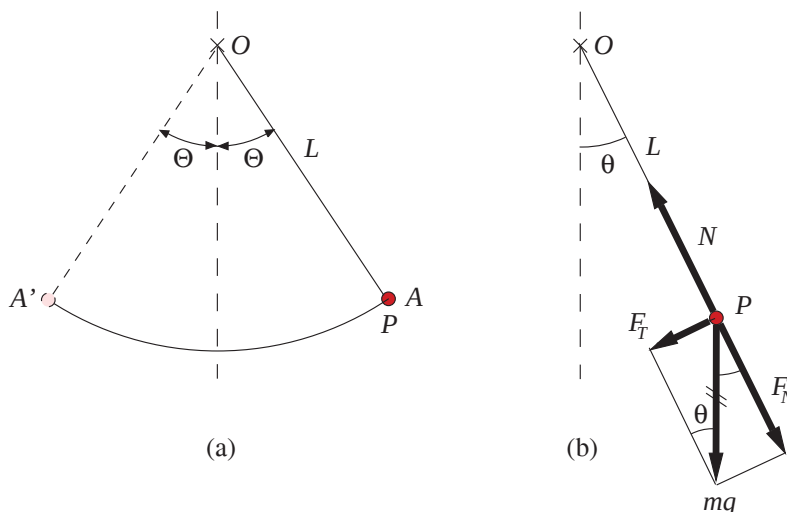
$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \quad (1.15)$$

1.3. Pèndols. MHS angular

1.3.1. Pèndol simple

Com es presenta a la figura 1.8, un *pèndol simple* consisteix en una barra o una corda inextensible, de longitud L però de massa negligible, que té una partícula P —la lentilla—, de massa m , lligada a l'extrem. Pengem la corda del sostre per l'altre extrem O i deixem que, per l'acció del seu pes, oscil·li en un pla vertical. Per la conservació de l'energia, el moviment del pèndol serà simètric al voltant de la vertical, entre les dues posicions extremes A i A' .

Figura 1.8



Les forces que actuen sobre la lentilla són el seu pes, mg , i la tensió de la corda, N . A la figura 1.8 (b), s'indica que, quan la corda fa un angle θ amb la vertical, és a dir, amb la posició d'equilibri, podem descompondre el vector pes en dues components: la normal, de mòdul $F_N = mg \cos \theta$, i la tangencial, de mòdul $F_T = mg \sin \theta$. Quan la partícula està oscil·lant, descriu un moviment circular —no uniforme— de radi constant L ;



precisament per això, la diferència entre la tensió N i la component normal del pes, F_N , no pot ser nul·la sinó que ha de ser igual a la força centrípeta

$$N - mg \cos \theta = m \frac{v^2}{L}$$

si bé, com veurem a continuació, per a l'estudi del pèndol, aquesta última igualtat, que ens proporciona el valor de la tensió N , no és significativa.

Aplicarem la segona llei de Newton a la lentilla relacionant la seva acceleració tangencial amb la component tangencial del pes. Com sabem, en un moviment circular, l'acceleració tangencial és igual al producte de l'acceleració angular $d^2\theta/dt^2$ pel radi L . Quant a la força, molta atenció: la segona llei de Newton és una equació vectorial i hem de tenir en compte, per tant, els sentits dels vectors. En aquest cas, fixem-nos que, quan l'angle θ sigui positiu, la força tangencial serà negativa, i a l'inrevés. Això significa que la força és restauradora. Per tant, cal posar un signe menys davant del mòdul de la força. Així, tindrem

$$mL \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg \sin \theta$$

i, simplificant la massa m , obtenim l'equació diferencial

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L} \sin \theta = 0 \quad (1.16)$$

Malgrat l'aparença innocent d'aquesta equació, el $\sin \theta$ la complica extraordinàriament. Ara bé, si l'angle θ de l'oscil·lació és petit en tot moment, podem aproximar el sinus per l'angle en radians —v. (A.61), apèndix §A.2—

$$\sin \theta \approx \theta \quad (1.17)$$

i així l'equació anterior quedarà com

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L} \theta = 0 \quad (1.18)$$

que és una equació diferencial de l'estil de la (1.9) per a l'angle θ . Com que ambdues equacions són formalment idèntiques, els resultats també han de ser-ho. En conseqüència, l'angle θ depèn del temps t com

$$\theta = \Theta \cos(\omega t + \phi) \quad (1.19)$$

i la lentilla fa un *MHS angular*, amb $\omega = \sqrt{g/L}$, de manera que l'amplitud angular Θ i la fase inicial ϕ són les dues constants que depenen de les condicions inicials. El període de les oscil·lacions val

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \quad (1.20)$$

que, com en tots els MHS, és independent de l'amplitud de les oscil·lacions.

Cal insistir que aquests resultats només són vàlids si les oscil·lacions són d'*amplitud petita*.

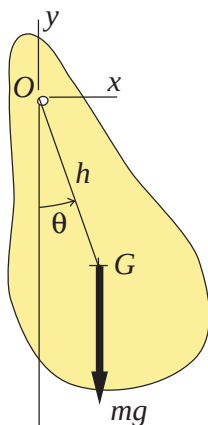
Les aproximacions com ara la (1.17) són molt freqüents en tots els camps de la física, com en l'òptica, l'electrònica, etc. S'en diu que és una *aproximació lineal* perquè l'equació diferencial a què dona lloc, la (1.18), és una *equació diferencial lineal*, és a dir, a tota l'equació la funció θ és elevada a la potència 1. L'equació exacta per a θ , la (1.16), no és lineal a causa del $\sin \theta$; tampoc no seria lineal si hi aparegués en l'equació, per exemple, θ^2 , $e^{-\lambda\theta}$, $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$, $\sqrt{\theta}$, etc.

Les equacions diferencials lineals tenen una propietat que s'anomena *principi de superposició*, que ajuda a resoldre-les. En canvi, l'estudi de les *equacions diferencials no lineals*, a les quals no és aplicable, és molt més complex que el de les lineals. Del principi de superposició, en parlarem, especialment, als capítols 4 i 5; de les oscil·lacions no lineals, al capítol 7.

1.3.2. Pèndol físic

A la figura 1.9, es mostra un *pèndol físic* consistent en un sòlid rígido de forma arbitrària, suspès d'un eix horitzontal —l'eix z — que passa pel punt O , el *punt o centre de suspensió*. El pes del cos, $\mathbf{P} = m\mathbf{g}$, s'aplica al seu *centre de masses*, G , essent h la distància entre els punts O i G . Fora de l'equilibri, l'eix OG forma un angle θ no nul amb la vertical. Per analitzar el moviment del pèndol físic, utilitzem la *segona llei de Newton per a la dinàmica de la rotació*. Com sabem, aquesta diu:

Figura 1.9



La suma $\mathbf{M}$ dels moments de les forces externes que actuen sobre un sòlid és igual al producte del moment d'inèrcia I del sòlid respecte de l'eix de rotació pel vector acceleració angular $\boldsymbol{\alpha}$, és a dir,

$$\mathbf{M} = I\boldsymbol{\alpha}$$

Calculem els moments respecte del punt fix de suspensió O del pèndol. Les úniques forces externes que actuen sobre el pèndol són:

- la reacció de l'eix d'oscil·lació sobre el sòlid, que com que està aplicada en O mateix no fa moment respecte de O —i no està representada a la figura 1.9, i
- el pes, mg , aplicat a G .

Amb el sistema d'eixos adoptats a la figura 1.9, el moment que fa el pes $\mathbf{P} = -mg\mathbf{u}_y$ respecte de O , val

$$\mathbf{M} = \overline{OG} \times \mathbf{P} = -h \sin \theta mg \mathbf{u}_z$$

on el signe menys manifesta el caràcter recuperador del moment: si l'angle θ és positiu, el moment és negatiu, i viceversa. L'acceleració angular és $\boldsymbol{\alpha} = \frac{d^2\theta}{dt^2} \mathbf{u}_z$; llavors, tenim

$$-h \sin \theta mg \mathbf{u}_z = I \frac{d^2\theta}{dt^2} \mathbf{u}_z$$



és a dir,

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgh}{I} \sin \theta = 0 \quad (1.21)$$

Aquesta és l'equació diferencial del moviment angular del pèndol físic, molt semblant a la (1.16), i que, com dèiem abans, el $\sin \theta$ la fa molt complicada. Això sí, si les oscil·lacions del pèndol es limiten a amplituds petites, llavors $\sin \theta \approx \theta$, i, com hem vist per al pèndol simple, l'equació anterior queda linealitzada com

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgh}{I} \theta = 0 \quad (1.22)$$

Si les oscil·lacions són petites, el pèndol físic fa, doncs, un MHS angular de període

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgh}} \quad (1.23)$$

El fet que en aquesta expressió aparegui el quocient I/m ens indica que el període del pèndol físic, anàlogament al cas del pèndol simple, no depèn de la seva massa sinó de la distribució geomètrica de la massa entorn de l'eix de suspensió.

Són moltes les aplicacions del pèndol físic. Històricament, les més importants han estat les dues següents:

- per raó de la independència del període de l'amplitud de l'oscil·lació, els pèndols s'han utilitzat molt com a rellotge o cronòmetre precís per mesurar el temps;
- com que el període del pèndol es pot mesurar amb molta precisió i aquest depèn molt de g , els pèndols s'han utilitzat també molt en la determinació precisa de l'acceleració de la gravetat d'un lloc determinat.

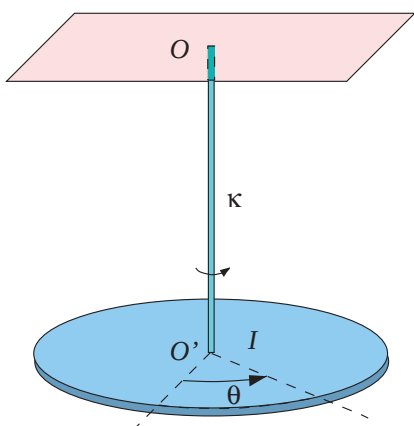
1.3.3. Pèndol de torsió

A la figura 1.10, s'ha representat un *pèndol de torsió*, consistent en un fil vertical $\overline{OO'}$ fixat al sostre, del qual s'ha suspès un disc —o un sòlid rígid, en general. Si el disc es gira en un pla horitzontal al voltant del fil-eix un cert angle i es deixa anar, s'observa que oscil·la en un MHS angular. Notem que l'extrem O' està unit al disc i gira amb aquest, però, en canvi, l'extrem O està unit al sostre i no gira de cap manera. Aleshores, a cada oscil·lació el fil pateix un torçament creixent en un sentit o en l'altre.

La posició d'equilibri del sistema fil-disc correspon a aquella orientació del disc per a la qual el fil no està torçat. Si θ és l'angle girat pel disc respecte de la seva posició d'equilibri, es troba que, mentre no es depassi el límit elàstic de torsió del fil, el torçament d'aquest exerceix un moment M recuperador sobre el disc proporcional a θ —un altre cop la *lleï de Hooke*— $M = -\kappa \theta$, on κ és la *constant de torsió* del fil.

Aquesta constant depèn de les característiques elàstiques de cada fil i fa el mateix paper en el pèndol de torsió que la constant de força k en el sistema molla-massa. Igual que succeeix en aquest sistema, podem determinar experimentalment la κ d'un fil concret

Figura 1.10



amb una sola mesura. En efecte, només cal veure quin angle ha girat el disc després d'haver-hi aplicat un moment conegut.

Si I és el moment d'inèrcia del disc o sòlid respecte de l'eix-fil, aplicant la segona llei de Newton per a les rotacions, com hem fet amb el pèndol físic, tindrem

$$-\kappa \theta = I \frac{d^2 \theta}{dt^2}$$

és a dir, l'equació diferencial

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{\kappa}{I} \theta = 0$$

Les oscil·lacions del sistema fil-disc són, per tant, MHS angulars de període

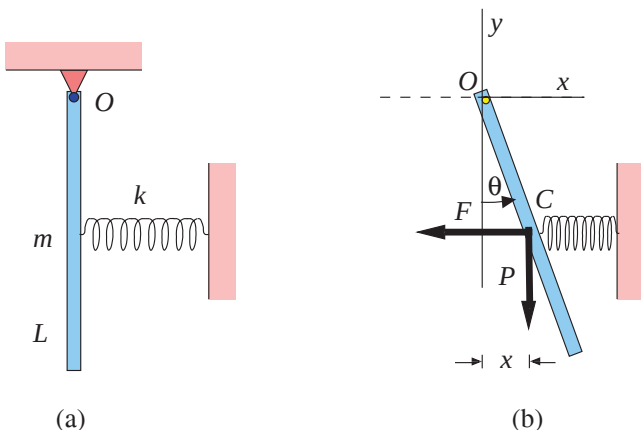
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{\kappa}} \quad (1.24)$$

Així com una aplicació molt directa de la llei de Hooke en relació amb les molles és el dinamòmetre, també l'aplicació més habitual dels pèndols de torsió és la *balança de torsió*. En aquestes balances, els fils dels pèndols de torsió són calibrats per poder mesurar forces, com en el dinamòmetre, però, en aquest cas, molt més petites.

Exemple 1.3. Pèndol físic amb molla

Tenim un pèndol físic que consisteix en una barra homogènia de longitud $L = 1$ m i de massa $m = 1$ kg, penjada del sostre per un extrem. Per tal d'escurçar el període d'aquest pèndol, unim el centre de la barra a una molla horitzontal. Quina constant de força k ha de tenir la molla si volem que el període del sistema pèndol-molla sigui la meitat que el del pèndol sol?

Figura 1.11





Solució

A la figura 1.11 (a) anterior, es mostren la barra i la molla en l'equilibri; a la figura 1.11 (b), s'han representat barra i molla fora de l'equilibri i, a més, el sistema de referència Oxy que utilitzarem en la resolució del problema.

Desplacem la barra un angle petit θ de la posició d'equilibri. Les forces que hi actuen i que fan moment respecte de l'extrem fix O són la F que fa la molla i, naturalment, el propi pes P de la barra.

Ara fem les consideracions següents sobre el pes $\mathbf{P}$ de la barra i sobre la força $\mathbf{F}$ que fa la molla.

- El pes de la barra és $\mathbf{P} = -mg\mathbf{u}_y$ i, com que la barra és homogènia, s'aplica al seu centre C . El moment del pes respecte de O val, doncs, considerant θ petit,

$$\mathbf{M}_P = \overline{OC} \times m\mathbf{g} = -\frac{L}{2} \sin \theta mg \mathbf{u}_z \approx -\frac{L}{2} \theta mg \mathbf{u}_z$$

- Si θ és petit, la força F que fa la molla també s'aplica al centre C de la barra i val

$$\mathbf{F} = -kx\mathbf{u}_x = -k\frac{L}{2} \sin \theta \mathbf{u}_x \approx -k\frac{L}{2} \theta \mathbf{u}_x$$

ja que $x = L \sin \theta / 2 \approx L \theta / 2$ és l'escurçament de la molla. Com que $\cos \theta \approx 1$, el moment d'aquesta força respecte de O valdrà

$$\mathbf{M}_F = \overline{OC} \times \mathbf{F} = -k\frac{L}{2} \theta \frac{L}{2} \cos \theta \mathbf{u}_z \approx -\frac{L^2}{4} k \theta \mathbf{u}_z$$

Com que el moment resultant és la suma dels dos moments, podem plantejar l'equació de la dinàmica de la rotació de la forma

$$-\left(\frac{L}{2} mg + \frac{L^2}{4} k\right) \theta = I \frac{d^2 \theta}{dt^2}$$

on I és el moment d'inèrcia de la barra respecte de O , és a dir, $I = mL^2/3$. Substituint I i reordenant els termes, trobem l'equació diferencial del moviment

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \left(\frac{3g}{2L} + \frac{3k}{4m}\right) \theta = 0$$

I el període del sistema pèndol-molla valdrà, doncs,

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{3g}{2L} + \frac{3k}{4m}}} \quad (1)$$

Si la molla no hi fos, només tindríem el pèndol; aquest cas equival a posar $k = 0$ a l'expressió anterior

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{2L}{3g}} \quad (2)$$

A l'enunciat, ens demanen el valor de k que faci $T = T_0/2$. Així doncs, per (1) i (2), prenent $g = 9,81 \text{ m/s}^2$, trobem que la molla que hem de col·locar ha de tenir una constant k de

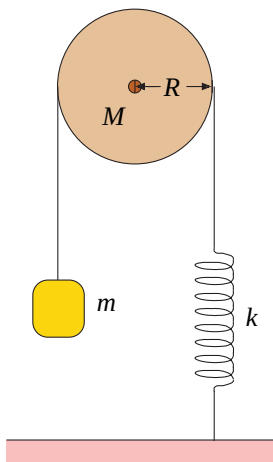
$$k = \frac{6mg}{L} = 58,86 \text{ N/m}$$

Exemple 1.4. Sistema molla-massa-politja

Per una politja fixa hi passa una corda de massa negligible que té un extrem lligat a terra a través d'una molla de constant de força $k = 250 \text{ N/m}$ i, a l'altre, un cos de massa $m = 2 \text{ kg}$, tal com es mostra a la figura 1.12. La massa i el radi de la politja són, respectivament, $M = 3 \text{ kg}$ i $R = 0,12 \text{ m}$, i la corda, en el seu moviment, arrossega la politja sense relliscar. Determineu el període de les oscil·lacions que farà el sistema si el traiem de l'equilibri.

Solució

Figura 1.12



Tal com s'assenyala a la figura 1.13 (a), en la situació d'equilibri la molla ja ha d'estar estirada respecte de la seva longitud natural, ja que ha de compensar el pes mg del cos. Si anomenem x_0 l'allargament inicial de la molla, en l'equilibri del sistema es compleix que

$$kx_0 = mg \quad (1)$$

ja que la tensió F que equilibra el cos és la mateixa que actua en ambdós costats de la politja i la que estira la molla.

D'altra banda, prenguem com a origen de la x , posició vertical del cos, el punt d'equilibri anterior, amb el sentit positiu cap avall. Un cop ja està oscil·lant el sistema, tenim que:

- Sobre el cos actuen el pes mg i la tensió F_1 que, per la segona llei de Newton, donen

$$mg - F_1 = m \frac{d^2x}{dt^2} \quad (2)$$

on $a = d^2x/dt^2$ és l'acceleració del cos, positiva si és cap avall i negativa si és cap amunt.

- Sobre la politja actuen les dues tensions F_1 i F_2 . La politja gira amb una certa acceleració angular α perquè aquestes tensions són diferents. En efecte, si calculem els moments de les tensions F_1 i F_2 respecte del centre de la politja, i I n'és el moment d'inèrcia també respecte del seu centre, la segona llei de Newton per a les rotacions ens diu que

$$RF_1 - RF_2 = I \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (3)$$

on hem pres, per als moments i $\frac{d^2\theta}{dt^2} = \alpha$, com a positiu el sentit antihorari.

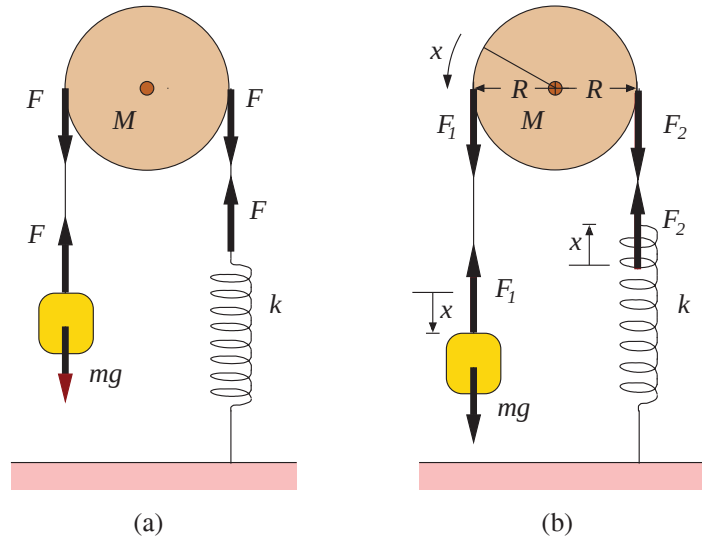


Figura 1.13

- La corda que lliga el cos amb la molla a través de la politja és inextensible; per tant, la x que baixa el cos és l'allargament de la molla. Aleshores, obtindrem que

$$F_2 = k(x_0 + x) \quad (4)$$

- Fins ara tenim quatre incògnites —les dues tensions i les dues acceleracions, a i α — i tres equacions. Ara només ens falta una relació entre l'acceleració lineal a del cos i l'acceleració angular α de la politja. Com que l'enunciat ens assegura que la corda arrossega perfectament la politja sense que rellisqui per sobre d'ella, llavors l'acceleració de la corda, que és la mateixa que la del cos, a , és la mateixa que la lineal de la perifèria de la politja, és a dir, $R\alpha$. Per tant,

$$R \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2} \quad (5)$$

Substituint ara la F_1 de (2), la F_2 de (4) i la α de (5) en (3), i considerant la relació (1), arribem a l'equació

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \left(\frac{k}{m + I/R^2} \right) x = 0$$

d'on resulta ω . Si ara considerem la politja com un cilindre homogeni de radi R , aleshores el moment d'inèrcia valdrà $I = MR^2/2$. Per tant, podem concloure finalment que

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m + \frac{I}{R^2}}}} = 2\pi \sqrt{\frac{2m + M}{2k}}$$

Substituint els valors numèrics, en resulta $T = 0,7434$ s.



1.4. Energia potencial elàstica

La força $F = -kx$ que dóna lloc al MHS d'una partícula és *conservativa*, ja que deriva de l'energia potencial elàstica U donada per

$$-kx = -\frac{dU}{dx} \quad \text{d'on} \quad U = \int kx dx = \frac{1}{2}kx^2 + C \quad (1.25)$$

on C és una constant d'integració. Si, com és habitual, prenem $U = 0$ en $x = 0$, aleshores $C = 0$. Amb aquest conveni, la funció energia potencial U és

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2 \quad (1.26)$$

Per tant, sempre serà positiva o zero. I, en funció del temps t , per (1.1) la tenim com

$$U(t) = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t + \phi) \quad (1.27)$$

D'altra banda, per (1.2) podem posar l'energia cinètica com

$$K(t) = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \phi) \quad (1.28)$$

i la suma de la potencial (1.27) i la cinètica (1.28), tenint en compte (1.8), resulta

$$E = U + K = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t + \phi) + \frac{1}{2}kA^2 \sin^2(\omega t + \phi) = \frac{1}{2}kA^2 \quad (1.29)$$

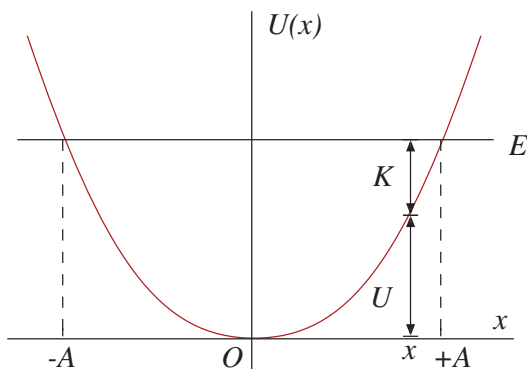
Acabem de comprovar que, certament, l'energia mecànica E és constant.

Sigui una partícula de massa m que està fent un MHS de freqüència angular ω i tal que, en un determinat instant es troba en la posició x_0 , amb la velocitat v_0 . Llavors, la seva energia mecànica val, per (1.29) i (1.8)

$$E = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x_0^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \quad (1.30)$$

Fixem-nos que hem tornat a obtenir el resultat (1.11) per a l'amplitud.

Figura 1.14





Com a resum de tot això i, per tal de comprendre bé les relacions energètiques relacionades amb el MHS, és molt interessant representar gràficament l'energia potencial $U(x)$ en funció de x , tal com s'ha fet a la figura 1.14.

Per exemple, per a una partícula unida a una molla, per (1.26) veiem que és la constant k d'aquesta molla la que dóna la forma de la paràbola. I, per (1.30), també comprovem que les condicions inicials de la partícula en determinen l'energia E . Per la gràfica, ens adonem que el nivell d'energia E —la intersecció de la recta $U = E$ amb la paràbola $U(x)$ — determina l'amplitud del moviment, com, de fet, ja hem vist a (1.29).

Igual com l'energia potencial, notem que l'energia cinètica K també es pot expressar fàcilment en funció de x . Efectivament, per (1.29) i per (1.26) tenim

$$K = E - U = \frac{1}{2}k (A^2 - x^2)$$

Exemple 1.5. Xocs i molles

Un projectil de massa $m = 10$ g, que va a la velocitat $v_0 = 500$ m/s, acaba impactant contra un bloc de fusta de massa $M = 2$ kg i s'incrusta dintre del bloc. El bloc està unit a una molla de constant de força $k = 100$ N/m, fixada a una paret, tal com es mostra a la figura 1.15.

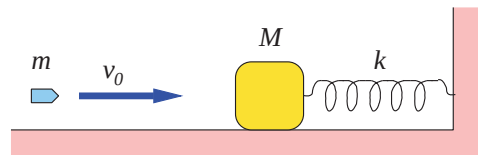


Figura 1.15

Tant el bloc com la molla es troben sobre una superfície horitzontal llisa. Si prenem com a $t = 0$ l'instant de l'impacte i com $x = 0$ la posició inicial del bloc, en repòs i en equilibri, estudeu:

- quin serà el moviment posterior del bloc i
- la força màxima que fa la molla sobre la paret.

Solució

- Suposem que l'impacte és instantani. El moviment del bloc posterior a l'impacte serà un MHS com el (1.1)

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi) \quad (1)$$

en què la posició d'equilibri coincideix amb l'origen de x . Ara només cal esbrinar quant valen A , ω i ϕ .

- Comencem per ω . Després de l'impacte, oscil·larà el conjunt bloc més bala, de massa $M + m$; per tant, la ω corresponent serà

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{M + m}}$$



resultat independent de qualsevol altra consideració. Substituint les dades de l'enunciat, obtenim $\omega = 7,053 \text{ rad/s}$.

- Pel que fa a l'amplitud, la trobarem aplicant els principis de conservació. Després de l'impacte, el conjunt bloc més bala surt llançat a la velocitat v_1 , donada per la conservació de la quantitat de moviment $mv_0 = (M + m)v_1$, i d'aquí

$$v_1 = \frac{m}{M + m}v_0$$

És a dir, $v_1 = 2,488 \text{ m/s}$. A $t = 0$, el conjunt té una energia cinètica que s'anirà transformant en potencial elàstica a mesura que la molla es vagi comprimint. A l'instant en què el conjunt arriba al repòs, la molla ja no es comprimeix més. Aleshores, tota l'energia cinètica inicial del conjunt —no la del projectil— s'ha transformat en energia potencial. Per tant, tindrem

$$\frac{1}{2}(M + m)v_1^2 = \frac{1}{2}kA^2$$

D'aquí i de l'equació anterior surt

$$A = \frac{mv_0}{\sqrt{k(M + m)}} \quad (2)$$

i, substituint, $A = 0,3527 \text{ m}$. Podem comprovar aquests resultats verificant que el producte ωA val, en efecte, la velocitat màxima del conjunt, és a dir, la inicial v_1 .

- La fase inicial ϕ . Per a $t = 0$, tenim $x = 0$ i $v = v_1$; per tant, d'(1)

$$0 = A \cos \phi \quad \text{i} \quad v_1 = -\omega A \sin \phi > 0$$

d'on resulta $\phi = 3\pi/2$ i, finalment,

$$x(t) = A \sin \omega t \quad (3)$$

amb la A i la ω anteriors.

- b) Pel que fa a la força F que fa la molla sobre la paret —i aquesta sobre l'extrem de la molla—, val $F = -kx$, amb la x donada per (3). Consegüentment, per (2) la força màxima, en valor absolut, valdrà

$$F_{\max} = kA = mv_0 \sqrt{\frac{k}{M + m}}$$

d'on, substituint, resulta $F_{\max} = 35,27 \text{ N}$.

1.5. Oscil·lacions al voltant d'un punt d'equilibri estable

Considerem una partícula en un camp de forces conservatiu del qual coneixem l'energia potencial $U(x)$. Sigui E l'energia mecànica que posseeix. Molt sovint es presenten casos semblants als que ess representen a la figura 1.16.



Recordem que, com fèiem en (1.25), la força $F(x)$ que actua sobre la partícula és la derivada de $U(x)$ —o sigui, el pendent de la funció representada— canviada de signe

$$F(x) = -\frac{dU(x)}{dx} \quad (1.31)$$

Això vol dir que, tant en el mínim com en el màxim relatiu de U , $x = x_0$ i $x = x_3$, respectivament, la força sobre la partícula és nul·la. Aquests dos punts són *punts d'equilibri*.

Suposem ara que tenim la partícula en el punt d'equilibri corresponent a x_0 , el mínim de U . Si desplaçem lleugerament la partícula de x_0 a x , amb $x > x_0$, per (1.31) veiem que la força que actua sobre ella és $F < 0$, i al contrari, si el desplaçament és de x_0 cap a x , ara amb $x < x_0$, la força és $F > 0$. En tots dos casos, la força tracta de retornar la partícula al punt d'equilibri. A aquest punt x_0 es diu que és d'*equilibri estable*, i aquest tipus de forces que apareixen prop dels punts d'equilibri estable són forces restauradores.

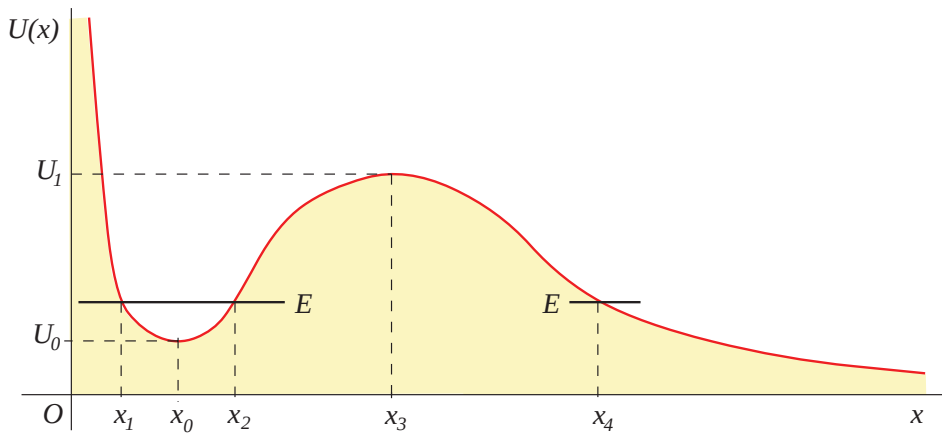


Figura 1.16

Els punts que corresponen a màxims relatius d'energia potencial es diu que són punts d'*equilibri inestable*. És el cas del x_3 de la gràfica 1.16 representada. Al contrari del que passa amb els d'equilibri estable, la força que actua sobre la partícula des del moment en què la separem del punt exacte d'equilibri és una força que l'allunya.

Continuem en el cas que es representa a la figura següent. Suposem que tenim una partícula inicialment en x_0 . Per tal que no retorni mai més al punt d'equilibri, aquesta partícula necessita tenir —o que se li comuniqui— una energia cinètica superior a $U_1 - U_0$, de tal manera que l'energia mecànica E sigui superior al màxim U_1 . En cas contrari, és a dir, si l'energia mecànica E és inferior a U_1 —que és el cas que s'il·lustra a la gràfica— la partícula estarà anant i tornant, oscil·lant entre x_1 i x_2 .

Aquest *moviment oscil·latori* no és pas, en general, un MHS, però sí té moltes de les seves característiques. Vegem-les: als extrems x_1 i x_2 del moviment, la velocitat és nul·la —canvia de sentit— i l'acceleració, en valor absolut, és màxima; al punt d'equilibri, l'acceleració és nul·la i la celeritat és màxima. Tots dos tipus de moviment són periòdics.



$$k = \left(\frac{d^2U}{dx^2} \right)_0 \quad (1.34)$$

I a partir de k recordem que, per (1.8), tenim

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\left(\frac{d^2U}{dx^2} \right)_0}} \quad (1.35)$$

1.5.2. Període d'un moviment oscil·latori qualsevol

Ja sabem que el període d'un MHS és independent de les condicions inicials o, el que és el mateix, de la seva energia E . Però el període d'un moviment oscil·latori no MHS, en general, sí que depèn de E . Vegem com es pot calcular el període en el cas d'un moviment oscil·latori qualsevol.

Si coneixem $U(x)$ i l'energia mecànica E d'una partícula de massa m , per la conservació de l'energia tenim

$$E = U + K = U(x) + \frac{1}{2}m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2$$

D'aquí aïllem la derivada i ens queda

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}} \quad (1.36)$$

Ara integrem l'expressió (1.36) prenent com a límits d'integració els límits del moviment x_1 i x_2 . Aquesta integral ens donarà l'interval de temps que dura una semioscil·lació. Consegüentment, el període T valdrà

$$T = 2 \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}} \quad (1.37)$$

Si, per exemple, en el cas particular del MHS, posem $U(x) = kx^2/2$ a l'expressió anterior i prenem $x_1 = -A$ i $x_2 = A$, fem la integral i simplifiquem arribem al resultat ja ben conegut de $T = 2\pi\sqrt{m/k}$, independent de A .

1.5.3. Equació d'un moviment oscil·latori qualsevol

L'equació (1.36), integrada ara amb els límits inferiors corresponents a la condició inicial —en $t = 0$, $x = x_0$ — i, com a límits superiors, els corresponents a t i x , proporciona la inversa de l'equació de moviment de la partícula

$$t = \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}} \quad (1.38)$$



Novament, si posem, per exemple, l'energia potencial $U(x) = kx^2/2$ de l'oscil·lador harmònic i fem la integral, obtenim

$$t = \sqrt{\frac{m}{k}} \arccos \left(\sqrt{\frac{k}{2E}} x \right) + C$$

La constant C depèn de x_0 i, com que té dimensions de temps, podem denotar-la per t_0 . En aquest exemple, és fàcil invertir la funció $t(x)$ anterior; trobem

$$x = \sqrt{\frac{2E}{k}} \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m}} (t - t_0) \right)$$

que correspon al MHS (1.1).

Exemple 1.6. Moviment entorn d'un punt d'equilibri estable

Una partícula de massa $m = 2$ kg es troba sotmesa a un camp de forces unidireccional l'energia potencial del qual ve donada per l'expressió

$$U(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x \quad (1)$$

on la U és en J i la x en m.

- Trobeu els punts d'equilibri i comproveu que només un és d'equilibri inestable.
- Aproximeu la funció $U(x)$ al voltant del punt d'equilibri estable per una paràbola. Esbrineu el període de les petites oscil·lacions de la partícula entorn del mínim.

Solució

Per trobar els punts d'equilibri, derivem l'energia potencial (1)

$$\frac{dU}{dx} = 6x^2 - 6x - 12$$

Igualant ara la funció resultant a zero, ens queda l'equació

$$6x^2 - 6x - 12 = 0$$

Les dues solucions, $x_1 = -1$ i $x_2 = +2$, són els dos punts d'equilibri que té la $U(x)$. Per veure si són d'equilibri estable o inestable, els substituïm a la segona derivada de $U(x)$

$$\frac{d^2U}{dx^2} = 12x - 6$$

$$\left(\frac{d^2U}{dx^2} \right)_{x=-1} = -18 < 0 \quad \text{per tant, màxim: equilibri inestable}$$

$$\left(\frac{d^2U}{dx^2} \right)_{x=+2} = +18 > 0 \quad \text{per tant, mínim: equilibri estable}$$



L'aproximació de l'energia potencial $U(x)$ per una paràbola al voltant del punt d'equilibri estable que hi ha a $x = 2$ és

$$U(x) \approx U_{x=2} + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2U}{dx^2} \right)_{x=2} (x-2)^2$$

és a dir,

$$U(x) \approx -20 + 9(x-2)^2 \quad (2)$$

i, en conseqüència, per (1.35)

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\left(\frac{d^2U}{dx^2} \right)_{x=2}}} = \frac{2\pi}{3} = 2,094 \text{ s}$$

A la figura 1.18, s'ha representat l'energia potencial $U(x)$ en línia contínua i, en discontinua, l'aproximació parabòlica (2) al voltant del mínim corresponent a $x = 2$.

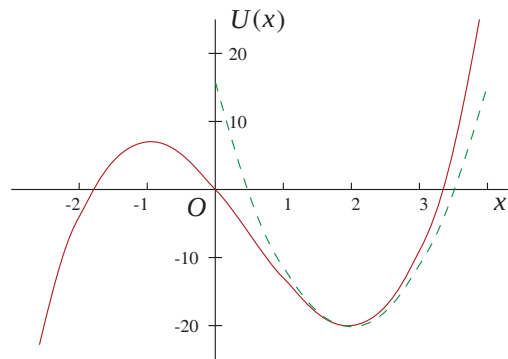


Figura 1.18

1.6. Mètode de la conservació de l'energia

En aquesta secció, veurem, amb diversos exemples, com podem dirigir l'estudi de les oscil·lacions d'un sistema aplicant-hi la conservació de l'energia mecànica. Aquest nou enfocament o *mètode de l'energia* té, sovint, diversos avantatges davant de l'aplicació de la segona llei de Newton:

- les energies potencial i cinètica són magnituds escalars bastant més manejables que les forces i els moments, que són vectorials;
- amb el mètode energètic, no cal preocupar-se per les forces de lligament que no fan treball.

Mètode de Rayleigh. És una variació del mètode de la conservació de l'energia molt útil i ràpida quan només ens interessa trobar el període de les oscil·lacions, sense necessitat de passar per l'equació del moviment. Aquest mètode consisteix en el raonament següent: l'energia cinètica del sistema és màxima en el punt o estat d'equilibri i 0 en l'estat d'elongació màxima; l'energia potencial del sistema és màxima en l'estat d'elongació



màxima i és mínima —que prendrem 0— en l'estat d'equilibri. Per la conservació de l'energia, podem igualar aquest dos màxims

$$K_{\max} = U_{\max} \quad (1.39)$$

D'aquesta igualtat se sol trobar fàcilment la freqüència angular.

Vegem com s'apliquen ambdós mètodes a dos casos senzills ja coneguts; després, ja en podrem considerar més complexos.

• Primer exemple

Una partícula s'està movent sobre l'eix x sota la influència de l'energia potencial $U(x) = kx^2/2$. Quin moviment fa?

En coneixem l'energia potencial. Movent-se rectilíneament sobre l'eix x , l'energia cinètica serà $K = mv_x^2/2$. Per la conservació de l'energia, la suma següent

$$\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = E \quad (1.40)$$

ha de ser constant. Si derivem respecte del temps, obtenim

$$kx \frac{dx}{dt} + m \frac{dx}{dt} \frac{d^2x}{dt^2} = 0$$

Ara, simplificant la velocitat dx/dt , arribem a l'equació diferencial del moviment de la partícula

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

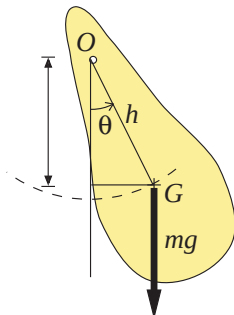
que és l'equació del MHS de període $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$.

Amb el mètode de Rayleigh: igualem l'energia potencial màxima, $U_{\max} = 1/2kx_{\max}^2$, a l'energia cinètica màxima, $K_{\max} = 1/2mv_{\max}^2 = 1/2m(\omega x_{\max})^2$, d'on es dedueix ω directament.

• Segon exemple

En aquest segon cas, estudiem el pèndol físic, ja vist a la secció §1.3.

Figura 1.19



El pèndol, com tornem a veure a la figura 1.19, és un sòlid rígid que gira amb una velocitat angular $\frac{d\theta}{dt}$ entorn d'un eix horitzontal que passa pel punt de suspensió O .

La seva energia cinètica val, doncs,

$$K = \frac{1}{2}I \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2$$

essent I el moment d'inèrcia respecte de l'eix horitzontal que passa per O .



Pel que fa a la seva energia potencial, si prenem l'origen d'energia en el nivell del punt de suspensió O , aleshores $U = -mgh \cos \theta$, on h és la distància entre O i el centre de gravetat G del pèndol. Així, la constant energia mecànica val

$$\frac{1}{2}I \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 - mgh \cos \theta = E$$

La derivada d'aquesta expressió ens dona

$$I \frac{d\theta}{dt} \frac{d^2\theta}{dt^2} + mgh \sin \theta \frac{d\theta}{dt} = 0$$

i, simplificant $d\theta/dt$, retrobem l'equació diferencial (1.21)

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgh}{I} \sin \theta = 0$$

Tot seguit, l'aproximació $\sin \theta \approx \theta$ per a oscil·lacions petites ens porta a l'equació diferencial del MHS angular del pèndol i al període

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgh}{I} \theta = 0$$

Amb el mètode de Rayleigh: en aquest cas, la igualtat (1.39) ens proporciona

$$\frac{1}{2}I \left(\frac{d\theta}{dt} \right)_{\max}^2 = mgh(1 - \cos \theta_{\max}) \quad (1.41)$$

D'altra banda, sabem que $\left(\frac{d\theta}{dt} \right)_{\max} = \omega \theta_{\max}$, així com que, si l'angle $\theta_{\max}$ és petit, per (A.57), $\cos \theta_{\max} \approx 1 - \theta_{\max}^2/2$. Substituint tot això en (1.41), queda com

$$\frac{1}{2}I (\omega \theta_{\max})^2 = mgh \frac{\theta_{\max}^2}{2}$$

d'on aïllem la freqüència angular ω .

Exemple 1.7. Oscil·lacions dintre d'una esfera

Un sòlid està constituït per dues partícules iguals de massa m , unides per una barra de longitud $2L$ de massa negligible. Si el col·loquem dintre d'una esfera buida de radi R —v. figura 1.20— i el desplaçem de la posició d'equilibri trobem el període de les oscil·lacions que farà. Suposeu que són d'amplitud petita, contingudes en un pla vertical fix i que no hi ha fricció.

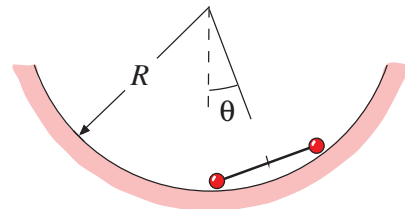
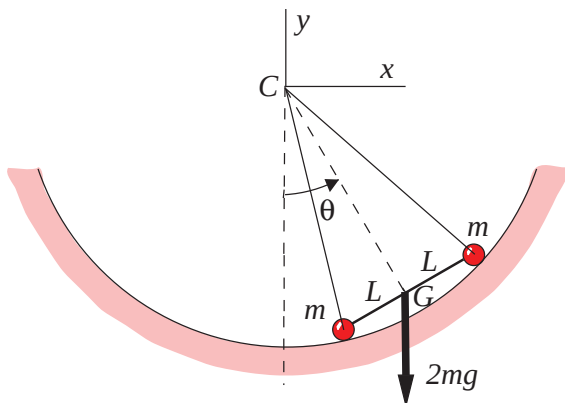


Figura 1.20

Solució

Primer en calcularem el període considerant forces i moments i, després, per conservació de l'energia. A la figura 1.21 s'ha representat el sòlid fora de l'equilibri. Tenim les dues partícules, de massa m ; el seu centre de gravetat G , on apliquem el pes del sòlid, $2mg$, i el centre de rotació del conjunt, C , que és el centre de l'esfera. L'angle θ que formen la vertical amb el segment $\overline{CG}$ determina la posició del sòlid.

Figura 1.21



I) Per forces i moments

A més del pes, les altres dues forces que actuen són les reaccions normals de la superfície esfèrica sobre les partícules, però com que aquestes forces estan dirigides cap al centre C , el càlcul del moment de les forces respecte de C , M_C , es limita al moment del pes. Amb el sistema d'eixos indicats a la figura anterior, aquest moment val

$$M_C = \overline{CG} \times 2mg = -2mg\sqrt{R^2 - L^2} \sin \theta \mathbf{u}_z \quad (1)$$

I el moment d'inèrcia de les dues partícules respecte de l'eix horitzontal que passa per C val

$$I_C = 2 \cdot mR^2 \quad (2)$$

Per tant, per (1) i (2), l'equació fonamental de la dinàmica de la rotació, $M_C = I_C \frac{d^2\theta}{dt^2}$, aplicada a aquest cas queda com

$$-g\sqrt{R^2 - L^2} \sin \theta = R^2 \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

d'on, suposant oscil·lacions petites tals que $\sin \theta \approx \theta$, resulta

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g\sqrt{R^2 - L^2}}{R^2} \theta = 0 \quad (3)$$

i un període de $T = 2\pi \sqrt{\frac{R^2}{g\sqrt{R^2 - L^2}}}$.



II) Per conservació de l'energia

Calculem l'energia mecànica que té el sòlid —les dues partícules unides—, suma de la potencial gravitatòria U més la cinètica K , en un instant en què el segment $\overline{CG}$ forma l'angle θ amb la vertical. Prenent l'origen d'energia potencial a l'altura del centre C , tenim

$$U = -2mg\sqrt{R^2 - L^2} \cos \theta \quad (4)$$

Fixem-nos que les dues partícules es mouen sempre cadascuna a la mateixa celeritat de l'altra, ja que el seu centre comú de masses, G , i elles mateixes, giren al voltant del centre C . Per tant, tenim que l'energia cinètica de les dues val

$$K = 2 \cdot \frac{1}{2}mv^2 = mR^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \quad (5)$$

L'energia mecànica és la suma de (4) més (5)

$$E = -2mg\sqrt{R^2 - L^2} \cos \theta + mR^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2$$

Derivant aquesta expressió, trobem

$$\frac{dE}{dt} = 0 = +2mg\sqrt{R^2 - L^2} \sin \theta \frac{d\theta}{dt} + 2mR^2 \frac{d\theta}{dt} \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

i, simplificant $d\theta/dt$ i suposant angles θ petits, retrobem l'equació (3) i, en definitiva, el període de les oscil·lacions. Es deixa per al lector tornar a trobar el període aplicant el mètode de Rayleigh.

Per acabar, notem que aquest sistema és totalment equivalent a un pèndol físic constituït per les dues masses m , dues barres sense massa de longitud R i una tercera de longitud $2L$. Aplicant (1.23), amb $I \rightarrow 2 \cdot mR^2$, $m \rightarrow 2m$, $h \rightarrow \sqrt{R^2 - L^2}$, resulta immediat trobar-ne el període.

1.7. Problemes resolts i problemes proposats

1.7.1. Problemes resolts

Problema 1.1. Cinemàtica d'un MHS

L'equació de moviment d'una partícula ve donada per

$$x(t) = 10 \cos \pi \left(\frac{2}{3}t + \frac{1}{7} \right) \quad (1)$$

on totes les magnituds estan expressades en unitats SI. Determineu:

- l'amplitud, la freqüència i el període;
- la velocitat i l'acceleració màximes que experimentarà la partícula;



- c) la posició, la velocitat i l'acceleració en $t = 18$ s;
 d) en quin instant $t > 18$ s la partícula es trobarà a l'origen movent-se amb velocitat positiva?

Solució

- a) Comparant (1) amb l'expressió general (1.1) d'un MHS: $x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$, veiem que $A = 10$ m, $\omega = \frac{2}{3}\pi$ rad/s, $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{3}$ Hz, i $T = \frac{1}{f} = 3$ s.

- b) Derivant (1), trobem

$$v(t) = -\frac{20\pi}{3} \sin \pi \left(\frac{2}{3}t + \frac{1}{7} \right) \quad (2)$$

la velocitat màxima val, doncs, $v_{\max} = \frac{20\pi}{3} = 20,9440$ m/s;

i, com que $a = -\omega^2 x$, obtenim $a_{\max} = \omega^2 A = \frac{40\pi^2}{9} = 43,865$ m/s²

- c) Per a $t = 18$ s, la fase $\varphi = \omega t + \phi$ de la partícula val

$$\begin{aligned} \varphi &= \pi \left(\frac{2}{3}t + \frac{1}{7} \right) = 38,14791079 \text{ rad} = 6,071428572 \text{ voltes} \\ &\equiv 0,071428572 \text{ voltes} = 0,4487989541 \text{ rad} \end{aligned}$$

d'on surten

$$x(18) = A \cos \varphi = +9,0097 \text{ m}, \quad v(18) = -v_{\max} \sin \varphi = -9,0872 \text{ m/s i}$$

$$a(18) = -\omega^2 x = -39,521 \text{ m/s}^2.$$

- d) Per l'equació (1), veiem que la partícula serà a l'origen, $x = 0$, en tots els instants t que satisfacin

$$\cos \pi \left(\frac{2}{3}t + \frac{1}{7} \right) = 0$$

que és com dir que t compleixi $\pi \left(\frac{2}{3}t + \frac{1}{7} \right) = \left(n + \frac{1}{2} \right) \pi$, és a dir,

$$\frac{2}{3}t - \frac{5}{14} = n \quad \text{amb} \quad n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots \quad (3)$$

D'aquesta equació trobem que, si $t = 18$ s, llavors $n = 11,64$. Prenent, doncs, $n = 12$, és a dir, $t_{12} = 18,5357$ s, la partícula passarà per l'origen. Però, amb quina velocitat? Positiva o negativa? Substituint t_{12} a (2), tenim $v(t_{12}) < 0$. En quin instant posterior



passarà de nou la partícula per l'origen però amb velocitat positiva? Al cap de mig període: $t = t_{12} + \frac{T}{2} = 20,0357 \text{ s}$.

Notem que a (3), entre n i $n + 1$ passa un interval de temps $\Delta t = 3/2 = T/2$, mig període. Per (2) podem comprovar que, si a (3) prenem n senar, la velocitat en els t corresponents és positiva i, si n és parella, la velocitat és negativa. A la figura 1.22, relacionem aquest comentari amb el moviment circular uniforme lligat al MHS.

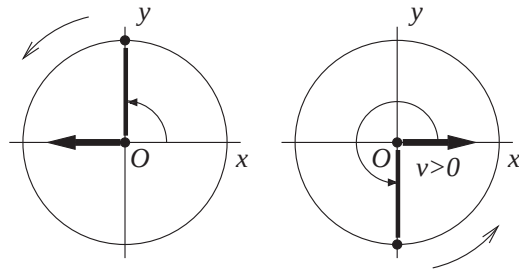


Figura 1.22

Problema 1.2. Un moviment periòdic que no és un MHS

Una partícula es troba sobre una estructura constituïda per dos plans inclinats un angle α —v. figura 1.23.

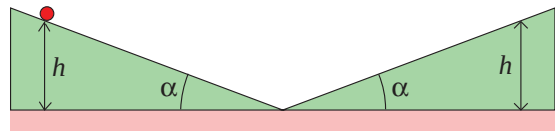


Figura 1.23

La partícula es deixa anar des d'una altura h i baixa lliscant. Si no hi ha fricció, la partícula farà un moviment periòdic oscil·latori; però, serà un MHS? Determineu-ne el període en funció de l'amplitud horitzontal A de l'oscil·lació.

Solució

La partícula fa un moviment oscil·latori perquè la força que hi actua —la component tangencial del pes, $|F| = mg \sin \alpha$ — és recuperadora:

$$F(x) = \begin{cases} +mg \sin \alpha, & \text{si } x < 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \\ -mg \sin \alpha, & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Però el moviment no pot ser harmònic simple, ja que aquesta força és constant i no proporcional a l'elongació x .

Pel que fa al període, el podem trobar calculant el temps t_1 que tarda la partícula a baixar pel pla inclinat. Per la simetria del moviment, el període serà quatre vegades aquest temps. Així doncs, com que l'acceleració és $a = g \sin \alpha$, tenim

$$\frac{h}{\sin \alpha} = \frac{1}{2} g \sin \alpha t_1^2$$



Considerant que $T = 4t_1$ i que $h = A \tan \alpha$ i $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$, resulta

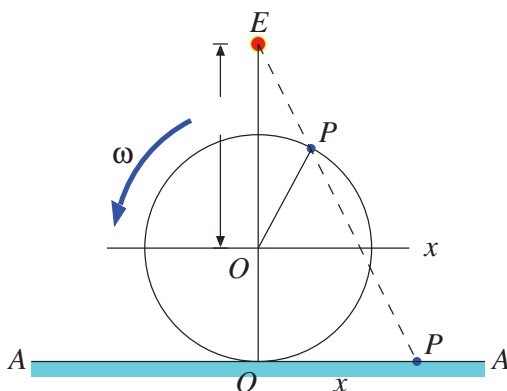
$$T = \frac{4}{\sin \alpha} \sqrt{\frac{2h}{g}} = \frac{8}{\sqrt{g \sin 2\alpha}} \sqrt{A}$$

Fixem-nos que el període depèn, efectivament, de l'amplitud A . A més, encara que l'amplitud es faci molt petita, la força continuarà essent constant i el moviment no serà mai un MHS.

Problema 1.3. Moviment oscil·latori no MHS

Al pla $z = 0$ —v. figura 1.24—, hi ha la partícula P que descriu un moviment circular uniforme de radi a i centrat a l'origen, amb velocitat angular ω de sentit antihorari. Al pla $y = -a$, hi ha una pantalla sobre la qual es projecta l'ombra de P donada per una font lluminosa puntual que es troba al punt $E(0, b)$, amb $b > a$.

Figura 1.24



Sabent que a $t = 0$ la partícula es troba a $(a, 0)$:

- Esbrineu l'equació del moviment $x'(t)$ de l'ombra P' sobre la pantalla AA' .
- Segui $b = 11a/10$. Feu una representació gràfica aproximada de $x'(t)$ per aquest cas.
- Trobeu la màxima elongació de $x'(t)$ i la fracció del període que tarda l'ombra P' a anar de l'elongació màxima a la mínima.

Solució

Segui x' la posició de P' sobre la pantalla i siguin (x, y) les coordenades de P .

- Amb la notació de les figures 1.24 i 1.25, per semblança de triangles, tenim que

$$\frac{x'}{b+a} = \frac{x}{b-y} \quad (1)$$

Com que $x = a \cos \varphi$ i $y = a \sin \varphi$, i, per la condició inicial que ens indica l'enunciat, tenim que $\varphi = \omega t$, de (1) deduïm que



$$x'(t) = \frac{b+a}{b-a} x = \left(\frac{b+a}{b-a \sin \omega t} \right) a \cos \omega t \quad (2)$$

De la funció (2) veiem que el moviment serà oscil·latori, de període $T = 2\pi/\omega$, però no harmònic simple. Seria un MHS si l'interior del parèntesi fos constant, la qual cosa passa, aproximadament, si $b \gg a$, que significa que el punt E estigués molt allunyat de la partícula i , en conseqüència, $x' \approx x$.

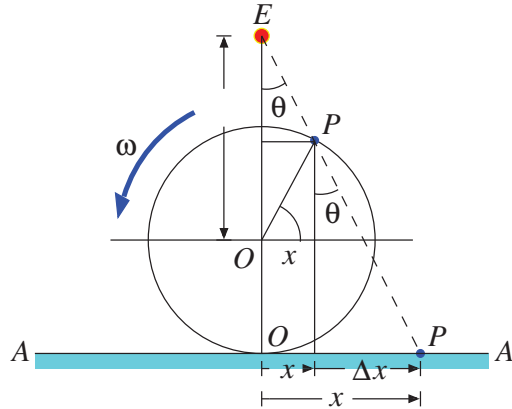
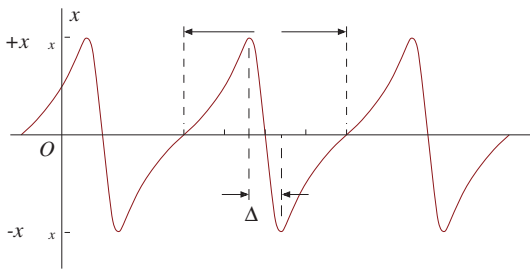
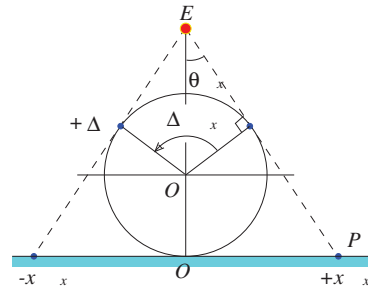


Figura 1.25

- b) A la figura 1.26 (a), s'ha representat la $x'(t)$ per al cas en què $b/a = 11/10$. Observeu-ne les simetries i que el moviment és semblant al MHS només quan la partícula P passa pels voltants del punt $O'(0, -a)$. En aquesta figura també es mostra el període T del moviment i quant val l'interval de temps Δt que tarda la partícula en anar des d'una de les posicions extremes fins a l'altre.



()



(b)

Figura 1.26

- c) A partir de la figura 1.26 (b), és fàcil demostrar que:

- l'elongació màxima de P' val, en general,

$$x'_{max} = \frac{1 + b/a}{\sqrt{(b/a)^2 - 1}}$$

Si $b/a = 11/10$ —que no és el cas representat a la figura 1.26 (b)—, $x'_{max} = a\sqrt{21} = 4,58 \cdot a$;



- l'interval de temps entre la màxima i la mínima x' és proporcional a l'angle

$$\Delta\varphi_{\max} = 2\left(\frac{\pi}{2} - \theta_{\max}\right) \quad \text{essent} \quad \sin\theta_{\max} = \frac{a}{b}$$

Per tant,

$$\Delta t = T \frac{\Delta\varphi_{\max}}{2\pi} = \frac{1}{\omega} \left(\pi - 2 \arcsin \frac{a}{b} \right) = 0,1368 \cdot T$$

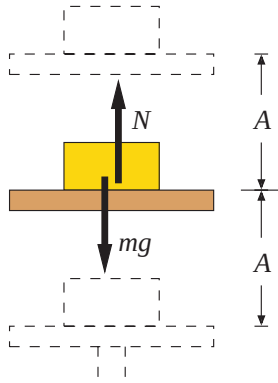
Problema 1.4. Plataforma que fa un MHS vertical

Col·loquem una partícula sobre una plataforma. Si aquesta efectua un MHS vertical d'amplitud $A = 20$ cm i període $T = 0,70$ s:

- Quina condició han de satisfer l'amplitud la freqüència angular ω del MHS a fi que la partícula es mantingui, en tot moment, en contacte amb la plataforma?
- En cas que no es compleixi la condició anterior, en quin moment t_a la partícula deixa d'estar en contacte amb la plataforma? Supposeu que a $t = 0$ la plataforma estava en el punt més baix del recorregut.
- Quina altura màxima x_m assolirà la partícula?

Solució

Figura 1.27



- Sobre la partícula actuen dues forces: el seu pes mg i la normal N que fa la plataforma sobre el cos —v. figura 1.27. En l'equilibri, aquestes dues forces són, en mòdul, iguals. Fora de l'equilibri, si a és l'acceleració que té la plataforma —i, per tant, l'acceleració de la partícula quan aquesta es manté sobre ella—, per la segona llei de Newton tenim

$$N - mg = ma \quad (1)$$

on hem pres el sentit positiu cap amunt.

Ara bé, la partícula deixa d'estar en contacte amb la plataforma quan la normal N s'anul·la, és a dir, per (1), quan $a = -g$. Si, d'altra banda, considerem la relació entre l'acceleració a i l'elongació x , $a = -\omega^2 x$, observem que la partícula deixa d'estar en contacte en l'instant en què la posició x val

$$x = \frac{g}{\omega^2} \quad (2)$$

I com que el valor de x màxim és l'amplitud A —v. figura 1.27 anterior—, podem concloure que

- si $A\omega^2 < g$, la partícula es mantindrà, en tot moment, sobre la plataforma.
- si $A\omega^2 \geq g$, la partícula deixarà d'estar-hi en contacte quan la x compleixi (2).



En el cas particular de l'aplicació, com que $\omega = 2\pi/T = 8,9760 \text{ rad/s}$, llavors $A\omega^2 = 16,1 > g$. La partícula deixarà d'estar en contacte amb la plataforma quan $x = x_a$ donada per

$$x_a = \frac{g}{\omega^2} = 0,122 \text{ m}$$

és a dir, un cop passat el punt d'equilibri.

- b) i c) En quin instant t_a la partícula abandona la plataforma? Segons ens diu l'enunciat, l'equació de moviment de la plataforma és $x(t) = -A \cos \omega t$, perquè a $t = 0$ tenim $x = -A$, el punt més baix. Així doncs, l'instant t_a el trobem de la relació

$$x_a = -A \cos \omega t_a$$

d'on surt $t_a = 0,2479 \text{ s}$. I la velocitat v_a amb què deixa la plataforma val

$$v_a = v(t_a) = +\omega A \sin \omega t_a = 1,424 \text{ m/s}$$

A partir de $t = t_a$, la partícula fa un moviment vertical amb acceleració constant $-g$. I, si t és un temps posterior a t_a , llavors $x(t)$ —mesurada des del punt d'equilibri de la plataforma— valdrà

$$x(t) = x_a + v_a(t - t_a) - \frac{1}{2}g(t - t_a)^2$$

i la velocitat

$$v(t) = v_a - g(t - t_a)$$

L'altura màxima l'assolirà la partícula a l'instant $t = t_m$ en què la velocitat s'anul·li, és a dir, quan $t - t_a = v_a/g$. Substituint aquest valor en la $x(t)$, dóna

$$x_m = x_a + \frac{1}{2} \frac{v_a^2}{g} = 0,225 \text{ m}$$

Com que $x_m > A$, comprovem que, com era d'esperar, la partícula puja una mica més que la plataforma.

Problema 1.5. Plataforma que fa un MHS horitzontal

Sobre una superfície horitzontal llisa hi ha una plataforma de massa $M = 4 \text{ kg}$ unida a una molla de constant de força $k = 100 \text{ N/m}$ —v. figura 1.28. Un bloc de massa $m = 1 \text{ kg}$ reposa al damunt de la plataforma. Entre la plataforma i la base no hi ha fricció, però sí que n'hi ha entre el bloc i la plataforma, essent $\mu_s = 0,20$ el corresponent coeficient de fricció estàtica.

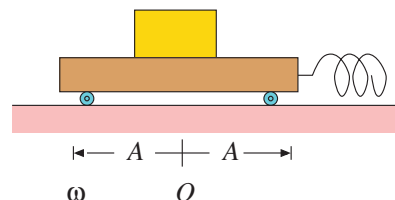


Figura 1.28

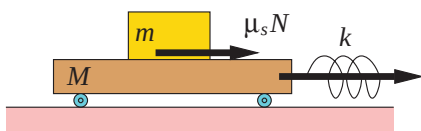
Esbrineu la màxima amplitud d'oscil·lació que pot tenir la plataforma per tal que el bloc no llisqui.

Solució

Mentre no llisqui el bloc damunt de la plataforma, tots dos es mouran amb la mateixa acceleració a . Com es mostra a la figura 1.29, la plataforma es mou per efecte de la força que fa la molla; el bloc ho fa per la força de fricció estàtica F_f entre la plataforma i el bloc. La segona llei de Newton aplicada al bloc ens diu $F_f = ma$.

D'altra banda, la màxima força de fricció estàtica entre el bloc i la plataforma val, com sabem: $F_{f_{\max}} = \mu_s N = \mu_s mg$. D'aquí veiem que la màxima acceleració horitzontal que es pot aplicar al conjunt sense que llisqui el bloc val, doncs, $a_{\max} = \mu_s g$.

Figura 1.29



En un MHS de freqüència angular ω i amplitud A , l'acceleració màxima val $a_{\max} = \omega^2 A$. D'aquest resultat i de l'anterior resulta que la condició per tal que no llisqui el bloc superior és

$$\omega^2 A \leq \mu_s g$$

En el nostre cas és la molla arrossegant les dues masses la que origina el MHS; en conseqüència, la freqüència ω del MHS valdrà $\omega^2 = k/(M + m)$. Així, finalment,

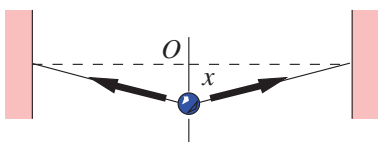
$$A_{\max} = \frac{\mu_s g}{\omega^2} = \frac{\mu_s}{k} (M + m)g$$

Substituint els valors numèrics de l'enunciat trobem $A_{\max} = 9,81$ cm.

Problema 1.6. Partícula sobre corda tensa

Una corda de longitud $L = 60$ cm lleugerament elàstica, de massa negligible, està sotmesa a la tensió $F = 100$ N. Al punt mitjà de la corda, hi ha fixada una partícula de massa $m = 50$ g. Si, com es pot observar a la figura 1.30, apliquem un petit desplaçament transversal x a la partícula i la deixem anar, demostreu què farà un MHS i trobeu-ne la freqüència f . Negligiu el pes de la partícula.

Figura 1.30



Solució

Sigui θ l'angle que forma la corda en un cert instant amb la direcció de l'equilibri. Considerant que θ és petit i que, per tant, podem aproximar $\sin \theta \approx \tan \theta \approx \theta$, la component x de la tensió F val



$$F_x = F \sin \theta \approx F \theta \approx F \frac{x}{L/2}$$

Tenint en compte que hi ha dues tensions i que, per simetria, la component y de la tensió d'una meitat de la corda s'anul·la amb la component y de la tensió de l'altra meitat, deduïm que la força resultant $\mathcal{F}$ que actua sobre la partícula té la direcció de l'eix x i val

$$\mathcal{F}(x) = -\frac{4F}{L}x$$

És, doncs, una força lineal i recuperadora. Per tant, el moviment de la partícula serà un MHS de període

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{mL}{4F}}$$

d'on, substituint els valors numèrics, resulta $f = 1/T = 18,38$ Hz.

Problema 1.7. Principi d'Arquimedes i MHS

Un bloc de fusta de densitat ρ_0 , secció recta uniforme i longitud L està surant en un estany d'aigua de densitat ρ —v. figura 1.31. Demostreu que, negligint la fricció, si el desplaçem lleugerament amunt o avall, farà un MHS, i trobeu-ne el període.

Solució

En primer lloc, recordem que el *principi d'Arquimedes* diu que *tot cos submergit en un fluid experimenta una força ascensional igual al pes del fluid desallotjat*. Consegüentment, un cos amb una densitat més petita que la de l'aigua hi sura en ella perquè la força ascensional d'Arquimedes contraresta el seu pes.

A la figura 1.32 (a), es mostra el bloc surant en equilibri i, a la (b), el bloc desplaçat una distància x de la posició d'equilibri. Siguin L_1 i L_2 les longituds de les parts del bloc fora de l'aigua i de la part submergida, respectivament, en la situació d'equilibri. Si anomenem m la massa del bloc, S la seva secció recta, i ρ la densitat de l'aigua, tenim que, en l'equilibri, se satisfà l'equació

$$0 = mg - SL_2\rho g \quad (1)$$

Fora de l'equilibri, amb el bloc desplaçat x avall, agafant aquest sentit com a positiu, si $h = L_2 + x$, la força neta F sobre el bloc val

$$F = mg - Sh\rho g \quad (2)$$

Substituint (2) en (1), ens dóna

$$F = mg - S(L_2 + x)\rho g = -S\rho g x$$

La força neta és, per tant, de la forma típica del MHS, $F = -kx$, on $k = S\rho g$. Queda demostrat, en conseqüència, que el moviment serà un MHS. I, pel que fa al període, com

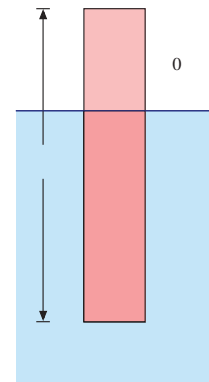
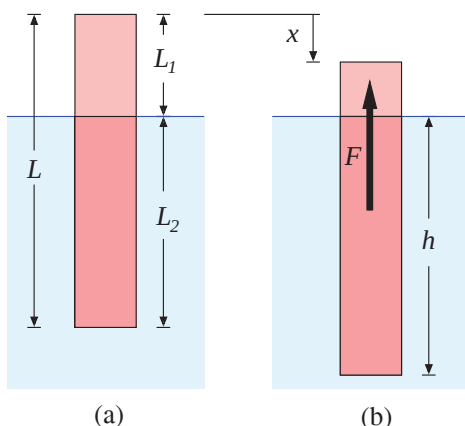


Figura 1.31

que $m = SL\rho_0$, tindrem

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{S\rho g}} = 2\pi\sqrt{\frac{L\rho_0}{g\rho}}$$

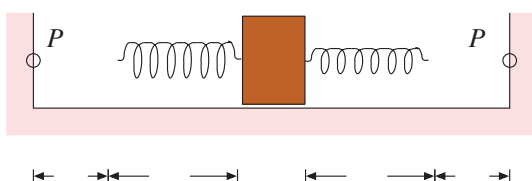
Figura 1.32



Problema 1.8. Partícula lligada a dues molles

Dues molles, cadascuna d'elles de longitud natural $L = 30$ cm, però de constants k diferents, estan unides a les dues cares oposades d'un bloc de massa $m = 100$ g, que està sobre una superfície horitzontal llisa. Els altres dos extrems de les molles s'uneixen als claus P_1 i P_2 , situats a $d = 15$ cm de les posicions inicials dels extrems de les molles —v. figura 1.33.

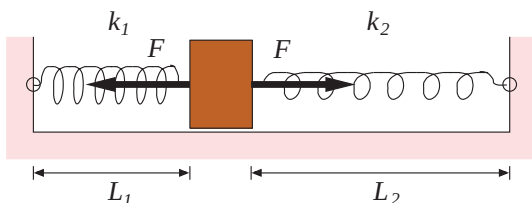
Figura 1.33



- Si $k_1 = 9$ N/cm i $k_2 = 5$ N/cm, esbrineu quines seran les longituds finals de les molles després que el bloc es trobi en la seva nova posició d'equilibri.
- Demostreu que, si, des d'aquesta nova posició del bloc, el desplaçem lleugerament en la direcció de les molles, farà un MHS. Esbrineu el període del moviment.

Solució

Figura 1.34





- a) El bloc es trobarà en la posició d'equilibri —v. figura 1.34— quan les forces que li facin les dues molles siguin d'igual mòdul F i de sentits contraris.

Siguin L_1 i L_2 les longituds de les dues molles amb el bloc en equilibri. Prenent cap a la dreta com a sentit positiu, podem plantejar les dues equacions següents:

$$\begin{cases} -k_1(L_1 - L) + k_2(L_2 - L) = 0 \\ L_1 + L_2 = 2(d + L) \end{cases}$$

d'on podem aïllar L_1 i L_2

$$L_1 = \frac{k_2(2d + L) + k_1L}{k_1 + k_2} \quad \text{i} \quad L_2 = \frac{k_1(2d + L) + k_2L}{k_1 + k_2}$$

Substituint els valors numèrics, resulten $L_1 = 40,71$ cm i $L_2 = 49,29$ cm.

- b) Si, des d'aquesta posició d'equilibri, desplaçem el bloc una distància x , les molles 1 i 2 faran, respectivament, les forces F_1 i F_2 , i la força resultant sobre el bloc serà $F_R = F_1 + F_2$ —v. figura 1.35.

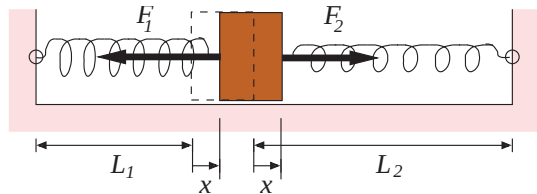


Figura 1.35

Tindrem, doncs,

$$\begin{aligned} F_1 &= -k_1(L_1 + x - L) = -F - k_1x \\ F_2 &= +k_2(L_2 - x - L) = +F - k_2x \\ F_R &= F_1 + F_2 = -(k_1 + k_2)x \end{aligned}$$

Per tant, un desplaçament x fora de l'equilibri comporta una força resultant recuperadora lineal $F_R = -kx$, per la qual cosa les dues molles són equivalents a una de sola de constant k

$$k = k_1 + k_2$$

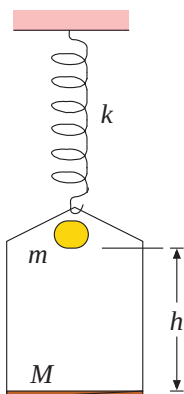
Aleshores, el període de l'oscil·lació valdrà $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}} = 0,05310$ s.

Problema 1.9. Allargament màxim d'una molla.

Sigui una molla de constant $k = 105$ N/m que penja verticalment del sostre i que té un suport ample de massa $M = 0,55$ kg, tal com es mostra a la figura 1.36. Un cos petit de massa $m = 0,30$ kg es deixa caure sobre el suport des d'una altura $h = 0,75$ m. Suposant que el cos no reboti —xoc completament inelàstic—, esbrineu l'allargament màxim que assolirà la molla.

Solució

Figura 1.36



Comencem estudiant el xoc entre el cos i el suport. Com ja sabem, la velocitat que portarà el cos en el moment del xoc contra el suport val

$$v_1 = \sqrt{2gh}$$

Sigui v_2 la velocitat del conjunt suport més cos immediatament després de la col·lisió. Com que aquesta és completament inelàstica, la conservació de la quantitat de moviment ens assegura que

$$mv_1 = (m + M)v_2$$

d'on se segueix que

$$v_2 = \frac{m}{m + M} \sqrt{2gh}$$

Quant al suport, inicialment està en la seva posició d'equilibri, amb la molla allargada respecte de la seva longitud natural la longitud $\Delta x_1 = Mg/k$. Sabem que, en afegir-hi el cos de massa m , la posició d'equilibri del conjunt es desplaça cap avall la distància $\Delta x_2 = mg/k$. Per tant, en el moment del contacte del cos amb el suport, tenim que el conjunt suport més cos es mou cap avall a la velocitat v_2 i està fora de la nova posició d'equilibri la distància Δx_2 . L'allargament màxim de la molla respecte a la seva longitud natural serà, doncs, $\Delta x_1 + \Delta x_2 + A$, essent A l'amplitud del moviment del conjunt.

Podem trobar l'amplitud A a partir de l'expressió que la vincula a la posició x i la corresponent velocitat v

$$A = \sqrt{x^2 + \frac{v^2}{\omega^2}}$$

En el nostre cas, la posició és $x = \Delta x_2$ i la velocitat, $v = v_2$, essent $\omega^2 = k/(m + M)$, ja que oscil·laran el cos i el suport. Així doncs, substituint i simplificant, podem afirmar que

$$A = \sqrt{(\Delta x_2)^2 + \frac{v_2^2}{\omega^2}} = \frac{mg}{k} \sqrt{1 + \frac{2kh}{(m + M)g}}$$

I, finalment, l'allargament total màxim de la molla valdrà

$$\Delta x_{\max} = \frac{g}{k} \left[M + m \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2kh}{(m + M)g}} \right) \right]$$

Substituint els valors numèrics així com $g = 9,81 \text{ m/s}^2$, resulta $\Delta x_{\max} = 0,2044 \text{ m}$.

Problema 1.10. El problema dels dos cossos, 1

Per mitjà d'una molla de longitud natural L_0 i constant recuperadora k , connectem un primer bloc de massa m_1 a un segon de massa m_2 , estant el conjunt sobre una superfície



horizontal llisa. Donem una velocitat inicial v_0 al segon bloc i tots dos comencen a desplaçar-se i a oscil·lar. Siguin x_1 i x_2 les coordenades respectives dels dos blocs, tal com es mostra a la figura 1.37.

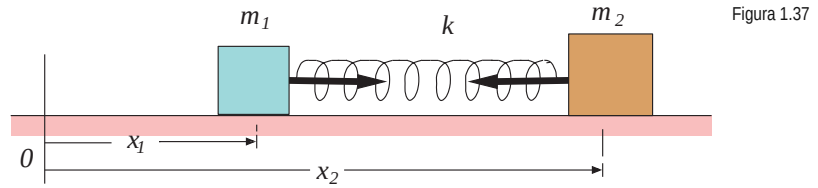


Figura 1.37

Estudieu el moviment d'ambdós blocs i, en particular, trobeu l'equació de moviment $x_1(t)$ del primer.

Solució

Siguin, també, $x' = x_2 - x_1$ la coordenada relativa del segon bloc respecte del primer, i $x = x' - L_0$ l'allargament de la molla, si $x > 0$, o l'escurçament, si $x < 0$. Amb aquesta notació, si F_1 i F_2 són les forces que actuen sobre el primer bloc i el segon, respectivament, degudes a l'acció de l'altre, tenim

$$F_1 = +k(x_2 - x_1 - L_0) = +kx = m_1 a_1$$

$$F_2 = -k(x_2 - x_1 - L_0) = -kx = m_2 a_2 \quad (1)$$

on a_1 i a_2 són les acceleracions respectives dels blocs, que valen

$$a_1 = +\frac{k}{m_1}x \quad a_2 = -\frac{k}{m_2}x \quad (2)$$

Si restem $a_2 - a_1$ per trobar l'acceleració relativa del segon bloc respecte del primer, obtenim

$$a = a_2 - a_1 = -k \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) x \quad (3)$$

Definim la *massa reduïda* μ de dues partícules de masses m_1 i m_2 com

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \quad (4)$$

de manera que podem tornar a escriure (3) de la forma

$$\mu a = -kx \quad (5)$$

Així doncs, tenim una relació entre la posició i l'acceleració relatives x i a , respectivament, per mitjà d'una equació formalment idèntica a la segona llei de Newton aplicada a una sola partícula de massa μ sobre la qual actua la força $-kx$, que podem rescriure com

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{\mu}x = 0 \quad (6)$$



Per comparació a l'equació diferencial del MHS, deduïm que la freqüència angular de l'oscil·lació dels dos blocs és

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{\mu}} = \sqrt{k \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right)} \quad (7)$$

Aquesta freqüència és la mateixa que tindria un sol bloc de massa μ , unit per una molla de constant k a una paret, o un altre bloc de massa molt gran. Fixem-nos que, si $m_1 \gg m_2$, aleshores $\mu \approx m_2$.

A partir de (5) i (2), tenim la relació entre l'acceleració relativa a i les acceleracions a_1 i a_2

$$a_1 = -\frac{\mu}{m_1}a \quad a_2 = +\frac{\mu}{m_2}a$$

Podem integrar aquestes equacions per trobar les velocitats dels blocs en funció de la velocitat relativa $v = v_2 - v_1$

$$v_1 = -\frac{\mu}{m_1}v + C'_1 \quad v_2 = +\frac{\mu}{m_2}v + C'_2 \quad (9)$$

on C'_1 i C'_2 són les constants arbitràries de la integració. Tornant a integrar, obtenim

$$x_1 = -\frac{\mu}{m_1}x + C'_1t + C''_1 \quad x_2 = +\frac{\mu}{m_2}x + C'_2t + C''_2 \quad (10)$$

on C''_1 i C''_2 són dues constants arbitràries més. Aquestes quatre constants es poden determinar a partir de les condicions inicials que, d'acord amb l'enunciat, prendrem com

- $x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = L_0$
- $v_1(0) = 0, \quad v_2(0) = v_0$

d'on també surt

$$x(0) = x_2 - x_1 - L_0 = 0 \quad v(0) = v_2 - v_1 = v_0 \quad (11)$$

i, per (9) i (10), resulten

$$C''_1 = 0 \quad C''_2 = L_0 \quad C'_1 = C'_2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}v_0 \quad (12)$$

Aquesta última velocitat $C'_1 = C'_2$, comuna als dos blocs, és, precisament, la velocitat del centre de masses v_{cm} , que es manté constant per raó de la conservació de la quantitat de moviment, ja que no hi intervé cap força externa al sistema. En efecte, si calculem v_{cm} a l'instant inicial $t = 0$, tenim

$$v_{cm} = \frac{m_1 \cdot 0 + m_2 v_0}{m_1 + m_2} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}v_0 \quad (13)$$

Respecte del moviment relatiu, ja sabem que la solució de l'equació diferencial (6) és un MHS, de forma que fem



$$x(t) = A \sin(\omega t + \phi) \quad (14)$$

on $\omega^2 = k/\mu$, que ja hem vist a (7), i A i ϕ depenen de les condicions inicials (11). Aplicant aquestes condicions inicials a (14), trobem $\phi = 0$ i l'amplitud A

$$A = \frac{v_0}{\omega} = v_0 \sqrt{\frac{\mu}{k}} \quad (15)$$

D'aquí ens queda

$$x = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t \quad \text{amb} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{\mu}} \quad (16)$$

i, finalment, podem posar les equacions (9) i (10) com

$$x_1 - v_{cm}t = -\frac{\mu}{m_1}x = -\frac{\mu}{m_1} \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t$$

$$x_2 - L_0 - v_{cm}t = -\frac{m_1}{m_2}(x_1 - v_{cm}t)$$

En resum, el moviment resultant és la superposició de

- un moviment uniforme amb la velocitat del centre de masses, més
- un MHS d'ambdós blocs al voltant del centre de masses comú.

A la figura 1.38, hi ha representades, per $m_2 = 2m_1$, les oscil·lacions $x'_1(t)$ i $x'_2(t)$ dels dos blocs respecte del centre de masses: $x'_1 = x_1 - v_{cm}t$, $x'_2 = x_2 - v_{cm}t$. Fixeu-vos que el centre de masses roman sobre l'eix temporal, l'origen de les x .

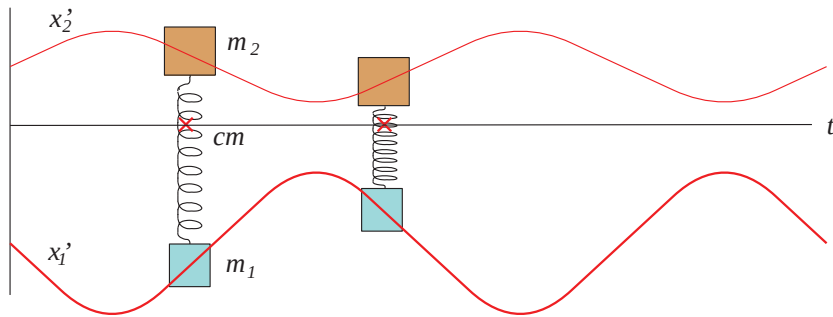


Figura 1.38

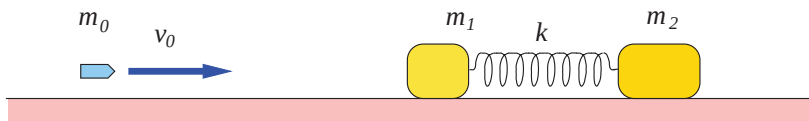
El problema proposat 1.52, és una continuació d'aquest. El problema 3.9 també té trets comuns amb aquest.

Problema 1.11. Aplicació del problema dels dos cosos

Dos blocs de masses m_1 i m_2 , units per una molla de constant de força k , estan en repòs sobre una superfície llisa horitzontal —v. figura 1.39.



Figura 1.39



Un projectil de massa m_0 , que es desplaça a la velocitat v_0 en la direcció dels dos blocs, xoca amb el primer bloc i quedant incrustat a l'interior. Esbrineu:

- la freqüència i
- l'amplitud de les seves oscil·lacions.

Solució

- Apliquem el que acabem de veure en el problema anterior. La freqüència de les oscil·lacions dels dos blocs vindrà donada per l'expressió (7); això sí, ara la massa reduïda μ val

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1 + m_0} + \frac{1}{m_2}$$

i, per tant, la freqüència angular de les oscil·lacions és

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{\mu}}$$

- L'amplitud del moviment, la calculem aplicant la conservació de l'energia. Com ja hem vist en el problema anterior, l'impacte del projectil en el bloc comunica una quantitat de moviment i una energia al sistema que es tradueixen en un moviment uniforme del centre de masses, superposat a una oscil·lació dels dos blocs entorn d'ell amb freqüència ω .

Què és l'amplitud A de les oscil·lacions? És l'allargament màxim de la molla; s'assoleix en el moment en què els blocs s'aturen respecte del centre de masses del sistema. Consegüentment, la podem calcular directament per mitjà de l'expressió (15) del problema anterior o aplicant la conservació de l'energia. En aquest cas, tindrem que l'energia cinètica del bloc de massa m_1 —amb el projectil dintre— immediatament després del xoc, ha de ser igual a la suma de l'energia cinètica del centre de masses més l'energia elàstica de la molla en la seva màxima expansió o compressió. Si anomenem v_1 la velocitat inicial del bloc amb el projectil dintre, v_{cm} la velocitat del centre de masses i A l'amplitud, obtindrem

$$\frac{1}{2}(m_0 + m_1)v_1^2 = \frac{1}{2}(m_0 + m_1 + m_2)v_{cm}^2 + \frac{1}{2}kA^2 \quad (1)$$

Calculem ara v_1 i v_{cm} . Igualant la quantitat de moviment del projectil abans del xoc amb la del bloc més projectil després del xoc es compleix

$$m_0v_0 = (m_0 + m_1)v_1$$



d'on treiem v_1 . La velocitat v_{cm} val

$$v_{cm} = \frac{m_0 v_0}{m_0 + m_1 + m_2}$$

Ara, substituint en (1) s'obté com a resultat l'amplitud

$$A = m_0 v_0 \sqrt{\frac{m_2}{k(m_0 + m_1)(m_0 + m_1 + m_2)}}$$

Problema 1.12. Variació del període d'un pèndol simple

Demostreu que la variació relativa del període T d'un pèndol simple deguda a les variacions relatives en la seva longitud L i en l'acceleració de la gravetat g ve donada per

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{1}{2} \frac{\Delta L}{L} - \frac{1}{2} \frac{\Delta g}{g}$$

Solució

Apliquem logaritmes neperians a l'expressió del període d'un pèndol simple

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \quad \text{d'aquí} \quad \ln T = \ln(2\pi) + \frac{1}{2} \ln L - \frac{1}{2} \ln g$$

Diferenciem aquesta última igualtat. Per fer això, observem que

$$d(\ln T) = \frac{d(\ln T)}{dT} dT = \frac{dT}{T}$$

i anàlogament amb els termes amb L i g . Com que $\ln(2\pi)$ és una constant, la seva derivada dóna zero. Obtenim, doncs, la relació

$$\frac{dT}{T} = \frac{1}{2} \frac{dL}{L} - \frac{1}{2} \frac{dg}{g}$$

Ara només cal substituir els diferencials per increments finits —petits— en l'expressió anterior i n'obtenim el resultat demanat.

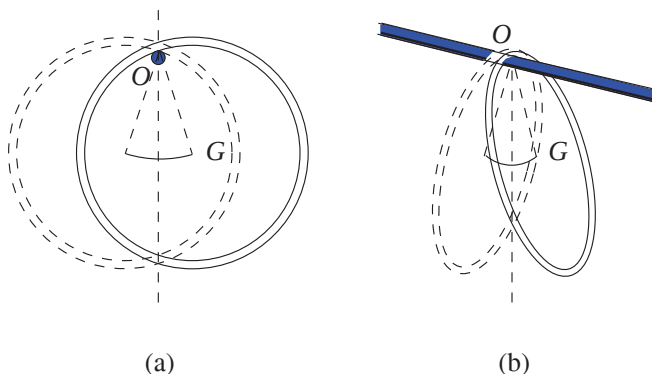
Problema 1.13. Dues formes d'oscil·lar

Tal com es mostra a la figura 1.40, un cercol de radi R se suspèn d'un eix horitzontal que passa per dintre seu i se'l deixa oscil·lar. Esbrineu el període de les seves oscil·lacions petites:

- a) si són transversals a l'eix —v. figura 1.40 (a)— i
- b) si són paral·leles a l'eix —v. figura 1.40 (b).

Nota: El moment d'inèrcia d'un cercol respecte d'un diàmetre seu val $I = 1/2 mR^2$.

Figura 1.40



Solució

a) Oscil·lacions transversals. Apliquem la fórmula (1.23) del període del pèndol físic

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgh}} \quad (1)$$

en què, en aquest cas, h és el radi R i, pel teorema de Steiner, $I = I_G + mR^2 = 2mR^2$. En conseqüència,

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{2R}{g}}$$

b) Oscil·lacions longitudinals. En la mateixa expressió (1), tornem a tenir $h = R$. D'altra banda, sabem que el moment d'inèrcia del cercle respecte d'un diàmetre seu qualsevol val $I'_G = mR^2/2$. Aplicant de nou el teorema de Steiner, trobem que $I' = I'_G + mR^2 = 3/2mR^2$ i el període resulta, doncs,

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{3R}{2g}}$$

Problema 1.14. Període mínim d'un pèndol físic

Tenim una barra estreta homogènia de longitud L , que volem convertir en un pèndol físic —v. figura 1.41. A quina distància h del centre de gravetat G hauria de passar l'eix horitzontal de rotació per tal que el període de les oscil·lacions fos el mínim possible?

Solució

El període T del pèndol ve donat per l'expressió (1.23)

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgh}} \quad (1)$$



en què la h , la distància del centre de gravetat G al punt de suspensió O , és, com s'assenyala a la figura 1.41, precisament la distància que busquem. Notem que, en aquest problema la h només pot variar des de $h = 0$ fins a $h = L/2$. En el primer cas, $h = 0$, la barra no oscil·la —està en equilibri indiferent—, que és com dir que el període és infinit. Evidentment, per a $h > 0$, el període ja és finit. Podríem sospitar que el període mínim el trobarem per al punt més allunyat de G , $h = L/2$, però, com veurem, això no és pas així.

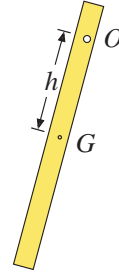


Figura 1.41

A l'equació (1) també hi intervé el moment d'inèrcia I de la barra respecte de O . Sabem que el moment d'inèrcia d'una barra com aquesta respecte d'un eix perpendicular a ella mateixa que passi pel seu centre val $I_G = mL^2/12$. Pel *teorema de Steiner*, el moment d'inèrcia respecte d'un eix paral·lel traslladat a la distància h de G val

$$I_O = I_G + mh^2 = \frac{1}{12}mL^2 + mh^2$$

Consegüentment, el període (1) quedarà com la funció de h

$$T(h) = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{1}{12}L^2 + h^2}{gh}} \quad (2)$$

de la qual hem de trobar el mínim. Per això, igualarem a zero la seva derivada.

Fixem-nos que és més còmode treballar amb la funció $T^2(h)$ que amb la $T(h)$ i que ambdues funcions tenen el màxims i mínims a les mateixes posicions, ja que les funcions arrel quadrada i quadrat són monòtones creixents. Fent-ho així arribem a

$$\frac{d(T^2)}{dh} = \frac{2\pi}{g} \left(\frac{h^2 - \frac{1}{12}L^2}{h^2} \right) = 0$$

d'on resulta $h_{\min} = \frac{L}{\sqrt{12}}$. Podem creure que aquesta $h_{\min}$ correspon a un mínim —i que no és un màxim relatiu—, ja que el període donat per (2) corresponent a aquesta posició $h_{\min}$ és més petit que el corresponent a $h = L/2$.

Observem, finalment, que aquest resultat es pot generalitzar. Si deixem I_G en lloc de $1/12 mL^2$ en els raonaments anteriors, arribem a la distància $h_{\min} = \sqrt{I_G/m}$ que fa mínim el període en qualsevol pèndol físic.

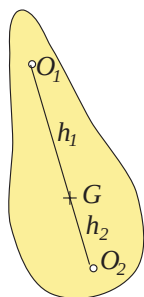
Problema 1.15. Pèndol reversible i mesura de g

El *pèndol reversible* o de Kater és una aplicació del pèndol físic que s'utilitza per mesurar amb precisió l'acceleració de la gravetat g . El pèndol acostuma a ser una barra amb un primer punt de suspensió O_1 fix i un segon punt O_2 desplaçable al llarg de la barra, més enllà del centre de gravetat G —v. figura 1.42. El procediment consisteix a mesurar el període T del pèndol quan aquest està suspès de O_1 i, després, anar provant fins a trobar el punt O_2 per al qual el període torna a ser el mateix T d'abans. Demostreu que, en aquest cas, si d és la distància entre O_1 i O_2 , g ve donada per

$$g = \frac{4\pi^2 d}{T^2}$$

Solució

Figura 1.42



La font d'incertesa més gran que presenta la determinació precisa de l'acceleració de la gravetat simplement mesurant el període T d'un pèndol físic és la dificultat de determinar amb exactitud la posició del centre de masses G del pèndol. El gran avantatge del mètode de Kater és que no s'ha de trobar experimentalment G ni el moment d'inèrcia del pèndol sinó la distància d , definida abans a l'enunciat, bastant més fàcil de determinar amb exactitud. Això sí, O_1GO_2 han d'estar alineats.

Siguin I_1 el moment d'inèrcia del pèndol respecte del punt O_1 i h_1 la distància entre O_1 i G , i siguin I_2 i h_2 els corresponents, però respecte de O_2 . La distància d entre O_1 i O_2 val $d = h_1 + h_2$. Anomenem també m la massa del pèndol i I_G el seu moment d'inèrcia respecte de G .

Pel teorema de Steiner, la relació entre aquestes magnituds és

$$I_1 = I_G + mh_1^2 \quad I_2 = I_G + mh_2^2 \quad (1)$$

Com que, en aquests dos punts de suspensió O_1 i O_2 , els períodes són iguals, per l'expressió del període del pèndol físic $T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgh}}$ i les dues (1) tenim

$$\frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{mgh_1}{I_G + mh_1^2} = \frac{mgh_2}{I_G + mh_2^2}$$

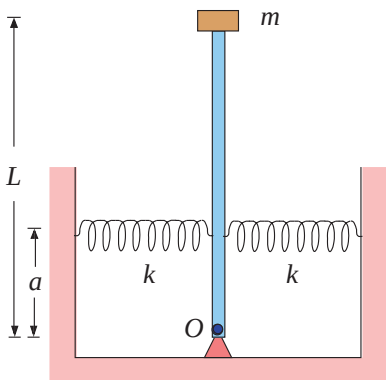
Restant els numeradors i els denominadors de la segona igualtat, descomponent el denominador resultant, una diferència de quadrats, com el producte d'una suma per una resta, i recordant que $d = h_1 + h_2$, tenim

$$\frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{mg(h_1 - h_2)}{m(h_1^2 - h_2^2)} = \frac{g}{h_1 + h_2} = \frac{g}{d}$$

d'on resulta l'expressió de l'enunciat.

Problema 1.16. Oscil·larà o no oscil·larà?

Figura 1.43



Tenim una barra rígida de longitud L i massa negligible, disposada verticalment i que pot oscil·lar al voltant del seu extrem inferior O , tal com es mostra a la figura 1.43. La barra porta unida a l'extrem superior un bloc petit pesant de massa m . Dues molles iguals horitzontals de constant elàstica k estan unides a la barra a la distància a de O . Esbrineu quina condició ha de complir la massa del bloc per tal que el sistema pugui oscil·lar i calculeu el període de les petites oscil·lacions.



Solució

Desplacem la barra un angle θ petit fora de l'equilibri i veiem quines forces actuen sobre el sistema barra-bloc. Hi actua el pes mg del bloc i les dues forces que fan les dues molles. També hi ha la reacció de l'articulació sobre el punt O de la barra, però el moment d'aquesta força respecte de O és zero, per la qual cosa la reacció en O no és significativa i ja no està representada en el diagrama de forces de la figura 1.44. D'altra banda, tant si les molles estan estirades en la situació d'equilibri de la barra com si no ho estan, les forces degudes a cadascuna de les dues molles són iguals i valen $F = -kx$, on x és l'allargament d'una de les molles i l'escurçament de l'altra.

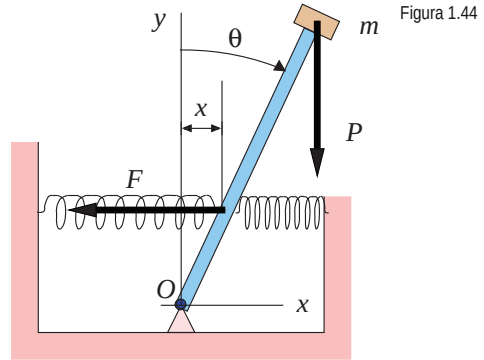


Figura 1.44

Si l'angle θ és petit, les forces que fan les molles són pràcticament horitzontals i podem fer l'aproximació $x = a \sin \theta \approx a\theta$, $\cos \theta \approx 1$. Prenent el sistema d'eixos Ox i Oy que es mostra a la figura 1.44, la força resultant $\mathbf{F}$ que fan les dues molles i el pes $\mathbf{P}$ del bloc val

$$\mathbf{F} = -2ka \sin \theta \mathbf{u}_x \approx -2ka\theta \mathbf{u}_x, \quad \mathbf{P} = -mg \mathbf{u}_y \quad (1)$$

aplicades als punts $A(x, a \cos \theta) \approx A(a\theta, a)$ i $B(L \sin \theta, L \cos \theta) \approx B(L\theta, L)$, respectivament.

El moment resultant d'aquestes dues forces respecte de O és, per (1)

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{OA} \times \mathbf{F} + \mathbf{OB} \times \mathbf{P} \approx (2ka^2\theta - mgL\theta) \mathbf{u}_z \quad (2)$$

Coneixent el moment $\mathbf{M}_O$, podem aplicar la segona llei de Newton per a les rotacions, que, per (2), donarà

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} (-\mathbf{u}_z) = \mathbf{M}_O = (2ka^2\theta - mgL\theta) \mathbf{u}_z \quad (3)$$

on I és el moment d'inèrcia, respecte de O , del sistema barra-bloc. El signe menys del $(-\mathbf{u}_z)$ s'explica perquè l'angle θ , amb aquest sistema d'eixos que hem pres, es mesura en sentit negatiu —v. figura 1.44. Com que la barra és de massa nul·la, no contribueix al moment d'inèrcia i només ho fa el bloc: és una partícula de massa m a la distància L de O ; per tant $I = mL^2$. L'equació (3) queda, doncs, com

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \left(\frac{2ka^2 - mgL}{mL^2} \right) \theta = 0 \quad (4)$$

Aquesta equació diferencial correspon a l'equació d'un MHS si i només si el coeficient que multiplica θ és positiu, és a dir, si

$$2ka^2 - mgL > 0 \quad (5)$$

En cas contrari, la barra no farà un MHS: si la desplacem fora de la seva posició d'equilibri, és a dir, de la vertical, “caurà” cap al costat del desplaçament i allà es quedarà sense

oscil·lar; haurà “guanyat” el moment del pes al moment de les molles. En aquest cas, la vertical, és a dir, $\theta = x = 0$, és un punt d’equilibri, però d’equilibri *inestable*.

Així doncs, per tal que se satisfaci (5), la massa m del bloc ha de ser inferior a una massa màxima:

$$m < m_{\max} = \frac{2ka^2}{gL}$$

En aquest cas, el conjunt barra-bloc sí que oscil·larà, estant el període determinat per (4)

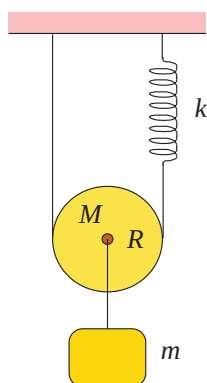
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{mL^2}{2a^2k - mgL}}$$

Problema 1.17. Sistema molla-massa-politja

Tenim una politja per la qual passa una corda molt lleugera que té un extrem unit directament al sostre i l’altre a una molla de constant k , que també està unida al sostre, tal com es mostra a la figura 1.45. De la politja penja un cos de massa m . Esbrineu el període de les oscil·lacions del sistema si la politja gira sense relliscar tot seguint el moviment de la corda. El moment d’inèrcia de la politja és I .

Solució

Figura 1.45

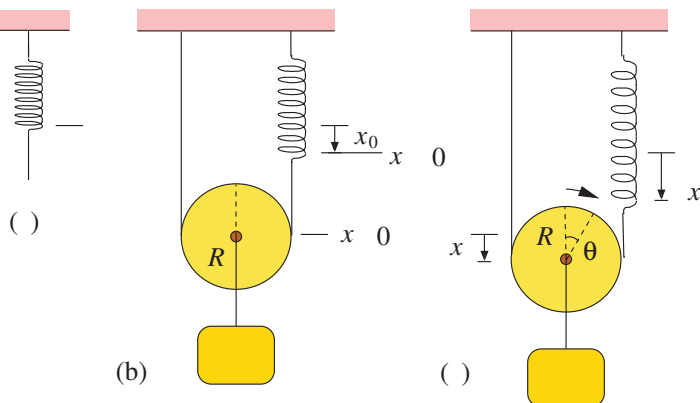


A la figura 1.46 (a) es mostra la molla penjada del sostre, sense estirar; a la (b), la molla estirada la longitud x'_0 per tal de mantenir en equilibri el conjunt politja i cos i a la figura 1.46 (c) es representa tot el sistema en un instant fora de l’equilibri.

Prenem l’eix x vertical, amb el sentit positiu cap avall i els angles i els moments positius en el sentit horari. Distingirem també entre el desplaçament vertical x del conjunt politja-cos i l’allargament x' de la molla des de la posició d’equilibri —v. figura 1.46 (c). La relació entre ambdues variables és, per simple geometria

$$x = \frac{1}{2}x' \quad (0)$$

Figura 1.46





Per arribar a l'equilibri, la molla ja s'ha d'haver estirat un allargament inicial x'_0 donat per la condició de l'equilibri —v. figura 1.46 (b)—

$$(M + m)g = 2F_0 = 2kx'_0 \quad (1)$$

on $2F_0$ són les dues tensions que equilibren el pes total del conjunt.

Fora de l'equilibri, les dues tensions F_1 i F_2 —aquesta última, la de la molla— no són, en general, iguals. Aleshores, amb la politja baixada una distància x respecte del nivell corresponent a l'equilibri i girada un angle θ , tenim que:

- Per la segona llei de Newton aplicada al moviment vertical del conjunt, se satisfà l'equació

$$(M + m)g - (F_2 + F_1) = (M + m)\frac{d^2x}{dt^2} \quad (2)$$

- Pel que fa a la rotació de la politja, se satisfà la segona llei de Newton per a la rotació

$$R(F_1 - F_2) = I\frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (3)$$

- La tensió F_2 de la molla, quan aquesta s'ha estirat una longitud x' , val

$$F_2 = k(x' + x'_0) \quad (4)$$

- La relació entre l'angle θ girat per la politja i el moviment vertical dels dos cossos és $R\theta = x$. Per tant,

$$R\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2} \quad (5)$$

Combinant aquestes equacions, resulta

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \left(\frac{4k}{M + m + I/R^2} \right) x = 0$$

d'on surt el període corresponent

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{M + m + I/R^2}{4k}}$$

Problema 1.18. Oscil·lacions de mig cilindre

Tenim mig cilindre buit de radi R sobre un pla horitzontal, com es mostra a la figura 1.47. Quant val el període de les oscil·lacions que efectuarà si el desplaçem lleugerament de l'equilibri i rodola sense lliscar?

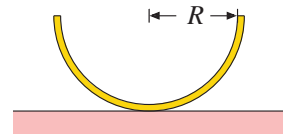
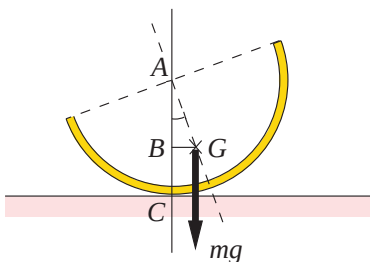


Figura 1.47

Solució

Figura 1.48



Resoldrem el problema per forces i moments.

A la figura 1.47, s'observa el mig cilindre en equilibri i a la figura 1.48 el tenim girat un angle θ fora d'ell. Sobre el cos actuen dues forces: el seu pes mg , aplicat al centre de gravetat G , representada a la figura, i la reacció normal que fa el terra sobre el cilindre, aplicada al punt de contacte C i que, per no complicar la figura, no hem representat.

D'altra banda, recordem que, en un sòlid rígid que rodola sense lliscar, el *centre instantani de rotació* es troba en el punt de contacte entre el sòlid i la superfície sobre la qual rodola, en el nostre cas el punt C .

Això vol dir que, a cada instant, el mig cilindre està girant al voltant del punt C i que, momentàniament, aquest punt està en repòs. Apliquem, doncs, l'equació fonamental de la dinàmica del sòlid rígid, calculant els moments de les dues forces i el moment d'inèrcia del sòlid respecte al punt C

$$M_C = I_C \frac{d^2 \theta}{dt^2} \quad (1)$$

D'entrada, fixem-nos que la reacció del terra, a l'estar aplicada en C , no fa moment i només fa moment el pes mg . Prenguem un sistema de referència en què l'eix y és vertical cap amunt i l'eix x horitzontal cap a la dreta. A més dels punts ja esmentats G i C , a la figura 1.48 també hi ha senyalat el punt A , centre del cilindre, i el B , sobre la vertical de A a l'altura del centre de masses G . L'angle θ és el format per $\overline{AG}$ amb la vertical $\overline{AC}$ quan el mig cilindre està fora de l'equilibri; la longitud del segment $\overline{AC}$ val el radi R del mig cilindre. I anomenem d la longitud del segment $\overline{AG}$, és a dir, la distància del centre del cilindre A al centre de masses G . Aquesta distància, que es pot calcular fàcilment per mitjà del *teorema de Pappus-Guldin* sobre la posició dels centres de masses de figures planes, val: $d = 2R/\pi$. Aleshores, el moment del pes respecte de C ve donat per

$$M_C = m \overline{CG} \times g = -\overline{BG} \cdot mg \mathbf{u}_z = -mgd \sin \theta \mathbf{u}_z \quad (2)$$

Fixem-nos que, amb el conveni de signes que estem utilitzant, a un angle girat θ positiu li correspon un moment negatiu i que, en conseqüència, el moment del pes és recuperador.

Calculem ara quant val el moment d'inèrcia I_C del mig cilindre respecte d'un eix paral·lel al z que passa per C . Siguin I_A i I_G els moments d'inèrcia corresponents als punts A i G , respectivament. Pel teorema de Steiner, tenim que

$$I_A = I_G + m \cdot \overline{GA}^2 \quad \text{i} \quad I_C = I_G + m \cdot \overline{GC}^2$$

d'on tenim

$$I_C = I_A + m \cdot (\overline{GC}^2 - \overline{GA}^2) \quad (3)$$

Com que tota la massa del mig cilindre és a la mateixa distància R de l'eix que passa pel centre A , tenim que $I_A = mR^2$, i, per trigonometria, també tenim que



$$\overline{GC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AG}^2 - 2 \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AG} \cdot \cos \theta = R^2 + d^2 - 2Rd \cos \theta$$

d'on I_C de (3) queda com

$$I_C = 2mR(R - d \cos \theta) \quad (4)$$

Amb el moment M_C donat per (2) i I_C per (4) ja podem tornar a l'equació (1). Amb aquests valors de M_C i de I_C aquesta equació diferencial no és lineal, però si suposem que l'angle θ és petit i, en conseqüència, en primera aproximació, $\sin \theta \approx \theta$ i $\cos \theta \approx 1$, l'equació (1) quedarà com

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{gd}{2R(R-d)} \theta = 0$$

i si, com hem dit abans, $d = 2R/\pi$, aleshores, $\omega^2 = g/(\pi-2)R$ i el període valdrà

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{(\pi-2)R}{g}}$$

Problema 1.19. Pèndol de torsió bifilar

Com es mostra a la figura 1.49, fixem al sostre dos fils iguals AB i CD de longitud L , separats la distància $2a$. Als extrems inferiors dels fils, unim un cos que, respecte d'un eix vertical OP equidistant dels dos fils, té un radi de gir ρ . Si girem una mica el cos horitzontalment respecte d'aquest eix i el deixem anar, aleshores comença a oscil·lar com una mena de pèndol de torsió. Amb quin període ho fa?

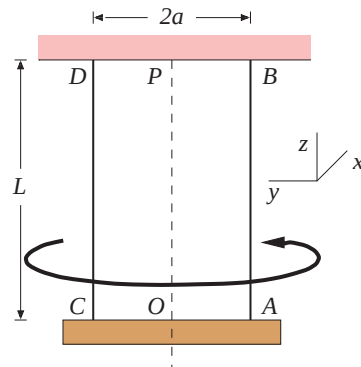
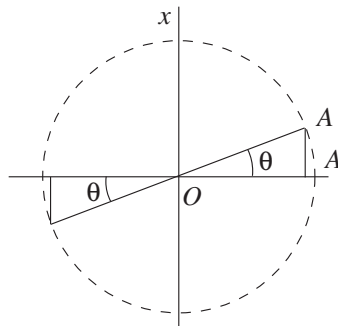
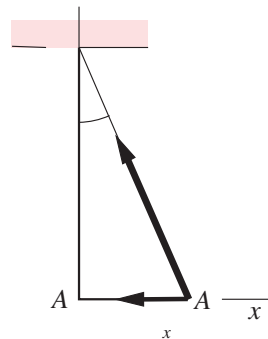


Figura 1.49

Solució



()



(b)

Figura 1.50



La figura 1.50 (a) representa el pla xy horitzontal amb un angle θ girat pel cos; A' i C' són els extrems A i C de la corda en la nova posició. La figura 1.50 (b) representa el pla xz vertical amb el fil AB abans i després del gir, la $A'B$. En aquesta última figura, F és la tensió del fil; F_x , la component horitzontal de la tensió, i φ és l'angle petit que s'inclina el fil respecte de la vertical.

Sigui m la massa del cos penjat. Les dues tensions que fan ambdós fils són pràcticament iguals i, en conseqüència, iguals a la meitat del pes del cos, $F = mg/2$. Si considerem que les oscil·lacions són d'amplitud petita, els angles θ i φ seran petits, i la component x de la tensió valdrà

$$F_x = F \sin \varphi \approx \frac{mg}{2} \varphi \quad (1)$$

D'altra banda, la distància $\overline{AA'}$ —i la $\overline{CC'}$, ja que els dos fils són equivalents— relaciona aquests dos angles

$$\overline{AA'} \approx a\theta \approx L\varphi \quad \text{d'on} \quad \varphi = \frac{a}{L}\theta \quad (2)$$

Les úniques forces que fan moment $\mathbf{M}_0$ respecte de O són les dues components F_x . Amb el sistema d'eixos representat a les figures anteriors, per (1) i (2), tenim

$$\mathbf{M}_0 \approx -2a \cdot \frac{mg}{2} \varphi \mathbf{u}_z \approx -\frac{a^2 mg}{L} \theta \mathbf{u}_z$$

Si I és el moment d'inèrcia del cos respecte de l'eix vertical que passa per O , podem escriure l'equació fonamental de la dinàmica de la rotació $M_0 = I \frac{d^2\theta}{dt^2}$ com

$$-\frac{a^2 mg}{L} \theta = I \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (3)$$

i en resulta l'equació diferencial del MHS. Segons l'enunciat, el radi de gir del cos al voltant de l'eix de rotació és ρ ; això vol dir que $I = m\rho^2$. Per tant, l'equació diferencial (3) quedarà

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{a^2 g}{\rho^2 L} \theta = 0$$

d'on veiem que el període valdrà, finalment

$$T = 2\pi \frac{\rho}{a} \sqrt{\frac{L}{g}}$$

Així, per exemple, si el cos fos una barra centrada de longitud $2a$, aleshores, $\rho/a = 1/\sqrt{3}$.

Problema 1.20. Acumulació d'energia elàstica

Tenim una molla de constant de força k i de longitud natural L_0 , col·locada verticalment i unida a terra —v. figura 1.51. Li posem damunt un primer bloc de massa m i, damunt d'aquest, un segon bloc pesant de massa M , amb $M > m$. Quan el conjunt es troba en



equilibri es retira horitzontalment el segon bloc per tal que el primer surti llançat cap amunt. Prenent aquest instant com a $t = 0$ i el terra com a origen de l'altura h , esbrineu l'altura màxima a què arribarà el primer bloc i la seva posició pujant en funció del temps.

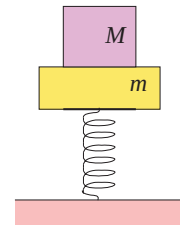


Figura 1.51

Solució

La molla arriba inicialment fins a l'altura L_0 —v. figura 1.52 (a). Impedint que oscil·li, li col·loquem al damunt el primer bloc. Buscant l'equilibri, l'extrem superior de la molla s'ensorra la longitud Δx_1 —v. figura (b)— donada per

$$k\Delta x_1 = mg$$

Aquesta posició d'equilibri es troba a l'altura $h_0 = L_0 - \Delta x_1$. Anàlogament, col·loquem el segon bloc al damunt i s'ensorra la Δx_2 —v. figura (c)—

$$k\Delta x_2 = Mg$$

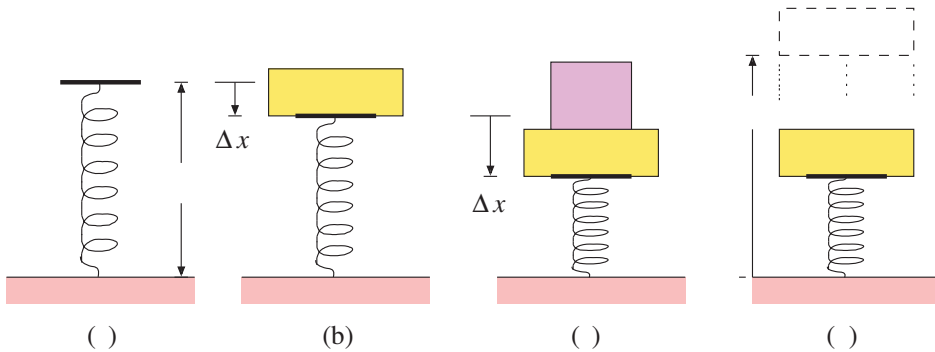


Figura 1.52

A l'altura $L_0 - \Delta x_1 - \Delta x_2$ tots dos blocs estan en equilibri i en repòs. Però si traiem el segon bloc, ara, només amb el primer damunt de la molla la posició d'equilibri correspon una altra vegada a l'altura h_0 . Per tant, a $t = 0$, el primer bloc està en repòs, desplaçat una distància Δx_2 de la posició d'equilibri. Així doncs, en el moviment de pujada empès per la molla, aquest bloc farà una part de MHS d'amplitud $A = \Delta x_2$ i període $T = 2\pi\sqrt{m/k}$ i, en conseqüència, assolirà la màxima velocitat ascensional quan passi pel punt d'equilibri corresponent a l'altura $L_1 = L_0 - \Delta x_1$, que serà a l'instant $t_0 = T/4$. Com hem vist en el problema 1.4, equació (2), el bloc continuarà pujant sobre la molla fins a l'altura h_a tal que satisfaci la condició

$$g = \omega^2(h_a - h_0) = \frac{k}{m}(h_a - L + \frac{mg}{k})$$

és a dir, $h_a = L_0$. A partir d'aquest moment, el bloc deixarà d'estar en contacte amb la molla i pujarà per la seva inèrcia. Resumint, el bloc pujarà en un moviment de dues parts:

- Primera. Des de $t = 0$ fins a $t = t_a$ fa un MHS sobre la molla, on la seva altura h val

$$h(t < t_a) = L_0 - \Delta x_1 + \Delta x_2 \cos(\omega t + \pi) = L_0 - \frac{g}{k} \left(m + M \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t \right) \quad (1)$$



A l'instant t_a , tenim $h = h_a = L_0$ i, per l'expressió anterior (1), veiem que es compleix

$$t_a = \sqrt{\frac{m}{k}} \arccos\left(-\frac{m}{M}\right) \quad (2)$$

Dels dos t_a possibles tals que $0 < t_a < T$, el més petit, $t'_a < T/2$, correspon al moviment de pujada, mentre que el més gran, $t''_a > T/2$, al de baixada. És clar que, en el nostre cas, ens interessa el petit. Fixem-nos també per (2) que, per tal que el bloc s'aixequi per sobre de la molla, només cal que $M > m$, com ja ens deia l'enunciat.

- Segona. A partir de l'instant t_a anterior continua pujant per inèrcia, ara sense contacte amb la molla, frenat, això sí, pel seu propi pes mg . La velocitat de partida la podem calcular derivant la $h(t)$ donada per (1) i substituint-hi $t = t_a$ de (2). Fent-ho així aconseguim

$$v(t_a) = \frac{g}{k} M \sqrt{\frac{k}{m}} \sin \sqrt{\frac{k}{m}} t_a = g \sqrt{\frac{M^2 - m^2}{km}}$$

i, per consegüent,

$$h(t \geq t_a) = L_0 + g \sqrt{\frac{M^2 - m^2}{km}} (t - t_a) - \frac{1}{2} g (t - t_a)^2 \quad (3)$$

Finalment, trobarem l'altura màxima que assolirà el bloc derivant (3) i igualant a zero. L'equació resultant ens proporciona l'instant en què això passarà, que és

$$t_b = t_a + \sqrt{\frac{M^2 - m^2}{km}}$$

Avaluant en (3), ens dona l'altura màxima

$$h_{\max} = L_0 + \frac{1}{2} g \frac{M^2 - m^2}{km} \quad (4)$$

Fixeu-vos que aquesta altura màxima $h_{\max}$ a la qual arribarà el bloc que acabem de calcular també es pot determinar —més ràpid i fàcilment— considerant la conservació de l'energia: l'energia potencial inicial, abans de sortir el bloc disparat cap amunt, ha de ser igual a l'energia potencial gravitatòria del bloc en el punt de màxima altura. És a dir,

$$mg(L_0 - \Delta x_1 - \Delta x_2) + \frac{1}{2} k (\Delta x_1 + \Delta x_2)^2 = mgh_{\max}$$

on, fent les substitucions corresponents, resulta la $h_{\max}$ anterior (4).

Problema 1.21. Sistema molla-cilindre

Una molla de constant de força k té un extrem unit a una paret fixa i l'altre a l'eix d'un cilindre homogeni de radi R i massa m , que és damunt d'una superfície horitzontal sobre la qual rodola sense lliscar —v. figura 1.53. Determineu el període de les oscil·lacions del cilindre.

Canviarà aquest període si fem oscil·lar el sistema sobre un pla inclinat en lloc d'un horitzontal?



Solució

Aquest problema, com molts d'altres, es pot resoldre tant aplicant la segona llei de Newton com aplicant la conservació de l'energia. Aquí ho farem d'aquesta segona manera.

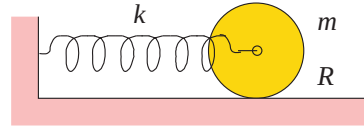


Figura 1.53

Sigui E l'energia mecànica del cilindre si el desplaçem x de la seva posició d'equilibri i el seu centre es mou a la velocitat v rodolant a la velocitat angular ω . L'energia cinètica del cilindre rodolant té una part de translació i una part deguda a la rotació. Si $I = \frac{1}{2}mR^2$ és el moment d'inèrcia del cilindre respecte del seu eix de simetria, tindrem

$$E = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \quad (1)$$

Com que el cilindre rodola sense relliscar, tenim que $v = \omega R$, per la qual cosa (1) queda com

$$E = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{3}{4}mv^2$$

Derivant aquesta expressió respecte del temps t tenim

$$0 = 2 \frac{1}{2}kx \frac{dx}{dt} + 2 \frac{3}{4}mv \frac{dv}{dt}$$

és a dir,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{2k}{3m}x = 0$$

d'on veiem que el moviment del cilindre serà un MHS de període

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{3m}{2k}}$$

Com es podia esperar aquest període és més gran que el corresponent a un bloc que no roda sinó que només llisca.

Finalment, és immediat comprovar que, si el cilindre rodola sense lliscar, no importa que la superfície per la que ho fa sigui horitzontal o estigui inclinada: el període és el mateix.

Problema 1.22. Oscil·lacions d'una boleta

Trobeu el període de les petites oscil·lacions que fa una esfera massissa homogènia de radi r , col·locada dintre d'un cilindre buit de radi R , amb $R > r$ —v. figura 1.54. Supposeu que, en tot moment, l'esfera rodola en un pla vertical sense lliscar.

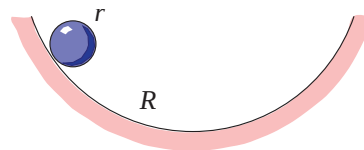


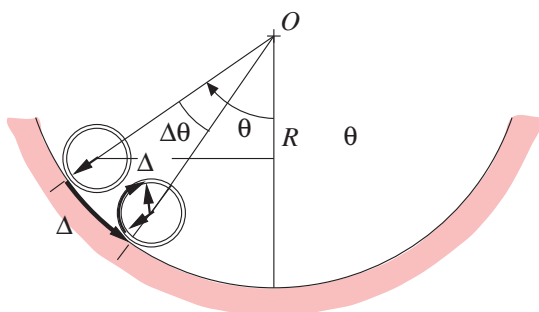
Figura 1.54

Solució

Aquest problema es resol més fàcilment aplicant la conservació de l'energia que fent consideracions de forces i moments.

Siguin m la massa de l'esfera i E la seva energia mecànica en un instant en què el seu centre C forma un angle θ amb la vertical —v. figura 1.55— i el centre O del cilindre.

Figura 1.55



L'energia E és la suma de l'energia potencial gravitatòria U més la cinètica de translació K_T i més la cinètica de rotació K_R al voltant de l'eix que passa per C . Si prenem l'origen de l'energia potencial a l'altura del centre O del cilindre, se segueix que

$$U = -mg(R - r) \cos \theta \quad (1)$$

Anomenem I el moment d'inèrcia de l'esfera entorn d'un eix que passi pel seu centre C , v_c la velocitat del seu centre i ω la seva velocitat angular. Aleshores, tindrem

$$K = K_T + K_R = \frac{1}{2}mv_c^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \quad (2)$$

Ara la qüestió és: com es relacionen v_c i ω amb θ ? Vegem-ho. D'entrada, si l'esfera rodola sense relliscar, la relació entre la velocitat lineal del seu centre i l'angular és, com ja sabem, $v_c = \omega r$. D'altra banda, com s'indica a la figura 1.55, per tal que l'esfera baixi un angle $\Delta\theta$ respecte de O ha de girar sobre si mateixa un angle $\Delta\varphi$. Si Δs és la longitud baixada sobre el cilindre, llavors la condició de rodolar sense lliscar ens torna a indicar que

$$\Delta s = R\Delta\theta = r(\Delta\varphi + \Delta\theta)$$

Derivant aquesta igualtat respecte del temps, obtenim la relació entre les diferents velocitats angulars

$$R\frac{d\theta}{dt} = r\left(\omega + \frac{d\theta}{dt}\right)$$

d'on resulta, de tot plegat, que

$$\omega = \frac{v_c}{r} = \left(\frac{R-r}{r}\right) \frac{d\theta}{dt}$$



Si tenim en compte, a més, que el moment d'inèrcia d'una esfera homogènia de massa m i radi r respecte del seu eix val $I = 2/5 mr^2$, l'expressió de l'energia cinètica (2) queda com

$$K = \frac{1}{2} m(R-r)^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{2}{5} mr^2 \left(\frac{R-r}{r} \right)^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = \frac{7}{10} m(R-r)^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \quad (3)$$

i l'energia mecànica total és (1) més (3), és a dir,

$$E = -mg(R-r) \cos \theta + \frac{7}{10} m(R-r)^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2$$

Derivant aquesta equació respecte de t i simplificant, podem concloure que

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{5g}{7(R-r)} \sin \theta = 0$$

Si les oscil·lacions són d'amplitud petita, aproximant $\sin \theta \approx \theta$, ens queda l'equació diferencial típica del MHS, per la qual cosa el període val

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{7}{5} \left(\frac{R-r}{g} \right)} \quad (4)$$

Abans d'acabar la solució fem una reflexió. El període d'una partícula oscil·lant dintre d'un cilindre de radi R és el mateix que el d'un pèndol simple de la mateixa longitud R que el radi. Ambdós casos són equivalents i tenen període $T = 2\pi \sqrt{R/g}$. Per contra, si a l'expressió (4) fem $r = 0$, el període que n'obtenim no és el del pèndol simple sinó que és més gran. Això, a primer cop d'ull, pot resultar sorprenent, però, pensant-ho bé, no ho és: una boleta que *rodola* sense rel·lisar, per molt petita que sigui, mai no és equivalent a una partícula. En efecte, com podem veure a (3), la energia cinètica de rotació de la bola és 2/7 de l'energia cinètica total, i queden només 5/7 per a l'energia de translació, que és, en definitiva, la que determina la celeritat de la bola. I aquestes proporcions són independents del valor de r !

Problema 1.23. Oscil·lacions d'un líquid

Considerem una columna de líquid de longitud L , continguda en un tub en U, de secció recta uniforme col·locat verticalment com es mostra a la figura 1.56. Negligint les forces de fricció, esbrineu el període de les oscil·lacions del líquid que es produeixen després d'haver-lo tret de l'equilibri.

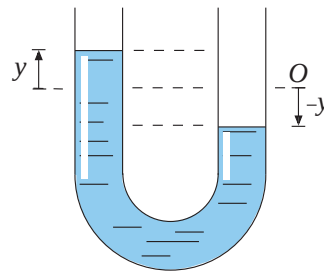


Figura 1.56

Solució

Prenguem l'eix y vertical, positiu cap amunt, amb l'origen en el nivell de l'equilibri del líquid. Si y és el nivell del líquid en una de les branques, per la conservació del volum,



el nivell a l'altra branca serà $-y$ —v. figura 1.56. Siguiu ara S la secció recta del tub i ρ la densitat del líquid.

Si U_0 és l'energia potencial gravitatòria que té tot el líquid en l'equilibri, l'energia potencial que tindrà fora d'ell valdrà, en funció de y ,

$$U(y) = U_0 + \rho S y \cdot g \cdot \frac{y}{2} + \rho S(-y) \cdot g \cdot \left(\frac{-y}{2}\right) = U_0 + \rho S g y^2$$

Quan la columna líquida estigui fora de l'equilibri, es desplaçarà com un cos de massa $\rho S L$ a una certa velocitat $v = dy/dt$, per la qual cosa la seva energia cinètica serà

$$K = \frac{1}{2} \rho S L \left(\frac{dy}{dt} \right)^2$$

Si ara suposem que no hi ha cap mena de fricció, es conservarà l'energia mecànica, $U + K$, i tindrem, doncs

$$\rho S g y^2 + \frac{1}{2} \rho S L \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 = E'$$

essent E' una constant. Derivant ara aquesta equació i simplificant $\dot{y}$, tenim

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{2g}{L} y = 0$$

és a dir, l'equació d'un MHS per a l'altura y de la columna de líquid. I d'aquí veiem que el període de les oscil·lacions val

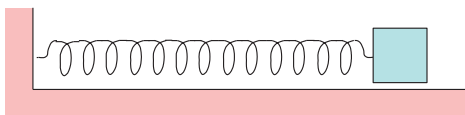
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{2g}}$$

Notem que, de manera anàloga a la d'un pèndol físic, el període és independent de la densitat del líquid.

Problema 1.24. Molla de massa no negligible

Un bloc de massa m es lliga a una molla uniforme de massa no negligible M i constant k .

Figura 1.57



Si el conjunt comença a oscil·lar, trobeu:

- l'expressió de l'energia cinètica del sistema molla-bloc i,
- aplicant la conservació de l'energia, el període de les oscil·lacions.

Nota. Considereu que les elongacions dels punts de la molla són proporcionals a les distàncies a què estan de l'extrem fix d'aquesta.



Solució

- a) En aquest cas, l'energia cinètica del conjunt, K , consta de la part deguda al bloc, K_m , més l'altra deguda a l'energia cinètica de la molla, K_M —i que és on hi ha la novetat d'aquest problema. La K_m es calcula de la forma habitual, $mv^2/2$, mentre que la K_M requereix una mica més d'elaboració.

La figura 1.58 (a) representa la molla sense deformat, en la seva longitud natural L . A la figura 1.58 (b), es mostra la molla allargada una longitud x .

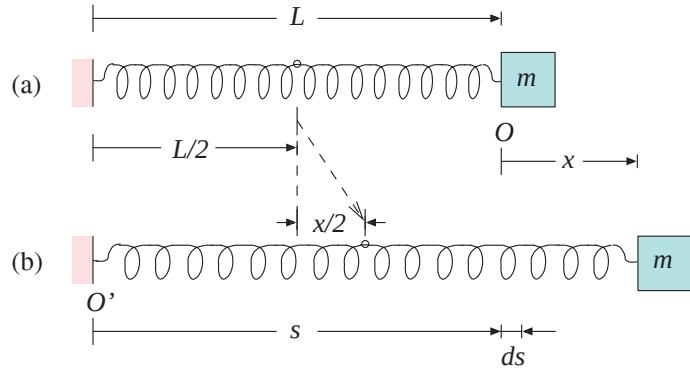


Figura 1.58

L'enunciat ens diu que els allargaments parcials de cada part de la molla són proporcionals a la distància a l'extrem fix O' ; així, per exemple, com es mostra a la mateixa figura, el punt de la molla que és a la meitat d'aquesta s'ha desplaçat la distància $x/2$. I, en general, els punts a la distància s de O' s'han desplaçat xs/L , de forma que, quan la partícula, és a dir, l'extrem mòbil O de la molla, tingui una velocitat v , els punts de la molla a la distància s tindran la velocitat

$$v_s = \frac{d}{dt} \left(\frac{s}{L} x \right) = \frac{s}{L} v$$

D'altra banda, si la molla és uniforme, un longitud ds de molla tindrà una massa dM , que valdrà $dM = M/L \cdot ds$. Doncs bé, un diferencial de molla de longitud ds situat a la distància s de l'extrem fixe O' tindrà una energia cinètica dK_M

$$dK_M = \frac{1}{2} \cdot dM \cdot v_s^2 = \frac{1}{2} \frac{M}{L} ds \frac{s^2}{L^2} v^2 = v^2 \cdot \frac{1}{2} \frac{M}{L^3} s^2 ds$$

I tota la molla, a l'instant en què el bloc es desplaça a la velocitat v , té

$$K_M = v^2 \int_0^L \frac{1}{2} \frac{M}{L^3} s^2 ds = \frac{1}{2} \frac{M}{3} v^2$$

Per tant, l'energia cinètica del sistema molla-bloc valdrà

$$K = K_m + K_M = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} \frac{M}{3} v^2 = \frac{1}{2} \left(m + \frac{M}{3} \right) v^2 \quad (1)$$

que, com veiem, és la que tindríem si la molla no tingués massa i la massa del bloc s'incrementés en $M/3$.

- b) Per trobar el període de les oscil·lacions, només ens queda ara aplicar la conservació de l'energia al sistema. Per (1) tindrem

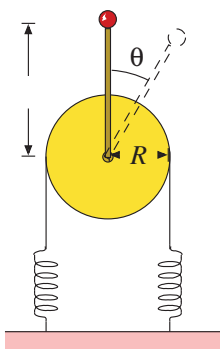
$$E = \frac{1}{2} \left(m + \frac{M}{3} \right) v^2 + \frac{1}{2} kx^2$$

que és equivalent a l'equació de la conservació de l'energia d'una partícula de massa $m + M/3$. En conseqüència, el període del sistema valdrà

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m + M/3}{k}}$$

Problema 1.25. Petites oscil·lacions angulars al voltant d'un punt d'equilibri estable

Figura 1.59

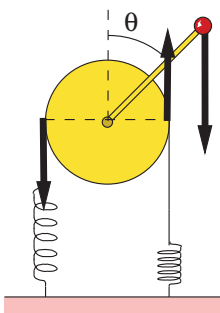


Tenim una politja de radi R per la qual passa una corda que té ambdós extrems lligats a dues molles iguals de constant k , tal com es mostra a la figura 1.59. Una barra primeta de longitud L solidària amb la politja té a l'extrem una partícula de massa m . En la posició vertical inicial, en què $\theta = 0$, les molles tenen la seva longitud natural i, a mesura que el sistema va girant, una molla es va comprimint i l'altra es va estirant. Considerant les masses de la politja, la barra i la corda negligibles, trobeu per a quin angle θ_0 hi ha equilibri, si aquest és estable o no, i, en el cas que ho sigui, el període de les oscil·lacions petites al voltant seu.

Apliqueu els resultats obtinguts a les dades:
 $R = 0,20 \text{ m}$, $k = 100 \text{ N/m}$, $L = 0,5 \text{ m}$, $m = 2 \text{ kg}$.

Solució

Figura 1.60



a) Resolució per consideracions sobre forces i moments

La situació inicial $\theta = 0$ és, clarament, un punt d'equilibri, però d'equilibri inestable, com confirmarem després. Desplaçant lleugerament cap a la dreta la barra, se'ns gira tot el conjunt, barra i politja —v. figura 1.60—, de manera que la molla de la dreta queda comprimida la mateixa longitud que la molla de l'esquerra queda allargada, i així es pot arribar a una nova posició d'equilibri determinada per l'angle $\theta = \theta_0$. En la situació d'equilibri, el moment del pes mg de la partícula a l'extrem de la barra equilibra el moment de les forces que fan les dues molles, $F = kR\theta$.

Per tant, igualant el mòdul dels dos moments, tenim

$$2R \cdot kR\theta_0 = L \sin \theta_0 \cdot mg$$

d'on resulta

$$\frac{\sin \theta_0}{\theta_0} = \frac{2kR^2}{mgL} \quad (1)$$



L'angle θ_0 de l'equilibri queda determinat per aquesta última igualtat. Ara, sabent que $\sin \theta < \theta$ per a qualsevol $\theta > 0$, de (1) veiem que una condició necessària i suficient per tal que aquest sistema tingui una posició d'equilibri —llevat de $\theta = 0$ — és que

$$\frac{2kR^2}{mgL} < 1 \quad (2)$$

Imagem ara que la barra està ja en la situació d'equilibri i la desplacem un angle φ . Una molla està comprimida i l'altra, allargada la mateixa longitud, $R(\theta_0 + \varphi)$. Calculant els moments que fan el pes i les dues tensions de les molles respecte del centre de la politja, la segona llei de Newton per a les rotacions ens diu

$$-2R \cdot kR(\theta_0 + \varphi) + L \sin(\theta_0 + \varphi) \cdot mg = mL^2 \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2} \quad (3)$$

on mL^2 és el moment d'inèrcia del conjunt respecte del centre de gir. Suposant que l'angle φ és petit, podem fer les aproximacions habituals $\sin \varphi \approx \varphi$ i $\cos \varphi \approx 1$. Amb aquestes aproximacions, i tenint en compte (1), l'equació (3) queda, finalment, com

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \left(\frac{2kR^2 - mgL \cos \theta_0}{mL^2} \right) \varphi = 0 \quad (4)$$

d'on resulta el període

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{mL^2}{2kR^2 - mgL \cos \theta_0}} \quad (5)$$

Aquest resultat només té sentit si el radicand és positiu; si no ho és això vol dir que la posició corresponent a l'angle θ_0 determinat per (1) és d'equilibri, però no d'equilibri estable que permeti oscil·lacions. Consegüentment, la condició d'equilibri estable és

$$\frac{2kR^2}{mgL \cos \theta_0} > 1 \quad (6)$$

Observem que la posició vertical, $\theta_0 = 0$, compleix la condició (1), però no la (6). Es tracta, com ja intuïem, d'un punt d'equilibri inestable.

b) Resolució considerant la conservació de l'energia

Prenent l'origen de l'energia potencial al centre de la politja, l'energia potencial del sistema, quan la barra està girada un angle θ , val la suma de la potencial gravitatòria més la potencial elàstica

$$U(\theta) = mgL \cos \theta + 2 \cdot \frac{1}{2} kR^2 \theta^2 \quad (7)$$

A partir d'aquesta expressió, localitzarem els punts d'equilibri θ_0 derivant-la i igualant-la a zero

$$\frac{dU(\theta)}{d\theta} = -mgL \sin \theta_0 + 2kR^2 \theta_0 = 0 \quad (8)$$

D'aquí resulta la mateixa equació que la (1). Podem comprovar si aquesta posició —donada per l'angle θ_0 solució de l'equació anterior— correspon a un punt d'equili-



bri estable o inestable substituint l'angle θ_0 a la segona derivada de (7) i veient el signe que en resulta. Recordem que un signe positiu vol dir punt d'equilibri inestable i un signe negatiu —un mínim en l'energia potencial—, punt d'equilibri estable. Així doncs, la condició perquè la θ_0 correspongui a equilibri estable és

$$\left[\frac{d^2 U(\theta)}{d\theta^2} \right]_{\theta=\theta_0} = -mgL \cos \theta_0 + 2kR^2 < 0$$

d'on resulta la mateixa desigualtat (6) que hem vist abans.

Apliquem ara la conservació de l'energia. L'energia total E del sistema és la suma de l'energia potencial (7) més la cinètica K . Com que la partícula descriu una trajectòria circular, l'energia cinètica ve donada per

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m \left(L \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \quad (9)$$

Com dèiem, la suma de (7) i (9) dóna la constant energia total. Si derivem aquesta suma i simplifiquem, trobem l'equació diferencial

$$mL^2 \frac{d^2 \theta}{dt^2} + 2kR^2 \theta - mgL \sin \theta = 0$$

que és una equació equivalent a l'anterior (3). Si posem ara $\theta = \theta_0 + \varphi$, amb l'angle θ_0 solució de (8) i φ un angle petit, retrobem l'equació (4) i, finalment, el període (5).

c) Aplicació numèrica

Per comoditat, denotem $a = 2kR^2/mgL$. Amb les dades de l'enunciat, $a = 0,815494$. Com que $a < 1$, hi ha un punt d'equilibri corresponent a un angle θ_0 solució de l'equació (1), que ara escrivim com a l'*equació transcendent*

$$\theta_0 = \frac{\sin \theta_0}{a} \quad (10)$$

Amb aquest valor de a veiem, per tempteig, que l'angle θ_0 solució de l'equació (10) és proper a 1 rad. Prenem, doncs, $\theta_0 = 1$ i substituïm aquest valor en el membre de la dreta de la igualtat (10). El resultat que n'obtenim, 1,03, és un nou valor aproximat de θ_0 millor que l'1 inicial. Si aquest nou valor el tornem a introduir a la dreta de (10), n'aconseguim un altre valor de θ_0 millor encara. I així anem repetint el procés fins que els valors de θ_0 que vagin sortint pràcticament no variïn els uns dels anteriors. El resultat final², és, com podem verificar, $\theta_0 = 1,08354 \text{ rad} = 62,0823^\circ$. A més, vist que $a/\cos \theta_0 = 1,74 > 1$, per (6) comprovem que aquesta posició és d'equilibri estable. Amb les dades de l'enunciat, si fem oscil·lar la barra al voltant d'aquesta posició el període valdrà, per (5), $T = 2,407 \text{ s}$.

² Aquest mètode iteratiu per resoldre l'equació (10) és molt senzill d'aplicar però de convergència bastant lenta. S'han de fer moltes iteracions per arribar a tenir cinc o sis xifres exactes. El mètode de Newton-Raphson, que s'explica en els textos de càlcul numèric, és molt més ràpid.



A la figura següent hem representat l'energia potencial $U(\theta)$ donada per (7) amb les dades de l'enunciat. Fixem-nos com hi ha el màxim a $\theta = 0$ i el mínim —per a $\theta > 0$ — en $\theta = 1,08$ rad, i observem la forma aproximadament parabòlica que presenta la funció al voltant del mínim.

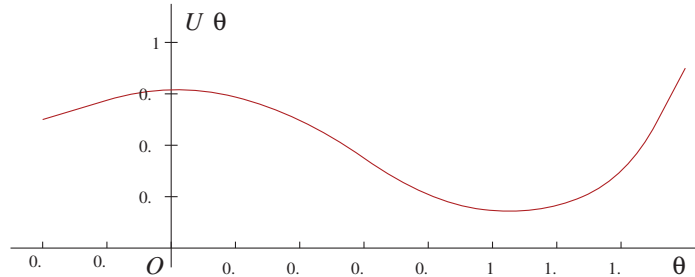


Figura 1.61

Problema 1.26. Pèndol cicloïdal isòcron

Una partícula es deixa caure lliscant sense fricció per la corba *cicloïde*³ —v. figura 1.62— donada per les equacions paramètriques següents

$$x = R(\theta - \sin \theta) \quad (1)$$

$$y = -R(1 - \cos \theta) \quad (2)$$

on R és una constant.

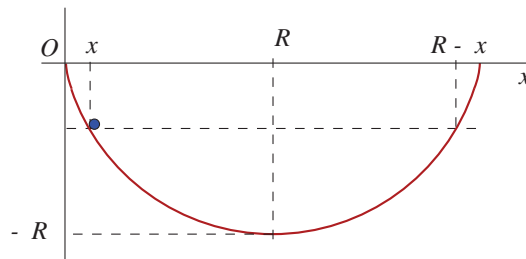


Figura 1.62

Demostreu que les oscil·lacions de la partícula sobre aquesta corba són isòcrones, és a dir, el seu període és independent de la posició inicial x_0 des d'on es deixar anar —i, per tant, de la seva amplitud— i que val

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{4R}{g}}$$

Solució

Suposant que la massa de la partícula és m , la seva energia potencial U en un instant determinat vindrà donada per

$$U = mgy = -mgR(1 - \cos \theta) \quad (3)$$

³ La cicloïde és la corba engendrada per un punt fix en una circumferència que roda, sense lliscar, damunt una recta. En aquest cas, la circumferència té radi R i roda sobre la recta $y = -2R$.



on hem pres l'origen d'energia potencial en $y = 0$. Pel que fa a la seva energia cinètica, per (1) i (2) tenim que

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = R(1 - \cos \theta) \frac{d\theta}{dt} \quad (4)$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = -R \sin \theta \frac{d\theta}{dt} \quad (5)$$

Així doncs,

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2) = mR^2(1 - \cos \theta) \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \quad (6)$$

Com que es conserva l'energia mecànica, $E = U + K$, per (3) i (6) obtenim la igualtat

$$R(1 - \cos \theta) \left[R \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 - g \right] = \frac{E}{m} \quad (7)$$

Suposem que a $t = 0$ la partícula estava sobre la cicloide en repòs en el punt (x_0, y_0) , corresponent al paràmetre $\theta = \theta_0$. Per (4) i (5) veiem que estar en repòs vol dir $d\theta/dt = 0$; l'energia mecànica E val, llavors, $E = -mgR(1 - \cos \theta_0)$. Per tant, la igualtat (7) queda com

$$(1 - \cos \theta) \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = \frac{g}{R} (\cos \theta_0 - \cos \theta)$$

D'aquí podem aïllar la $\frac{d\theta}{dt}$ i posar

$$dt = \sqrt{\frac{R}{g}} \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{\cos \theta_0 - \cos \theta}} d\theta \quad (8)$$

A la figura 1.62, hem representat la cicloide donada per (1) i (2) entre $\theta = 0$ i $\theta = 2\pi$. Fixem-nos que, com podem veure per l'equacions esmentades, la gràfica és simètrica respecte de la recta $x = \pi R$, punt on té el mínim, i que correspon a $\theta = \pi$. A la figura 1.62, també s'hi indica el punt inicial (x_0, y_0) , corresponent a θ_0 , i el punt oposat fins on arribarà la partícula, a la mateixa altura y_0 , el $(2\pi R - x_0, y_0)$ corresponent a $2\pi - \theta_0$.

Com que el moviment és simètric al voltant del mínim, el període serà quatre vegades l'interval de temps d'anar del punt inicial, θ_0 , al mínim, $\theta = \pi$. Consegüentment, per (8) tindrem

$$T = 4 \sqrt{\frac{R}{g}} \int_{\theta_0}^{\pi} \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{\cos \theta_0 - \cos \theta}} d\theta$$

Utilitzant les igualtats trigonomètriques (A.25) i (A.26),

$$\sqrt{1 - \cos \theta} = \sqrt{2} \sin \frac{\theta}{2} \quad \text{i} \quad \cos \theta = 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} - 1$$

i, fent el canvi de variable,

$$u = \cos \frac{\theta}{2} \quad \text{amb} \quad du = -\frac{1}{2} \sin \frac{\theta}{2} d\theta$$



que comporta fer $u_0 = \cos \frac{\theta_0}{2}$, arribem a una integral com ara la (A.71)

$$T = 8 \sqrt{\frac{R}{g}} \cdot \int_0^{u_0} \frac{du}{\sqrt{u_0^2 - u^2}} = 8 \sqrt{\frac{R}{g}} \cdot \left[\arcsin \frac{u}{u_0} \right]_0^{u_0} = 8 \sqrt{\frac{R}{g}} \left[\frac{\pi}{2} - 0 \right] = 2\pi \sqrt{\frac{4R}{g}}$$

Comprovem, doncs, que el període resulta ser independent de la posició inicial (x_0, y_0) i, per tant, de l'amplitud, sense haver de fer cap mena d'aproximació.

1.7.2. Problemes proposats

En els càlculs de tots els problemes d'aquest text s'ha pres $g = 9,81 \text{ m/s}^2$.

Problema 1.27. Cinemàtica del MHS

Una partícula que fa un MHS estava a l'origen a $t = 0$. Si té un període de 24 s, a) quant de temps ha de passar perquè l'elongació sigui, per primera vegada, la meitat de l'amplitud? b) I quant perquè la celeritat sigui meitat de la màxima?

Resp.: a) $\Delta t = 2 \text{ s}$, b) $\Delta t = 4 \text{ s}$

Problema 1.28. Cinemàtica del MHS

D'una partícula que efectua el MHS $x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$ només sabem que l'amplitud del moviment és $A = 5 \text{ m}$ i que a $t = 0$ la seva posició era $x_0 = -3 \text{ m}$ i la seva velocitat, positiva. Quant val la fase inicial ϕ ?

Resp.: $\phi = 4,069 \text{ rad}$

Problema 1.29. Dos MHS

Esbrineu l'amplitud i la freqüència dels MHS de dues partícules de les quals se saben les dades següents:

- a) De la primera, que la velocitat màxima és 80 cm/s i la seva acceleració màxima, 90 cm/s^2 .
- b) De la segona, que té la velocitat $v_1 = 12\sqrt{6} = 29,39 \text{ cm/s}$ a l'instant en què la seva posició és a $2,0 \text{ cm}$ del punt d'equilibri O i $v_2 = 15\sqrt{3} = 25,98 \text{ cm/s}$ quan està a $5,0 \text{ cm}$ de O .

Resp.: a) $A = 71,1 \text{ cm}$, $f = 0,179 \text{ Hz}$, b) $A = 10,0 \text{ cm}$, $f = \frac{3}{2\pi} = 0,478 \text{ Hz}$

Problema 1.30. MHS i condicions inicials

Segui una partícula que fa un MHS tal que a $t = t_0$ la seva posició és x_0 , la velocitat v_0 i l'acceleració a_0 . Demostreu que la seva posició en qualsevol instant t pot posar-se com

$$x(t) = x_0 \cos \omega(t - t_0) + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega(t - t_0), \quad \text{on} \quad \omega = \sqrt{\frac{-a_0}{x_0}}$$

**Problema 1.31. Expressió d'un MHS**

A l'instant $t_1 = 14$ s, la posició, la velocitat i l'acceleració d'una partícula que descriu un MHS són, respectivament, $x_1 = -16,94$ cm, $v_1 = 159,5$ cm/s i $a_1 = 3811$ cm/s². Expresses el moviment de la partícula en la forma: $x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$.

Resp.: $x(t) = 20,0 \cos(15,0t + 1,06)$ cm

Problema 1.32. Cinemàtica del MHS

Del moviment d'una partícula sabem que és un MHS i que a l'instant $t_1 = 10$ s la posició, la velocitat i l'acceleració valien, respectivament,

$$x_1 = -5,8438 \text{ mm}, \quad v_1 = 61,199 \text{ mm/s}, \quad a_1 = 11834 \text{ mm/s}^2$$

- Quant val el període del moviment?
- Trobeu l'equació del MHS de la partícula.
- En quin instant t_2 posterior a $t > 20$ s tornarà a estar a x_1 amb la velocitat v_1 ?
- La mateixa qüestió anterior, però en aquest cas la velocitat no ha de ser necessàriament v_1 .
- En quin instant t_3 anterior a $t > 30$ s passarà per l'origen amb velocitat positiva?

Resp.: a) $T = 0,139624$ s, b) $x(t) = 6,0 \cos(45t + 5,7596)$, c) $t_2 = 20,0529$ s,
d) $t'_2 = 20,0428$ s, e) $t_3 = 29,9964$ s

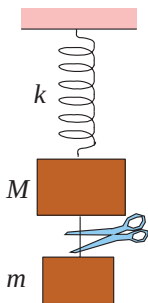
Problema 1.33. MHS a partir de dues posicions

Un objecte oscil·la unit a una molla vertical de manera que a $t_1 = 10$ s la seva posició és $x_1 = -11,46$ cm i a $t_2 = 20$ s és $x_2 = 11,96$ cm. Sabem que, quan es va penjar l'objecte a la molla, aquesta va patir un allargament de 3,83 cm. Quina és l'equació de moviment de l'objecte?

Resp.: $\tan \phi = \frac{x_2 \cos \omega t_1 - x_1 \cos \omega t_2}{x_2 \sin \omega t_1 - x_1 \sin \omega t_2}$, $x(t) = 12,0 \cos(16,0t + 0,523)$

Problema 1.34. Oscil·lacions d'una molla vertical

Figura 1.63



D'una molla agafada al sostre de constant de força $k = 10$ N/m penja un primer bloc de massa $M = 0,20$ kg. Un segon bloc de massa $m = 0,30$ kg està unit al primer per un fil —v. figura 1.63. Inicialment, tot el conjunt està en repòs i en equilibri. En un instant determinat es talla el fil que uneix els dos blocs, el segon bloc cau a terra i el primer comença a oscil·lar. Prenent l'origen d'energia potencial en el punt d'equilibri, amb quina energia començarà a oscil·lar aquest bloc? I amb quina amplitud? Quina velocitat màxima arribarà a tenir durant les oscil·lacions si no hi ha cap amortiment?

Resp.: $E_0 = \frac{1}{2} \frac{m^2 g^2}{k} = 0,433$ J, $A_0 = \frac{mg}{k} = 0,294$ m,
 $v_{\max} = \frac{m}{\sqrt{kM}} g = 2,08$ m/s


Problema 1.35. Força sobre el terra

Per mitjà d'una molla vertical de constant $k = 648 \text{ N/m}$, un bloc de massa $m_1 = 2 \text{ kg}$ és unit a un altre bloc de massa $m_2 = 4 \text{ kg}$ que es troba sobre el terra —v. figura 1.64. En un determinat moment es dóna un cop al primer bloc, de forma que comença a oscil·lar fent un MHS vertical d'amplitud $A = 2 \text{ cm}$.

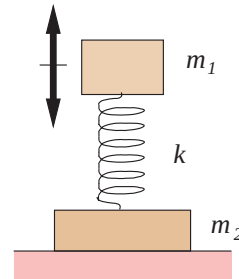


Figura 1.64

- Esbrineu la força que fa el segon bloc sobre el terra en funció del temps, així com també la màxima i la mínima corresponents.
- A partir de quina amplitud la força mínima seria nul·la?

Resp.: a) $F = (m_1 + m_2)g + kA \sin \omega t$, on $\omega = \sqrt{\frac{k}{m_1}} = 18 \text{ rad/s}$,

$$F_{\max} = 71,82 \text{ N}, F_{\min} = 45,90 \text{ N}, \text{ b) } A_0 = \frac{(m_1 + m_2)g}{k} = 9,083 \text{ cm}$$

Problema 1.36. Les retallades arriben a les molles

Disposem d'una molla de constant de força $k = 200 \text{ N/m}$, que té una longitud natural $L = 100 \text{ cm}$ —v. figura 1.65 (a). Si volem tenir una molla de constant $k' = 350 \text{ N/m}$, quanta longitud ΔL li hem de retallar —v. figura 1.65 (b)?

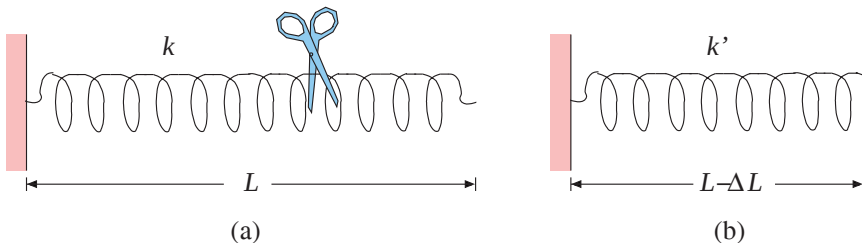


Figura 1.65

Resp.: $\Delta L = \left(1 - \frac{k}{k'}\right)L = 42,9 \text{ cm}$

Problema 1.37. Associació de molles

Considereu les dues associacions de molles de les figures 1.66 i 1.67.

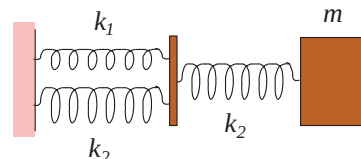


Figura 1.66

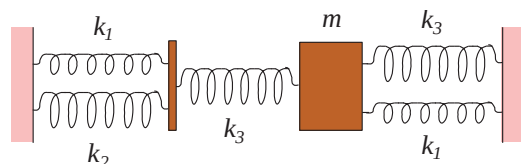


Figura 1.67

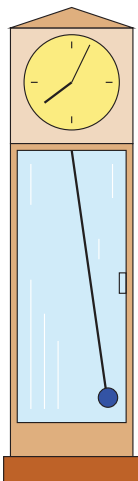


- a) Quant val la freqüència angular de les oscil·lacions del bloc de la figura 1.66?
- b) Si a la figura 1.67, $k_1 = k_3/3 = k_2/2 = k = 100 \text{ N/m}$ i $m = 1 \text{ kg}$, quin és el període de les oscil·lacions del bloc?

Resp.: a) $\omega = \sqrt{\frac{k_2(k_1 + k_2)}{k_1 + 2k_2}} \frac{1}{m}$, b) $T = 2\pi\sqrt{\frac{11}{2} \frac{m}{k}} = 1,47 \text{ s}$

Problema 1.38. Relloctes de pèndol i temperatura

Figura 1.68



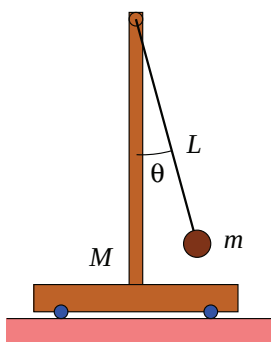
El pèndol d'un rellotge de paret que és a l'exterior està constituït per una barra homogènia de llautó suspesa d'un extrem —v. figura 1.68. Sabent que el coeficient de dilatació lineal del llautó val $\alpha = 19 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ i que l'expansió d'una barra de longitud L per efecte del canvi de temperatura $\Delta\theta$ ve donada per $\Delta L = \alpha L \Delta\theta$,

- a) trobeu la relació que hi ha entre la variació de la temperatura i la variació relativa corresponent del període del pèndol.
- b) El rellotge anterior s'ha calibrat al gener i va exacte a la temperatura de $\theta_0 = 10^\circ\text{C}$. Aplicant el resultat de l'aparat (a), esbrineu quant de temps, aproximadament, s'endarrerirà durant el mes de juliol si la temperatura mitjana del mes és de 25°C ?

Resp.: a) $\frac{\Delta T}{T} = \frac{1}{2} \alpha \Delta\theta = 1,43 \times 10^{-4}$, b) $\Delta t = 6 \text{ min } 22 \text{ s}$

Problema 1.39. Pèndol simple, però sobre un carretó

Figura 1.69



Un carretó té un pal vertical de l'extrem del qual penja un pèndol simple, constituït per una barra molt prima amb una massa puntual m a l'extrem inferior —v. figura 1.69. El carretó, de massa total M , té unes rodets de forma que pot oscil·lar endavant i endarrera sense cap mena de fricció en un pla horitzontal. Llavors, si pertorbem el pèndol de forma que efectui petites oscil·lacions, quin període T tindrà en relació amb el període T_0 que tindria si estigués fixat al terra?

Nota: El període T es pot calcular directament, però fixeuvos que aquest problema és molt semblant als dels dos cossos 1.10 i 1.11: en el fons, el carretó i la lentilla del pèndol són com si fossin dos cossos units per una molla de constant k . Quina?

Resp.: $T = \sqrt{\frac{M}{M+m}} T_0$, $k = mg/L$


Problema 1.40. Un pèndol físic

Una barra molt prima, de longitud $L = 60$ cm, es doblega per la meitat i forma una “V” corresponent a un angle $\alpha = 60^\circ$. Si, com es mostra a la figura 1.70, la pengem d’un eix horitzontal i deixem que faci petites oscil·lacions en un pla vertical, quin serà el seu període? Fixeu-vos que el període és independent del material de la barra.

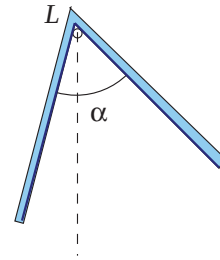


Figura 1.70

Resp.: $T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{3g \cos(\alpha/2)}} = 0,9640 \text{ s}$

Problema 1.41. El segon centre d’oscil·lació

Una barra homogènia de longitud $L = 1,5$ m i massa $m = 0,60$ kg, sota l’acció del seu propi pes, pot oscil·lar al voltant d’un punt O_1 , situat a la distància $d_1 = L/10$ d’un dels extrems. Determineu-ne un segon punt O_2 , situat a la distància d_2 del mateix extrem ($0 < d_2 < L/2$), tal que les oscil·lacions de la barra penjada de O_2 tinguin el mateix període que les corresponents a O_1 . Supposeu que les oscil·lacions són sempre petites.

Resp.: $d_2 = 0,29167L = 43,75 \text{ cm}$

Problema 1.42. Període mínim d’un pèndol físic

Una barra prima de longitud L i massa m oscil·la respecte d’un eix horitzontal que passa pel seu extrem O —v. figura 1.71. La barra té una boleta molt petita de massa $m/2$ que pot desplaçar amunt i avall al llarg d’ella. Esbrineu a quina distància x de l’eix hem de col·locar la boleta per tal que el període de les petites oscil·lacions sigui mínim.

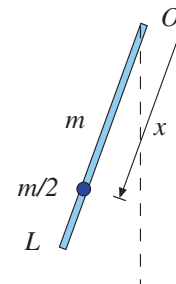
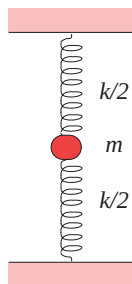


Figura 1.71

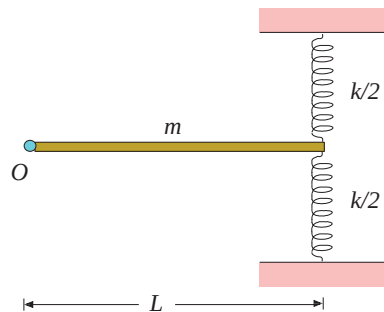
Resp.: $x = \left(\sqrt{\frac{5}{3}} - 1 \right) L = 0,2910L$

Problema 1.43. Oscil·lador lineal i oscil·lador angular

a) Una partícula de massa m lligada a dues molles de constant $k/2$, com ens mostra la figura 1.72 (a). Les oscil·lacions són en la direcció de les dues molles.



(a)



(b)

Figura 1.72



- b) Una barra de longitud L i massa m que pot girar en un pla horitzontal al voltant d'un eix vertical fix que passa pel seu extrem O —v. figura 1.72 (b). L'altre extrem de la barra és unit a dues molles iguals perpendiculars, de constants $k/2$. Les oscil·lacions angulars de la barra seran, en tot moment, petites.

Com acabem de veure, en els dos oscil·ladors intervenen dues molles de $k/2$ i una massa m .

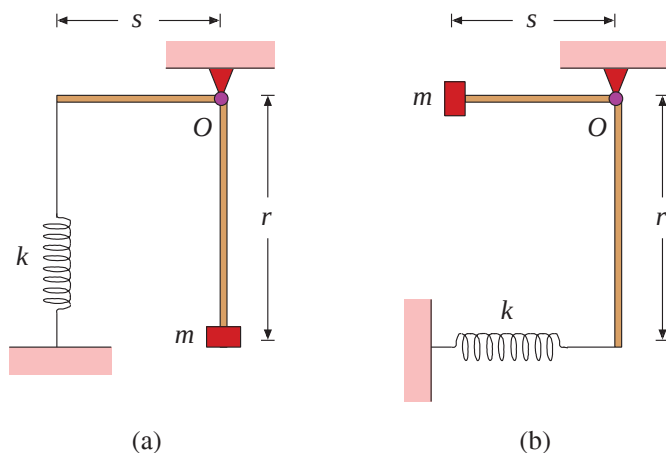
- i) Abans d'aplicar qualsevol equació i trobar les expressions dels períodes, reflexioneu i contesteu: quin dels dos oscil·ladors té el període més gran?
ii) A continuació, calculeu detalladament els dos períodes i compareu-los.

Resp.: i) Clarament l'oscil·lador (b) amb la barra; ii) $T_a = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$, $T_b = 2\pi\sqrt{\frac{m}{3k}}$

Problema 1.44. Sistemes amb barres oscil·lants

En els dos sistemes oscil·lants independents esquematitzats a la figura 1.73, les dues barres, que estan unides rígidament formant un angle recte, poden girar en un pla vertical al voltant de l'eix horitzontal O . Esbrineu el període de les oscil·lacions de petita amplitud d'ambdós sistemes sabent que les masses de les barres són negligibles, les de les partícules valen $m = 12$ kg, les longituds de les barres són $r = 1,2$ m i $s = 0,70$ m, i les molles tenen la mateixa constant $k = 3000$ N/m. En ambdós casos, la barra de longitud s és horitzontal en la posició d'equilibri.

Figura 1.73



Resp.: a) $T = 2\pi\sqrt{\frac{mr^2}{mgr + ks^2}} = 0,6507$ s, b) $T = 2\pi\frac{s}{r}\sqrt{\frac{m}{k}} = 0,2318$ s

Problema 1.45. Placa rectangular com a pèndol

Considerem una placa homogènia rectangular d'altura a i amplada b , que oscil·la en un pla vertical com un pèndol físic al voltant d'un eix horitzontal que passa pel seu punt mitjà superior O —v. figura 1.74.

- a) Quant val el període de les seves oscil·lacions petites?



- b) Sigui la relació $q = b/a$. D'entre totes les plaques rectangulars possibles de la mateixa àrea A , per a quin quocient q serà mínim el període?

Nota: El moment d'inèrcia d'una placa rectangular de dimensions $a \times b$ i massa m respecte d'un eix normal que passi pel seu centre val $I = \frac{1}{12}m(a^2 + b^2)$.

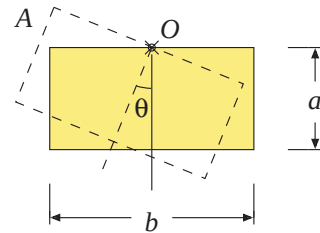


Figura 1.74

Resp.: a) $T = 2\pi\sqrt{\frac{4a^2 + b^2}{6ag}}$, b) $q = \frac{b}{a} = \frac{2}{\sqrt{3}} = 1,1547$

Problema 1.46. Molla, barra i paquet

Una barra de massa $m = 8 \text{ kg}$ i de longitud $L = 2 \text{ m}$ pot girar al voltant del seu punt mitjà O sense cap mena de fricció —v. figura 1.75.

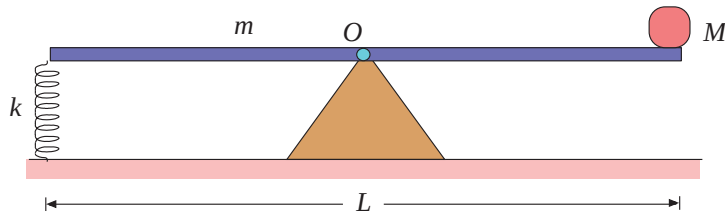


Figura 1.75

Un dels extrems de la barra és unit per una molla de constant $k = 400 \text{ N/m}$ a terra, mentre que sobre l'altre extrem hi ha un petit paquet de massa $M = 5 \text{ kg}$. Suposant que aquest paquet està ben lligat a la barra i sabent que la barra està horitzontal quan el sistema està en equilibri:

- Quant val l'estirament inicial de la molla?
- Trobeu el període T de les oscil·lacions petites del sistema.
- Si l'amplitud angular de les oscil·lacions és de $\Theta = 0,10 \text{ rad}$, quines són la velocitat i l'acceleració màximes que assolirà el paquet?
- Si el paquet estigués només dipositat sobre la barra però no lligat a aquesta, quina amplitud angular màxima podria assolir la barra sense que el paquet perdés el contacte amb ella?
- Tornant a l'apartat (b): quant valdria el període de les oscil·lacions d'aquest mateix sistema si hi afegíssim una segona molla de constant $k' = 2k$ a l'altre extrem —però de manera que la barra continués en equilibri en la posició horitzontal?

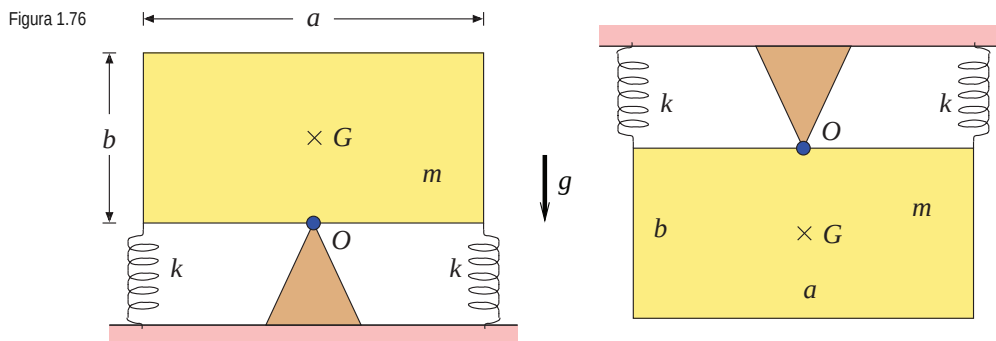
Resp.: a) $\Delta x = \frac{Mg}{k} = 12,26 \text{ cm}$, b) $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m+3M}{3k}} = 0,8699 \text{ s}$,

c) $v_{\max} = \frac{L}{2}\omega\Theta = 0,7223 \text{ m/s}$, $a_{\max} = \frac{L}{2}\omega^2\Theta = 5,217 \text{ m/s}^2$,

d) $\Theta_{\max} = \frac{2g}{\omega^2 L} = 0,1880 \text{ rad} = 10,77^\circ$, e) $T' = 2\pi\sqrt{\frac{m+3M}{3(k+k')}} = \frac{T}{\sqrt{3}} = 0,5022 \text{ s}$

Problema 1.47. Condicions per a l'oscil·lació, I

A la figura 1.76 es mostren dues plaques homogènies rectangulars iguals, de massa m i costats $a \times b$, —v. la nota del problema 1.45— però una, l'esquerra, descansa sobre l'articulació O i l'altra, la dreta, penja de l'articulació O i, ambdues, poden girar sense fricció en un pla vertical entorn de l'articulació corresponent.



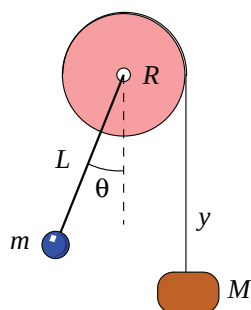
A la placa de l'esquerra els seus extrems estan lligats a terra per dues molles verticals iguals de constant k , mentre que a la de la dreta les molles dels extrems estan lligades al sostre.

- Fixeu-vos que la placa de la dreta oscil·larà en tots els casos, mentre que la placa de l'esquerra només ho farà si l'altura b satisfà... quina condició?
- Trobeu el període de les oscil·lacions de totes dues plaques.

Resp.: a) $b < \frac{ka^2}{mg}$, b) $T = 2\pi \sqrt{\frac{m(a^2 + 4b^2)}{6(ka^2 - bmg)}}$, $T = 2\pi \sqrt{\frac{m(a^2 + 4b^2)}{6(ka^2 + bmg)}}$

Problema 1.48. Condicions per a l'oscil·lació

Figura 1.77



Sigui una politja de radi R pràcticament sense massa a la qual hi ha fixada una barra de longitud L , també de massa negligible, però amb una massa puntual m a l'extrem —v. figura 1.77. La politja té enrotllada una corda lleugera amb un dels extrems que penja amb una massa M .

- Quina condició ha de satisfer M , en general, per tal que el sistema sigui oscil·latori?
- Donats R , L , M i m , per a quin angle θ_0 hi haurà equilibri estable?
- Trobeu l'equació exacta de les oscil·lacions del sistema al voltant de la posició d'equilibri i la freqüència de les petites oscil·lacions.

Resp.: a) $M < \frac{mL}{R}$, b) $\sin \theta_0 = \frac{MR}{mL}$,

c) $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgL}{mL^2 + MR^2}(\sin \theta - \sin \theta_0) = 0$, $\omega^2 = \frac{mgL \cos \theta_0}{mL^2 + MR^2}$.


Problema 1.49. Una molla real i mesura de g

Una manera de mesurar l'acceleració de la gravetat g amb una molla real amb una massa determinada no negligible és la següent. La molla es penja per un extrem al sostre i de l'altre s'hi penja un cos. Primer mesurem l'allargament estàtic de la molla, x_1 ; després, fent oscil·lar el sistema, en cronometrem el període T_1 . Ho repetim tot un altre cop, però amb un altre cos i n'obtenint les magnituds respectives, x_2 i T_2 . Doncs bé, suposant que la influència de la massa de la molla en aquestes mesures és equivalent a la d'afegir una mateixa massa desconeguda a la dels cossos, demostreu que g ve donada per

$$g = 4\pi^2 \frac{x_1 - x_2}{T_1^2 - T_2^2}$$

Fixeu-vos que g s'obté de mesures directes amb regla i cronòmetre.

Problema 1.50. Una altra mena de pèndol

Com es mostra a la figura 1.78, una barra rígida molt primeta OB , lligada pel punt A al sostre a través del fil AC està articulada en el punt O de manera que pot girar en un pla horitzontal. El pes de la barra és negligible davant del pes mg del bloc que té a l'extrem B . Si la longitud de la barra és r , la del fil AC és L i la distància OA és s , trobeu el període de les oscil·lacions de la barra entorn de l'eix vertical que passa per O si la desplacem horitzontalment una mica de la posició d'equilibri.

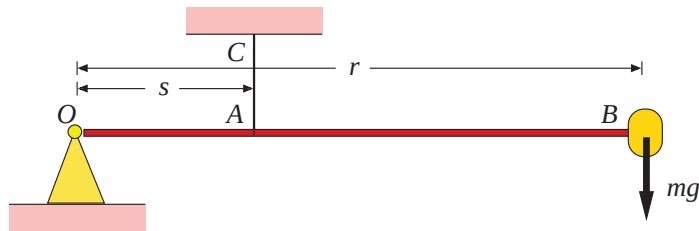


Figura 1.78

Resp.: $T = 2\pi \sqrt{\frac{rL}{s g}}$

Problema 1.51. Moviment oscil·latori d'una barra

Dos discs iguals situats en un mateix pla vertical, els eixos dels quals estan separats la distància d , giren en sentits contraris a una determinada velocitat angular ω (figura 1.79). Una barra homogènia de longitud més gran que d se situa simètricament sobre els dos discs sense que aquests deixin de girar.

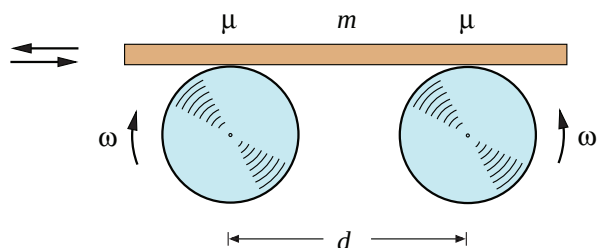


Figura 1.79



Demostreu que, a causa de les forces de fricció seca amb els discos, si se separa una mica la barra de la seva posició de simetria començarà a efectuar un MHS i trobeu-ne el període en funció del coeficient de fricció μ entre la barra i els discos.

Resp.: $T = 2\pi\sqrt{\frac{d}{2\mu g}}$

Problema 1.52. Més sobre el problema dels dos cossos

Seguint amb el problema resolt 1.10, demostreu que l'energia mecànica dels dos blocs ve donada per

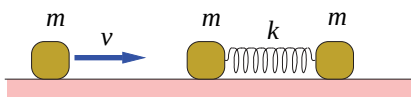
$$E = \frac{1}{2}\mu v^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

i, derivant-la, retrobeu l'expressió (7) sobre la freqüència angular de l'oscil·lació $\omega = \sqrt{k/\mu}$.

Problema 1.53. Sobre blocs, molles i xocs

Sobre una superfície horitzontal llisa hi ha dos blocs iguals de masses m units per una molla de constant k . Un altre bloc idèntic als anteriors —v. figura 1.80— xoca elàsticament contra un d'ells en la direcció de l'altre. Si la velocitat inicial d'aquest tercer bloc abans de la col·lisió era v , quant val l'allargament màxim que experimentarà la molla després del xoc?

Figura 1.80



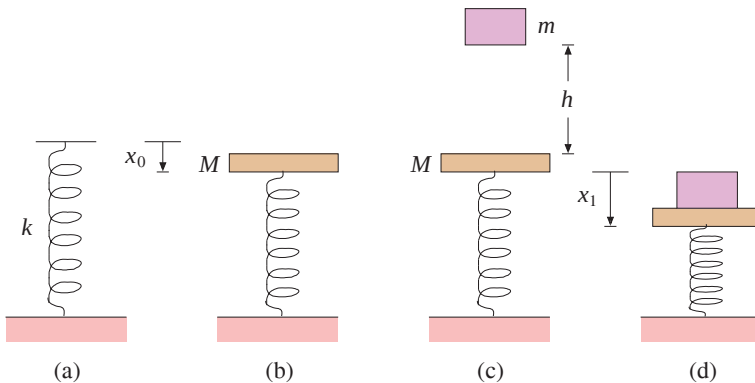
Recomenació: Si s'utilitza el concepte de massa reduïda i els resultats del problema 1.10 sobre els dos cossos, la resolució és molt ràpida.

Resp.: $x_{\max} = v\sqrt{\frac{m}{2k}}$

Problema 1.54. Molla col·locada verticalment

Tenim una molla llarga vertical sobre el terra —com es mostra a la figura 1.81 (a). Li col·loquem lentament un plat de massa $M = 1$ kg i s'ensorra $x_0 = 50$ cm —v. figura 1.81 (b). Des de $h = 2$ m d'altura deixem caure sobre el plat un cos molt tou i plàstic de $m = 2$ kg —v. figura 1.81 (c).

Figura 1.81





a) Esbrineu el màxim desplaçament x_1 que farà el plat des de la seva posició inicial —v. figura 1.81 (d) i b) les màximes velocitat i acceleració que assolirà el conjunt durant les seves oscil·lacions posteriors.

Resp.: $x_1 = x_0 \frac{m}{M} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2M}{m+M} \frac{h}{x_0}} \right) = 2,92 \text{ m},$

b) $v_{\max} = 4,90 \text{ m/s}, \quad a_{\max} = 12,5 \text{ m/s}^2$

Problema 1.55. Energia del sistema molla-massa-politja

- a) En el sistema oscil·lant de l'exemple 1.4, expresseu la conservació de l'energia del sistema en funció només del desplaçament x cap avall de la massa m penjada.
b) Derivant aquesta expressió, esbrineu el període del sistema.

Resp.: a) $E = -mgx + \frac{1}{2}k(x+x_0)^2 + \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$, amb $kx_0 = mg$

b) $T = 2\pi\sqrt{\frac{2m+M}{2k}}$

Problema 1.56. Barra oscil·lant sobre semicilindre

Com s'indica a la figura 1.82, sobre un semicilindre de radi R col·loquem una barra homogènia prima, de longitud L , de manera que es mantingui en equilibri. Quin és el període de les oscil·lacions que farà si desplaçem molt lleugerament un dels seus extrems més amunt o més avall de la posició d'equilibri? Suposeu que la barra rodola sense lliscar per sobre del cilindre.

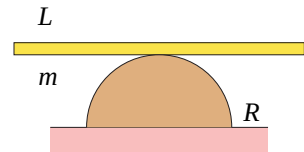


Figura 1.82

Resp.: $T = 2\pi\sqrt{\frac{L^2}{12Rg}}$

Problema 1.57. Condició per a un equilibri estable

De forma semblant al problema 1.56, un ortoedre de longitud L i altura h es col·loca en equilibri sobre un semicilindre de radi R —v. figura 1.83 (a) i nota del problema 1.45.

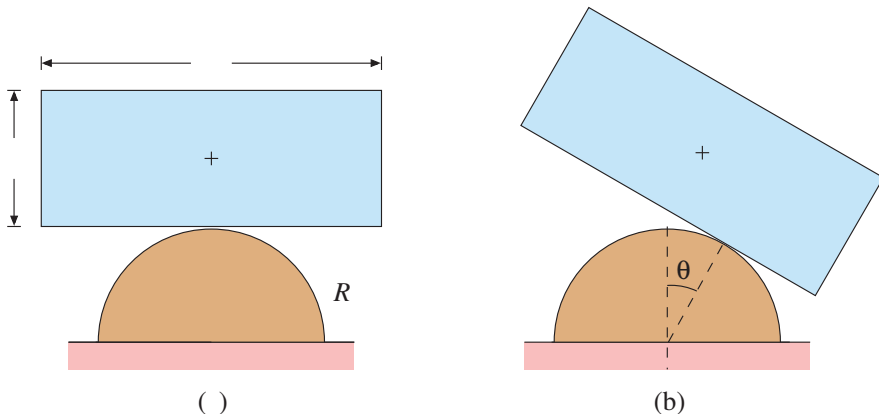


Figura 1.83



- a) Trobeu l'expressió de l'energia potencial de l'ortodre en funció de l'angle girat θ —v. figura 1.83 (b)— i demostreu que, aproximadament, per a angles petits, la posició d'equilibri és estable si se satisfà: $h < 2R$.
- b) Aplicant els mètodes de la conservació de l'energia i de les forces i moments, trobeu l'equació del moviment de l'ortodre i el període de les oscil·lacions petites.

Resp.: a) $U(\theta) = mg \left(R + \frac{h}{2} \right) \cos \theta + mgR\theta \sin \theta \approx U_0 + \frac{1}{2}mg \left(R - \frac{h}{2} \right) \theta^2,$

b) $T = 2\pi \sqrt{\frac{L^2 + 4h^2}{6(2R - h)g}}$

Problema 1.58. Energia potencial d'una partícula, 1

L'energia potencial d'una partícula que efectua un MHS ve donada per l'expressió

$$U(x) = a + b(x - c)^2$$

on $a = -9$ J, $b = 2$ N/m i $c = 3$ m. Si la partícula té una massa $m = 0,10$ kg i una energia total de $E = 23$ J, quant val l'amplitud A del seu moviment? I quant el seu període?

Resp.: $A = \sqrt{\frac{E - a}{b}} = 4$ m; $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{2b}} = 0,993$ s

Problema 1.59. Energia potencial d'una partícula, 2

L'energia potencial que té una partícula que es mou sobre l'eix x ve donada per l'expressió —tot en unitats SI—

$$U(x) = x^3 - 5x + 1$$

- a) Comenceu fent una gràfica de $U(x)$ i esbrineu quins punts de l'eix x són d'equilibri. Demostreu que un d'aquests punts és d'equilibri estable.
- b) Si la partícula té una massa de $m = 0,10$ kg, quin serà el seu període si oscil·la amb poca amplitud al voltant del punt d'equilibri estable?

Resp.: a) Punts d'equilibri: $x = \pm \sqrt{5/3}$; estable: $x = +\sqrt{5/3}$;

b) $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{2\sqrt{15}}} = 0,7139$ s

Problema 1.60. Oscil·lacions en molècules diatòmiques

Si r és la distància de separació entre els dos àtoms d'algunes molècules diatòmiques, i a i b dues constants positives, la força interactiva entre elles ve donada, aproximadament, per

$$F(r) = -\frac{a}{r^2} + \frac{b}{r^3} \quad (1)$$

- a) Feu, qualitativament, una gràfica de $F(r)$ i de la energia potencial corresponent. Presenta algun mínim aquesta última? En cas afirmatiu, quin significat físic té això?



- b) Demostreu que, per a distàncies petites al voltant del punt d'equilibri estable, l'expressió (1) es pot aproximar per una força restauradora lineal i que, si μ és la massa reduïda dels àtoms, la freqüència angular de les seves oscil·lacions petites val:

$$\omega = a^2 / \sqrt{\mu b^3}$$

Problema 1.61. Electrò entre dos ions positius

Siguin dos ions positius, de càrrega $+Ze$, pràcticament puntuals, immòbils, separats la distància a —v. figura 1.84.

- a) En algún punt de la recta mediatriu que els separa, a una petita distància x del centre O , hi ha un electrò de massa m i càrrega $-e$ que es desplaçant sobre la mediatriu amb una velocitat també petita. Aplicant-hi la *lleï de Coulomb*, trobeu l'equació diferencial del moviment i, fent-hi una primera aproximació lineal, comproveu que el moviment que farà l'electrò serà un MHS al voltant del punt central O . Quina freqüència tindrà el MHS?

Apliqueu el resultat al cas: $a = 2 \times 10^{-10}$ m, $Z = 30$, amb $e = 1,60 \times 10^{-19}$ C, $m = 0,911 \times 10^{-30}$ kg, $1/4\pi\epsilon_0 = 9,00 \times 10^9$ N·m²/C².

- b) Esbrineu, també, quina és la força F_y , en una primera aproximació lineal, a la qual està sotmès l'electrò si ara és sobre l'eix dels dos ions a una petita distància y de O . Comproveu que la força no és restauradora i que, al contrari d'abans, per al moviment en la direcció y dels dos ions el punt central O és un punt d'equilibri inestable, com també que, en termes de l'energia potencial electrostàtica $U(x,y)$ —de la qual deriva la força de Coulomb—, el punt central O és, matemàticament, un punt de sella.

Resp.: a) $\omega^2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{16Ze^2}{ma^3}$, $f = 1,96 \times 10^{16}$ Hz, b) $F_y = + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{32Ze^2}{a^3} y$

Problema 1.62. Oscil·lacions adiabàtiques

Un gas ideal està contingut en un tub cilíndric rígid que té un extrem tancat per un pistó mòbil de massa m el qual, ajustant perfectament, pot pujar i baixar lliurement pel tub sense cap mena de fricció —v. figura 1.85. La secció recta del tub és S i, en l'estat

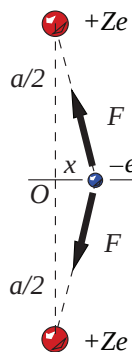


Figura 1.84

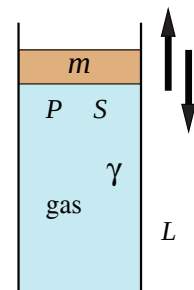


Figura 1.85



d'equilibri, estant el gas a la pressió P_0 , la longitud de tub que conté gas és L_0 . Demostreu que, pertorbant lleugerament la posició d'aquest pistó, per l'acció de la compressió i l'expansió adiabàtiques del gas, comença a efectuar un MHS al voltant de la posició d'equilibri amb una freqüència angular donada per

$$\omega = \sqrt{\gamma \frac{P_0 S}{m L_0}}$$

essent γ el coeficient adiabàtic del gas.

Nota: Recordeu que el producte PV^γ es manté constant al llarg d'un *procés adiabàtic*, essent γ una constant que només depèn del nombre d'àtoms que tingui la molècula del gas; per exemple, $\gamma = 1,40$ si el gas és diatòmic.



Oscil·lacions amortides

2.1. Força de fricció viscosa

Sabem que, quan un cos es mou en el si d'un fluid viscos, experimenta una força de fricció que depèn, d'una manera complicada, de la velocitat del cos i de la naturalesa i les condicions del fluid. Però s'ha observat que, si la velocitat del cos respecte del fluid és petita, la força de fricció F_f és, aproximadament, proporcional a la seva velocitat relativa $\mathbf{v}$

$$\mathbf{F}_f = -b\mathbf{v} \quad (2.1)$$

essent b una magnitud positiva anomenada *constant d'amortiment*, que depèn de la forma i de la secció recta que presenti el cos, com també del coeficient de viscositat del fluid. El signe menys ens indica que la força de fricció sempre s'oposarà a la velocitat i, en conseqüència, al moviment; aquesta força sempre farà un treball negatiu.

En els moviments oscil·latoris típics, per exemple, el d'un pèndol, mai no s'assoleixen velocitats grans. Així doncs, l'expressió (2.1) és sovint una bona indicació de la força de fricció que experimenta una partícula que està oscil·lant; en aquest cas, la fricció amb el medi que l'envolta en va reduint l'energia i l'amplitud d'oscil·lació.

Un *amortidor* és, en general, un dispositiu que té la funció de reduir l'amplitud de les oscil·lacions d'un sistema. Els amortidors hidràulics es basen en la fricció que experimenta un objecte que es mou a través d'un fluid viscos.

Esquemàticament, es representen com a la figura 2.1. En aquests amortidors se satisfà bastant bé l'expressió (2.1).

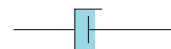


Figura 2.1

Vegem ara un exemple bastant il·lustratiu dels efectes que fa una força com la (2.1).

Exemple 2.1. Fricció viscosa

A una partícula de massa m se li comunica una velocitat inicial v_0 a $t = 0$. A causa de la fricció amb el medi que l'envolta la partícula experimenta la força $F = -bv$. Sense considerar cap altra força sobre la partícula, estudeu-ne el moviment.

**Solució**

Aplicant la segona llei de Newton, tenim $-bv = ma$. I d'aquí $-bv = m \frac{dv}{dt}$, que podem reescriure en variables separades com a

$$\frac{dv}{v} = -\frac{b}{m} dt$$

Integrant, tenim

$$\int \frac{dv}{v} = -\frac{b}{m} \int dt \quad \text{d'on} \quad \ln v = -\frac{b}{m} t + C \quad (1)$$

on C és la constant d'integració que depèn de les condicions inicials. En el nostre cas, en què a $t = 0$, $v = v_0$, d'(1) trobem $\ln v_0 = C$, d'on resulta

$$\ln v - \ln v_0 = \ln \frac{v}{v_0} = -\frac{b}{m} t$$

Notem que $\tau = m/b$ té dimensions de temps i s'anomena *constant de temps* o *temps de relaxació*.

Aplicant exponencials a l'expressió anterior obtenim

$$v(t) = v_0 e^{-t/\tau}, \quad \text{amb } \tau = m/b \quad (2)$$

És a dir, la velocitat de la partícula va decreixent exponencialment amb el temps.

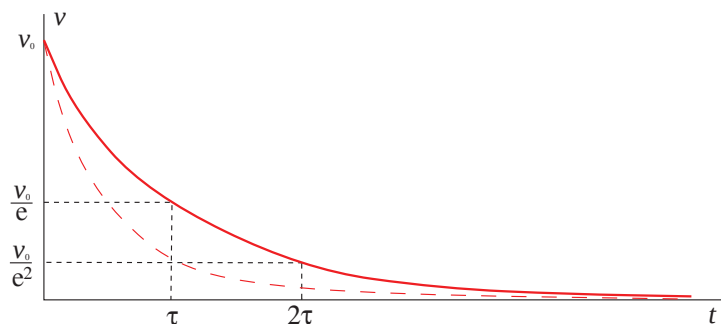
Si ara prenem el temps t en "unitats τ ", tenim que, després que passin:

- $t = 1\tau$, la velocitat s'ha reduït a 0,367 vegades v_0 ;
- $t = 2\tau$, la velocitat s'ha reduït a 0,135 v_0 ;
- $t = 5\tau$, la velocitat s'ha reduït a 0,007 v_0 ;
- $t = 7\tau$, la velocitat s'ha reduït a 0,0009 v_0 .

Per a la majoria dels efectes pràctics, podem considerar que després que passin entre 5 i 7 vegades τ la partícula s'ha aturat i el moviment s'ha extingit.

A la figura 2.2 s'ha representat la funció $v(t)$ de (2) per a un determinat valor de b , és a dir, τ —línia contínua— i per al doble de b , és a dir, la meitat de la τ anterior —línia discontinua.

Figura 2.2





Vegem ara com varia l'energia cinètica K de la partícula. Per (2), tenim que

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 e^{-2bt/m} \quad (3)$$

d'on veiem que l'energia es redueix amb una constant de temps, $m/2b$, que és la meitat que la constant corresponent de la velocitat. Calculem ara la potència P_D amb que es dissipa l'energia cinètica. Per (3) i (2), tindrem

$$P_D = \frac{dK}{dt} = -bv_0^2 e^{-2bt/m} = -bv^2$$

és a dir, $P_D = F_f \cdot v$.

Finalment, el lector pot integrar de nou (2), $x = \int v(t) dt$, per trobar la posició $x(t)$. Si pren la condició inicial que $x = 0$ a $t = 0$ li sortirà

$$x(t) = v_0 \frac{m}{b} \left(1 - e^{-bt/m} \right)$$

Observeu que, si bé la velocitat no arriba mai a ser estrictament zero, l'espai recorregut x no supera la distància $v_0 m/b = v_0 \tau$.

Els creixements o decreixements exponencials similars als d'aquest exemple són molt corrents en tots els camps de la física. L'amplitud i l'energia d'un oscil·lador harmònic amortit —l'objecte d'estudi d'aquest capítol— són un cas interessant d'aquests decreixements. D'altres importants són, per exemple, el decaïment radioactiu o la descàrrega d'un condensador a través d'una resistència —el circuit RC a l'apèndix §D.

2.2. Oscil·lacions harmòniques amortides

Tal com es presenta en aquesta figura 2.3, considerem un cos o partícula de massa m , sotmesa a una força recuperadora lineal $-kx$ per l'acció d'una molla, i a una força de fricció viscosa $-bv$ per l'acció d'un amortidor. Aplicant-hi la segona llei de Newton trobem l'equació de moviment

$$-kx - bv = ma$$

o, el que és igual,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \left(\frac{b}{m}\right) \frac{dx}{dt} + \left(\frac{k}{m}\right)x = 0 \quad (2.2)$$

equació diferencial semblant a la (1.9) del MHS però una mica més complexa pel fet que incorpora el terme dissipatiu.

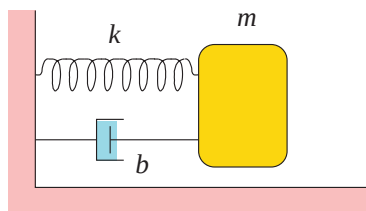


Figura 2.3

Matemàticament, aquesta és una *equació diferencial ordinària de segon ordre, lineal, a coeficients constants i homogènia* —v. apèndix B. S'anomena així perquè:

- les derivades que apareixen són ordinàries —i no parcials—;
- la derivada d'ordre més alt és de segon ordre;



- la funció $x(t)$ i les seves derivades estan elevades a la potència 1;
- els coeficients que multipliquen les derivades i la pròpia funció són constants;
- i és *homogènia* perquè la suma de la funció i les derivades pels seus coeficients respectivament és igual a zero.

Si introduïm les noves constants ω_0 i β , *frequència angular pròpia o natural* de l'oscil·lador i *paràmetre d'amortiment*, respectivament, definits per

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \beta = \frac{b}{2m} \quad (2.3)$$

podem tornar a escriure l'equació anterior com a

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \quad (2.4)$$

La funció $x(t)$, solució de l'equació (2.4), que a més compleixi les dues condicions inicials de la partícula, en descriurà el moviment.

Però, quina mena de moviment farà la partícula?

Abans de recórrer a les matemàtiques perquè ens resolguin l'equació (2.4), pensem en termes físics. Si l'amortiment és molt petit, el moviment ha de ser molt semblant al MHS, i si, d'altra banda, la força recuperadora és molt petita, el moviment ha de ser molt semblant al que hem vist a l'exemple 2.1 anterior. És a dir,

- si $\beta \rightarrow 0$ $x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi)$
 $v(t) = -\omega_0 A \sin(\omega_0 t + \phi)$
- si $\omega_0 \rightarrow 0$ $v(t) = v_0 e^{-t/\tau}$

És bastant raonable suposar que el moviment de la partícula de l'equació (2.4) sigui una combinació d'aquests dos casos extrems.

Això ens suggereix que, com a possible solució d'aquesta equació diferencial, provem la funció següent

$$x(t) = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega_1 t + \phi) \quad (2.5)$$

que s'adapta bé als dos casos extrems anteriors i en què, A_0 i ϕ , com en el MHS, són dues constants que dependran de les condicions inicials, β és el paràmetre d'amortiment (2.3) i ω_1 és una nova freqüència angular que haurem de determinar. Si calculem la primera derivada de (2.4), és a dir, la velocitat, ens queda

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -A_0 e^{-\beta t} [\beta \cos(\omega_1 t + \phi) + \omega_1 \sin(\omega_1 t + \phi)] \quad (2.6)$$

i si calculem la segona derivada i substituïm tot a (2.4) i simplifiquem, arribem a

$$A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega_1 t + \phi) (\omega_0^2 - \beta^2 - \omega_1^2) = 0$$



Però aquesta expressió només pot ser zero per a qualsevol instant t si

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \quad (2.7)$$

Per tant, la funció (2.5) satisfà, efectivament, l'equació diferencial del moviment (2.4), essent ω_1 un nou paràmetre constant donat per (2.7).

Tal com veiem per l'equació (2.5), el moviment oscil·latori amortit és semblant al MHS, però en què l'amplitud no és constant sinó que va decreixent exponencialment al llarg del temps. Podem parlar, fins i tot, d'una *amplitud efectiva*, A , com el coeficient —no constant!— que multiplica la funció harmònica $\cos(\omega_1 t + \phi)$; per (2.5), és

$$A = A_0 e^{-\beta t} \quad (2.8)$$

on ara A_0 és l'amplitud inicial.

A la figura 2.4 s'han representat l'elongació $x(t)$ d'un moviment oscil·latori amortit —línia contínua— i $\pm A_0 e^{-\beta t}$, l'amplitud efectiva corresponent (2.8) —línia discontinua.

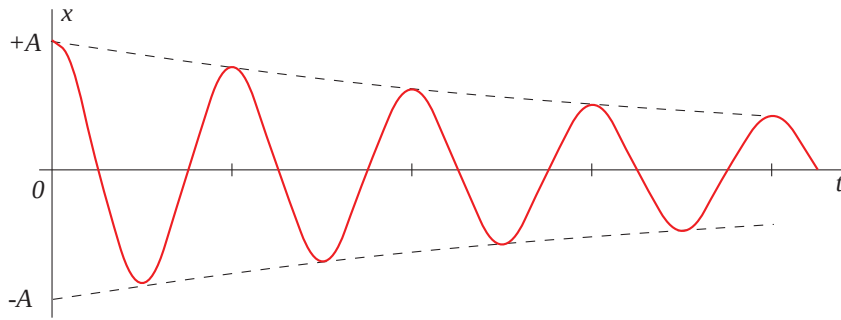


Figura 2.4

El moviment oscil·latori amortit no és un moviment periòdic en el sentit rigorós que dèiem a (1.4). Malgrat això, per (2.6) veiem que l'interval de temps entre dos màxims o mínims consecutius és constant i val

$$\Delta t_{\max} = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} \quad (2.9)$$

Com passava amb el període en el MHS, aquest $\Delta t_{\max}$ és independent de l'amplitud inicial. En aquest sentit més ampli, es pot parlar de la freqüència angular i del període de l'oscil·lació com ω_1 i $T = \Delta t_{\max} = 2\pi/\omega_1$, respectivament.

Fixem-nos, també, que la pèrdua relativa d'amplitud efectiva per període és constant. En efecte, aplicant (2.8), tenim

$$\frac{A(t) - A(t+T)}{A(t)} = 1 - \frac{A_0 e^{-\beta(t+T)}}{A_0 e^{-\beta t}} = 1 - e^{-\beta T} \quad (2.10)$$

que és independent del temps t . El producte $\beta T = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)}$ s'anomena *decrement logarítmic* de l'oscil·lació amortida.



Fixem-nos que, en general, $\omega_1 \leq \omega_0$. Però és molt útil observar que, si l'oscil·lació és poc amortida —que és com dir que $\beta T \ll 1$ —, aleshores $\beta^2 \ll \omega_0^2$ i, per tant, molt aproximadament

$$\omega_1 \approx \omega_0 \quad (2.11)$$

A continuació vegem dos exemples d'oscil·lacions amortides. En el primer, es presenta un cas en el qual comprovarem la validesa d'aquesta aproximació; en el segon, bastant amortit, ja no serà vàlida.

Exemple 2.2. Oscil·lació molt poc amortida

Si d'un oscil·lador harmònic amortit sabem que calen $n = 60$ oscil·lacions per tal que la pèrdua relativa d'amplitud efectiva sigui $1/4$, quant val la relació entre el paràmetre d'amortiment β i la freqüència pròpia ω_0 ?

Solució

Sigui T el període del moviment. Operant de forma anàloga a com s'ha fet per arribar a (2.10), per (2.8) tenim

$$\frac{1}{4} = \frac{A(t) - A(t + nT)}{A(t)} = 1 - e^{-n\beta T}$$

i d'aquí, aïllant $e^{-n\beta T}$ i aplicant logaritmes, s'arriba a

$$\beta = -\frac{1}{nT} \ln \frac{3}{4} = \left(\frac{1}{2\pi n} \ln \frac{4}{3} \right) \omega_1 = 7,631 \times 10^{-4} \omega_1$$

D'altra banda, per (2.7) tenim

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_1^2 + \beta^2} = \sqrt{1 + (7,631 \times 10^{-4})^2} \cdot \omega_1 = 1,000000291 \omega_1$$

que, a tots els efectes pràctics, és com dir $\omega_1 \approx \omega_0$. Per tant,

$$\beta = 0,000763 \omega_0 = \frac{\omega_0}{1310,6}$$

Exemple 2.3. Oscil·lació molt amortida

Sabent que la freqüència d'un oscil·lador amortit és el 95% de la seva freqüència pròpia, a quin tant per cent queda reduïda l'amplitud després de cada oscil·lació?

Solució

Sigui r el tant per 1 al qual es redueix l'amplitud efectiva transcurregut un període T . Això vol dir que

$$A(t + T) = r A(t)$$

i, per (2.8)

$$A_0 e^{\beta(t+T)} = r A_0 e^{-\beta t}$$



d'on surt

$$r = e^{-\beta T} \quad (1)$$

Però, quant val el decrement logarítmic βT ?

L'enunciat ens diu que $\alpha = \frac{\omega_1}{\omega_0} = \frac{95}{100}$. Per (2.7), tenim que

$$\omega_1^2 = \omega_0^2 - \beta^2 = \alpha^2 \omega_0^2$$

i d'aquí

$$\beta^2 = \omega_0^2 (1 - \alpha^2) = \omega_1^2 \frac{1 - \alpha^2}{\alpha^2} \quad \text{és a dir} \quad \frac{\beta}{\omega_1} = \sqrt{\frac{1 - \alpha^2}{\alpha^2}}$$

I, com que $\beta T = 2\pi \frac{\beta}{\omega_1}$, aleshores el coeficient r donat per (1) podem posar-lo com

$$r = e^{-\beta T} = e^{-2\pi \sqrt{\frac{1 - \alpha^2}{\alpha^2}}}$$

Fent les operacions, resulta: $r = 0,1268 = 12,68\%$

Fixem-nos que, amb aquesta única dada que dona l'enunciat, el 95%, podem trobar quant val el producte βT , però no podem saber ni quant val β ni quant val T per separat.

2.3. Energia de les oscil·lacions amortides

L'energia que té en qualsevol instant l'oscil·lador amortit és la inicial E_0 menys la perduda E_D deguda a la fricció. Aquesta la trobarem a partir de la potència dissipada P_D

$$P_D(t) = \mathbf{F}_f \cdot \mathbf{v} = -b \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = -b v^2$$

Així doncs, l'energia que té l'oscil·lador a l'instant t val

$$E(t) = E_0 + \int_0^t P_D(t) dt = \frac{1}{2} k A_0^2 - b \int_0^t v^2 dt$$

Substituint la velocitat $v(t)$ donada per (2.6) i desenvolupant la integral, finalment s'arriba a

$$\begin{aligned} E(t) = \frac{1}{2} m \omega_0^2 A_0^2 \left[e^{-2\beta t} + \frac{\beta \omega_1}{\omega_0^2} \left(e^{-2\beta t} \sin 2(\omega_1 t + \phi) - \sin 2\phi \right) + \right. \\ \left. + \frac{\beta^2}{\omega_0^2} \left(e^{-2\beta t} \cos 2(\omega_1 t + \phi) - \cos 2\phi \right) \right] \quad (2.12) \end{aligned}$$

Si suposem que les oscil·lacions són feblement amortides, és a dir, que $\beta \ll \omega_0 \approx \omega_1$, aleshores l'expressió (2.12) queda simplificada com

$$E(t) \approx \frac{1}{2} m \omega_0^2 A_0^2 e^{-2\beta t} = E_0 e^{-2\beta t} \quad (2.13)$$

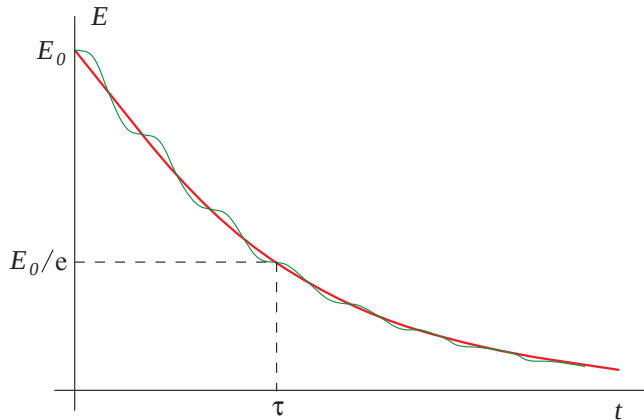
L'energia, doncs, també decau exponencialment amb el temps, però amb una *constant de temps* o *temps de relaxació* de l'energia donada per

$$\tau = \frac{1}{2\beta} \quad (2.14)$$

la meitat, doncs, que la $1/\beta$ de l'amplitud.

A la figura 2.5, s'ha representat el decreixement de l'energia d'un oscil·lador amortit segons l'expressió “exacta” (2.12) —la línia amb ondulacions— i segons l'aproximada (2.13). Aquest cas correspon a un amortiment donat per $\beta = \omega_0/15$, és a dir, $\omega_1 = 0,9978\omega_0$.

Figura 2.5



El grau d'amortiment d'un oscil·lador es caracteritza sovint per mitjà de l'anomenat *factor de qualitat* Q , que es defineix com el quocient entre l'energia emmagatzemada i la dissipada per cicle, multiplicat per 2π , és a dir,

$$Q = 2\pi \frac{(\text{energia emmagatzemada})}{(\text{energia dissipada per cicle})} \quad (2.15)$$

Si l'amortiment és petit, podem utilitzar l'expressió (2.13) per posar Q de la forma

$$Q = 2\pi \frac{E_0}{E_0 - E_0 e^{-2\beta T}} = 2\pi \frac{1}{1 - e^{-2\beta T}}$$

A més, com que $2\beta T$ és quasi zero, podem fer una aproximació lineal de l'exponencial com la (A.60); i finalment queda

$$Q \approx 2\pi \frac{1}{1 - \left(1 - 2\beta \frac{2\pi}{\omega_1}\right)} = \frac{\omega_1}{2\beta} \approx \frac{\omega_0}{2\beta} = \omega_0 \tau \quad (2.16)$$

A la secció §3.6 del capítol següent veurem per què Q rep aquest nom.



Exemple 2.4. Pèrdues relatives i factor de qualitat

En un moviment oscil·latori poc amortit: a) Quina relació hi ha entre la pèrdua relativa d'amplitud i la pèrdua relativa d'energia? b) I entre aquestes pèrdues i el factor de qualitat Q ?

Solució

a) Anomenem p la pèrdua relativa d'amplitud i q la pèrdua relativa d'energia. Com ja hem vist anteriorment, per a la primera tenim

$$p = \frac{A(t) - A(t+T)}{A(t)} = 1 - e^{-\beta T} \quad (1)$$

d'on surt: $e^{-\beta T} = 1 - p$. I per (2.13), per a l'energia trobem

$$\begin{aligned} q &= \frac{E(t) - E(t+T)}{E(t)} = 1 - \frac{E_0 e^{-2\beta(t+T)}}{E_0 e^{-2\beta t}} = \\ &= 1 - e^{-2\beta T} = 1 - \left(e^{-\beta T}\right)^2 = 1 - (1-p)^2 = 2p - p^2 \end{aligned}$$

Però, si el moviment és poc amortit, $0 \leq p \ll 1$; en aquest cas,

$$q = 2p - p^2 \approx 2p \quad (2)$$

b) Com que el moviment és poc amortit, $\omega_1 \approx \omega_0$ i el factor de qualitat val $Q = \frac{\omega_0}{2\beta}$, podem fer l'aproximació lineal d'(1): $e^{-\beta T} \approx 1 - \beta T$, per trobar

$$p = 1 - e^{-\beta T} \approx \beta T = \beta \frac{2\pi}{\omega_1} \approx \beta \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{\pi}{Q}$$

I, per (2), tenim $q = \frac{2\pi}{Q}$, que naturalment lliga amb la definició (2.15) del factor de qualitat Q .

2.4. Amortiment crític i sobreamortiment

En aquesta secció ens preguntem què passa si l'amortiment és tan gran que $\beta \geq \omega_0$?

La resposta és, com es podia esperar, que la partícula no oscil·la sinó que tendeix lentament cap al punt d'equilibri. Es poden presentar els dos casos següents.

2.4.1. Amortiment crític: $\beta = \omega_0$

En aquest cas la resolució de l'equació diferencial explica que el moviment de la partícula sigui com

$$x(t) = (A + Bt)e^{-\beta t} \quad (2.17)$$

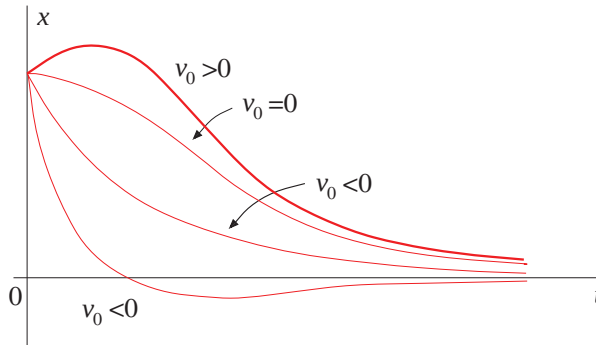
on A i B són les dues constants que depenen de les condicions inicials.

Si a $t = 0$ les condicions inicials són $x = x_0$ i $v = v_0$, llavors la funció $x(t)$ (2.17) queda com

$$x(t) = x_0 + (v_0 + \beta x_0)t e^{-\beta t} \quad (2.18)$$

A la figura 2.6 es mostren quatre gràfiques de $x(t)$ per a quatre velocitats inicials v_0 diferents. En tots quatre casos l'amortiment és idèntic, el crític.

Figura 2.6



2.4.2. Sobreamortiment: $\beta > \omega_0$

En aquest cas el moviment de la partícula ve donat per

$$x(t) = e^{-\beta t} (A_1 e^{-\omega'_1 t} + A_2 e^{+\omega'_1 t}) \quad (2.19)$$

on A_1 i A_2 són ara les dues constants que depenen de les condicions inicials i on $\omega'_1 = \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$.

Si tornem a fer que a $t = 0$, $x = x_0$ i $v = v_0$, trobarem que

$$A_1 = -\frac{v_0 + (\beta - \omega'_1)x_0}{2\omega'_1} \quad \text{i} \quad A_2 = \frac{v_0 + (\beta + \omega'_1)x_0}{2\omega'_1} \quad (2.20)$$

2.4.3. Propietat de l'amortiment crític

A l'hora de dissenyar un amortidor suprimidor de vibracions no volgudes cal tenir en compte la propietat següent de l'amortiment crític:

Per a unes mateixes condicions inicials d'un oscil·lador, dels tres casos possibles d'amortiment: petit ($\beta < \omega_0$), sobreamortiment ($\beta > \omega_0$) i crític ($\beta = \omega_0$), és en aquest últim que el sistema tendeix a l'equilibri més ràpidament.

L'exemple següent tracta d'una aplicació d'aquesta propietat.



Exemple 2.5. Retorn al més ràpid possible.

Un canó amb finalitats científiques, de massa total $m = 300$ kg, dispara horitzontalment projectils de massa $M = 15$ kg amb una velocitat de partida de $v_p = 1000$ m/s. El canó està unit per mitjà d'una molla i uns amortidors a una paret molt pesant i resistent —v. figura 2.7.

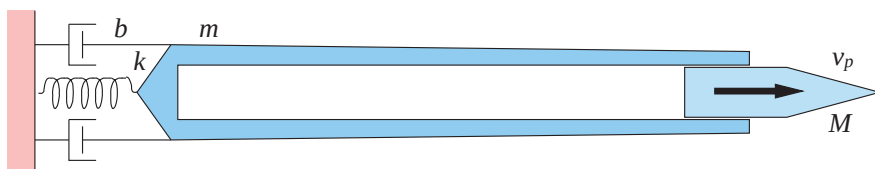


Figura 2.7

- Trobeu les constants k de la molla i b de l'amortidor equivalent per tal que el canó, després de cada tret, retorni a les proximitats del punt inicial d'equilibri al més ràpid possible sense que la força màxima que faci la molla no superi $F_{\max} = 2 \times 10^5$ N.
- Sigui τ l'interval de temps transcurregut des del tret fins que el canó assoleix el seu desplaçament màxim $x_{\max}$. Quant valen τ i aquest màxim desplaçament? Quantes vegades τ cal esperar per tal que la velocitat del canó sigui inferior a 1 cm/s?

Solució

- Per la conservació de la quantitat de moviment, sabem que la velocitat inicial v_0 de retrocés del canó ve donada per $Mv_p + mv_0 = 0$. Prenent com a positiu el mateix sentit de l'eix x que el del moviment del projectil, resulta doncs

$$v_0 = -\frac{M}{m}v_p = -50 \text{ m/s}$$

D'altra banda, com que es tracta que el canó torni al punt d'equilibri al més ràpid possible, per la propietat enunciada a la secció §2.4.3 deduïm que el moviment ha de correspondre al cas d'amortiment crític.

La posició x del canó, mesurada des del punt inicial d'equilibri ve donada per l'expressió general (2.18), per a la qual, en aquest problema, tenim $x_0 = 0$ i $v_0 = -50$ m/s, que quedarà, doncs, com

$$x(t) = v_0 t e^{-\beta t} \quad (1)$$

Fixem-nos que la posició x del canó és inicialment zero, es fa negativa a causa del seu retrocés i torna, essent negativa, asimptòticament cap a zero. Al final de l'exemple està representada $x(t)$.

La força que fa la molla ve donada per $F_m = -kx$. Consegüentment, la força serà màxima quan el canó assoleixi la màxima separació de la posició d'equilibri. Derivant l'expressió (1) n'obtenim la velocitat v

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = v_0(1 - \beta t)e^{-\beta t} \quad (2)$$



que es fa zero, a part de $t \rightarrow \infty$, a $t_x = 1/\beta = \tau$. En aquest instant, $t = t_x$, el desplaçament del canó és, en valor absolut, màxim, i per (1) val

$$x_{\max} = \frac{v_0}{\beta e} \quad (3)$$

i la força màxima feta per la molla, en valor absolt, $F_{\max} = kx_{\max}$. Com que, en cas d'amortiment crític, tenim que $\beta = \omega_0$ i que $k = m\omega_0^2$, llavors, la màxima força, per (3), pot posar-se com

$$F_{\max} = \frac{m\beta v_0}{e} \quad (4)$$

Amb $m = 300 \text{ kg}$ i $v_0 = -50 \text{ m/s}$, per (4) trobem que la força de la molla no superarà els $F_{\max} = 2 \times 10^5 \text{ N}$ si

$$\beta = \omega_0 = \frac{e F_{\max}}{m v_0} = 36,24 \text{ s}^{-1}$$

Coneixent β , tenim, doncs

$$k = m\omega_0^2 = m\beta^2 = 3,941 \times 10^5 \text{ N/m}$$

$$b = 2m\beta = 2,175 \times 10^4 \text{ kg/s}$$

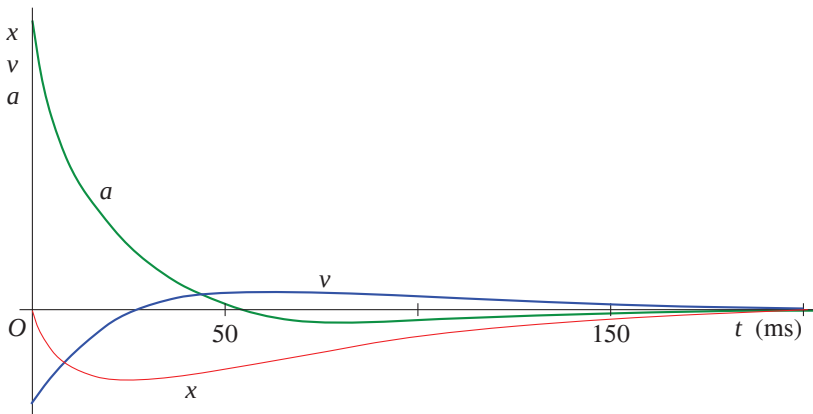
- b) Com ja hem vist, $\tau = 1/\beta = 0,02759 \text{ s}$, i el desplaçament màxim val $x_{\max} = F_{\max}/k = 0,5075 \text{ m}$, resultat que, és clar, coincideix amb el que obtindríem per (3).

Pel que fa a la velocitat, aquesta ve donada per (2). Però, si mesurem el temps en unitats de la constant de temps $\tau = 1/\beta$, com que $t = n\tau$, podem tornar a escriure l'expressió (2) de la forma

$$v = v_0(1 - n)e^{-n}$$

Si $n = 10$, resulta $v = 0,020 \text{ m/s}$ però, per $n = 11$, $v = 0,0083 < 0,01 \text{ m/s}$; en conseqüència, la velocitat del canó es fa inferior a 1 cm/s en algun moment entre $n = 10$ i $n = 11$, és a dir, entre $0,28$ i $0,30 \text{ s}$.

Figura 2.8





A la figura 2.8 s'han representat la posició x del canó, la seva velocitat v i la seva acceleració a segons les expressions (1), (2) i la següent, respectivament,

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = -v_0\beta(2 - \beta t)e^{-\beta t}$$

Observeu a la gràfica com $v = \frac{dx}{dt}$ i $a = \frac{dv}{dt}$.

2.5. Problemes resolts i problemes proposats

2.5.1. Problemes resolts

Problema 2.1. Paràmetres d'una oscil·lació amortida

A la figura 2.9 es mostra un període de la gràfica d'una oscil·lació amortida.

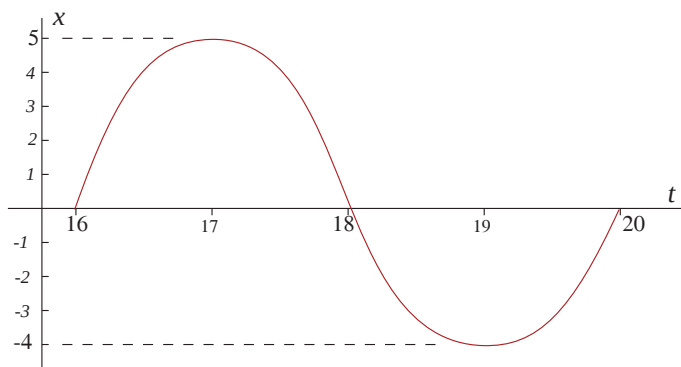


Figura 2.9

Si les dades estan en unitats SI, esbrineu l'elongació x d'aquesta oscil·lació en funció del temps.

Solució

Hem de trobar els paràmetres A_0 , β , ω_1 i ϕ de l'expressió (2.5)

$$x(t) = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega_1 t + \phi) \quad (1)$$

A la figura anterior veiem que el període de l'oscil·lació és $T = 4$ s, d'on $\omega_1 = 2\pi/4 = \pi/2$ rad/s. També veiem que, després de mig període, l'amplitud efectiva s'ha reduït de 5 a 4 m; així doncs,

$$A(t) = A_0 e^{-\beta t} \quad \text{queda com} \quad 4 = 5e^{-\beta 2}$$

d'on resulta $\beta = (-\ln 0,8)/2 = 0,112 \text{ s}^{-1}$. Consegüentment, (1) pot posar-se, en unitats SI, com

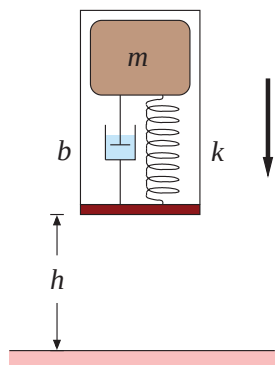
$$x(t) = 5e^{-0,112(t-17)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(t-17)\right) = 33,6e^{-0,112t} \cos\frac{\pi}{2}(t-17)$$

Problema 2.2. Oscil·lador amortit que rebota

Una massa unida a una molla i un amortidor feble —v. figura 2.10— es deixa caure des d'una determinada altura sobre un terra rígid. Esbrineu la fracció de l'altura inicial fins a la qual pujarà després de rebotar en funció del factor de qualitat Q de l'oscil·lador.

Solució

Figura 2.10



L'oscil·lador, en caiguda lliure, arriba a terra amb una velocitat $v_0 = \sqrt{2gh}$. Prenguem com a $x = 0$ la posició de la massa a l'instant del xoc, $t = 0$, a partir del qual comença a comprimir-se la molla. A continuació, a $t > 0$, es continua compriment fins arribar al màxim, que és a l'instant $t = T/4$, on T és el període —desconegut— de l'oscil·lador. Després es comença a expandir la molla i la massa m comença a pujar. Si el sentit creixent de les x és cap avall, a partir de (2.5) veiem que l'elongació x de la massa en funció del temps t , $t \geq 0$, ve donada per

$$x(t) = Ae^{-\beta t} \sin \omega_1 t, \quad \text{amb} \quad T = 2\pi/\omega_1$$

d'on, derivant, trobem

$$v(t) = Ae^{-\beta t} (-\beta \sin \omega_1 t + \omega_1 \cos \omega_1 t)$$

D'aquesta última trobem que

$$v_0 = v(0) = \omega_1 A \quad (1)$$

D'altra banda, la massa —i el sistema— començarà a aixecar-se del terra a l'instant $t = T/2$ en què la molla tingui la longitud natural i ja no faci cap força sobre la massa. A partir d'aquest moment, el sistema pujarà per inèrcia fins a una determinada altura màxima h' , donada per la conservació $mgh' = mv_1^2/2$, on la velocitat v_1 és la que té la massa quan torna a passar per $x = 0$, és a dir,

$$v_1 = -v(T/2) = +\omega_1 Ae^{-\beta T/2} = v_0 e^{-\beta T/2} \quad (2)$$

I d'(1) i (2) tenim

$$\frac{h'}{h} = \frac{v_1^2}{v_0^2} = e^{-\beta T} = e^{-\beta 2\pi/\omega_1}$$

Com que l'amortidor és feble $\omega_1 \approx \omega_0$ i $Q = \omega_0/2\beta$, d'on trobem

$$\frac{h'}{h} \approx e^{-\pi 2\beta/\omega_0} = e^{-\pi/Q}$$

Problema 2.3. Cinemàtica d'un moviment oscil·latori amortit

Una partícula de massa $m = 100$ g està unida a una molla de constant de força $k = 0,4$ N/cm. La partícula es troba en el si d'un líquid viscos, de manera que el coeficient de fricció entre la partícula i el líquid val $b = 2,4$ kg/s. La partícula es troba



inicialment en el punt d'equilibri quan rep un cop que li comunica una velocitat de 1600 cm/s. Esbrineu:

- La posició de la partícula en funció del temps.
- La distància al punt d'equilibri més gran que assolirà la partícula després de $t = 0,5$ s.
- El temps que ha de transcórrer per tal que l'amplitud de les oscil·lacions amortides es redueixi al 2% de la màxima separació entre la partícula i el punt d'equilibri.

Solució

- El moviment serà una oscil·lació amortida com la (2.5)

$$x(t) = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega_1 t + \phi) \quad (1)$$

on A_0 i ϕ depenen de les condicions inicials, i β i ω_1 , de les condicions de l'oscil·lador. Comencem trobant aquests últims. Posant molta cura en les unitats, tenim

$$\beta = \frac{b}{2m} = 12 \text{ s}^{-1}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 20 \text{ rad/s}, \quad \omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = 16 \text{ rad/s} \quad (2)$$

Com veiem, β és comparable a ω_0 i, en conseqüència, ω_1 és molt diferent de ω_0 . Hem d'anar amb molt de compte ull perquè aquestes oscil·lacions són bastant amortides i no se'n poden fer aproximacions.

Troblem ara A_0 i ϕ . De (1) la velocitat de la partícula ve donada per

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -A_0 e^{-\beta t} [\beta \cos(\omega_1 t + \phi) + \omega_1 \sin(\omega_1 t + \phi)] \quad (3)$$

Amb les condicions inicials que ens diu l'enunciat i les igualtats (1) i (2), tindrem per a x i v

- si $t = 0$, aleshores: $0 = A_0 \cos \phi$, d'on surt que $\phi = \pm \frac{\pi}{2}$.
- si $t = 0$, aleshores: $v_0 = 1600 = -A_0 (\beta \cos \phi + \omega_1 \sin \phi) = -A_0 \omega_1 \sin \phi$.
Si volem una A_0 positiva hem de prendre, doncs, $\phi = -\frac{\pi}{2}$ i, per tant: $A_0 = +\frac{v_0}{\omega_1} = 100 \text{ cm}$.

I l'elongació (1) quedarà, finalment, en cm i s, com

$$x(t) = 100 e^{-12t} \cos(16t - \frac{\pi}{2}) = 100 e^{-12t} \sin(16t) \quad (4)$$

- Per trobar la distància màxima que demana l'enunciat igualement a zero la primera derivada de $x(t)$, és a dir, la velocitat (3). Amb $\phi = -\pi/2$ i (2), trobem

$$\tan \omega_1 t_e = \frac{\omega_1}{\beta} \quad \text{és a dir} \quad \tan 16t_e = \frac{4}{3}$$



d'on

$$16t_e = 0,9272952 \text{ rad} \pm n \cdot \pi, \quad \text{on} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

i t_e , en s

$$t_e = 0,05795595 \pm n \cdot 0,19634954 \quad (5)$$

Tots aquests valors de t_e donen els extrems —màxims i mínims— relatius de la funció (4), un per a cada valor de n :

- $n = 0 \implies t_0 = 0,057956 < 0,5 \text{ s}$, el primer màxim;
- $n = 1 \implies t_1 = 0,254305 < 0,5 \text{ s}$, el primer mínim;
- $n = 2 \implies t_2 = 0,450655 < 0,5 \text{ s}$, el segon màxim;
- $n = 3 \implies t_3 = 0,647005 > 0,5 \text{ s}$, el segon mínim;
- $n = 4 \implies t_4 = 0,843354 > 0,5 \text{ s}$, el tercer màxim, i primer màxim amb $t > 0,5 \text{ s}$.

A aquest últim valor t_4 li correspon, per (4), una x màxim relatiu, de $x_4 = 3,220 \times 10^{-3} \text{ cm}$, que, com veiem, és una distància molt petita.

- c) Pel que hem fet fins ara, podem observar que la màxima separació entre la partícula i el punt d'equilibri es correspon a l'instant $t_e = t_0$ que, substituït a (4), dóna $x_{\max} = 39,907 \text{ cm}$. Així doncs, el temps que ens demanen, t_c , ha de satisfer la relació següent

$$A(t_c) = \frac{2}{100} x_{\max}, \quad \text{és a dir,} \quad 100 e^{-12t_c} = \frac{2}{100} 39,907$$

d'on resulta que es requereix el temps $t_c = 0,40255 \text{ s}$.

Problema 2.4. Oscil·lació amortida i constant d'amortiment

Sabent que, en una oscil·lació amortida, l'amplitud efectiva de l'oscil·lació número 5 és 1,40 vegades l'amplitud de l'oscil·lació número 12, esbrineu:

- a) Quin tant per cent del seu valor crític val la constant b ?
- b) Quin tant per cent de l'energia es dissipa entre una oscil·lació i la següent?

Solució

- a) Per (2.8) veiem que l'enunciat ens diu que

$$A_0 e^{-\beta \cdot 5T} = 1,40 A_0 e^{-\beta \cdot 12T}$$

d'on, simplificant, tenim

$$\beta = \frac{\ln 1,4}{7T} \quad (1)$$

D'altra banda, sabem que $\beta = \frac{b}{2m}$ i que el valor crític de β , β_{crit} , s'assoleix quan $\beta = \beta_{\text{crit}} = \omega_0$. Per les dades de l'enunciat, ja veiem que es tracta d'un cas d'amortiment



feble. En aquest cas, el període T és pràcticament igual al de les oscil·lacions sense amortir, $T_0 = 2\pi/\omega_0$. Així, per (1), tindrem

$$\frac{b}{b_{crit}} = \frac{\beta}{\beta_{crit}} = \frac{\ln 1,4}{7T\omega_0} \approx \frac{\ln 1,4}{7 \cdot 2\pi} = 0,007650$$

és a dir, un 0,7650%.

- b) Quant a l'energia, sabem que, en cas d'amortiment feble, aquesta disminueix al llarg del temps en la forma $E = E_0 e^{-2\beta t}$. Per tant, al llarg d'un període se'n perd, doncs, la quantitat relativa

$$q = \frac{E_0 - E_0 e^{-2\beta T}}{E_0} = 1 - e^{-2\beta T} \quad (2)$$

I, per (1), tenim que

$$2\beta T = 2 \times \frac{\ln 1,4}{7} = 0,09613$$

que, substituït a (2), resulta $q = 0,09166 = 9,166\%$.

Problema 2.5. Oscil·lació angular amortida d'una barra

Una barra homogènia de massa m pot girar en un pla vertical al voltant del seu extrem inferior O —v. figura 2.11. L'altre extrem de la barra està lligat per una molla de constant k i un amortidor de constant b .

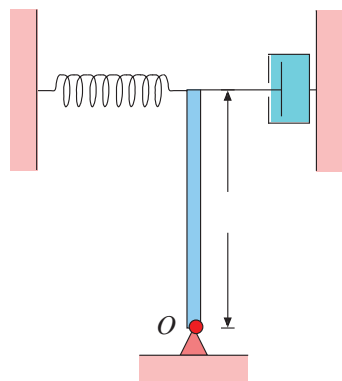


Figura 2.11

- Trobeu l'equació diferencial del moviment de rotació de la barra per a angles petits al voltant de la posició d'equilibri indicada a la figura. Quant ha de valer, com a mínim, k per tal que, retirada la barra de la seva posició vertical d'equilibri, aquesta retorni cap a ella?
- Quin valor màxim pot tenir b si el moviment ha de ser oscil·latori?
- Si $m = 0,50$ kg, $k = 60$ N/m, $b = 0,15$ kg/s, i $L = 1$ m, esbrineu el període del moviment i trobeu a quin tant per cent queda reduïda l'amplitud després de cada període.

**Solució**

Aquest problema es pot resoldre a partir de les forces i els moments o per consideracions sobre l'energia... que en aquest sistema no es conserva! Anem per aquesta segona via.

- a) Imaginem la barra girada un angle θ respecte de la vertical —la posició d'equilibri— i movent-se a la velocitat angular $d\theta/dt$. Anomenem x l'allargament de la molla en aquesta posició. Aleshores, si prenem l'origen d'energia potencial gravitatòria en el punt O , l'energia potencial del sistema en un instant qualsevol val

$$U = mg\frac{L}{2}\cos\theta + \frac{1}{2}kx^2 \quad (1)$$

expressió que, considerant angles petits, podem simplificar. Normalment, aproximem el cosinus de θ com $\cos\theta \approx 1$ però aquí ens convé fer una aproximació de segon ordre del desenvolupament de Maclaurin —v. (A.55)— com $\cos\theta \approx 1 - \theta^2/2$. La raó és que a (1) sumem el $\cos\theta$ a un $x^2 = L^2\sin^2\theta \approx L^2\theta^2$ i que, quan se sumen dues expressions aproximades ambdues han de tenir el mateix ordre d'aproximació perquè, en cas contrari, la d'ordre més gran desapareix. Així, si fem

$$\cos\theta \approx 1 - \frac{1}{2}\theta^2 \quad x = L\sin\theta \approx L\theta$$

queda, doncs, com

$$U = \frac{1}{2}mgL + \left(\frac{1}{2}kL^2 - \frac{1}{4}mgL\right)\theta^2 \quad (2)$$

L'energia cinètica de rotació de la barra val $K = \frac{1}{2}I_0\omega^2$, on $I_0 = \frac{1}{3}mL^2$ és el moment d'inèrcia de la barra de longitud L i massa m , i ω és la velocitat angular. És a dir,

$$K = \frac{1}{2}\frac{1}{3}mL^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \quad (3)$$

Si no hi hagués friccions, es conservaria l'energia i la suma de (2) més (3) seria una constant. Però aquest no és el cas. Ara s'està dissipant energia a l'amortidor a un ritme donat per la potència $P_{dis} = -bv \cdot v = -bv^2$, essent v la velocitat a l'amortidor, és a dir, $v = Ld\theta/dt$ i, per tant,

$$P_{dis} = \mathbf{F}_f \cdot \mathbf{v} = -bv \cdot v = -bv^2 = -bL^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \quad (4)$$

Així doncs, tenim

$$E = U + K \quad \text{i} \quad \frac{dE}{dt} = P_{dis}$$

que, per (2), (3) i (4), queda com

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2}mgL - \frac{1}{4}mgL\theta^2 + \frac{1}{2}kL^2\theta^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{3}mL^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \right\} = -bL^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$



Derivant i simplificant la $Ld\theta/dt$ comuna, queda

$$\left(kL - \frac{1}{2}mg\right)\theta + \frac{1}{3}mL\frac{d^2\theta}{dt^2} = -bL\frac{d\theta}{dt}$$

i, reordenant,

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{3b}{m}\frac{d\theta}{dt} + \left(\frac{3k}{m} - \frac{3g}{2L}\right)\theta = 0 \quad (5)$$

que és l'equació diferencial de les oscil·lacions petites de la barra. Comparant aquesta equació (5) amb la familiar d'un sistema molla-massa-amortidor

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2x = 0 \quad (6)$$

veiem que a (5) tenim

$$\beta = \frac{3b}{2m} \quad \omega_0^2 = \frac{3k}{m} - \frac{3g}{2L} \quad (7)$$

Com que ω_0^2 ha de ser positiva, llavors, perquè hi hagi oscil·lacions, la molla ha de tenir una constant k mínima donada per

$$k > \frac{mg}{2L}$$

- b) Com que la freqüència angular del moviment és $\omega_1^2 = \omega_0^2 - \beta^2$, per tal que el moviment de la barra sigui oscil·latori, β^2 ha de ser més petit que la ω_0^2 , d'on, per (7), resulta la condició

$$b^2 < \frac{4mk}{3} - \frac{2m^2g}{3L}$$

- c) Substituint els valors indicats a l'enunciat, s'obté

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{3k}{m} - \frac{3g}{2L}} = 18,58 \text{ rad/s} \quad \beta = \frac{3b}{2m} = 0,45 \text{ s}^{-1}$$

Com que $\beta^2 \ll \omega_0^2$, es tracta d'un cas d'amortiment molt petit. El període valdrà

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} \approx \frac{2\pi}{\omega_0} = 0,3381 \text{ s}$$

L'amplitud de les oscil·lacions disminueix al ritme donat per $A = A_0 e^{-\beta t}$, essent A , en aquest cas, l'amplitud angular. Després de cada període, l'amplitud es reduirà, doncs, al tant per cent

$$\frac{A_{n+1}}{A_n} = e^{-\beta T} = 0,8588 = 85,88\%$$

i, per tant, se'n perderà el 14,12%.

**Problema 2.6. Amortiment crític i sobreamortiment**

Demostreu que, per a les mateixes condicions inicials, $x_0 = 0$ i $v_0 > 0$, una partícula de massa m sotmesa a la força recuperadora $F = -kx$ i a la de fricció $F' = -bv$ torna cap al punt d'equilibri més ràpidament si es troba en l'amortiment crític que si està en el sobreamortiment.

Solució

Seguim la notació habitual amb els paràmetres $\beta = b/2m$, $\omega_0^2 = k/m$ i $\omega_1' = \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$. Amb les condicions inicials de l'enunciat, els moviments de la partícula en cas d'amortiment crític —en què $\beta = \omega_0$ — i en cas de moviment sobreamortit —si $\beta > \omega_0$ — vénen donats, com és fàcil de comprovar, per les dues expressions

$$x_{crit} = v_0 t e^{-\beta t}, \quad x_{sobr} = \frac{v_0}{2\omega_1'} e^{-\beta t} (e^{+\omega_1' t} - e^{-\omega_1' t}) \quad (1)$$

Comprovem ara que, per a qualsevol instant de temps $t > 0$, $x_{crit} < x_{sobr}$. Per (1), es tracta de demostrar que, per a qualsevol $t > 0$,

$$v_0 t e^{-\beta t} < \frac{v_0}{2\omega_1'} e^{-\beta t} (e^{+\omega_1' t} - e^{-\omega_1' t})$$

és a dir, que

$$\omega_1' t < \frac{e^{+\omega_1' t} - e^{-\omega_1' t}}{2}$$

Per a això fem el desenvolupament de Taylor/Maclaurin de les dues exponencials del membre de la dreta. Per (A.57), tenim que

$$e^z \approx 1 + z + \frac{1}{2!} z^2 + \frac{1}{3!} z^3 + \dots$$

Si prenem $z = \pm \omega_1' t$, tindrem, efectivament,

$$\omega_1' t < \frac{1}{2} \left(2\omega_1' t + \frac{2\omega_1'^3 t^3}{3!} + \dots \right) = \omega_1' t + \frac{\omega_1'^3 t^3}{6} + \frac{\omega_1'^5 t^5}{120} + \dots$$

cosa que confirma, la hipòtesi $x_{crit} < x_{sobr}$ i l'enunciat del problema.

Problema 2.7. Mínima oscil·lació possible

Volem construir una plataforma de massa $m = 60$ kg, disposada sobre quatre molles iguals i amb un amortidor —v. figura 2.12 en què es mostra el sistema de perfil. Damunt de la plataforma hi ha un paquet de massa $M = 80$ kg, i tot el conjunt està en equilibri i en repòs.

- Esbrineu quant han de valer les constants k de les molles i la constant b de l'amortidor per tal que, després de retirar el paquet de la plataforma, aquesta torni a la situació de repòs al més ràpid possible en una nova posició d'equilibri situada a la distància $d = 0,10$ m per damunt de l'actual.
- Estudieu la cinemàtica de la plataforma i contesteu les preguntes següents.



- Quant valdrà la màxima velocitat assolida per la plataforma?
- I l'acceleració màxima i la mínima?
- Traspasarà la plataforma el nou punt d'equilibri?
- Quant de temps tardarà la plataforma, molt aproximadament, a completar el 99% del seu recorregut total?

Solució

- a) Inicialment, la plataforma està en un punt d'equilibri, però després de retirar-ne el paquet, la posició d'equilibri s'ha desplaçat la distància Δx per damunt de l'anterior. Aquesta nova posició d'equilibri queda determinada per $4k\Delta x = Mg$. Per requeriment de l'enunciat, si $\Delta x = d$, aleshores, tenim

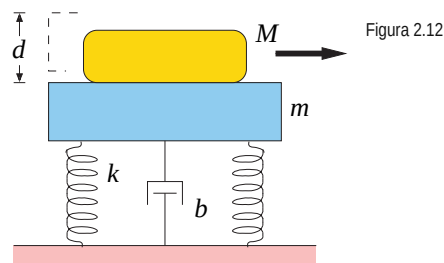
$$k = \frac{Mg}{4d} = 1962 \text{ N/m} \quad (1)$$

D'altra banda, dels tres casos possibles d'amortiment —subamortit, crític i sobreamortit—, sabem que el cas d'amortiment crític és el que tendeix més ràpidament a la situació d'equilibri. Per tant, el paràmetre d'amortiment β que hem de triar per a l'amortidor és igual a la freqüència angular pròpia del sistema plataforma-4 molles, $\omega_0 = \sqrt{4k/m}$, i per (1) és

$$\beta = \omega_0 = \sqrt{\frac{4k}{m}} = 11,44 \text{ s}^{-1} \quad (2)$$

La constant b de l'amortidor ha de valer, doncs,

$$b = 2m\beta = 1372 \text{ kg/s}$$



- b) Com sabem, l'equació del moviment d'una partícula sotmesa a una força recuperadora lineal i una força de fricció viscosa en cas d'amortiment crític ve donada per l'expressió general

$$x(t) = x_0 + (v_0 + \beta x_0)t) e^{-\beta t}$$

en què x_0 i v_0 són, naturalment, la posició i la velocitat inicials. En el nostre cas, $v_0 = 0$, per la qual cosa

$$x(t) = x_0(1 + \beta t) e^{-\beta t} \quad (3)$$

amb el valor de β donat a (2). Si prenem un eix x vertical dirigit cap amunt i amb l'origen a la nova posició d'equilibri, aleshores tenim $x_0 = -d = -0,10 \text{ m}$.

Derivant (3), obtenim la velocitat

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -x_0\beta^2 t e^{-\beta t} \quad (4)$$

I, tornant a derivar, l'acceleració

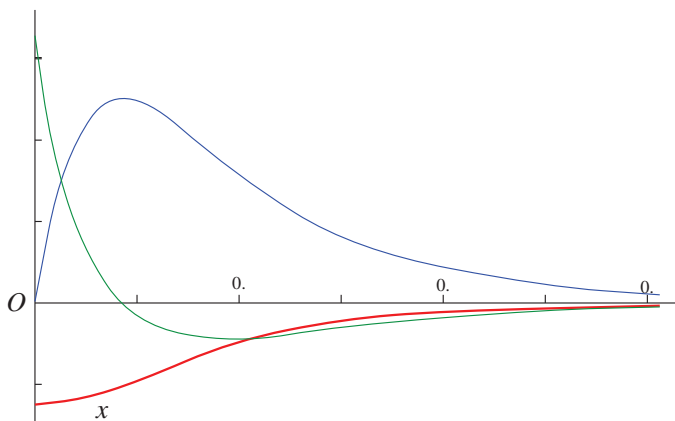
$$a(t) = \frac{dv}{dt} = -x_0\beta^2(1 - \beta t) e^{-\beta t} \quad (5)$$

Prenent $\tau = 1/\beta = 0,08744$ s, com a unitat de temps, veiem que l'acceleració es fa zero a l'instant $t_v = \tau$ i, per tant, en aquest instant, la velocitat és màxima o mínima. Si la velocitat inicial i la final són zero i no hi ha més extrems, podem creure, sense necessitar més derivades, que aquest cas correspon a un màxim. Per (4), valdrà

$$v_{max} = v(\tau) = -\frac{x_0\beta}{e} = 0,421 \text{ m/s}$$

A les gràfiques de la figura 2.13, s'han representat l'elongació x —multiplicada per 50—, la velocitat v —multiplicada per 25— i l'acceleració a de la plataforma, segons les expressions (3), (4) i (5), respectivament.

Figura 2.13



Pel que fa a l'acceleració, fixem-nos que, a $t = 0$, la velocitat és zero i, en conseqüència, l'única força que actua sobre la plataforma és deguda a les quatre molles comprimides. Veiem que l'acceleració, en aquest instant, val, per (5)

$$a(0) = -x_0\beta^2 = 13,08 \text{ m/s}^2 \quad (6)$$

que, com es podia esperar, correspon a la calculada a partir de la compressió de les molles aplicant-hi els resultats (1) o (2)

$$a(0) = \frac{F}{m} = -\frac{4kd}{m} = 13,08 \text{ m/s}^2$$

També, per a t molt gran, la plataforma estarà pràcticament aturada en el nou punt d'equilibri, $x = 0$, on la força i l'acceleració seran nul·les. D'altra banda, derivant (5) i igualant a zero, obtenim

$$\frac{da}{dt} = x_0\beta^3(2 - \beta t)e^{-\beta t} = 0 \quad (7)$$

d'on resulta que un extrem local de l'acceleració s'aconsegueix a l'instant $t_a = 2\tau$ i que, substituït a (5), dóna

$$a(2\tau) = +\frac{x_0\beta^2}{e^2} = -1,770 \text{ m/s}^2 \quad (8)$$



negativa! Com que no hi ha més extrems locals —a part de $t \rightarrow \infty$ — arribem a la conclusió que l'acceleració $a(t)$ donada per (5), per a $t \geq 0$, té:

- un màxim absolut —no local— a $t = 0$, resultat (6);
- un mínim local a $t = 2\tau$, resultat (8);
- un mínim absolut a $t \rightarrow \infty$, on $a = 0$.

Per (3), veiem que $x(t)$ tindrà sempre el mateix signe de x_0 , és a dir, que la plataforma no passarà del punt d'equilibri; de fet, cal un temps infinit perquè hi arribi. Per trobar l'instant t_1 en què la seva posició sigui, per exemple, com demana l'enunciat, un 1% de la inicial, plantejem, per (3), l'equació corresponent

$$\frac{x_0}{100} = x_0(1 + \beta t_1) e^{-\beta t_1}$$

o l'equivalent

$$z = \frac{1}{100} e^z - 1 \quad (9)$$

on z és l'instant t_1 , però mesurat en unitats de τ : $z = \beta t_1 = t_1/\tau$.

L'equació (9) no es pot resoldre analíticament —és una equació transcendent—, però podem trobar un valor numèric tan aproximat de z com vulguem seguint un mètode semblant al del problema 1.25:

- (1) Donem, a ull, un primer valor a z , que anomenem z_{don} .
- (2) Substituïm z_{don} a l'expressió de la dreta de (9) i n'obtenim z_{calc} .
- (3) Si $z_{calc} > z_{don}$ agafem una nova z , més petita; si $z_{calc} < z_{don}$, n'agafem una de més gran. Tornem al pas (1) i així anem repetint el cicle fins que, molt aproximadament, $z_{calc} = z_{don}$.

Començant amb un valor, per exemple, de $z = 5$, resulta, 0,48; hem de prendre una z més gran: per a $z = 6$, resulta 3,0; per a $z = 7$, resulta 9,97; així doncs, z està entre 6 i 7; per a $z = 6,5$, resulta 5,6; per a $z = 6,6$, etc. Fent-ho així, trobem ràpidament $6,638 < z < 6,639$, és a dir, que $t_1 \approx 6,638\tau = 0,580$ s.

2.5.2. Problemes proposats

Problema 2.8. Caiguda amb fricció viscosa $F = -bv$

Estudieu la caiguda d'una gota de pluja. Per fer-ho suposeu una gota de massa m , sotmesa al seu propi pes mg i a una força de fricció viscosa $F_f = -bv$, deguda a l'aire. Si inicialment la gota està en repòs, esbrineu el creixement de la velocitat en funció del temps. Feu una representació gràfica d'aquesta funció. Quant val la velocitat límit de la gota?

Resp.: $v(t) = \frac{mg}{b} (1 - e^{-bt/m})$, $v_{lim} = \frac{mg}{b}$

**Problema 2.9. Oscil·lacions harmòniques amortides**

Com ja sabem, l'elongació del moviment oscil·latori amortit d'una partícula ve donada per l'expressió

$$x(t) = A e^{-\beta t} \cos(\omega_1 t + \phi)$$

- Trobeu els valors de A i ϕ en funció de la posició i la velocitat inicials, x_0 i v_0 , respectivament.
- Quant han de valer les constants A_v i ϕ_v per tal de poder posar la velocitat de la partícula anterior de la forma

$$v(t) = -A_v e^{-\beta t} \sin(\omega_1 t + \phi + \phi_v)$$

Resp.: a) $A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0 + \beta x_0}{\omega_1}\right)^2}$, $\tan \phi = \frac{v_0 + \beta x_0}{\omega_1 x_0}$, b) $A_v = \omega_0 A$, $\tan \phi_v = \frac{\beta}{\omega_1}$

Problema 2.10. Oscil·lació amortida d'una molla fixada al sostre

Una molla de constant k té un extrem fixat al sostre i l'altre lliure. En aquesta disposició vertical a l'instant $t = 0$, se li penja a l'extrem lliure un pes mg i es deixa que la molla s'allargui i comenci a oscil·lar. Si l'oscil·lació és amortida, caracteritzada per una constant b , estudeu el moviment vertical del pes penjat.

Resp.: $x(t) = \frac{mg}{k} \left[1 - e^{-\beta t} \left(\cos \omega_1 t + \frac{\beta}{\omega_1} \sin \omega_1 t \right) \right]$, amb $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m} - \beta^2}$, $\beta = \frac{b}{2m}$

Problema 2.11. Oscil·lació molt amortida

Un moviment harmònic amortit té per expressió, en unitats SI

$$x(t) = 0,40 e^{-3t/2} \sin \pi(t + 1/3)$$

- Quin tant per cent del seu valor crític val la constant d'amortiment? Es pot considerar aquesta oscil·lació molt poc amortida?
- Quant de temps Δt caldrà esperar, aproximadament, per tal que l'energia mitjana del moviment es redueixi al 5% de la inicial?
- En quin instant $t_{min} > 0$ l'elongació de l'oscil·lador es fa mínima i quant val?

Resp.: a) 43,1%, no; b) $\Delta t = 0,999$ s,

c) $t_{min} = 1,02$ s, $x_{min} = -7,76$ cm

Problema 2.12. Oscil·lacions molt poc amortides

El moviment harmònic amortit d'una partícula té per expressió, en unitats SI,

$$x(t) = 0,05 e^{-0,5t} \cos 40\pi t$$



- a) Es tracta d'una oscil·lació molt poc amortida? Quant val el factor de qualitat Q ?
- b) Quantes oscil·lacions N_A caldrà esperar per tal que l'amplitud del moviment es redueixi a $1/1000$ de la inicial? I quantes N_E pel que fa a l'energia?
- c) Si la massa de la partícula és $m = 0,10$ kg, quant valen les constants de força i d'amortiment, k i b , respectivament?

Resp.: a) Sí; $Q = 126$, b) $N_A = 276$, $t_A = 13,8$ s, $N_E = N_A/2$, $t_E = 6,91$ s,
c) $k = 1,58$ kN/m, $b = 0,100$ kg/s

Problema 2.13. Oscil·lador molt poc amortit

La constant de força de la molla a la qual està unida una partícula de massa $m = 10$ g val $k = 15$ N/cm. Si un cop està oscil·lant la partícula perd un 20% de l'energia cada 30 oscil·lacions,

- a) Quin tant per cent d'energia haurà perdut després de fer 90 oscil·lacions?
- b) Quant val el factor de qualitat Q d'aquest oscil·lador?
- c) Quant val el seu coeficient d'amortiment?
- d) Quant hauria de valer el coeficient d'amortiment b per tal que la partícula estigués en amortiment crític?

Resp.: a) $\frac{61}{125} \times 100 = 48,8\%$, b) $Q = \frac{60\pi}{\ln(5/4)} = 845$, c) $b = 4,59 \times 10^{-3}$ kg/s,
d) $b_{crit} = 7,75$ kg/s

Problema 2.14. Període d'un oscil·lador amortit

Un pèndol simple que en el buit té un període T_0 es col·loca en un medi resistent i s'observa que a cada oscil·lació l'amplitud es redueix a la meitat. Quant val el nou període?

Resp.: $T = T_0 \sqrt{1 + \left(\frac{\ln 2}{2\pi}\right)^2} = 1,0061 T_0$

Problema 2.15. Donar corda a un rellotge de pèndol

El pèndol d'un rellotge és equivalent a un pèndol simple de longitud $L = 1$ m, amb una lentilla de massa $m = 1$ kg. Amb diferents experiments es comprova que l'amplitud de l'oscil·lació es redueix de $A_0 = 5$ cm a $A_N = 2$ cm després de $N = 26$ oscil·lacions. Per tal que el pèndol mantingui l'amplitud inicial A_0 , se li subministra energia per mitjà d'una massa $M = 3$ kg que penja d'una corda vinculada al pèndol i es deixa que vagi caient lentament. Si, per l'espai que ocupa la caixa del rellotge, la massa M només pot baixar un desnivell $h = 120$ cm, cada quant de temps s'ha d'anar aixecant la massa M al rellotge?

Resp.: Amb $T = 2,006$ s, $\Delta t = \frac{2LMNT h}{m(A_0^2 - A_N^2)} = 1,78 \times 10^5$ s = 49,5 hores;
cada dos dies.

**Problema 2.16. Potència perduda per un oscil·lador amortit**

Comproveu que la potència mitjana dissipada en un oscil·lador harmònic poc amortit ve donada per l'expressió

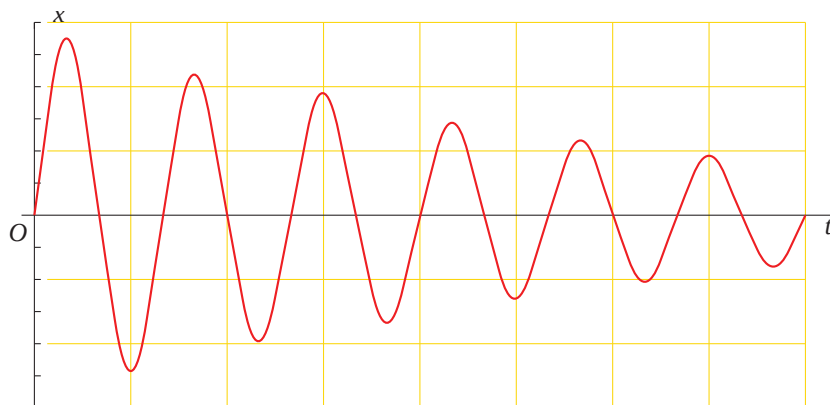
$$\langle P \rangle = \frac{E}{\tau}$$

on E és l'energia que té a cada instant i $\tau = 1/(2\beta)$ la constant de temps de l'energia.

Problema 2.17. Oscil·lació amortida i factor de qualitat

Una partícula fa el moviment harmònic amortit, que s'indica a la gràfica de la figura 2.14.

Figura 2.14



A partir d'ella, podríeu dir quant val, aproximadament, el factor de qualitat de l'oscil·lador?

Resp.: Entre 14 i 15.

Problema 2.18. Energia d'una oscil·lació poc amortida

Una massa de $m = 0,50$ kg, unida a una molla de constant elàstica $k = 250$ N/m, oscil·la amb una amplitud inicial de $A_0 = 6$ cm.

- Trobeu l'energia de l'oscil·lador a l'instant inicial.
- Esbrineu el valor del paràmetre d'amortiment de l'oscil·lador sabent que en cada cicle es dissipa un 1,0% de l'energia. Quin període té?
- Quantes oscil·lacions caldrà esperar fins que l'energia quedi reduïda a menys de 0,10 J?

Resp.: a) $E = 0,450$ J, b) $\beta = 0,0179$ s⁻¹, $T = 0,281$ s, c) $N = 150$

Problema 2.19. Oscil·lacions d'una molla vertical, amb amortiment

Tornem a considerar el sistema oscil·lant del problema 1.34. Realment, la fricció del cos amb l'aire provoca un petit amortiment tal que, després de 20 oscil·lacions, l'amplitud s'ha reduït de 29,4 cm a 10 cm.



- a) Quin tant per cent de l'amplitud es perd després de cada període? I quin tant per cent de l'energia?
- b) Esbrineu el temps que cal esperar per tal que l'energia que quedi sigui 1/4 de la inicial?
- c) Quant val el factor de qualitat d'aquest oscil·lador?

Resp.: a) $p = 5,24\%$, $q = 2p - p^2 \approx 2p = 10,2\%$, b) $\Delta t = \frac{\ln 4}{2\beta} = 11,4 \text{ s}$, c) $Q = 58,3$

Problema 2.20. Pèndol simple amb molla i amortiment

Considerem un pèndol simple, consistent en una barra molt prima de massa negligible, penjada del sostre per un extrem —el centre de suspensió— i amb una partícula de massa m a l'extrem lliure. La barra està lligada a una paret a través d'una molla horitzontal de constant k . La molla té la longitud justa tal que, quan la barra està vertical, la molla no fa cap força. La longitud de la barra és r , mentre que la molla està agafada en un punt de la barra que està a la distància s del centre de suspensió. Si, a més, quan oscil·la aquest sistema la partícula està sotmesa a una força de fricció viscosa de constant b :

- a) Trobeu la freqüència angular ω_1 d'oscil·lació del sistema.
- b) Si $r = 1 \text{ m}$, $s = 0,8 \text{ m}$, $k = 3 \text{ N/m}$, $m = 0,2 \text{ kg}$, $b = 0,6 \text{ kg/s}$ i $g = 9,81 \text{ m/s}^2$, es pot considerar aquest sistema poc amortit? Quant val, en aquest cas, ω_0/ω_1 ?
- c) Després de cada oscil·lació, a quin tant per cent queda reduïda l'amplitud?

Resp.: a) $\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{r} + \frac{ks^2}{mr^2} - \frac{b^2}{4m^2}}$, b) No. $\omega_0/\omega_1 = 1,0635$, c) 10,28%.

Problema 2.21. Sistemes oscil·lants amortits

Siguin els dos sistemes oscil·lants independents (a) i (b) representats a la figura 2.15. En els dos casos, les barres, de massa negligible, horitzontals en la situació d'equilibri i amb un pes puntual mg en un dels extrems, poden fer petites oscil·lacions al voltant de l'altre, l'articulació O . Els amortidors proporcionen una força de fricció viscosa de constant d'amortiment b . Esbrineu fins a quin valor màxim de b ambdós sistemes encara oscil·laran.

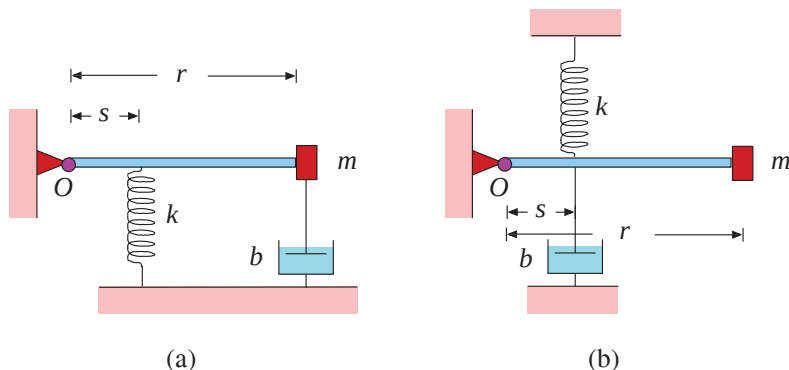


Figura 2.15

Resp.: a) $b_{crit} = \frac{2s}{r}\sqrt{mk}$, b) $b_{crit} = \frac{2r}{s}\sqrt{mk}$

Problema 2.22. Cinemàtica del sobreamortiment

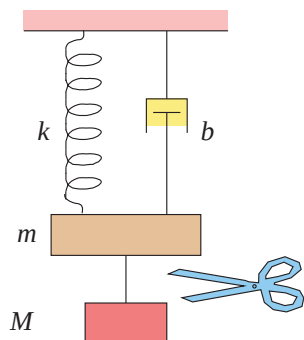
Sigui una partícula de massa m unida a una molla de constant k i a un amortidor d'una constant b tan gran que estiguem en el cas de sobreamortiment. I siguin x_0 i v_0 la posició i la velocitat inicials de la partícula, respectivament. Demostreu que:

- si $x_0 \neq 0$, $v_0 = 0$, la partícula no arriba mai a la posició d'equilibri;
- si $x_0 = 0$, $v_0 > 0$, la partícula tampoc no arriba mai a la posició d'equilibri;
- si $x_0 = 0$, $v_0 < 0$, la partícula només passa una vegada per la posició d'equilibri.

Problema 2.23. Moviment sobreamortit

Com s'aprecia a la figura 2.16, dues masses m i M estan penjades en equilibri d'una molla vertical de constant k . Paral·lelament a la molla, hi ha un amortidor hidràulic de constant d'amortiment b . Si a l'instant $t = 0$ traiem del sistema la massa M , immediatament el cos de massa m es posarà en moviment.

Figura 2.16



Si $m = 4$ kg, $M = 5$ kg, $k = 100$ N/m, $b = 48$ kg/s:

- Farà un moviment oscil·latori? Per què?
- Expresseu el desplaçament de la massa m respecte de la posició d'equilibri en funció del temps.

Resp.: a) No, ja que $b > b_{crit} = 2\sqrt{mk} = 40$ kg/s,

$$b) x(t) = A_1 e^{-(\beta + \omega'_1)t} + A_2 e^{-(\beta - \omega'_1)t}, \text{ amb}$$

$$A_1 = \frac{Mg}{2k} \left(1 - \frac{\beta}{\omega'_1} \right) = -0,1984 \text{ m},$$

$$A_2 = \frac{Mg}{2k} \left(1 + \frac{\beta}{\omega'_1} \right) = 0,6889 \text{ m}, \quad \omega'_1 = \sqrt{11} \text{ s}^{-1}, \quad \beta = 6 \text{ s}^{-1}$$



Oscil·lacions forçades

3.1. Oscil·lacions forçades

En els oscil·ladors reals sempre hi ha una dissipació contínua d'energia al medi resistent exterior deguda a les friccions. Això fa que tant l'energia com l'amplitud de les oscil·lacions vagin disminuint fins a acabar desapareixent. Per tant, si volem mantenir un sistema oscil·lant amb una amplitud i una energia constants, hem de proporcionar-li energia per compensar la que el sistema perd. Això s'acostuma a fer amb algun mecanisme exterior a l'oscil·lador, que actua sobre aquest aplicant-li una *força impulsora* externa. Un exemple molt conegut és el cas d'un nen en un gronxador, que podem mantenir-lo en un moviment oscil·latori indefinidament si li anem donant embranzides de forma adient. Aquesta classe de moviments o dinatismes s'anomenen *oscil·lacions forçades* i són l'objecte d'estudi, en un nivell més elemental, en aquest capítol i, en una forma més general, als capítols 5 i 6.

Considerem un oscil·lador constituït per una partícula de massa m que es pot desplaçar al llarg de l'eix x , lligada a una molla de constant de força k i a un amortidor de constant b —v. figura 3.1. Per mitjà d'un determinat mecanisme s'aplica a la partícula, a més, una força impulsora externa $F(t)$ de la mateixa direcció que l'eix x .

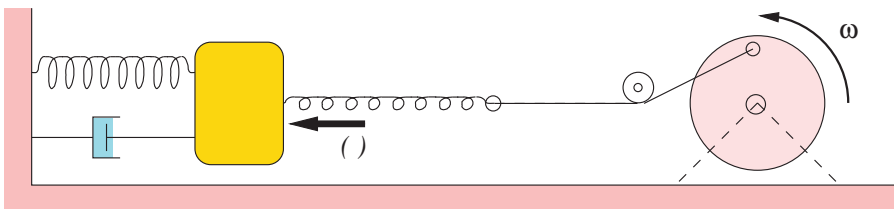


Figura 3.1

Si bé, a la pràctica, forces depenents del temps n'hi ha de molts tipus, és particularment interessant estudiar el cas en què $F(t)$ sigui una força harmònica o sinusoidal de la forma

$$F(t) = F_0 \cos \omega t \quad (3.1)$$

Les raons d'aquesta elecció són ben senzilles.



- L'estudi del moviment de la partícula sota aquesta força és, matemàticament, bastant simple i, per tant, serveix molt bé per entendre la resposta de la partícula a forces periòdiques més complexes.
- Les forces harmòniques com (3.1) són molt corrents en física i enginyeria. En veurem, entre d'altres, a la secció §3.4 dedicada a les màquines giratòries.
- Com veurem al capítol 5, qualsevol força periòdica és, en el fons, una suma de forces sinusoidals com ara la (3.1) —*sèrie de Fourier*. Això, amb el principi de superposició que veurem al capítol 4, vol dir que, si coneixem la resposta matemàtica a la força (3.1), podrem conèixer el comportament sota l'acció de qualsevol altra força periòdica.

Així doncs, aplicant la segona llei de Newton a la partícula, tindrem

$$-kx - bv + F_0 \cos \omega t = ma$$

és a dir,

$$-kx - b \frac{dx}{dt} + F_0 \cos \omega t = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

i, reordenant, obtenim

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \left(\frac{b}{m}\right) \frac{dx}{dt} + \left(\frac{k}{m}\right)x = \left(\frac{F_0}{m}\right) \cos \omega t \quad (3.2)$$

Aquesta igualtat és una *equació diferencial ordinària, lineal i a coeficients constants* com ho era la (2.2) de les oscil·lacions amortides, però, a diferència d'aquella, aquesta és *no homogènia*, que vol dir que el membre de la dreta no és zero.

Si seguim la notació del capítol anterior en què

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad \beta = \frac{b}{2m} \quad (3.3)$$

aleshores, l'equació diferencial anterior queda com

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \left(\frac{F_0}{m}\right) \cos \omega t \quad (3.4)$$

Però, quina és la solució d'aquesta equació diferencial i quina mena de moviment farà la partícula?

A la secció següent es responen aquestes dues qüestions.

3.2. Estats transitori i estacionari

Sabem que la solució general $x(t)$ de les equacions diferencials lineals *no homogènies* com la (3.4) és la suma de dues funcions —v. apèndix §B.3—

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) \quad (3.5)$$

que són



- $x_h(t)$ és la *solució general* de l'equació diferencial homogènia associada a la (3.4)

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \quad (3.6)$$

- $x_p(t)$ és la *solució particular* de tota l'equació no homogènia (3.4).

- a) La solució general de l'equació homogènia (3.6) és, precisament, el moviment oscil·latori harmònic amortit, que hem vist al capítol anterior. Així doncs, si, com és habitual en aquests casos, l'amortiment no supera el valor crític, és a dir, si $\beta < \omega_0$, llavors tenim

$$x_h(t) = A_h e^{-\beta t} \cos(\omega_1 t + \phi_h) \quad (3.7)$$

on $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$, i A_h i ϕ_h són les dues constants arbitràries que depenen de les condicions inicials.

- b) Com a solució particular $x_p(t)$ a l'equació (3.4), provarem una funció com

$$x_p(t) = A \cos(\omega t - \delta) \quad (3.8)$$

en què ω és la freqüència de la força impulsora externa (3.1) i A i δ són dues noves constants que determinarem a continuació, imposant la condició que la funció (3.8) satisfaci l'equació diferencial (3.4).

La funció $x_p(t)$ (3.8) té com a derivades

$$\frac{dx_p}{dt} = -\omega A \sin(\omega t - \delta) \quad \text{i} \quad \frac{d^2x_p}{dt^2} = -\omega^2 A \cos(\omega t - \delta) \quad (3.9)$$

Si desenvolupem $\cos(\omega t - \delta)$ i $\sin(\omega t - \delta)$ i substituïm a l'equació diferencial (3.4), tenim

$$\begin{aligned} \sin \omega t &\cdot A \{ (\omega_0^2 - \omega^2) \sin \delta - 2\beta \omega \cos \delta \} + \\ \cos \omega t &\cdot \left\{ A(\omega_0^2 - \omega^2) \cos \delta + 2A\beta \omega \sin \delta - \frac{F_0}{m} \right\} = 0 \end{aligned} \quad (3.10)$$

Com s'explica a l'apèndix §B.2.1, les funcions $\cos \omega t$ i $\sin \omega t$ són *linealment independents*; per tant, els seus coeficients als interiors de les dues claus $\{ \}$ han de ser necessàriament nuls per tal que es compleixi aquesta igualtat a zero a tot instant t . En conseqüència, del terme amb $\sin \omega t$ obtenim

$$\tan \delta = \frac{2\beta \omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (3.11)$$

i, per (A.31), també

$$\cos \delta = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \delta}} = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}} \quad (3.12)$$



$$\sin \delta = \frac{\tan \delta}{\sqrt{1 + \tan^2 \delta}} = \frac{2\omega\beta}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} \quad (3.13)$$

I del terme amb $\cos \omega t$ de (3.10) i les igualtats anteriors trobem

$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} \quad (3.14)$$

I ara que ja hem vist que la funció $x_p(t)$ donada per (3.8) satisfà, efectivament, l'equació diferencial (3.4), amb els valors de A i δ anteriors, ens preguntem

Quin significat físic té tot això, és a dir, què ens està expressant físicament la funció $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$, que hem obtingut com la solució general de l'equació (3.4)?

La resposta és ben simple. La funció $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$ explica el moviment que fa la partícula des de l'instant inicial. Aquest moviment és bastant complicat ja que és la superposició d'una oscil·lació amortida, la $x_h(t)$, més una oscil·lació harmònica simple, la $x_p(t)$

$$x(t) = A_h e^{-\beta t} \cos(\omega_1 t + \phi_h) + A \cos(\omega t - \delta) \quad (3.15)$$

Però, d'altra banda, a mesura que vagi transcorrent el temps, l'amplitud efectiva de l'oscil·lació amortida, $A_h e^{-\beta t}$, anirà fent-se cada vegada més petita, fins a acabar desapareixent. Per contra, l'oscil·lació harmònica simple imposada romandrà indefinidament mentre s'hi continuï aplicant la força externa.

Podem resumir dient, doncs, que

- immediatament després de posar-se en marxa l'oscil·lador forçat, hi ha una primera etapa, l'*estat transitori*, en què el moviment de la partícula és complicat,
- però que, passat un temps, el moviment es torna un MHS de la mateixa freqüència que la força impulsora externa. Aquesta segona etapa és la que es coneix com a *estat estacionari*, per a la qual

$$x_{est}(t) = A \cos(\omega t - \delta) \quad (3.16)$$

La durada relativa de l'estat transitori depèn del grau d'amortiment de l'oscil·lador. Si aquest és gran, és a dir, si no se satisfà que $\beta \ll \omega_0$, la durada es pot considerar relativament petita i, al contrari, si hi ha poc amortiment, l'estat estacionari pot tardar relativament molt a arribar. De 3 a 7 vegades la constant de temps $\tau = 1/\beta$ dóna una idea aproximada de quant durarà l'estat transitori.

Mentre hi hagi aplicada la força impulsora externa, l'estat estacionari perdurarà. Per això, en la majoria d'aplicacions —per exemple, en el corrent elèctric altern— acostuma a tenir més interès pràctic que l'estat transitori.

Exemple 3.1. Dos estats transitoris

En unitats del SI les equacions de moviment de l'estat transitori de dos oscil·ladors forçats són



$$x(t) = 1,5 e^{-2\pi t/5} \cos\left(\frac{4\pi\sqrt{6}}{5}t\right) + \cos(6\pi t + 0,14889) \quad (1)$$

$$x(t) = 1,5 e^{-2\pi t/5} \cos\left(\frac{4\pi\sqrt{6}}{5}t\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}t - 0,10626\right) \quad (2)$$

Trobeu els paràmetres característics de les dues oscil·lacions.

Solució

- a) Comencem pel moviment expressat per (1). Comparant la funció (1) amb la solució general (3.15), veiem que

$$A_h = 1,5 \text{ m}, \quad \phi_h = 0, \quad \beta = \frac{2\pi}{5} = 1,2566 \text{ s}^{-1}, \quad \omega_1 = \frac{4\pi\sqrt{6}}{5} \text{ rad/s}$$

$$A = 1 \text{ m}, \quad \omega = 6\pi \text{ rad/s}, \quad \delta = -0,14889 \text{ rad}$$

Per (2.7), trobem $\omega_0 = \sqrt{\omega_1^2 + \beta^2} = 2\pi \text{ rad/s}$; és a dir, $\omega_0 = 5\beta = \omega/3$. I per (3.14), $F_0/m = 319,4 \text{ m/s}^2$, i, finalment, per (3.11), podem comprovar que $\delta = \arctan(-3/20) = -0,1488899 \text{ rad}$.

La constant de temps de l'oscil·lació amortida val $\tau = 1/\beta = 0,7958 \text{ s}$; per tant, l'estat transitori dura entre 3 i 5 s. Això es pot apreciar observant la gràfica de la funció oscil·lant (1) representada a la figura 3.2.

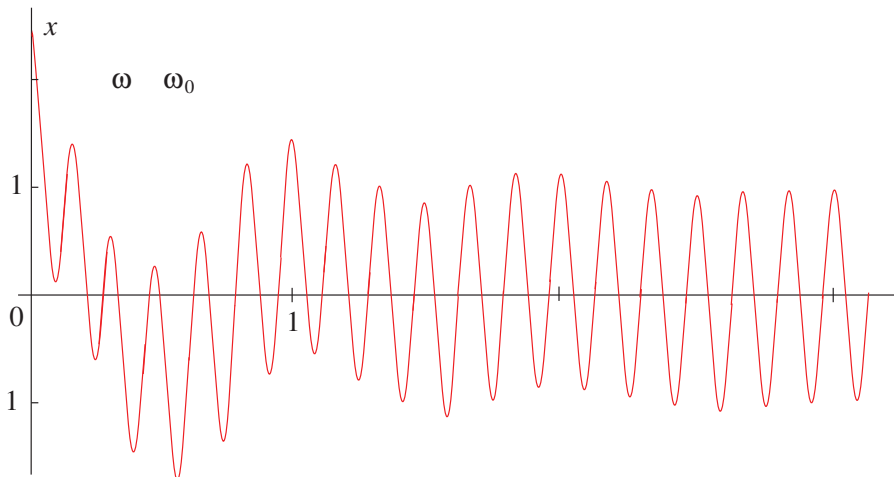


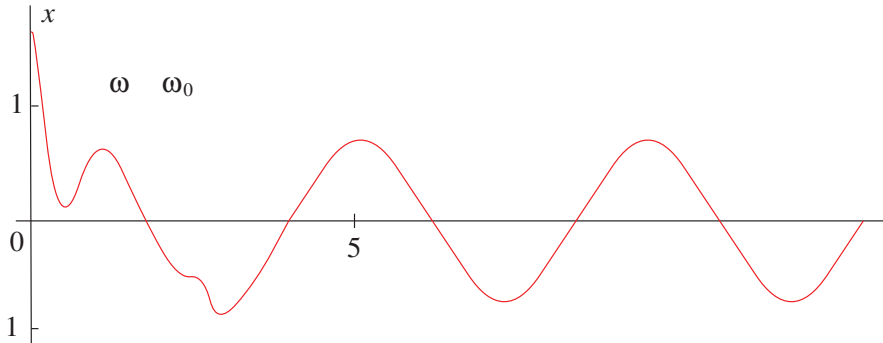
Figura 3.2

Fixem-nos que, quan $\omega \gg \omega_0$, com aproximadament en aquest cas, l'efecte que fa l'oscil·lació amortida $x_h(t)$ en l'estat transitori és fer trontollar inicialment l'oscil·lació abans que s'estabilitzi i s'entri en l'estat estacionari.

- b) La gràfica de l'oscil·lació forçada (2) s'ha representat a la figura 3.3.



Figura 3.3



De la suma de funcions (2), l'oscil·lació amortida és la mateixa que la de l'apartat (a); per tant, els valors de A_h , ϕ_h , ω_1 , ω_0 i β són els mateixos que els del cas anterior.

Pel que fa a l'oscil·lació estacionària, per comparació a (3.15), tenim

$$A = 1 \text{ m}, \quad \omega = \frac{\pi}{2} \text{ rad/s} = \frac{\omega_0}{4}$$

I, per (3.11) i (3.14), comprovem que

$$\delta = \arctan \frac{8}{75} = +0,1062649 \text{ rad}, \quad F_0/m = 37,223 \text{ m/s}^2$$

A partir de la representació gràfica anterior, veiem que, quan $\omega \ll \omega_0$, com aproximadament en aquest cas, l'efecte que fa l'oscil·lació amortida $x_h(t)$ en l'estat transitori és provocar una distorsió en les primeres oscil·lacions anteriors a l'estat estacionari.

3.3. Impedància i ressonància

3.3.1. Impedància

Com veiem per (3.14), per a uns valors fixos de F_0/m , ω_0 i β , l'amplitud A és una funció de la freqüència ω . Si definim

$$D = (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2$$

està clar que A serà màxima quan D sigui mínim; en conseqüència, si ω_2 és la freqüència angular que fa màxima l'amplitud, tenim que

$$\left(\frac{dD}{d\omega} \right)_{\omega=\omega_2} = -2(\omega_0^2 - \omega_2^2)2\omega_2 + 8\beta^2\omega_2 = 0$$

d'on resulta que

$$\omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} \quad (3.17)$$

Això sí, si l'amortiment és molt petit: $\omega_2 \approx \omega_0$.



A la figura 3.4 s'ha representat (3.14), A en funció de ω , per a diversos valors de β : $\beta = \omega_0/3$, $\beta = \omega_0/6$ i $\beta = \omega_0/15$. Fixeu-vos com els pics de les gràfiques es fan més prominents a mesura que l'amortiment es fa més petit.

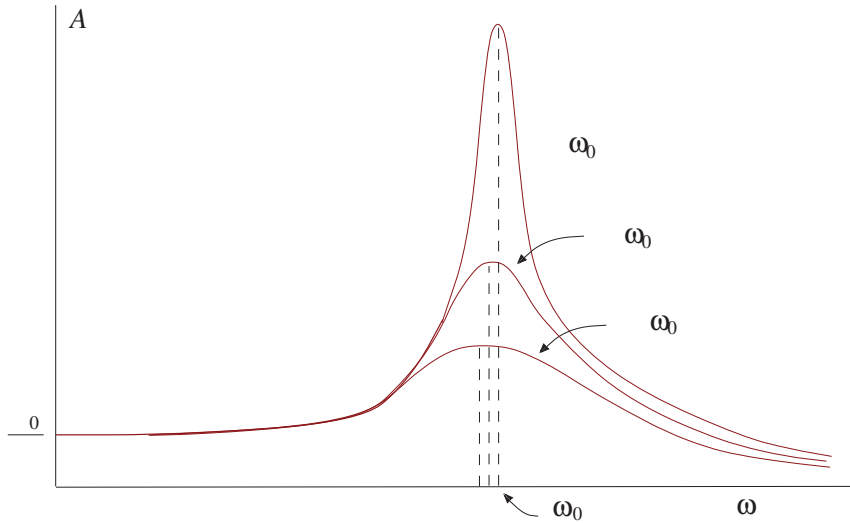


Figura 3.4

L'angle δ donat per (3.11) és el desfasament entre $F(t)$, (3.1), i la funció $x_p(t)$, (3.8); és a dir, en l'estat estacionari, δ és el *desfasament entre la força impulsora i l'elongació* de la partícula.

La velocitat de la partícula en l'estat estacionari és, simplement, la derivada de $x_p(t)$, (3.8)

$$v(t) = \frac{dx_p}{dt} = -\omega A \sin(\omega t - \delta) \quad (3.18)$$

Definim ara l'angle ε com

$$\varepsilon = \delta - \frac{\pi}{2} \quad (3.19)$$

que, per (3.11), satisfà

$$\tan \varepsilon = \tan \left(\delta - \frac{\pi}{2} \right) = \frac{1}{-\tan \delta} = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\beta\omega} \quad (3.20)$$

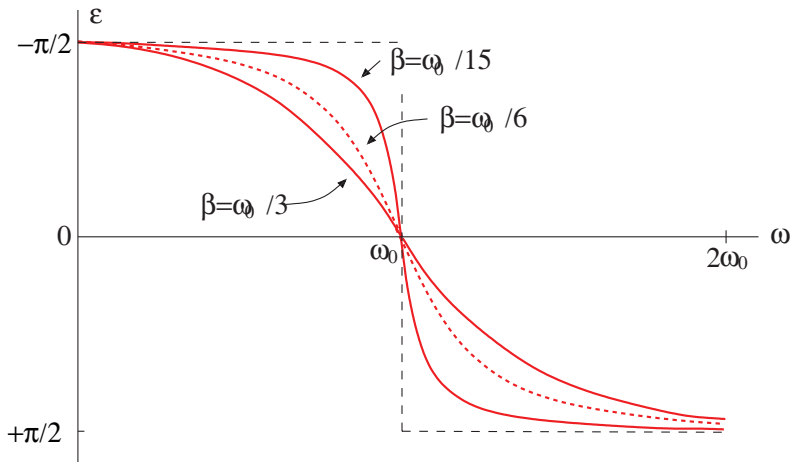
A la figura 3.5 s'ha representat ε en funció de ω per als tres valors de β : $\beta = \omega_0/3$, $\beta = \omega_0/6$ i $\beta = \omega_0/15$. Fixem-nos que ε es fa zero a $\omega = \omega_0$.

L'angle ε permet expressar la velocitat (3.18) de la forma

$$v(t) = \omega A \cos(\omega t - \varepsilon) \quad (3.21)$$

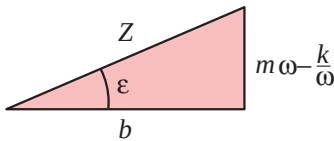
d'on veiem que l'angle ε és el *desfasament entre la força impulsora i la velocitat*. A partir d'ara, treballarem més amb l'angle ε que amb el δ .

Figura 3.5



Ara hi introduïm un nou paràmetre característic de l'oscil·lador que s'anomena *impedància*, que simbolitzem per Z i que definim com a

Figura 3.6



$$Z = m \sqrt{\left(\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega}\right)^2 + 4\beta^2} \quad (3.22)$$

expressió que, per (3.3), és equivalent a

$$Z = \sqrt{\left(m\omega - \frac{k}{\omega}\right)^2 + b^2} \quad (3.23)$$

Observem que, com a regla mnemotècnica, podem utilitzar el triangle rectangle de la figura 3.6 per recordar les relacions que hi ha entre l'angle ε , (3.20), la impedància Z , la resta $(m\omega - k/\omega)$ i b . Així,

$$\cos \varepsilon = \frac{b}{Z} \quad (3.24)$$

Per (3.14), és immediat comprovar que la impedància Z es relaciona amb l'amplitud de la velocitat ωA de la forma

$$\omega A = \frac{F_0}{Z} \quad (3.25)$$

3.3.2. Ressonància

La ωA serà màxima quan Z sigui mínima. Per (3.22), veiem que la funció $Z(\omega)$ —que s'ha representat a la figura 3.7— és mínima quan

$$\omega = \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (3.26)$$



En aquest cas, es diu que l'oscil·lador està en *ressonància* i tenim que

$$Z_{RES} = b \quad (3.27)$$

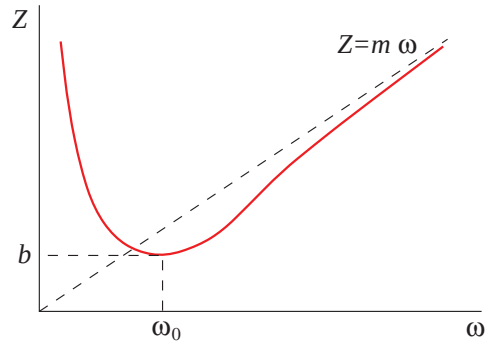


Figura 3.7

Fixem-nos també que, si $\omega = \omega_0$, per (3.11) i (3.20), l'angle δ val $\pi/2$ i l'angle ε és nul

$$\delta_{RES} = \frac{\pi}{2} \quad \varepsilon_{RES} = 0 \quad (3.28)$$

és a dir, en la ressonància, la força impulsora i l'elongació tenen un desfasament de $\pi/2$, és a dir, 1/4 de període i, per contra, la força impulsora i la velocitat estan en fase.

En conclusió, en la ressonància, la velocitat v i l'elongació x de la partícula vénen donades per

$$v_{RES} = \frac{F_0}{b} \cos \omega_0 t \quad x_{RES} = \frac{F_0}{b\omega_0} \sin \omega_0 t \quad (3.29)$$

A la figura 3.8, s'ha representat ωA , l'amplitud de la velocitat, en funció de ω . Les tres gràfiques corresponen als tres valors de β anteriors: $\beta = \omega_0/3$, $\beta = \omega_0/6$ i $\beta = \omega_0/15$.

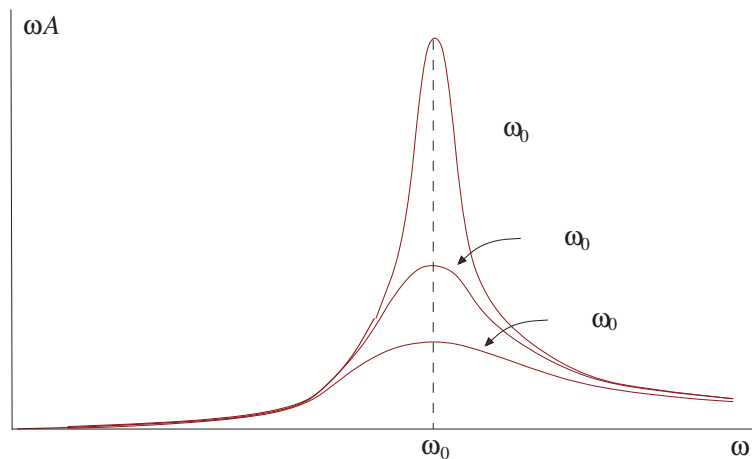


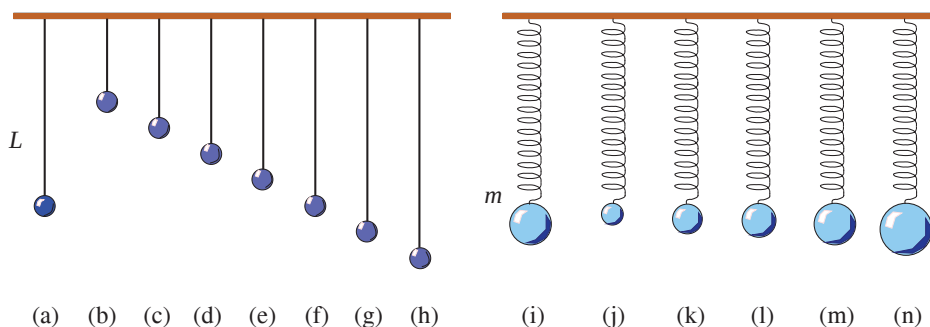
Figura 3.8

Fixem-nos, tant en aquesta gràfica com en l'anterior $A(\omega)$ de la figura 3.4, en la forma característica de pic que presenten. Això sí, com ja hem vist, hi ha una diferència entre

ambdues gràfiques: el màxim de ωA és a $\omega = \omega_0$, independentment del valor de β , mentre que el màxim de A és a la ω_2 de (3.17), que sí depèn de β .

Per observar fenòmens d'oscil·lacions forçades i de ressonància, no cal disposar d'aparells especials. Com es mostra a la figura 3.9 esquerra, un experiment molt senzill però ben il·lustratiu consisteix a agafar un corda gruixuda, tensar-la horitzontalment i lligar-hi fort uns quants pèndols simples de longituds diferents.

Figura 3.9



Si fem oscil·lar transversalment només el pèndol (a), transcurregut un interval curt de temps, com a conseqüència de les vibracions que es propagaran a través de la corda gruixuda, tots els altres també oscil·laran una mica, però el que ho farà amb una amplitud més gran és (f), que és el que té la mateixa longitud i, per tant, la mateixa freqüència pròpia que (a). Anàlogament, si fem oscil·lar verticalment la massa (i), la barra o corda que suporta la molla corresponent —v. figura 3.9 dreta— transmetrà les vibracions als altres oscil·ladors. Tots acabaran oscil·lant, però el que ho farà amb una amplitud més gran serà el sistema (m), la freqüència pròpia del qual és la mateixa que la del sistema impulsor (i).

Els fenòmens d'oscil·lacions forçades i ressonància intervenen en moltes situacions habituals. Des de la sintonització d'un aparell de ràdio —que comentem a la secció §3.6— fins a les embranzides que dona un pare al seu fill petit quan està en un gronxador. Aquestes embranzides són forces periòdiques de curta durada: si s'apliquen amb el mateix període que el de l'oscil·lació pròpia, $\omega = \omega_0$, procurant que estiguin en fase la velocitat i l'embranchida, l'amplitud del gronxador començarà a créixer.

Com que tots els cossos i totes les estructures tenen un cert grau d'elasticitat i, consegüentment, freqüències pròpies d'oscil·lació, qualsevol agent extern que faci vibrar l'estructura hi pot originar ressonàncies. Aquest detall és fonamental a l'hora de dissenyar ponts, gratacels, etc. L'any 1831 el pont penjant de Broughton, a Gran Bretanya, es va enfonsar a causa de les vibracions forçades pel pas d'una tropa de soldats. En un cas semblant, l'any 1850, l'enfonsament del pont de la Basse-Chaîne, a Angers, França, va causar molts morts. Avui dia, això ja no pot passar perquè els dissenyadors de ponts ja tenen en compte que aquests no tinguin aquestes freqüències pròpies.¹

¹ En el cas del famós pont penjant de Tacoma Narrow, al Estats Units, un vent fluixet va acabar partint-lo un matí de 1940 al cap de pocs mesos de ser inaugurat. Des d'aquell any, molts llibres de física han posat aquest cas com a exemple de ressonància destructiva per oscil·lacions forçades... , però no va ser això el que va passar. En realitat, aquest pont es va enfonsar a causa d'un fenomen diferent anomenat *fluttering* o aletejament, ben conegut avui dia en l'aerodinàmica de ponts.



3.3.3. Ressonància paramètrica

Un cas especial de ressonància és la coneguda com a *ressonància paramètrica*. Les oscil·lacions forçades d'un oscil·lador es poden generar no tan sols per mitjà d'una força periòdica impulsora externa com la (3.1), sinó també a causa de la variació periòdica d'algun paràmetre característic de l'oscil·lador que en les oscil·lacions lliures seria constant. Per exemple, un pèndol simple en què fem variar periòdicament la longitud del pèndol: si la freqüència d'aquesta variació coincideix amb la del pèndol, aquest entrarà en ressonància paramètrica. Aquest és el cas del famós balanceig del “botafumeiro” de la catedral de Santiago de Compostel·la. També és el cas del nen que està assegut al gronxador que, estant sol, s'ajup i s'aixeca sobre el seient seguint el ritme de les oscil·lacions. En ajupir-se o aixecar-se l'infant, el moment d'inèrcia del pèndol físic que és el conjunt gronxador-nen varia. O el cas d'una molla que té en un extrem una massa i, per l'altre, està agafada a una paret que, en comptes d'estar fixa, estigui realitzant una MHS d'una certa freqüència —vegeu, entre d'altres, els problemes 3.7.1 i següent. En molts casos, les vibracions que es produeixen com a conseqüència de ressonàncies paramètriques poden arribar a ser molt perjudicials.

3.4. Vibracions produïdes per màquines giratòries

En aquesta secció, veurem un dels casos més importants i freqüents d'oscil·lacions forçades: les vibracions que tenen com a origen una màquina giratòria —per exemple, un motor elèctric— que no està prou *compensada o equilibrada*, és a dir, aquelles en què el rotor o alguna peça que gira no presenta simetria de revolució al voltant de l'eix de gir.

Com s'esquematitza a la figura 3.10, una màquina de massa total M unida a una paret fixa per una molla i un amortidor de constants k i b , respectivament, es troba sobre un pla horitzontal llis i el conjunt constitueix un oscil·lador amortit. La màquina té una peça petita mòbil de massa m que descriu un moviment circular uniforme de radi a a la velocitat angular ω . Estudiem com afectarà el moviment de la peça al moviment de la màquina.

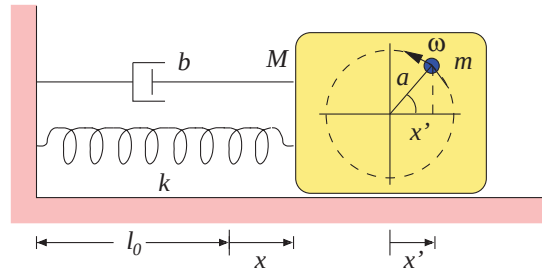


Figura 3.10

Amb la notació de la figura 3.10, l_0 és la longitud natural de la molla; x , el seu allargament en un instant determinat i x' , l'elongació, sobre el pla horitzontal, de la peça giratòria, que en funció del temps quedarà com

$$x' = a \cos \omega t \quad (3.30)$$

La segona llei de Newton aplicada a la peça de massa m ens dóna

$$m \frac{d^2(x + x')}{dt^2} = F_m \quad (3.31)$$

on F_m és la força interna que fa la màquina sobre la peça. Aplicant ara la segona i la tercera lleis de Newton a la màquina tenim

$$(M - m) \frac{d^2x}{dt^2} = -kx - b \frac{dx}{dt} - F_m \quad (3.32)$$

Sumant (3.31) i (3.32), i tenint en compte (3.30), trobem

$$M \frac{d^2x}{dt^2} + m \frac{d^2(a \cos \omega t)}{dt^2} = -kx - b \frac{dx}{dt}$$

i reordenant

$$M \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = am\omega^2 \cos \omega$$

Ens queda, doncs, l'equació diferencial de la vibració —una oscil·lació forçada— en la qual l'amplitud de la força impulsora (3.1) val

$$F_0 = am\omega^2 \quad (3.33)$$

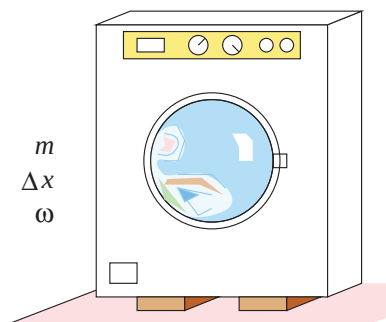
Si la freqüència ω amb què gira la peça és pròxima a la pròpia de l'oscil·lador, $\omega_0 = \sqrt{k/M}$, hi ha una ressonància que, en moltes situacions pràctiques, pot ser desagradable, perjudicial i, fins i tot, perillosa. Fixem-nos que, això sí, només cal col·locar una altra peça idèntica a l'anterior en la posició simètrica per tal que aquestes vibracions forçades desapareguin. Un cas relacionat d'alguna manera amb aquest és el que s'exposa al problema 3.7.1. A la secció §8.3.2, també veurem com es poden reduir aquestes vibracions.

Exemple 3.2. Les vibracions d'una rentadora

Els quatre peus de goma sobre els quals descansa una rentadora s'han ensorrat exactament $\Delta x = 1,50$ mm per l'acció del pes d'aquesta —v. figura 3.11. Quina freqüència de centrifugació s'hauria d'evitar especialment si no volem que el terra vibri excessivament?

Solució

Figura 3.11



Una rentadora amb roba centrifugant és una màquina giratòria descompensada com les que acabem de comentar. Si la freqüència de la centrifugació coincideix amb la freqüència pròpia d'oscil·lació de la rentadora sobre els seus peus, entrarà en ressonància i la rentadora —i el terra— vibrarà de manera molt exagerada i molesta.

Com dèiem, la freqüència pròpia de la rentadora és la freqüència amb què oscil·la sobre els seus peus. Si la massa de la rentadora amb la roba és m i suposem que els peus de goma es comporten com si fossin quatre molles iguals de constant k , aquesta freqüència és, com sabem, $\omega_0 = \sqrt{4k/m}$.



A l'enunciat no ens diuen quant valen ni k ni m , però sí que ens diuen que en posar la rentadora sobre els quatre peus aquests es comprimeixen una longitud Δx . Aquesta és tal que la força que origina compensa el pes: $4k\Delta x = mg$. Així doncs, la freqüència de ressonància serà

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{4k}{m}} = \sqrt{\frac{g}{\Delta x}}$$

Substituint els valors numèrics, trobem: $\omega_0 = 80,87 \text{ rad/s} = 772 \text{ rpm}$.

3.5. Potència mitjana absorbida per l'oscil·lador

Com hem vist, en l'estat estacionari, l'oscil·lador fa un MHS. Des del punt de vista energètic, l'estat estacionari s'explica mitjançant un balanç d'energia: la força de fricció dissipa energia cap al medi exterior al mateix ritme que la força impulsora externa la subministra a l'oscil·lador. Com que la força de fricció és proporcional a la velocitat i aquesta és proporcional a l'amplitud del MHS, els paràmetres característics del MHS forçat, A i ε , són aquells que equilibren la potència dissipada amb la potència subministrada. En aquesta secció comprovem analíticament aquest raonament qualitatiu.

Calculem la potència subministrada per la força impulsora, P_S . Sabem que $P_S = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$. En el nostre cas, tenim, per (3.1) i (3.21), doncs

$$P_S(t) = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = F_0 \cos \omega t \cdot \frac{F_0}{Z} \cos(\omega t - \varepsilon) = \frac{F_0^2}{Z} \cos \varepsilon \cos^2 \omega t + \sin \varepsilon \cos \omega t \sin \omega t$$

o també, utilitzant (A.26) i (A.18), tenim

$$P_S(t) = \frac{1}{2} \frac{F_0^2}{Z} [\cos \varepsilon + \cos(2\omega t - \varepsilon)] \quad (3.34)$$

Veiem, doncs, que la potència $P_S(t)$ depèn de l'instant t que considerem: en una part del cicle, és positiva però, en una altra, és negativa. Aquesta és, recordem-ho, la potència subministrada per la força impulsora a la partícula a l'instant t .

Però en la majoria d'aplicacions no interessa tant aquesta *potència instantània* $P_S(t)$ com la *potència mitjana* $\langle P_S \rangle$, és a dir, l'energia total subministrada a l'oscil·lador durant tot un període, dividida per la durada d'aquest, $T = 2\pi/\omega$. Com s'explica a l'apèndix §A.4, la mitjana ve donada per

$$\langle P_S \rangle = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} P_S(t) dt \quad (3.35)$$

on la integral representa l'energia i on ja hem posat el període com a $T = 2\pi/\omega$.

Aplicant-ho a la funció $P_S(t)$ de (3.34), tenim

$$\langle P_S \rangle = \frac{1}{2} \frac{F_0^2}{Z} (\cos \varepsilon + \langle \cos(2\omega t - \varepsilon) \rangle)$$

i, com que la mitjana d'una constant és ella mateixa i la mitjana de qualsevol funció sinusoidal és zero, resulta, doncs

$$\langle P_S \rangle = \frac{1}{2} \frac{F_0^2}{Z} \cos \varepsilon = \frac{1}{2} F_0 \omega A \cos \varepsilon = \frac{1}{2} \frac{F_0^2}{Z^2} b \quad (3.36)$$

on hem utilitzat, per a l'última igualtat, l'expressió (3.24) deduïda anteriorment com un exemple de l'aplicació del triangle de la impedància.

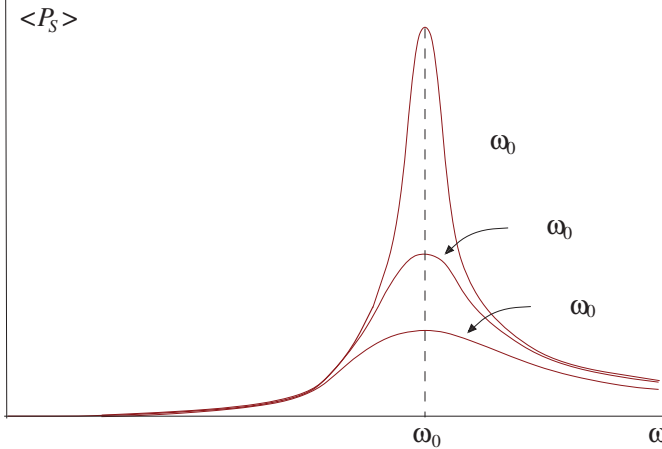
En la ressonància, en què $Z = b$ i $\cos \varepsilon = 1$, tenim que

$$\langle P_S \rangle_{RES} = \frac{1}{2} \frac{F_0^2}{b} \quad (3.37)$$

i la potència mitjana transferida a l'oscil·lador és màxima.

A la figura 3.12 s'ha representat la potència mitjana $\langle P_S \rangle$ en funció de ω , expressió (3.36). Fixeu-vos que, qualitativament, és semblant a la gràfica de l'amplitud de la velocitat ωA : $\langle P_S \rangle$ depèn de la impedància com a $1/Z^2$ i ωA com a $1/Z$.

Figura 3.12



3.6. Factor de qualitat Q i amplada de la ressonància

Com acabem de veure la potència mitjana $\langle P_S \rangle$ és una funció de ω que, en la ressonància, $\omega = \omega_0$, es fa màxima, $\langle P_S \rangle_{RES}$. La potència relativa o quocient $\langle P \rangle / \langle P \rangle_{RES}$ és, en conseqüència, una altra funció de ω que en el màxim val 1. Per (3.36) i (3.37), veiem que

$$\frac{\langle P_S \rangle}{\langle P_S \rangle_{RES}} = \frac{b^2}{Z^2} \quad (3.38)$$

A la gràfica de la figura 3.13 hem representat $\langle P_S \rangle / \langle P_S \rangle_{RES}$ en funció de ω / ω_0 , per als tres valors $\beta = \omega_0 / 5$, $\beta = \omega_0 / 10$ i $\beta = \omega_0 / 50$. En aquestes gràfiques fixem-nos com, a mesura que l'amortiment β es fa més petit, el pic corresponent es fa més i més estret.

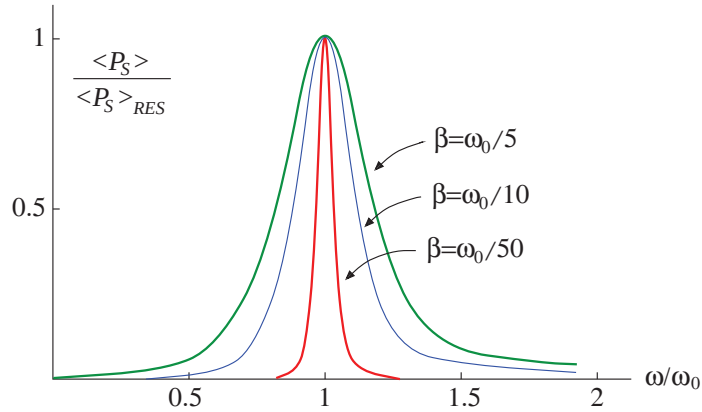


Figura 3.13

A la figura 3.14 s'ha representat un d'aquest pics.

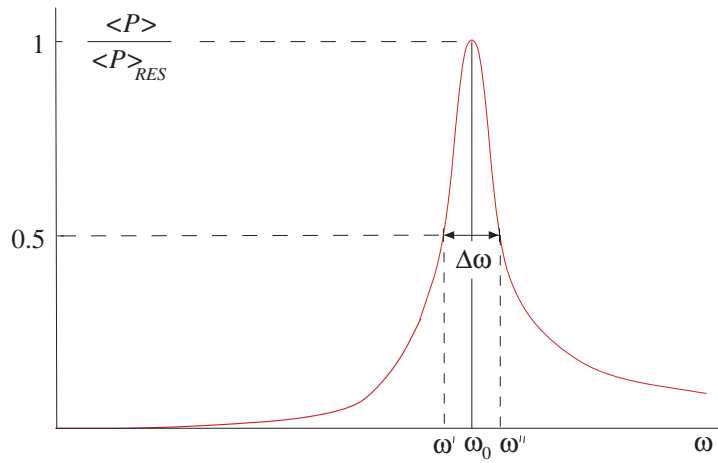


Figura 3.14

La potència relativa és superior a 1/2 per a totes les freqüències compreses entre la ω' i la ω'' , i 1 per a exactament la ω_0 , de forma que $\omega' < \omega_0 < \omega''$. Definint l'*amplada de la ressonància* com a $\Delta\omega = \omega'' - \omega'$, es pot demostrar fàcilment que, si $\beta \ll \omega_0$, llavors

$$\Delta\omega = \omega'' - \omega' = 2\beta \quad (3.39)$$

A la secció §2.3 hem vist a (2.16) que, en el cas d'amortiments petits, el factor de qualitat Q podia posar-se com $Q = \omega_0/(2\beta)$. Doncs bé, a la vista d'aquest últim resultat, podem escriure

$$Q = \frac{\omega_0}{2\beta} = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} \quad (3.40)$$

d'on podem concloure que el factor de qualitat Q ens indica l'estretor del pic de la ressonància.

Tot això que acabem de veure sobre les oscil·lacions forçades fa referència a la posició, la velocitat, la massa, la força, etc. de partícules o sòlids. És a dir, hem estudiat les

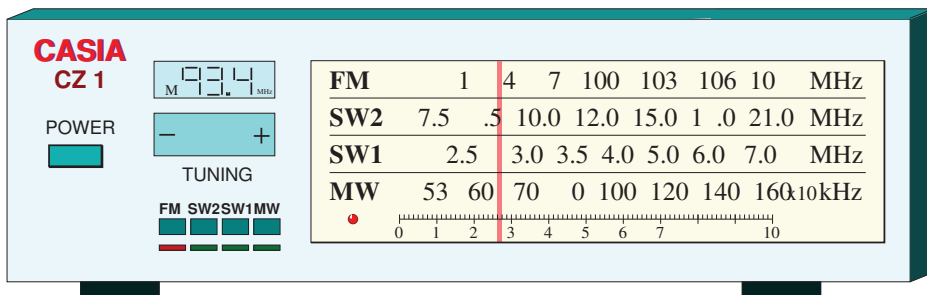


oscil·lacions, en general, i les forçades, en particular, des d'exemples mecànics. Però les mateixes tècniques i el mateixos resultats que hem anat trobant es poden aplicar i s'apliquen a problemes d'altres branques de la ciència tant diferents com els circuits elèctrics, telecomunicacions, òptica, geologia, etc. Totes aquestes situacions, en camps tan diferents, presenten un punt clau comú: queden descrites per equacions diferencials com ara la (3.4). Així, el concepte d'impedància, anàlogament a com l'hem vist a la secció §3.3 des del punt de vista mecànic, s'aplica exactament igual als circuits elèctrics de corrent altern.

Per al lector interessat, a l'apèndix D es comparen les oscil·lacions elèctriques i les mecàniques.

Per acabar, podem afegir que, en general, allà on hi hagi una freqüència pròpia i un agent extern periòdic hi ha fenòmens de ressonància més o menys pronunciats segons el factor de qualitat corresponent. Així, per exemple, quan estem sintonitzant una emissora de ràdio —v. figura 3.15— estem modificant la freqüència pròpia ω_0 del condensador variable del circuit elèctric oscil·lant *LC* del receptor —apèndix D— fins a igualar-la amb la freqüència ω de les ones radioelèctriques que emet l'emissora concreta que volem escoltar. Si aquest circuit no té un factor de qualitat *Q* prou alt, l'aparell agafarà també altres emissores que tinguin freqüències semblants a ω_0 i l'audició serà dolenta. En canvi, si el factor *Q* dels receptors és gran, hi pot haver moltes emissores amb freqüències pròximes unas de les altres sense que es perdi qualitat en l'audició.

Figura 3.15



3.7. Problemes resolts i problemes proposats

3.7.1. Problemes resolts

Problema 3.1. Oscil·lació forçada sinusoïdalment

Una partícula de massa $m = 0,140$ kg és unida a una molla de constant $k = 300$ N/m i a un amortidor de constant d'amortiment $b = 3$ kg/s. Si, sobre la partícula, comença a actuar una força impulsora externa sinusoïdal d'amplitud $F_0 = 30$ N i freqüència $\omega = 50$ rad/s, avalueu:

- a) quant de temps durarà, aproximadament, l'estat transitori del moviment.

A continuació, ja en l'estat estacionari, esbrineu:

- b) la impedància Z del sistema;
c) l'amplitud A de l'oscil·lació estacionària i de la seva velocitat, ωA ;



- d) l'angle de desfasament ε entre la velocitat i la força impulsora;
- e) la potència mitjana subministrada a l'oscil·lador i el factor de qualitat Q , i
- f) la freqüència angular a la qual hi hauria ressonància i quina amplitud tindrien les oscil·lacions en aquest cas.

Solució

- a) Com ja sabem, a partir del moment en què s'aplica la força impulsora, la partícula comença a efectuar un moviment oscil·latori complicat, anomenat *estat transitori*, que és la superposició d'una oscil·lació amortida

$$x_h = A_h e^{-\beta t} \cos(\omega_1 t + \phi)$$

més un MHS de la mateixa freqüència ω que la força impulsora

$$x_p = A \cos(\omega t - \delta)$$

però desfasat l'angle δ respecte d'ella. Transcurregut un cert temps, l'amplitud efectiva de l'oscil·lació amortida pràcticament ha desaparegut i només queda el MHS: s'ha arribat a l'*estat estacionari*.

La durada de l'estat transitori és, doncs, l'interval de temps que tarda l'exponencial $e^{-\beta t}$ a fer-se molt petita, en general, entre 4 i 7 vegades $\tau = 1/\beta$. Com en les oscil·lacions amortides, β val

$$\beta = \frac{b}{2m} = 10,714 \text{ s}^{-1} \quad (1)$$

d'on resulta una durada d'entre 50 i 80 s.

- b) Ja en l'estat estacionari, substituint les dades numèriques de l'enunciat a l'expressió de la impedància, ens dona

$$Z = \sqrt{\left(m\omega - \frac{k}{\omega}\right)^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10} = 3,1623 \text{ kg/s} \quad (2)$$

- c) Com sabem, de l'amplitud ωA de la velocitat a l'estat estacionari i (2) deduïm

$$\omega A = \frac{F_0}{Z} = 9,4868 \text{ m/s}$$

i l'amplitud de l'elongació, és, doncs

$$A = \frac{\omega A}{\omega} = 0,18974 \text{ m}$$

- d) Començarem trobant la freqüència angular pròpia ω_0 de l'oscil·lador

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 46,291 \text{ rad/s} \quad (3)$$



Si l'angle de desfasament entre l'elongació i la força impulsora és, com l'anomenàvem abans, δ , l'angle de desfasament entre la velocitat i la força és $\varepsilon = \delta - \pi/2$, que ve donat directament, com sabem, per l'arctangent

$$\varepsilon = \arctan \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\beta\omega} = 0,32175 \text{ rad} = 18,435^\circ$$

fórmula en la qual hem utilitzat (1) i (3).

- e) Aquest és un oscil·lador no gaire amortit, ja que $\beta/\omega_0 = 0,23$. El factor de qualitat es pot calcular com

$$Q = \frac{\omega_0}{2\beta} = 2,16$$

I, pel que fa a la potència mitjana, aquesta ve donada, com sabem, per qualsevol d'aquestes expressions

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} \frac{F_0^2}{Z} \cos \varepsilon = \frac{1}{2} F_0 \omega A \cos \varepsilon = \frac{1}{2} \frac{F_0^2}{Z^2} b$$

en les quals, substituint els valors numèrics anteriors, resulta: $\langle P \rangle = 135,0 \text{ W}$.

- f) La ressonància és la condició per la qual l'amplitud de la velocitat ωA es fa màxima i, com sabem, es produeix quan $\omega = \omega_0 = 46,291 \text{ rad/s}$. En aquest cas, $Z_{RES} = b$, $\omega A)_{RES} = F_0/b$ i

$$A_{RES} = \frac{(\omega A)_{RES}}{\omega_0} = \frac{F_0}{b\omega_0} = 0,2160 \text{ m}$$

Problema 3.2. L'estat estacionari i la força impulsora

Una partícula de massa $m = 6 \text{ g}$, lligada a una molla i a un amortidor, està sotmesa a una força impulsora sinusoidal tal que el MHS que descriu l'estat estacionari ve donat per

$$x(t) = 0,08 \cos 2\pi(9t - 1/6) \quad (1)$$

on totes les magnituds són en unitats SI. Sabent que quan deixa d'actuar la força impulsora exterior l'amplitud de les oscil·lacions amortides es redueix a 1/5 de la inicial cada 6 oscil·lacions, esbrineu:

- El factor de qualitat de l'oscil·lador i el paràmetre d'amortiment.
- La impedància del sistema i l'amplitud de la força exterior.
- L'expressió de les oscil·lacions en cas que el sistema estigüés en ressonància.

Solució

- a) L'amplitud efectiva de les oscil·lacions amortides es redueix de la forma $A_{ef} = Ae^{-\beta t}$. Segons l'enunciat, tenim que



$$\frac{1}{5}A = Ae^{-6\beta T} \quad (2)$$

Aplicant logaritmes trobem que $\ln 5 = 6\beta T$. El període T d'aquestes oscil·lacions ve donat, com sabem, per $T = 2\pi/\omega_1 = 2\pi/\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$, essent ω_0 la freqüència pròpia de l'oscil·lador. Com que aquest oscil·lador, pel que diu l'enunciat sobre l'amplitud, no està gaire amortit podem suposar —com després comprovarem— que $\beta^2 \ll \omega_0^2$ i, per tant, que $\omega_1 \approx \omega_0$. Per tant, de (2) traiem que

$$\ln 5 = 12\pi \frac{\beta}{\omega_0} \quad (3)$$

Com que el factor de qualitat Q ve donat per $Q = \omega_0/2\beta$, llavors

$$Q = \frac{6\pi}{\ln 5} = 11,71$$

El paràmetre d'amortiment β el trobarem a partir de l'angle $\delta = \pi/3$ de desfasament entre l'elongació x i la força impulsora. La tangent d'aquest angle val, com sabem,

$$\tan \delta = \tan \frac{\pi}{3} = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (4)$$

essent ω la freqüència de la força impulsora, 18π rad/s en aquest cas. Substituint la β de l'equació (3) en (4), resulta

$$\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega_0} = \frac{\omega \ln 5}{6\pi \tan \frac{\pi}{3}} = 2,7876 = \alpha$$

D'aquesta equació de segon grau, per a ω_0

$$\omega_0^2 - \alpha\omega_0 - \omega^2 = 0$$

trobem les dues solucions

$$\omega_0 = \frac{\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + 4\omega^2}}{2} = 1,394 \pm 56,566 \text{ rad/s}$$

però, ens quedem, només, amb la positiva: $\omega_0 = 57,96$ rad/s.

I ara que tenim el valor de ω_0 , per (3) trobem que $\beta = 2,474 \text{ s}^{-1}$. Ara també podem comprovar que, efectivament, $\omega_1 \approx \omega_0$: $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = 0,99909\omega_0$.

b) Substituint ω_0 i ω a l'expressió de la impedància, trobem

$$Z = m\sqrt{\left(\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega}\right)^2 + 4\beta^2} = 0,03429 \text{ kg/s} \quad (5)$$

Quant a l'amplitud F_0 de la força impulsora podem trobar-la de la relació entre aquesta i l'elongació A , 0,08 m per (1),

$$A = \frac{F_0}{\omega Z} \quad (6)$$

d'on resulta $F_0 = 0,1551$ N.

c) El moviment de la partícula estaria en ressonància si $\omega = \omega_0$. En aquest cas, com ja sabem, tindriem que:

- el desfasament entre la força impulsora i el desplaçament seria: $\delta_{RES} = \pi/2$ rad; i
- la impedància (5) es faria mínima: $Z_{RES} = 2m\beta = 0,02969$ kg/s;
- l'amplitud (6) ara valdria

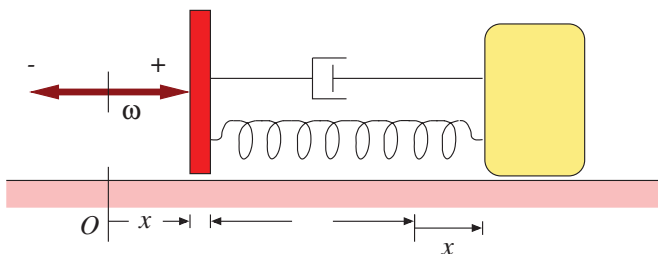
$$A_{RES} = \frac{F_0}{\omega Z_{RES}} = \frac{F_0}{2m\beta\omega_0} = 0,09013 \text{ m}$$

Així doncs, en unitats SI, el moviment de la partícula seria: $x_{RES}(t) = 0,09013 \sin 57,96t$

Problema 3.3. Oscil·lacions forçades per un MHS extern, 1

Sigui un bloc de massa m unit per una molla de constant de força k a una paret mòbil que fa un MHS d'amplitud a i freqüència ω . El bloc té un amortidor de constant b unit a la paret mòbil. Aprofitant els suggeriments indicats a la figura 3.16, estudieu el moviment del bloc i comproveu que correspon a una oscil·lació forçada sinusoidalment per una força impulsora d'amplitud $F_0 = am\omega^2$.

Figura 3.16



Solució

Seguint la notació de la figura anterior, siguin: l_0 , la longitud natural de la molla; x' , l'elongació de la paret mòbil i, x , l'allargament de la molla. Així, la x' podem posar-la de la forma

$$x' = a \cos \omega t \quad (1)$$

La força que fa la molla és proporcional al seu allargament, x , i l'amortidor, com que està unit a la paret mòbil, fa una força sobre el bloc proporcional a la velocitat relativa del bloc respecte de la paret de suport, dx/dv . Per tant, la segona llei de Newton aplicada a aquest cas ens proporciona

$$m \frac{d^2(x' + x)}{dt^2} = -kx - b \frac{dx}{dt} \quad (2)$$



equació que, per (1), podem deixar com

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = am\omega^2 \cos \omega t \quad (3)$$

Trobem, doncs, una equació diferencial que ens explica que l'allargament x de la molla respon a una oscil·lació forçada sinusoidalment per una força impulsora d'amplitud

$$F_0 = am\omega^2$$

Al problema següent veiem una aplicació d'aquest resultat. Vegeu també el problema 3.26.

Problema 3.4. Limitació de les vibracions

Un aparell electrònic delicat està sobre una plataforma que pateix les vibracions d'un motor de forma contínua —v. figura 3.17. La massa de l'aparell és $m = 8 \text{ kg}$ —molt més petita que la de la plataforma— i la constant de força de cadascuna de les quatre molles iguals que el suporten val $k = 6 \times 10^4 \text{ N/m}$. Si l'amplitud de les vibracions de l'aparell ha de ser, com a màxim, el triple de la de la plataforma, esbrineu entre quina freqüència mínima i màxima aquesta no hauria de vibrar. Supposeu negligible l'amortiment.

Solució

Com hem vist al problema 3.7.1, la vibració de la plataforma amb una freqüència ω i una amplitud a és equivalent a aplicar a l'aparell una força impulsora sinusoidal de la mateixa freqüència i d'amplitud $F_0 = am\omega^2$. Com que l'amortiment és molt petit, aquesta força farà vibrar l'aparell amb l'amplitud A donada per l'expressió

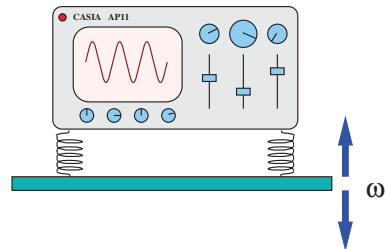


Figura 3.17

$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} \approx \frac{a\omega^2}{|\omega_0^2 - \omega^2|} \quad (1)$$

en la qual ω_0 és la freqüència pròpia de l'aparell sobre les quatre molles, és a dir, $\omega_0 = \sqrt{\frac{4k}{m}}$. Anomenant-la $\alpha = A/a$, la condició que ens diu l'enunciat sobre l'amplitud —que $\alpha \leq 3$ — imposa que la freqüència ω de la plataforma hagi de ser:

- $\omega_1 < \omega < \omega_0$, amb ω_1 donada per l'equació

$$\alpha = \frac{\omega_1^2}{\omega_0^2 - \omega_1^2} \quad \text{és a dir} \quad \omega_1 = \omega_0 \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha + 1}}$$

- $\omega_0 < \omega < \omega_2$, amb ω_2 donada per l'equació

$$\alpha = \frac{\omega_2^2}{\omega_2^2 - \omega_0^2} \quad \text{és a dir} \quad \omega_2 = \omega_0 \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha - 1}}$$

Com que $\omega_0 = 173,2 \text{ rad/s}$, llavors, posant $\alpha = 3$, trobem: $\omega_1 = 0,866025 \omega_0 = 150,0 \text{ rad/s}$ i $\omega_2 = 1,22474 \omega_0 = 212,1 \text{ rad/s}$, és a dir, $f_1 = 23,87 \text{ Hz}$, i $f_2 = 33,76 \text{ Hz}$.

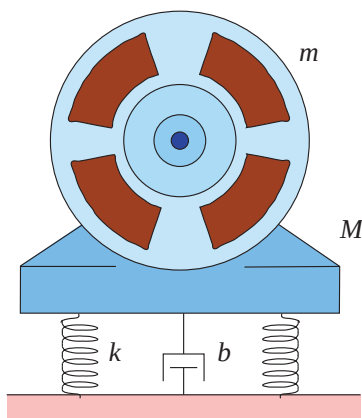
En definitiva, el marge de freqüències en què no hauria de vibrar la plataforma és

$$23,9 \text{ Hz} < f < 33,8 \text{ Hz}$$

Problema 3.5. Transmissibilitat: motor elèctric sobre el terra

Un motor elèctric, de massa total $M = 100 \text{ kg}$ i que gira a $\omega = 900 \text{ rpm}$, té un petit desequilibri, equivalent a una massa $m = 0,5 \text{ kg}$ amb un radi $r = 0,20 \text{ cm}$.

Figura 3.18



Com es mostra a la figura 3.29, el motor està suportat per unes molles verticals, de constant de força conjunta $k = 4 \times 10^4 \text{ N/m}$ i un amortidor, de constant d'amortiment $b = 2000 \text{ kg/s}$, i tot el conjunt està dipositat sobre el terra. Estudieu quant val, en l'estat estacionari, la força màxima que fan aquests dos elements sobre el terra —exclòs el pes Mg del motor.

Solució

Un motor descompensat que gira a la velocitat angular ω provoca, com hem vist a la secció §3.4, una força impulsora harmònica d'amplitud $F_0 = m\omega^2 r$, que forçarà, en l'estat estacionari, un MHS del propi motor $x = A \cos(\omega t - \delta)$. Per tant, la força F que faran les molles i l'amortidor sobre el terra, a part del propi pes del motor, valdrà

$$F = kx + b \frac{dx}{dt} = kA \cos(\omega t - \delta) + b\omega A \sin(\omega t - \delta), \quad \text{si } F \geq 0 \quad (1)$$

on A ve donada, com sabem, per

$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}} \quad (2)$$

A la meitat del període en què $F = kx + b \frac{dx}{dt} < 0$ prenem $F = 0$, ja que el motor està dipositat sobre el terra —i no collat a ell— i no el pot estirar cap amunt; en aquest cas, el



pes aparent del motor és més petit que Mg . Aplicant-hi la igualtat trigonomètrica (A.20), podem posar (1) de la forma

$$F(t) = A\sqrt{k^2 + b^2\omega^2} \sin(\omega t - \delta - \phi), \quad \text{amb } \tan \phi = \frac{k}{b\omega} \quad (3)$$

És clar que el màxim de (3) és l'amplitud de la força, $F_{max} = A\sqrt{k^2 + b^2\omega^2}$. Substituint (2) aquí, podem posar F_{max} com

$$\frac{F_{max}}{F_0} = \sqrt{\frac{\omega^4 + 4\beta^2\omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} \quad (4)$$

quotient, anomenat sovint, de *transmissibilitat*.

Amb els valors numèrics de l'enunciat, tenim: $\omega = 900 \text{ rev/min} = 94,248 \text{ rad/s}$, $\omega_0 = \sqrt{k/M} = 20 \text{ rad/s}$, $\beta = b/2M = 10 \text{ s}^{-1}$ i, finalment, l'amplitud de la força impulsora: $F_0 = m\omega^2 r = 888,27 \text{ N}$.

Si substituïm tot això a (4), resulta una força màxima de $F_{max} = 1,0450 \cdot F_0 = 928,2 \text{ N}$.

A la figura 3.19 s'ha representat la transmissibilitat F_{max}/F_0 donada per (4) en funció de ω/ω_0 , per a tres valors del paràmetre β : $\beta = \omega_0/5$, $\beta = \omega_0/2$, i $\beta = \omega_0$. En aquest problema: $\beta = \omega_0/2$ i $\omega/\omega_0 = 4,71$.

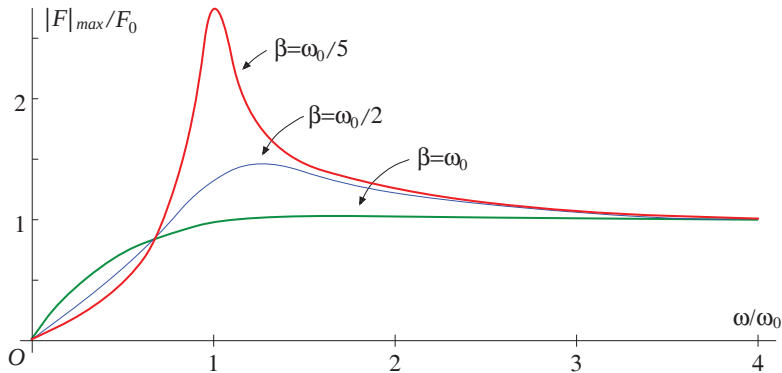


Figura 3.19

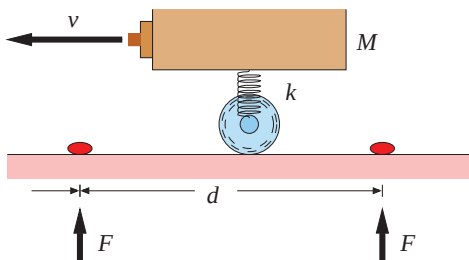
Com es podia esperar, la transmissibilitat en la ressonància, $\omega = \omega_0$, es fa molt gran si l'amortiment és petit. En aquest cas (4), es pot expressar en funció del factor de qualitat com $Q = \omega_0/(2\beta)$ com

$$\left[\frac{F_{max}}{F_0} \right]_{RES} = \sqrt{Q^2 + 1} \approx Q$$

Problema 3.6. Ressonància deguda a una força periòdica no harmònica

Un cotxe arrossega un remolc de dues rodes amb una càrrega molt fràgil. Podem considerar el remolc carregat com un gran bloc de massa M , suportat per dues molles de constant k recolzades sobre l'eix de les dues rodes.

Figura 3.20



A partir d'un cert punt de la carretera per la qual circula estan fent obres, de manera que al llarg de l'asfalt hi ha uns cables gruixuts disposats transversalment i separats entre si uniformement la distància d . Esbrineu quina velocitat v ha d'evitar especialment el conductor si no vol fer trontollar massa la càrrega. Apliqueu el resultat a les dades: $k = 10^5$ N/m, $d = 5$ m, i $M = 1000$ kg.

Solució

En aquest cas el remolc amb les dues molles és l'oscil·lador i els “copets” que van rebent les dues rodes cada vegada que passen per damunt dels cables són la força externa impulsora $F(t)$. Aquesta “força”, evidentment, no és una força harmònica del tipus $F_0 \cos \omega t$, però si el cotxe va a velocitat constant $F(t)$ sí que és una força periòdica. Això ens permet pensar que, si bé els resultats del desenvolupament matemàtic de la teoria d'oscil·lacions forçades per una força impulsora harmònica que hem vist al llarg d'aquest capítol no seran correctes quantitativament sí ho poden ser qualitativament. En particular, és correcte creure que, si la freqüència pròpia de l'oscil·lador i la de la força impulsora dels copets coincideixen, hi haurà ressonància, és a dir, l'amplitud de les vibracions forçades del remolc es farà molt gran. Està clar, doncs, que la velocitat que hem d'evitar és la que correspon a la ressonància.

La freqüència angular pròpia de l'oscil·lador —el remolc amb les dues molles— és $\omega_0 = \sqrt{2k/M}$. La freqüència dels copets és $\omega = 2\pi/\Delta t$, essent-ne Δt el període, és a dir, l'interval de temps transcorregut entre un copet i el següent, $\Delta t = d/v$. Igualant les dues freqüències

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{M}} = \frac{2\pi v}{d}$$

obtenim la velocitat per a la qual hi haurà la ressonància

$$v_{RES} = \frac{d}{2\pi} \sqrt{\frac{2k}{M}}$$

I, aplicant els valors numèrics, en resulta la velocitat: $v_{RES} = 11,25$ m/s = 40,5 km/h.

Per acabar, es deixa per al lector veure que, de fet, a les velocitats del remolc $v_{RES}/2 = 20,25$ km/h, $v_{RES}/3 = 13,5$ km/h, $v_{RES}/4 = 10,1$ km/h, etc., també hi haurà ressonància.

Problema 3.7. Oscil·lacions i força externa no periòdica

Un extrem d'una molla de constant de força k està unit a una paret fixa mentre que l'altre està unit a una massa m . Inicialment, la massa està en el punt d'equilibri amb la velocitat



v_0 i, a partir de $t = 0$, se li aplica una força externa $F(t)$ que la tracta d'allunyar de la paret i que creix amb el temps t de la forma

$$F(t) = F_0 \frac{t}{\tau} \quad (1)$$

on F_0 i τ són dues constants. Estudia el moviment que farà la massa com a resposta a la força aplicada.

Solució

Plantegem la segona llei de Newton, la qual, amb (1), quedarà com

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = F_0 \frac{t}{\tau} \quad (2)$$

equació diferencial lineal no homogènia i de la qual ja sabem que la solució general és la suma de la solució general de l'equació homogènia

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0, \quad \text{amb} \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

més una solució particular de la no homogènia (2). La solució de l'homogènia és el MHS

$$x_h(t) = A_h \cos(\omega_0 t + \phi_h) \quad (3)$$

on A_h i ϕ_h són les dues constants arbitràries determinades per les condicions inicials. Com a solució particular de l'equació (2), provem la funció lineal

$$x_p(t) = At \quad (4)$$

que la satisfà i que, substituïda a (2), ens proporciona

$$A = \frac{F_0}{k\tau}$$

Així, doncs, la solució general de (2) és la suma de (3) més (4)

$$x(t) = A_h \cos(\omega_0 t + \phi_h) + \frac{F_0}{k\tau} t \quad (5)$$

que, derivada, proporciona la velocitat

$$v(t) = -\omega_0 A_h \sin(\omega_0 t + \phi_h) + \frac{F_0}{k\tau} \quad (6)$$

Quant valen A_h i ϕ_h ? Si prenem com a origen de coordenades el punt d'equilibri, llavors, a $t = 0$ tenim

- $x(0) = 0$; per tant, de (5), $\cos \phi_h = 0$
- $v(0) = v_0$; per tant, de (6), $-\omega_0 A_h \sin \phi_h + \frac{F_0}{k\tau} = v_0$



d'on resulta $\phi_h = \frac{\pi}{2}$ i $A_h = \left(\frac{F_0}{k\tau} - v_0 \right) \frac{1}{\omega_0}$. Finalment, substituint a (5) resulta el moviment

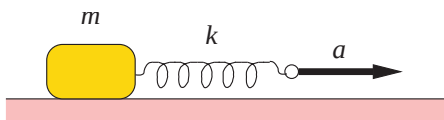
$$x(t) = \frac{F_0}{k\tau\omega_0}(\omega_0 t - \sin \omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t \quad (7)$$

que, com veiem, és la superposició d'un moviment uniforme de velocitat $F_0/k\tau$ i un MHS de freqüència ω_0 . Fixeu-vos que, si no hi hagués la molla que lliga la massa a la paret, la massa es mouria de la forma: $x = \frac{1}{6} \frac{F_0}{m\tau} t^3$.

Exemple 3.8. Bloc accelerat per una molla

Un bloc de massa m que descansa sobre una superfície horitzontal llisa està unit a un dels extrems d'una molla de constant k . Inicialment el sistema està en repòs quan, a partir d'un moment determinat, comencem a estirar l'altre extrem de la molla amb l'acceleració constant a —v. figura 3.21. Prenent la posició inicial del bloc com a origen de l'eix x , esbrineu com serà el moviment del bloc en funció del temps.

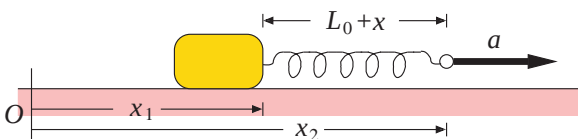
Figura 3.21



Solució

Seguirem la notació de la figura 3.22. Signuin: x_1 , la posició del bloc respecte de l'origen —la seva posició inicial és $x(0) = 0$; L_0 , la longitud natural de la molla; x , el seu allargament, i x_2 , la posició de l'extrem accelerat de la molla.

Figura 3.22



Per tot això que acabem de dir, tenim

$$x_2(t) = \frac{1}{2}at^2 + L_0 \quad (1)$$

i també que

$$x = x_2 - x_1 - L_0 \quad (2)$$

Aplicant la segona llei de Newton a la massa i tenint en compte (1) i (2), arribem a

$$m \frac{d^2 x_1}{dt^2} = +kx = -kx_1 + \frac{1}{2}kat^2$$

Si, com fem tan sovint, en diem $\omega_0^2 = k/m$, l'equació anterior ens queda com

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + \omega_0^2 x_1 = \frac{1}{2}\omega_0^2 at^2 \quad (3)$$



Per resoldre (3) suposarem que la funció solució és de la mena següent —suma de la solució general de l'homogènia més una particular de (3):—apèndix §B.3—

$$x_1(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi) + Bt^2 + Ct + D \quad (4)$$

on A i ϕ són constants que depenen de les condicions inicials de x_1 , i les altres constants B , C i D les trobarem a partir de la condició que la funció (4) satisfaci (3).

Substituint (4) a (3) trobem que se satisfà la igualtat (3) si B , C i D són

$$B = \frac{1}{2}a \quad C = 0 \quad D = -\frac{a}{\omega_0^2}$$

Així, (4) queda com

$$x_1(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi) + \frac{1}{2}at^2 - \frac{a}{\omega_0^2} \quad (5)$$

Troblem ara el valor de A i ϕ . Derivant x_1 , tenim

$$v_1(t) = \frac{dx_1}{dt} = -\omega_0 A \sin(\omega_0 t + \phi) + at \quad (6)$$

Ara podem trobar A i ϕ a partir de les condicions inicials. Per l'enunciat, a $t = 0$ tenim $x = 0$ i $v_1 = 0$. Així, per (5) i (6)

$$0 = A \cos \phi - \frac{a}{\omega_0^2} \quad \text{i} \quad 0 = -\omega_0 A \sin \phi$$

d'on deduïm: $\phi = 0$ i $A = a/\omega_0^2$. Així, la funció (5) queda, finalment, com

$$x_1(t) = \frac{1}{2}at^2 - \frac{a}{\omega_0^2}(1 - \cos \omega_0 t) \quad (7)$$

Comprovem que, si derivem dues vegades (7), trobem, primer, la velocitat (6)

$$v_1(t) = a \left(t - \frac{1}{\omega_0} \sin \omega_0 t \right)$$

i, després, l'acceleració del bloc

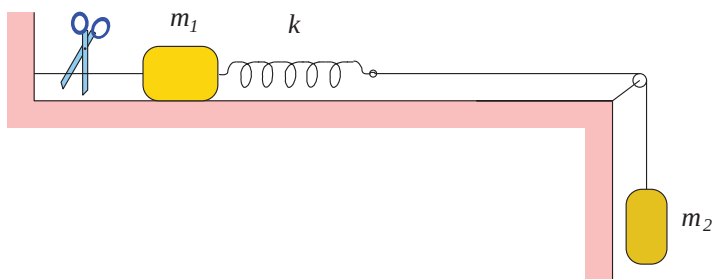
$$a_1(t) = a(1 - \cos \omega_0 t)$$

en funció de l'acceleració a de l'extrem. Efectivament, el moviment resultant és la superposició d'un cert MHS de freqüència ω_0 a un moviment amb acceleració constant a .

Exemple 3.9. El problema dels dos cossos, 2

Un bloc de massa m_1 que descansa sobre una superfície horitzontal llisa està unit per un dels seus costats a una paret i, per l'altre, a un extrem d'una molla de constant k —v. figura 3.23. L'altre extrem de la molla està unit a un fil inextensible que, passant per una politja molt petita, manté penjat en equilibri un segon bloc de massa m_2 .

Figura 3.23

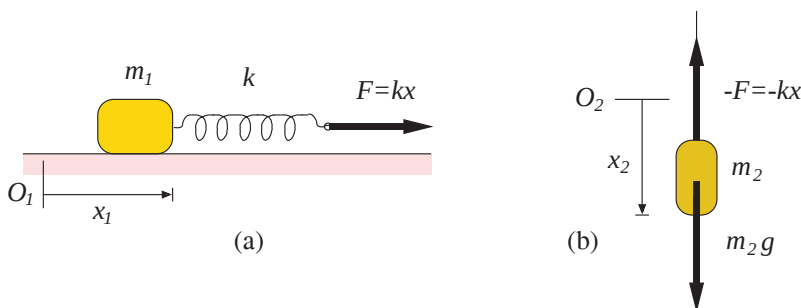


Els dos blocs estan inicialment en repòs però, a $t = 0$, tallem el fil que lliga el primer bloc a la paret. Estudieu la velocitat de la caiguda del segon bloc en funció del temps.

Solució

Aquest problema és semblant al 1.10. En les dues figures següents estan representats els dos blocs per separat. A la figura 3.24 (a) es mostra el bloc de massa m_1 i la coordenada x_1 que dona la seva posició sobre la taula; també es mostra la força F que s'exerceix sobre ell: si la molla està estirada la longitud x , llavors tenim que $F = kx$. A la figura 3.24 (b) està indicada la coordenada x_2 que mesura la posició vertical del bloc de massa m_2 i les dues forces a què aquest està sotmès: el pes m_2g i la tensió de la corda, que és, en mòdul, la mateixa F que fa la molla sobre m_1 , però de sentit contrari.

Figura 3.24



Així doncs, l'aplicació de la segona llei de Newton i la relació entre F i x proporcionen les equacions

$$F = m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} \quad (1)$$

$$m_2 g - F = m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} \quad (2)$$

$$F = kx \quad (3)$$

D'altra banda, les coordenades x_1 i x_2 estan relacionades amb x de la forma: $x_2 = x_1 + x + C$, on C és una constant que depèn de la longitud del fil. Derivant aquesta equació dues vegades n'obtenim

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} = \frac{d^2 x_1}{dt^2} + \frac{d^2 x}{dt^2} \quad (4)$$



Tenim, doncs, quatre incògnites, x_1 , x_2 , x i F , i quatre relacions entre elles: ja podem re-soldre el problema. Substituint (1), (3) i (4) a (2), i operant, obtenim l'equació diferencial

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{\mu}x = g \quad \text{amb la massa reduïda} \quad \frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \quad (5)$$

L'equació (5) és molt semblant a l'equació diferencial del MHS d'una massa μ lligada a una molla de constant k . L'única diferència és que a la (5) hi ha g on a la del MHS hi ha 0. Per tant, podem esperar que la funció solució de (5) sigui molt semblant a la d'un MHS. En efecte, la solució de (5) és del tipus: $x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi) + B$, on $\omega_0^2 = k/\mu$, i en què B és una constant que hem de determinar. Això ho fem substituint aquesta funció a (5) i comprovant que se satisfà la igualtat si $B = \mu g/k$. En conseqüència, $x(t)$ queda com

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi) + \frac{\mu g}{k} \quad (6)$$

en què A i ϕ queden determinades per les condicions inicials. Segons l'enunciat tenim que:

- A $t = 0$, els blocs estaven en equilibri: $kx(0) = m_2 g$. I per (6) queda, doncs, la condició

$$A \cos \phi = \frac{(m_2 - \mu)g}{k}$$

- A $t = 0$, els blocs estaven en repòs: $v(0) = 0$. Derivant (6) obtenim

$$0 = -\omega_0 A \sin \phi$$

D'aquestes dues últimes equacions trobem $\phi = 0$ i $A = (m_2 - \mu)g/k$, amb la qual cosa l'elongació de la molla (6) podem posar-la com

$$x(t) = \frac{\mu g}{k} \left(1 + \frac{m_2}{m_1} \cos \omega_0 t \right) \quad (7)$$

Pel que fa al moviment del segon bloc, ara només hem de combinar l'equació (2) amb la (3) i substituir a la (3) la x per la donada a (7); és a dir,

$$\frac{d^2x_2}{dt^2} = g - \frac{k}{m_2}x \quad \text{d'on} \quad \frac{dv_2}{dt} = \frac{m_2 g}{m_1 + m_2} (1 - \cos \omega_0 t)$$

Integrant aquesta última considerant que la velocitat inicial és 0, trobem la velocitat v_2 de "caiguda" del segon bloc

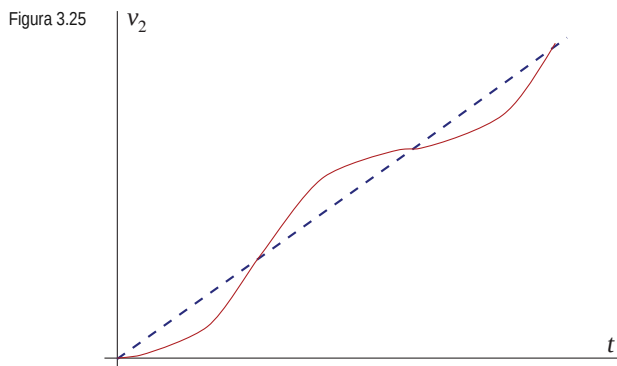
$$v_2 = \frac{m_2 g}{m_1 + m_2} \left(t - \frac{1}{\omega_0} \sin \omega_0 t \right) \quad (8)$$

Observem que la primera part d'aquesta igualtat

$$v_2^{no} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} g t \quad (9)$$

és la que correspon a la caiguda que faria el bloc si no hi hagués molla o aquesta fos inextensible. Per tant, l'efecte que fa la molla sobre el moviment és superposar a la caiguda que faria el bloc sense molla un MHS de freqüència ω_0 i amplitud $A' = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \frac{g}{\omega_0^2}$.

A la figura 3.25 s'han representat en funció del temps les velocitats d'aquests dos moviments: a) en línia discontinua, el cas en què no hi hagués la molla —expressió (9)—, i b) en línia contínua, el cas en què hi hagués la molla —expressió (8).

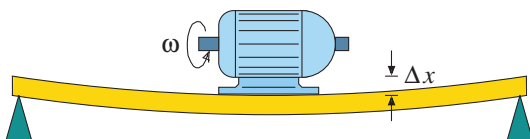


3.7.2. Problemes proposats

Problema 3.10. Motor sobre una biga

Després de collar un motor elèctric giratori de $m = 18$ kg de pes a una biga horitzontal, aquesta s'ha flexionat $\Delta x = 6$ mm —v. figura 3.26.

Figura 3.26



- Si no és convenient que la biga es flexioni gaire, quina velocitat angular, en revolucions per minut (rpm), cal evitar especialment?
- Si el rotor giratori del motor, que pesa $M = 8$ kg, està descentrat $a = 0,5$ cm respecte de l'eix de rotació, quina amplitud tindran les oscil·lacions de la biga quan estigui funcionant el motor a 350 rpm?

Resp.: a) $\omega = \sqrt{\frac{g}{\Delta x}} = 386$ rpm, b) $A = \frac{M}{m} \frac{a\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2} = 1,02$ cm

Problema 3.11. Conduint sobre dunes ondulades

Un cotxe tot-terreny —v. figura 3.27— té en els amortidors molles que, descansant sobre els eixos de les rodes, suporten el pes del cotxe carregat, $m = 2100$ kg —excepte les rodes i els eixos. La constant de força conjunta d'aquestes molles és $k = 1,5 \times 10^5$ N/m.

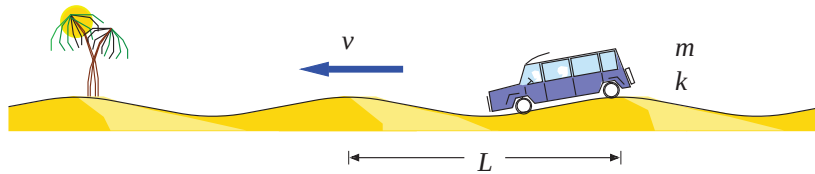


Figura 3.27

Si aquest cotxe es desplaça uniformement per un terreny sinuós —les dunes del desert— i la distància entre màxims és $L = 15$ m, quina velocitat hauria d'evitar especialment el conductor per tal que càrrega i passatgers no vibressin excessivament per l'efecte de les oscil·lacions forçades pel terreny?

Resp.: $20,2 \text{ m/s} = 72,6 \text{ km/h}$

Problema 3.12. Excursionista a l'aigua!

Per poder travessar un riu estret hi ha un tauló llarg que va d'un marge fins a l'altre. Un excursionista caminant molt a poc a poc, amb prudència, arriba fins al mig, s'atura i observa que el tauló s'ha flexionat “només” 12 cm. Creu que és poc, agafa confiança i segueix cap a l'altre costat de la riera com si res, despreocupat, caminant a $3,8 \text{ km/h}$. Però el tauló comença a vibrar i l'excursionista cau a l'aigua. Quina part de la física haurà recordat en caure a l'aigua? Quina longitud tenien els seus passos sobre el tauló?

Resp.: Uns 73 cm

Problema 3.13. Oscil·lacions amortides i forçades

Un oscil·lador harmònic feblement amortit de massa $m = 0,1 \text{ kg}$ i constant de força $k = 394,8 \text{ N/m}$, perd, després de cada oscil·lació lliure, un 2% de la seva amplitud. Si hi apliquem una força impulsora sinusoïdal d'amplitud $F_0 = 1 \text{ N}$ per tal que les oscil·lacions no s'esmoreixin, esbrineu:

- Quina ha de ser la freqüència f d'aquesta força si volem que l'oscil·lador en tregui el màxim profit?
- Quant valdrà el factor de qualitat Q del sistema?
- Quant valdrà, en aquestes circumstàncies, la seva impedància Z , l'amplitud A de les oscil·lacions estacionàries, així com la potència transmesa a l'oscil·lador?

Resp.: a) $f = 10 \text{ Hz}$, b) $Q = 155,5$, c) $Z = 0,04040 \text{ kg/s}$, $A = 0,3939 \text{ m}$, $P = 12,4 \text{ W}$

Problema 3.14. Oscil·lació forçada d'una partícula

Una partícula de massa $m = 0,050 \text{ kg}$, unida a una molla de constant $k = 160 \text{ N/m}$, fricciona amb un fluid viscos en què la constant d'amortiment és $b = 2 \text{ kg/s}$. Si sobre la partícula actua una força impulsora externa sinusoïdal d'amplitud $F_0 = 2 \text{ N}$ i freqüència $\omega = 40 \text{ rad/s}$, esbrineu:

- la impedància Z del sistema;
- l'amplitud A de l'oscil·lació estacionària i de la seva velocitat, ωA ;



- c) l'angle de desfasament ε entre la força impulsora i la velocitat;
- d) la freqüència angular a la qual hi hauria ressonància;
- e) l'amplitud de la velocitat i de l'elongació que tindrien les oscil·lacions en aquest últim cas.

Resp.: a) $Z = 2,83 \text{ kg/s}$, b) $\omega A = 0,707 \text{ m/s}$, $A = 0,0177 \text{ m}$, c) $\varepsilon = -\frac{\pi}{4} \text{ rad}$,

d) $\omega_0 = 56,6 \text{ rad/s}$, e) $V_{0\text{RES}} = 1,00 \text{ m/s}$, $A_{0\text{RES}} = 0,0177 \text{ m}$

Problema 3.15. Més sobre oscil·lacions forçades

Un oscil·lador està constituït per una partícula de massa $m = 0,050 \text{ kg}$, unida a una molla de constant $k = 800 \text{ N/m}$. El sistema fricciona amb un fluid viscos en què la constant d'amortiment és $b = 1,5 \text{ kg/s}$. Si sobre la partícula actua una força impulsora externa harmònica d'amplitud $F_0 = 20 \text{ N}$ i freqüència angular $\omega = 100 \text{ rad/s}$, esbrineu:

- a) la impedància Z del sistema i l'angle de desfasament ε entre la força impulsora i la velocitat;
- b) la potència mitjana subministrada per la força externa a l'oscil·lador; quin tant per cent representa aquesta potència respecte a la màxima que s'aconseguiria en la ressonància?
- c) Per a quina freqüència ω hi hauria ressonància? I per sobre de quina freqüència la potència mitjana subministrada és inferior al 50% de la potència de la ressonància?

Resp.: a) $Z = 3,354 \text{ kg/s}$, $\varepsilon = -63,43^\circ$, b) $\langle P \rangle = 26,67 \text{ W}$, 20,0%,

d) $\omega = 126,49 \text{ rad/s}$, $\omega = 141,49 \text{ rad/s}$

Problema 3.16. Oscil·lacions forçades a causa del moviment d'una plataforma

Un bloc de massa $m = 0,1 \text{ kg}$ es penja de l'extrem inferior d'una molla de constant $k = 600 \text{ N/m}$, que tenim agafada verticalment a una plataforma per l'altre extrem. Aquesta plataforma fa un MHS vertical d'amplitud $a = 3 \text{ cm}$. Fent diverses proves amb la freqüència d'oscil·lació de la plataforma comprovem que la màxima amplitud del moviment oscil·latori del bloc val $A = 12 \text{ cm}$. Quant valen el factor de qualitat Q d'aquest sistema i la potència mitjana subministrada a l'oscil·lador?

Resp.: $Q = 4,0$, $\langle P \rangle = 83,7 \text{ W}$

Problema 3.17. Oscil·lador molt amortit forçat

Una partícula de massa $m = 1 \text{ g}$ està unida a una molla de constant recuperadora $k = 5,0 \text{ N/cm}$ i a un amortidor. Quan la partícula oscil·la, a causa de l'amortiment, ho fa amb una freqüència que és un 90% de la seva freqüència pròpia.

- a) En quin factor disminueix la seva energia després de cada oscil·lació?
- b) Si li apliquem una força externa harmònica de freqüència la de ressonància, quant ha de valer l'amplitud F_0 de la força externa per tal que la partícula oscil·li amb una amplitud constant de 2 cm ?
- c) Quant val, en aquest cas, la potència P transmesa de la força externa a la partícula?



- d) A quina freqüència de la força externa l'amplitud de l'oscil·lació es faria màxima i quant valdria en aquest nou cas, suposant que l'amplitud de la força fos la F_0 trobada a l'apartat (b)?

Resp.: a) 0,227%, b) $F_0 = 8,72 \text{ N}$, c) $P = 61,6 \text{ W}$, d) 88,6 Hz, 2,22 m

Problema 3.18. Estat transitori, impedància i ressonància

Un cos de massa $m = 0,010 \text{ kg}$ està lligat a una molla de constant de força $k = 0,050 \text{ N/m}$ i a un petit amortidor de constant $b = 0,030 \text{ kg/s}$. Si sobre aquest cos apliquem una força harmònica d'amplitud $F_0 = 0,10 \text{ N}$ i de freqüència angular $\omega = 50 \text{ rad/s}$, esbrineu, per al moviment del cos en l'estat estacionari:

- la impedància mecànica i l'amplitud de la velocitat i de l'elongació.
- Per a quina freqüència angular la partícula entraria en ressonància i quant valdria, en aquest cas, la velocitat màxima de la partícula? I l'amplitud de l'elongació corresponent?
- Per cert, d'un oscil·lador d'aquestes característiques, quant dura l'estat transitori?

Resp.: a) 0,500 kg/s, 0,200 m/s, 4,00 mm,
b) $\omega_{RES} = 2,24 \text{ rad/s}$, 3,33 m/s, 1,49 m, c) Entre 3,5 i 5 s

Problema 3.19. Simetria del pic de la potència mitjana

Considerem un oscil·lador amortit forçat per una força impulsora harmònica de freqüència ω i sigui ω_0 la freqüència de la ressonància.

- Demostreu que la potència mitjana subministrada a l'oscil·lador és la mateixa, tant si $\omega = \kappa\omega_0$ com si $\omega = \omega_0/\kappa$, on $\kappa > 0$. Observeu la gràfica de la figura 3.14 i interpreteu geomètricament aquest resultat.
- Fent les aproximacions necessàries, demostreu que, en un entorn petit del màxim —on $\kappa = 1$ — la gràfica de la potència és simètrica.

Problema 3.20. Gràfica del pic de la potència

A la figura 3.28 s'ha representat la potència mitjana $\langle P \rangle$ que adquireix un oscil·lador forçat en funció de la freqüència angular ω de la força externa.

- Observeu la gràfica. Quant val, aproximadament, el factor de qualitat Q del sistema?
- Si la freqüència de ressonància fos als 160 rad/s, quant valdria, en aquest cas, el paràmetre d'amortiment β ?

Resp.: $Q \approx 8$, $\beta \approx 10 \text{ s}^{-1}$

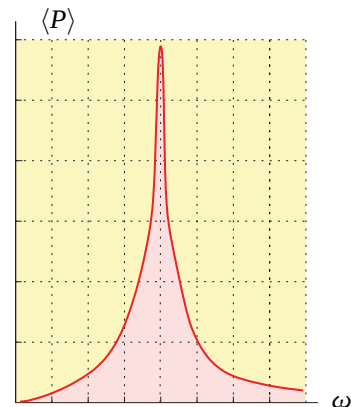


Figura 3.28



Problema 3.21. Potència d'un oscil·lador forçat

La freqüència natural d'un oscil·lador forçat és de 250 Hz i el seu paràmetre d'amortiment $\beta = 10 \text{ s}^{-1}$.

- Esbrineu-ne el factor de qualitat Q i l'amplada de la ressonància.
- A partir de quina freqüència superior a la natural la potència mitjana absorbida per l'oscil·lador és inferior a la meitat de la corresponent en la ressonància?

Resp.: a) $Q = 78,5$, $\Delta f = 3,18 \text{ Hz}$, b) $f_{1/2} = 251,6 \text{ Hz}$

Problema 3.22. Oscil·lacions amortides i forçades

Disposem de dues molles, la 1 i la 2, de constants de força $k_1 = 200 \text{ N/m}$ i $k_2 = 100 \text{ N/m}$, respectivament, i un bloc de ferro de $m = 2 \text{ kg}$. Pengem la molla 1 del sostre i la 2 a continuació de la 1. Després, pengem de l'extrem inferior de la 2 la massa i la deixem caure pel seu propi pes per tal que comenci a oscil·lar. Sabent que el moviment és molt poc amortit, esbrineu:

- En quina proporció del total s'allargaran cadascuna de les dues molles durant el moviment?
- Quanta energia tindrà inicialment el sistema? Supposeu l'origen d'energia potencial en el punt d'equilibri.
- Si també sabem que cada 10 oscil·lacions l'amplitud es redueix a $3/5$ de la inicial, quant val la constant d'amortiment del sistema?
- Trobeu la potència mitjana que es dissipa a l'inici de l'oscil·lació n -ésima.
- A partir d'ara, per mitjà d'un electroimant, volem provocar oscil·lacions forçades verticals en el bloc de ferro. Entre quins valors màxim i mínim ha d'estar la freqüència de la força harmònica externa aplicada per tal que la potència mitjana transmesa a l'oscil·lador sigui més gran que la meitat de la màxima possible?
- Suposem que ajustem els paràmetres de la força externa per tal que el sistema estigui en ressonància. Amb una amplitud de la força externa de $0,10 \text{ N}$, quina amplitud arribaran a tenir les oscil·lacions forçades estacionàries?
- Continuant en condicions de ressonància, 50 oscil·lacions després que s'hi hagi aplicat la força externa, estaran aquestes plenament en l'estat estacionari?

Resp.: a) $\frac{x_1}{x} = \frac{1}{3}$, $\frac{x_2}{x} = \frac{2}{3}$, b) $E_0 = 2,89 \text{ J}$, c) $b = 0,188 \text{ kg/s}$,

d) $P(n) = -0,271 e^{-0,102 \cdot n} \text{ W}$, e) $0,911 \leq f \leq 0,926 \text{ Hz}$,

f) $A_R = 9,23 \text{ cm}$, g) Encara no: $50 \cdot T_0 = 54,4 \text{ s} < 3 \frac{1}{\beta} = 63,9 \text{ s}$

Problema 3.23. Rotor desequilibrat

Un motor de massa $M = 40 \text{ kg}$ es troba sobre quatre molles iguals de constant $k = 2800 \text{ N/cm}$ —v. figura 3.29. El rotor d'aquest motor, que gira a una velocitat angular de $\omega = 1200 \text{ rpm}$, té un desequilibri equivalent a una massa $m = 100 \text{ g}$ situada a $r = 15 \text{ cm}$ de l'eix de gir.



- a) Suposant que aquest motor només pot vibrar verticalment, trobeu l'amplitud d'aquestes oscil·lacions forçades. El motor porta un amortidor de constant $b = 800 \text{ kg/s}$.
- b) A quantes rpm del rotor es produiria la ressonància i quant valdria, en aquest cas, l'amplitud de les oscil·lacions forçades?

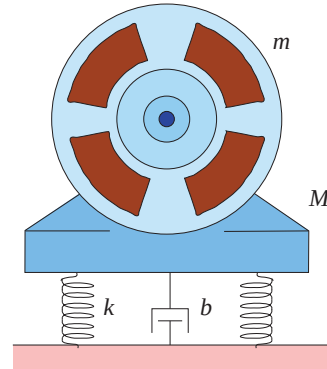


Figura 3.29

Resp.: a) $A = 0,475 \text{ mm}$,
 b) $f_{RES} = 1598 \text{ rpm}$,
 $A_{RES} = 3,14 \text{ mm}$

Problema 3.24. Oscil·lacions angulars forçades en una barra

Una barra de massa $m = 4 \text{ kg}$ i longitud $2L = 2 \text{ m}$ que, com es mostra a la figura 3.30, està lligada per un dels extrems a una molla vertical de constant $k = 4000 \text{ N/m}$ pot girar al voltant del seu punt mitjà O . La barra també està connectada a un petit amortidor de constant d'amortiment $b = 20 \text{ kg/s}$ a la distància $a = 0,50 \text{ m}$ de O . Si a l'altre extrem de la barra aquesta té aplicada una força impulsora harmònica de mòdul $F_0 = 75 \text{ N}$ i freqüència $f = 10 \text{ Hz}$, esbrineu:

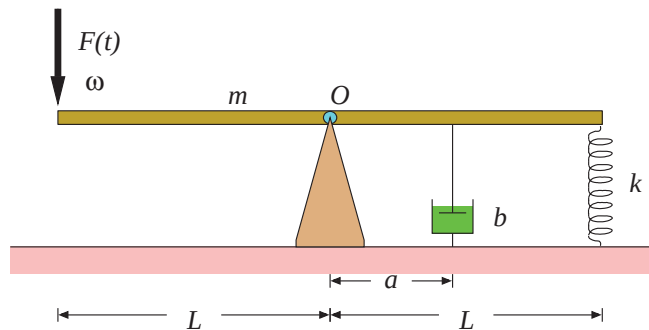


Figura 3.30

- a) L'equació diferencial del moviment de la barra. Quina és la freqüència pròpia de la barra?
- b) Quant valen analíticament i numèricament, en aquest cas, el paràmetre d'amortiment β i la impedància Z , aquesta última definida tal que $L\dot{\Theta} = F_0/Z$, essent $\dot{\Theta}$ l'amplitud de la velocitat angular de les oscil·lacions?
- c) L'amplitud angular de les oscil·lacions estacionàries.
- d) L'amplitud que tindrien en la ressonància.

Resp.: a) $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \left(\frac{3a^2b}{mL^2}\right) \frac{d\theta}{dt} + \left(\frac{3k}{m}\right) \theta = \frac{3F_0}{mL} \cos \omega t$, $f_0 = 8,72 \text{ Hz}$,

$$b) \beta = \frac{3a^2b}{2mL^2} = 1,88 \text{ s}^{-1}, Z = \sqrt{\left(\frac{m\omega}{3} - \frac{k}{\omega}\right)^2 + \frac{a^4b^2}{L^4}} = 20,7 \text{ kg/s},$$

$$c) \Theta = 3,30^\circ, \quad d) \Theta_{RES} = 13,68^\circ$$

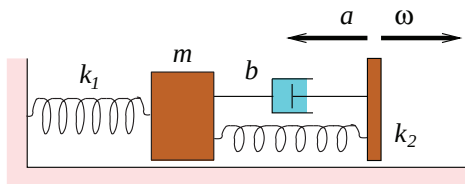
Problema 3.25. Pèndol simple forçat

El punt de suspensió d'un pèndol simple de longitud L i lentilla de massa m es desplaça horitzontalment efectuant un MHS d'amplitud a i freqüència angular ω : $x'(t) = a \sin \omega t$. Comproveu que, per a les petites oscil·lacions del pèndol, aquest es comporta com un oscil·lador lineal forçat per una força de tipus: $F(t) = mg \frac{a}{L} \cos \omega t$.

Problema 3.26. Oscil·lacions forçades per un MHS extern

Un petit bloc de massa m està lligat a una paret fixa per una molla de constant k_1 i a una paret mòbil vibratòria per una molla de constant k_2 i un amortidor de constant b —v. figura 3.31. Si l'oscil·lació de la paret és del tipus $x'(t) = a \cos \omega t$, trobeu l'equació de moviment de l'oscil·lació forçada que fa el bloc.

Figura 3.31



Resp.:
$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k_1 + k_2}{m} x = -\frac{F_0}{m} \sin(\omega t + \alpha),$$

amb $F_0 = a \sqrt{k_2^2 + b^2 \omega^2}$, $\tan \alpha = \frac{-k_2}{b\omega}$

Problema 3.27. Amplada de la ressonància

Demostreu l'expressió (3.39) — $\Delta\omega = 2\beta$ — sobre l'amplada de la ressonància.

Problema 3.28. Oscil·lacions i força externa no periòdica

Un sistema consta d'una massa m unida a una molla de constant de força k , sense que hi hagi amortiment. Inicialment, la massa estava en repòs a l'origen i, a partir de $t = 0$, s'hi aplica una força externa en la direcció x del moviment de la massa, de la forma

$$F(t) = F_0 e^{-\gamma t}$$

on F_0 i γ són dues constants. a) Quin moviment $x(t)$ farà la massa com a resposta a la força aplicada? Comproveu per substitució directa a l'equació diferencial del moviment que $x(t)$ és del tipus

$$x(t) = A e^{-\gamma t} + B \sin \omega_0 t + C \cos \omega_0 t$$

on $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, i A , B i C són constants que s'han de determinar.

b) Interpreteu la funció anterior. i) Hi ha un estat transitori i un estat estacionari? ii) Té sentit aquí el concepte de ressonància?

Resp.: a) $A = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 + \gamma^2)}$, $B = \frac{\gamma}{\omega_0}$, $C = -1$. b) i) Sí, n'hi ha. ii) No té sentit.



Superposició de MHS

4.1. Linealitat i superposició

Considerem un oscil·lador forçat per una força impulsora $F_1(t)$ i sigui $x_1(t)$ l'elongació resultant de la partícula. De cara al que veurem a continuació, la força $F_1(t)$ no té per què ser necessàriament sinusoidal, ni tan sols periòdica. Amb la notació de la secció §3.1 sobre oscil·lacions forçades, sabem que l'equació del moviment que ha de satisfer la funció $x_1(t)$ és

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} + 2\beta \frac{dx_1}{dt} + \omega_0^2 x_1 = \frac{1}{m} F_1(t)$$

Com ja hem vist aquesta és una equació diferencial *lineal*, és a dir, la funció solució $x_1(t)$, la seva derivada i la seva segona derivada estan elevades a la potència 1 (o zero). Aquesta condició de linealitat de l'equació diferencial és molt important perquè, com veurem a continuació, simplifica molt la recerca de solucions i l'estudi del moviment.

Considerem el mateix oscil·lador, però sotmès ara a una altra força impulsora, la $F_2(t)$, i sigui $x_2(t)$ l'elongació de la partícula en aquestes noves circumstàncies. L'equació diferencial per a $x_2(t)$ és ara

$$\frac{d^2x_2}{dt^2} + 2\beta \frac{dx_2}{dt} + \omega_0^2 x_2 = \frac{1}{m} F_2(t)$$

Què passaria si aquest mateix oscil·lador estigués sotmès a la força impulsora $F = F_1 + F_2$? Doncs que l'elongació x que seguiria la partícula és, precisament, $x = x_1 + x_2$. Comprovem-ho.

Si a l'equació diferencial corresponent a $F = F_1 + F_2$ substituïm $x = x_1 + x_2$, tenim

$$\begin{aligned} & \frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \\ &= \frac{d^2(x_1 + x_2)}{dt^2} + 2\beta \frac{d(x_1 + x_2)}{dt} + \omega_0^2 (x_1 + x_2) = \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{d^2 x_1}{dt^2} + 2\beta \frac{dx_1}{dt} + \omega_0^2 x_1 \right) + \left(\frac{d^2 x_2}{dt^2} + 2\beta \frac{dx_2}{dt} + \omega_0^2 x_2 \right) = \\
&= \frac{1}{m} F_1 + \frac{1}{m} F_2 = \frac{1}{m} F
\end{aligned}$$

Aquest resultat, conseqüència de la *linealitat* d'aquestes equacions diferencials, s'anomena *principi de superposició*. Naturalment, el que hem fet es pot estendre a més de dues funcions força $F_n(t)$ i, fins i tot, no tenen per què tenir la mateixa direcció. Així doncs, el principi de superposició ens assegura que:

Si, sota l'acció d'una sola força impulsora $F_n(t)$, el moviment és $r_n(t)$, si actuen simultàniament totes les forces $F_n(t)$ el moviment resultant serà la suma dels moviments individuals $r_n(t)$, amb $n = 1, 2, \dots, N$, és a dir,

$$\begin{aligned}
\text{si } F_n(t) &\implies r_n(t) \\
\text{si } \sum_{n=1}^N F_n(t) &\implies \sum_{n=1}^N r_n(t)
\end{aligned}$$

4.2. Superposició de dos MHS de la mateixa direcció

Considerem un oscil·lador sotmès a una força impulsora externa harmònica $F_1(t)$ de freqüència angular ω_1 . En l'estat estacionari, el moviment de la partícula és de la mena

$$x_1(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) \quad (4.1)$$

Considerem ara el mateix oscil·lador sotmès a una altra força impulsora harmònica $F_2(t)$ de la mateixa direcció que F_1 però de freqüència angular ω_2 . En l'estat estacionari el moviment de la partícula serà

$$x_2(t) = A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) \quad (4.2)$$

Pel principi de superposició que hem vist a la secció anterior, sabem que, si ara actuen totes dues forces $F = F_1 + F_2$ sobre l'oscil·lador, l'elongació x de la partícula val

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) \quad (4.3)$$

Sense que ens importi l'origen de x_1 i de x_2 a partir d'ara estudiarem les propietats que presenta $x(t)$, el moviment resultant de la superposició de x_1 més x_2 .

Segons quine siguin les freqüències ω_1 i ω_2 , podem considerar tres casos particulars.

4.2.1. Freqüències iguals

És a dir, que $\omega_1 = \omega_2 = \omega$. Aquest cas és el més senzill perquè el moviment resultant és un altre MHS de freqüència ω i d'amplitud A i fase inicial ϕ . Vegem-ho.

Fent els desenvolupaments trigonomètrics corresponents:

$$\begin{aligned}
x &= x_1 + x_2 = \\
&= A_1 \cos(\omega t + \phi_1) + A_2 \cos(\omega t + \phi_2) =
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &= A_1(\cos \omega t \cos \phi_1 - \sin \omega t \sin \phi_1) + A_2(\cos \omega t \cos \phi_2 - \sin \omega t \sin \phi_2) = \\
 &= \cos \omega t \cdot (A_1 \cos \phi_1 + A_2 \cos \phi_2) - \sin \omega t \cdot (A_1 \sin \phi_1 + A_2 \sin \phi_2) \equiv \\
 &\equiv A \cos(\omega t + \phi) = \\
 &= \cos \omega t \cdot A \cos \phi - \sin \omega t \cdot A \sin \phi
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

Identificant els coeficients de $\cos \omega t$ i $\sin \omega t$, tenim

$$A \cos \phi = A_1 \cos \phi_1 + A_2 \cos \phi_2$$

$$A \sin \phi = A_1 \sin \phi_1 + A_2 \sin \phi_2$$

d'on, elevant al quadrat i sumant, resulten A i ϕ . Per tant, queda demostrat que el moviment és un MHS amb

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\phi_1 - \phi_2) \tag{4.5}$$

$$\tan \phi = \frac{A_1 \sin \phi_1 + A_2 \sin \phi_2}{A_1 \cos \phi_1 + A_2 \cos \phi_2} \tag{4.6}$$

Malgrat que ja hem vist trigonomètricament que el moviment resultant és un MHS, és molt enriquidor tornar a veure això mateix però des del punt de vista dels fasors.

Recordem que un fasor —v. secció §1.1.1— és un vector situat a l'origen que gira a una velocitat angular constant i que, per tant, la seva component x fa un MHS. Així doncs, tal com s'indica a la figura 4.1, considerem dos fasors, el A_1 i el A_2 , de mòduls A_1 i A_2 , que giren amb la mateixa velocitat angular ω . Les seves fases inicials són, respectivament, ϕ_1 i ϕ_2 , i l'angle constant que formen entre si és $\Delta\phi = \phi_1 - \phi_2$.

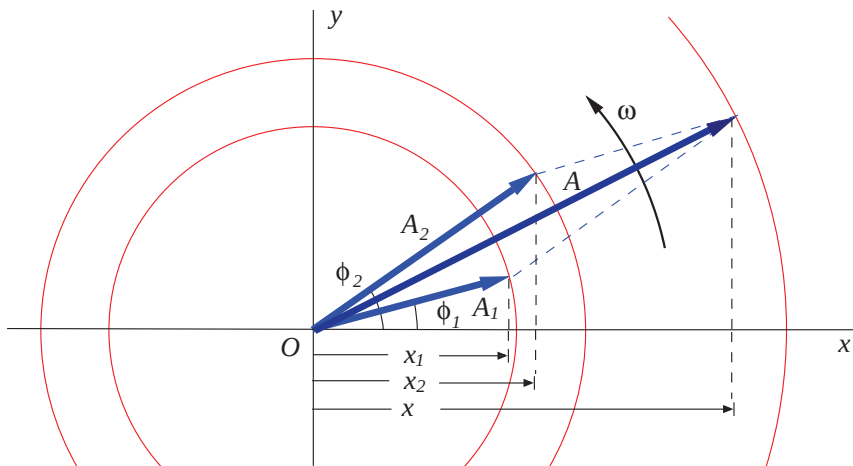


Figura 4.1

Les components x respectives de cadascun dels dos fasors representen dos MHS d'amplituds A_1 i A_2 i fases inicials ϕ_1 i ϕ_2 , respectivament. La suma d'aquests dos fasors és un altre fasor, $A = A_1 + A_2$ i, com que la component x de la suma de dos vectors és la suma de les components x de cadascun d'ells, llavors la component x del fasor A és la suma dels dos MHS, x_1 més x_2 . Consegüentment, el moviment resultant és un altre MHS

de la mateixa freqüència l'amplitud i la fase inicial del qual podem trobar per la regla de la suma de vectors. Naturalment, aquests resultats coincideixen amb els (4.5) i (4.6) anteriors.

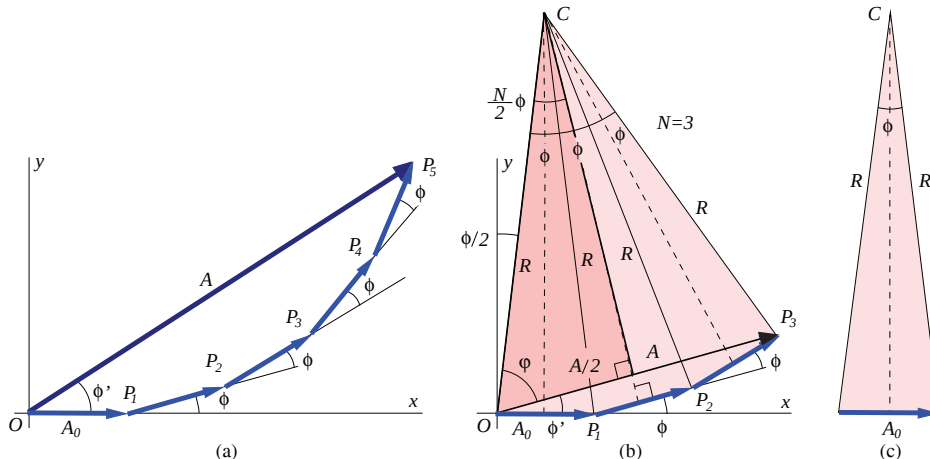
4.2.2. Superposició de N MHS proporcionalment desfasats

Una extensió especialment interessant del que acabem de veure és el cas de la superposició de N MHS de la mateixa direcció, la mateixa freqüència i la mateixa amplitud, desfasats entre si un múltiple enter del mateix angle ϕ . Pel que acabem de veure, sabem que el moviment resultant serà un nou MHS. Així doncs, tenim que

$$\begin{aligned} x(t) &= A_0 \cos \omega t + A_0 \cos(\omega t + \phi) + A_0 \cos(\omega t + 2\phi) + \dots + A_0 \cos(\omega t + (N-1)\phi) = \\ &\equiv A \cos(\omega t + \phi') \end{aligned} \quad (4.7)$$

Ara només es tracta de trobar els valors de A i ϕ' . Com en la secció anterior, podem intentar-ho amb desenvolupaments trigonomètrics però, per mitjà dels fasors, és bastant més fàcil i formatiu. En efecte, com hem vist abans, el MHS resultant és el corresponent al vector-fasor suma dels N MHS constituents. Tenint en compte que tots els fasors-MHS són de la mateixa amplitud A_0 i que tots estan desfasats de l'anterior l'angle ϕ , la geometria del problema és molt senzilla. A la figura 4.2 (a) es mostra, per al cas $N = 5$, el fasor del MHS resultant com la suma dels $N = 5$ fasors participants. Fixem-nos com el fasor i forma un angle ϕ amb la direcció de l'anterior $i - 1$. L'amplitud A del MHS resultant és el mòdul del vector-fasor $\overrightarrow{OP_5}$, suma de $\overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{P_1P_2}, \dots$, etc.

Figura 4.2



Per trobar el valor de A només cal que tracem rectes perpendiculars als fasors que passin pels respectius centres —línies discontinúes a la figura 4.2 (b), en què es mostra el cas per a $N = 3$, així com el triangle corresponent a 1 fasor, figura 4.2 (c). Totes aquestes rectes es tallen en el mateix punt C . Com que tots els fasors tenen el mateix mòdul A_0 i es van desviant uniformement, la successió de fasors determina un arc de circumferència de centre a C , radi R i un angle, en general, $N\phi$. Observem que el centre C és a la dreta de l'eix y . Dels angles rectes corresponents —v. figures (b) i (c) anteriors— trobem

$$\sin \frac{N\phi}{2} = \frac{A/2}{R}, \quad \sin \frac{\phi}{2} = \frac{A_0/2}{R}$$



d'on resulta

$$A = A_0 \frac{\sin \frac{N\phi}{2}}{\sin \frac{\phi}{2}} \quad (4.8)$$

I, pel que fa al desfasament ϕ' , de les mateixes figures anteriors veiem que $\phi' = 90^\circ - \frac{\phi}{2} - \varphi$, essent $\varphi = 90^\circ - \frac{N\phi}{2}$, és a dir, que

$$\phi' = (N-1) \frac{\phi}{2} \quad (4.9)$$

El resultat (4.8) és important per si mateix, però sobre amb vista a l'estudi de les interferències d'ones harmòniques degudes a N fonts coherents i al de la difracció d'una ona per una esclatxa rectangular.

4.2.3. Freqüències diferents

El cas general de freqüències diferents el podem tractar com acabem de fer per al cas de les freqüències iguals. Tant si ho fem per trigonometria com si ho fem per la suma dels dos fasors —ara de velocitats angulars diferents—, veiem que l'expressió equivalent a la (4.5) per a l'amplitud A del moviment és

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos\{(\omega_1 - \omega_2)t + (\phi_1 - \phi_2)\} \quad (4.10)$$

i, en conseqüència, el moviment no serà un MHS. A passa per un mínim, $|A_2 - A_1|$; per un màxim, $A_1 + A_2$, i per tots els valors intermedis.

És interessant assenyalar que, com en totes les superposicions de dos MHS, el moviment només serà periòdic si el període d'un, T_1 , i el període de l'altre, T_2 , estan en una relació de nombres enters, és a dir, si hi ha existeixen dos nombres enters n_1 i n_2 tals que $n_1 T_1 = n_2 T_2$. Si, de tots els enters n_1 i n_2 que satisfan la igualtat anterior, agafem els més petits, tindrem el mínim comú múltiple de T_1 i T_2 , és a dir, el període T del moviment resultant

$$T = n_{1_{\min}} T_1 = n_{2_{\min}} T_2$$

4.2.4. Freqüències lleugerament diferents. Pulsacions

Freqüències ω_1 i ω_2 lleugerament diferents vol dir que:

$$\omega_1 \neq \omega_2 \quad \text{però} \quad |\Delta\omega| = |\omega_1 - \omega_2| \ll \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = \omega \approx \omega_1 \approx \omega_2 \quad (4.11)$$

Aquest és un cas particular del que hem vist a §. Per tal de simplificar els càlculs trigonomètrics, suposarem, sense perdre generalitat, que les dues oscil·lacions tenen la mateixa amplitud A , la mateixa fase inicial i que aquesta és zero. Tindrem, doncs

$$\begin{aligned} x &= x_1 + x_2 = A \cos \omega_1 t + A \cos \omega_2 t = A(\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t) = \\ &= 2A \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right) \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right) \end{aligned} \quad (4.12)$$

que, amb la notació de (4.11), ens queda com

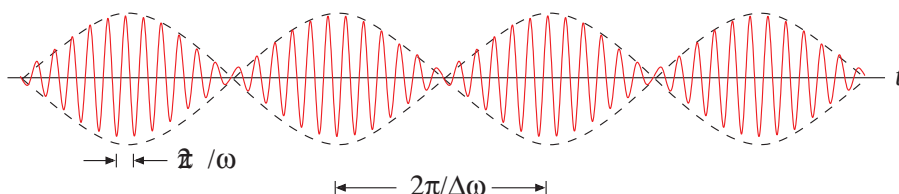
$$x(t) = 2A \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right) \cos\omega t \quad (4.13)$$

és a dir, una mena de moviment harmònic de freqüència ω molt semblant a les dues originals, ω_1 i ω_2 , però d'una *amplitud efectiva* A_{ef} donada per:

$$A_{ef} = 2A \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right) \quad (4.14)$$

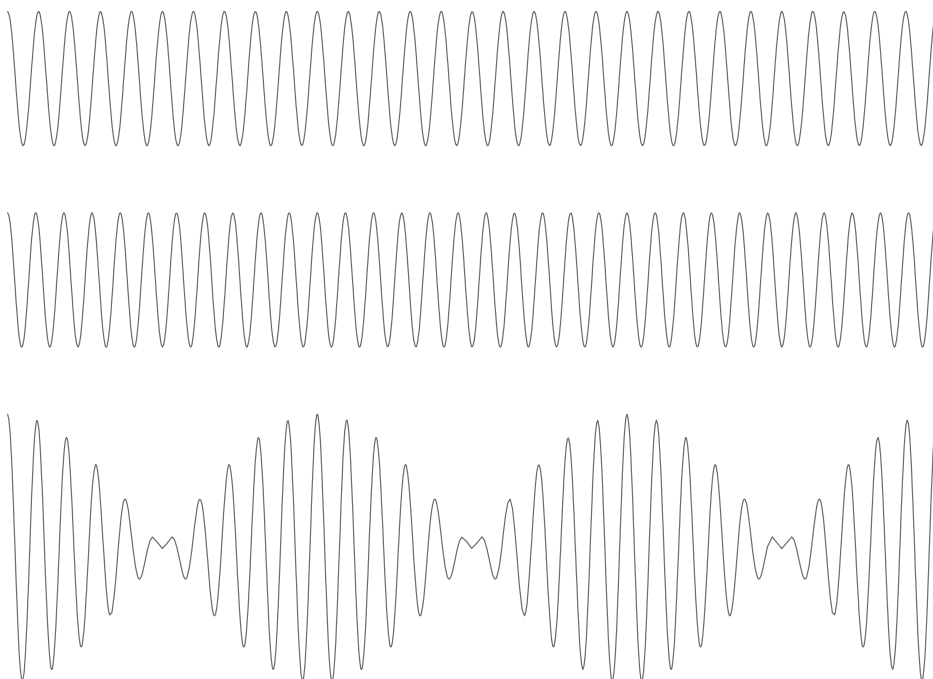
Tenim, doncs, una oscil·lació semblant a un MHS però amb una *amplitud modulada* d'una freqüència $\Delta\omega/2$. Aquest efecte s'anomena *pulsacions*. A la figura 4.3 s'hi ha representat la funció resultant $x(t)$ i el significat dels dos períodes $T = 2\pi/\omega$ i $T_p = 2\pi/\Delta\omega$. La freqüència $\omega_p = 2\pi/T_p = \Delta\omega$ s'anomena *freqüència de les pulsacions*.

Figura 4.3



A la figura 4.4 s'observen les pulsacions corresponents a la superposició de les dues oscil·lacions concretes: $x_1 = \cos 5t$, $x_2 = \cos 5,5t$.

Figura 4.4





4.3. Superposició de dos MHS de direccions perpendiculars

D'acord amb la freqüència considerem dos casos.

4.3.1. Freqüències iguals

Seria el cas en què les oscil·lacions fossin de la forma

$$x(t) = A \cos \omega t \quad (4.15)$$

$$y(t) = B \cos(\omega t + \phi) \quad (4.16)$$

on, sense perdre generalitat, hem pres la fase inicial del moviment de x com a zero. D'aquestes expressions, trobem

$$\frac{x}{A} = \cos \omega t \quad \frac{y}{B} = \cos(\omega t + \phi) = \cos \omega t \cos \phi - \sin \omega t \sin \phi$$

i, combinant les igualtats anteriors, s'arriba a

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - \frac{2xy}{AB} \cos \phi = \sin^2 \phi \quad (4.17)$$

Abans de continuar, recordem que l'equació general de les *còniques* és de la forma $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$; la cònica és una el·lipse si $b^2 - 4ac < 0$, i està centrada a l'origen si $d = e = 0$.

Així doncs, (4.17) és l'equació d'una *el·lipse* centrada a l'origen però d'eixos principals que no es corresponen als eixos x i y del sistema de coordenades.

Com que els màxims i els mínims de $x(t)$ i de $y(t)$ són, respectivament, $\pm A$ i $\pm B$, resulta que l'el·lipse està inscrita en un rectangle centrat de costats $2A \times 2B$. A les figures 4.5 (a) i (b), es mostren dos casos possibles d'aquestes el·lipses.

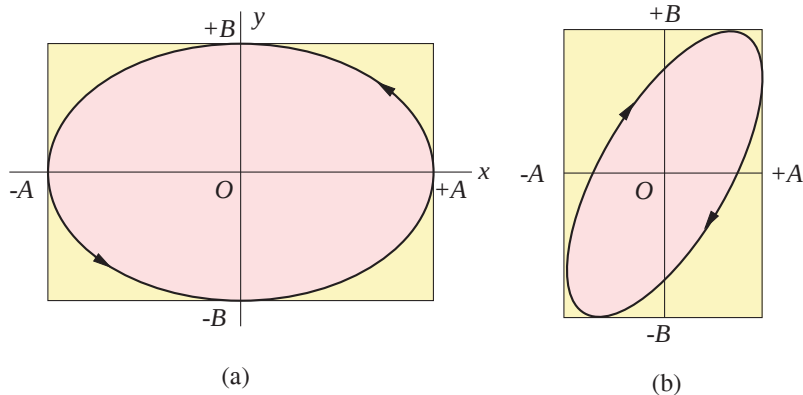
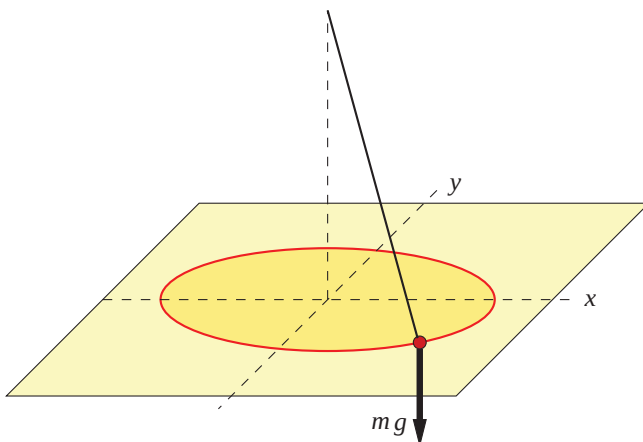


Figura 4.5

Fixeu-vos que un pèndol simple en què la lentilla es pugui moure lliurement en un pla horitzontal és un bon exemple de la superposició què estem tractant. En efecte, si en un pèndol simple desplaçem la lentilla del punt d'equilibri segons l'eix horitzontal x i la deixem anar comunicant-li una petita velocitat inicial segons l'altre eix horitzontal y ,

la partícula descriurà un moviment pendular segons x i un altre segons y , ambdós de la freqüència donada per (1.20), $\omega = \sqrt{g/L}$. Per tant, la trajectòria serà una el·lipse centrada en el punt d'equilibri com la que es mostra a la figura 4.6: tindrem un *pèndol cònic el·líptic*.

Figura 4.6



De totes les possibles el·lipses (4.17), en destaquen aquests dos casos:

- Quan $\phi = 0$, $\phi = \pi$.

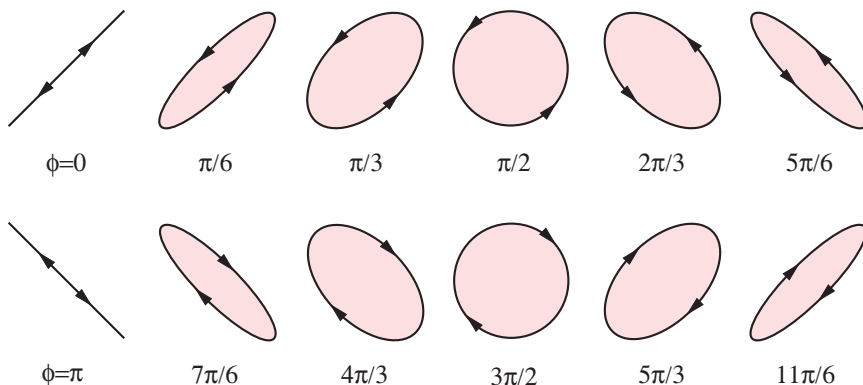
L'el·lipse degenera en una de les dues rectes: $y = \cos \phi \frac{B}{A} x = \pm \frac{B}{A} x$.

El moviment és un MHS sobre la recta corresponent, i l'amplitud és $\sqrt{A^2 + B^2}$.

- Quan $\phi = \frac{\pi}{2}$, $\phi = \frac{3\pi}{2}$.

L'el·lipse ara és referida als seus propis eixos: $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$.

Figura 4.7





A la figura 4.7, es mostren algunes de les el·lipses que tenen per equació la (4.17). A totes $A = B$, i els angles ϕ estan indicats sota de cadascuna d'elles. També s'indica el sentit del gir de la partícula sobre l'el·lipse.

Amb la disposició habitual dels eixos x i y —de x a y , en sentit antihorari—, es pot demostrar —com es proposa al problema 4.4— que un angle $\phi > 0$ correspon a una el·lipse recorreguda en sentit horari, i a l'inrevés.

Exemple 4.1. El·lipses en evolució

Esbrineu quin serà el resultat de superposar dos MHS de direccions perpendiculars i freqüències lleugerament diferents.

Solució

Siguin els dos MHS següents:

$$\begin{aligned}x(t) &= A \cos \omega_1 t \\ y(t) &= B \cos(\omega_2 t + \varphi)\end{aligned}$$

amb ω_1 i ω_2 tals que $\omega_1 \neq \omega_2$ i $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 \ll \omega_2 \approx \omega_1$. Amb aquesta notació, podem reescriure les dues equacions de moviment $x(t)$ i $y(t)$ com

$$\begin{aligned}x(t) &= A \cos \omega_1 t \\ y(t) &= B \cos(\omega_1 t + [t\Delta\omega + \varphi])\end{aligned}$$

Aquestes són les mateixes equacions que hem estudiat anteriorment, (4.15) i (4.16), ara amb $\phi(t) = t\Delta\omega + \varphi$ que, combinades, porten a l'equació (4.17). Si allà dèiem que l'angle ϕ determina que la trajectòria sigui una el·lipse, una recta, etc., aleshores, en aquest cas en què $\phi(t)$ va creixent lentament amb el temps tindrem, doncs, que la trajectòria anirà evolucionant i passarà per totes les el·lipses que es mostren a la figura 4.7. Segons el valor de $\Delta\omega$, aquesta evolució serà més lenta i tranquil·la o més ràpida i brusca.

4.3.2. Freqüències diferents. Figures de Lissajous

Considerem ara la superposició de dos MHS de direccions perpendiculars i de freqüències ω_x i ω_y diferents. Les equacions corresponents, en el cas general, són:

$$\begin{aligned}x(t) &= A \cos(\omega_x t + \phi) \\ y(t) &= B \cos(\omega_y t + \varphi)\end{aligned}\tag{4.18}$$

En aquest cas, les trajectòries ja no són, en general, el·lipses sinó que són bastant més complexes.

Anàlogament al que ja hem comentat a la secció §4.2.3 per al cas de freqüències diferents, però de la mateixa direcció, el moviment resultant de la superposició només és periòdic si el quocient ω_x/ω_y és un nombre racional:

$$\frac{\omega_x}{\omega_y} = \frac{n_x}{n_y}\tag{4.19}$$

En aquest cas, el període és el mínim comú múltiple dels períodes dels MHS de les dues direccions.

Si la superposició és periòdica, les trajectòries són corbes molt boniques, que reben el nom de *figures de Lissajous*. A la figura 4.8, hi ha representada la corresponent a les dues equacions següents:

$$\begin{aligned}x(t) &= 12 \cos 3t \\ y(t) &= 5 \cos(4t + 4\pi/9)\end{aligned}$$

Figura 4.8

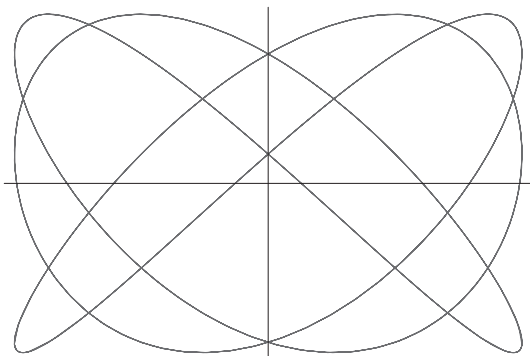
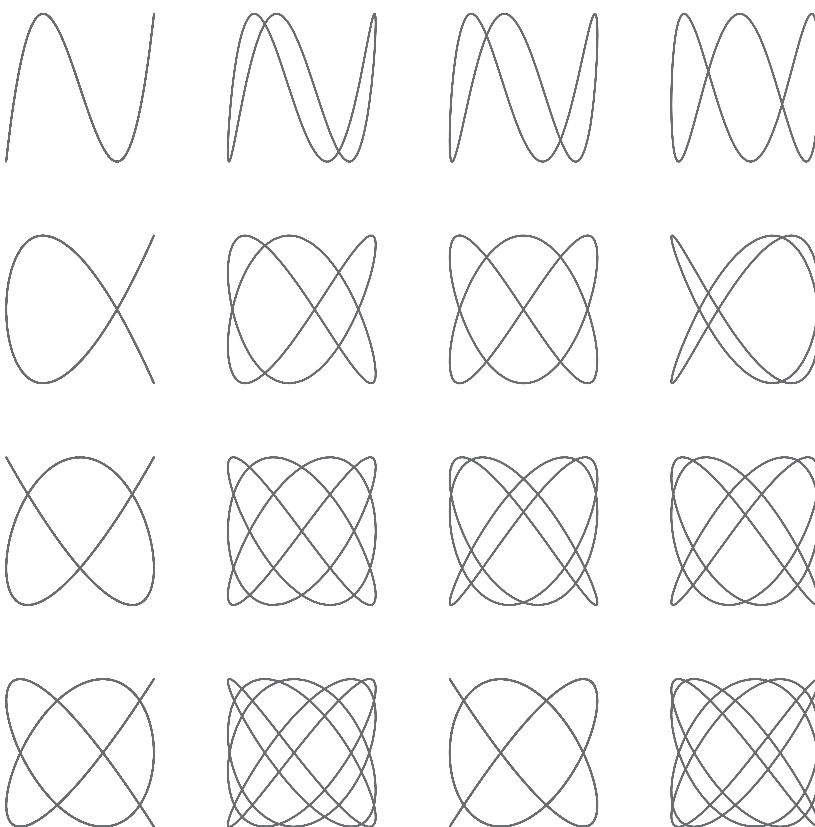


Figura 4.9





A la figura 4.9, s'han representat més trajectòries de Lissajous per als valors de ω_x/ω_y i φ següents:

$$\frac{\omega_x}{\omega_y} = (\text{per files}) = \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}; \quad \phi = 0; \quad \varphi = (\text{per columnes}) = 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{7}$$

A la secció §4.3.1, hem vist com podem posar de manifest la superposició de dos MHS de direccions perpendiculars de la mateixa freqüència amb un pèndol simple. Anàlogament, podem veure en acció les figures de Lissajous observant el moviment de les lentilles dels “pèndols simples en Y”. A la figura 4.10, es mostra un d'aquests pèndols.

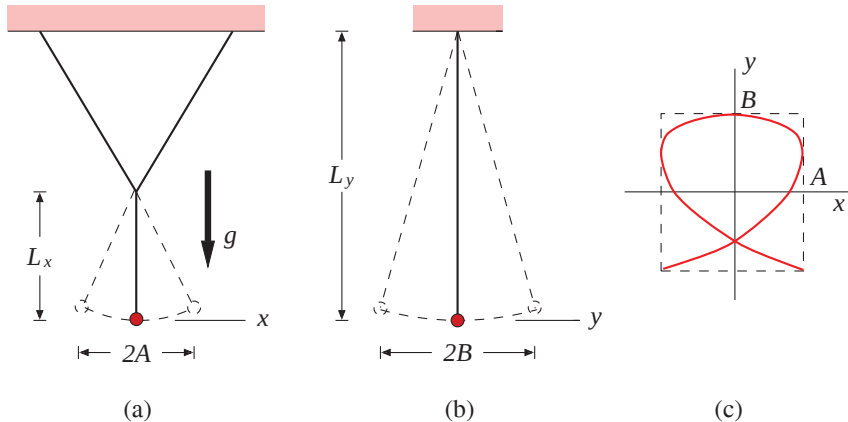


Figura 4.10

A causa de la construcció en “Y” del pèndol, aquest té un longitud d'oscil·lació L_x en el pla de la Y —v. figura 4.10 (a)— i de L_y en la direcció perpendicular —v. figura 4.10 (b). Si $\sqrt{L_x/L_y}$ és racional, la composició d'oscil·lacions de la lentilla en una direcció i en l'altra donarà lloc a una figura de Lissajous. Com que, en el cas representat, el quocient de longituds és, aproximadament, $4/9$, tenim, doncs,

$$\sqrt{\frac{L_x}{L_y}} = \frac{\omega_y}{\omega_x} = \frac{2}{3}$$

Una figura de Lissajous d'aquest cas podria ser, per exemple, la de la figura 4.10 (c) anterior.

Exemple 4.2. Construcció de les figures de Lissajous

Dibuixeu “a mà” sobre paper mil·limetrat la figura de Lissajous corresponent a les equacions paramètriques

$$\begin{aligned} x &= 12 \cos 2t \\ y &= 15 \cos(3t - \pi/4) \end{aligned}$$

utilitzant, com a referència, la representació fasorial dels dos MHS.

Solució

A les figures 4.11, 4.12 i 4.13 següents s'indica clarament com s'ha de començar, continuar i acabar el dibuix.



Figura 4.11

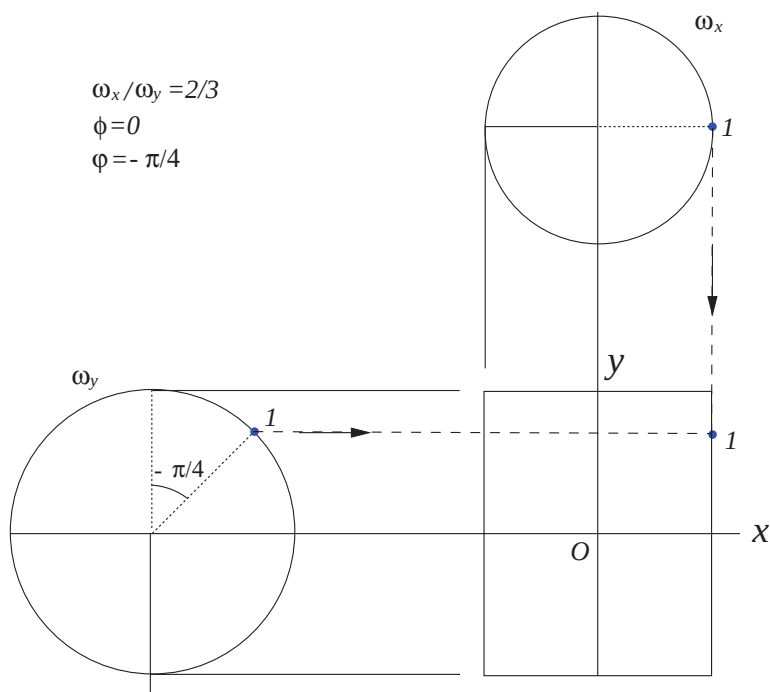


Figura 4.12

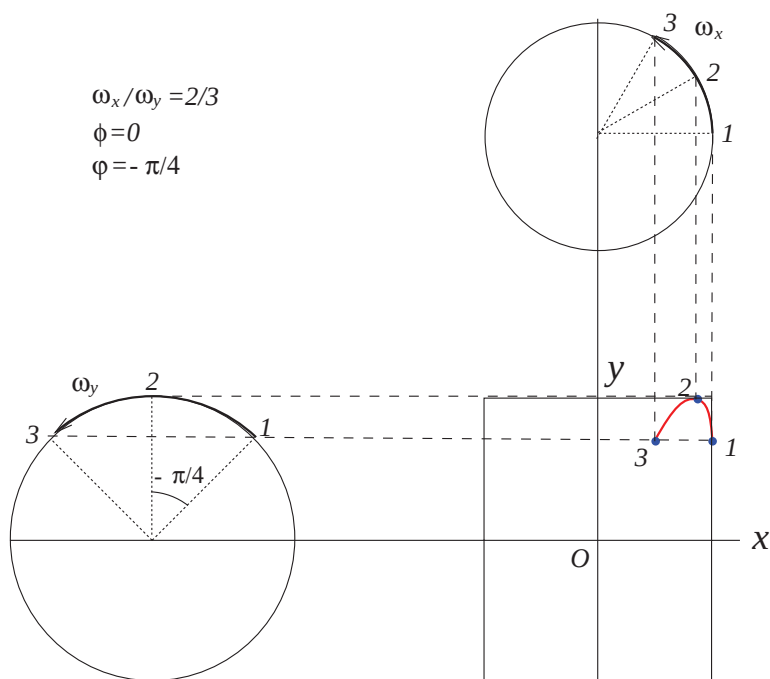
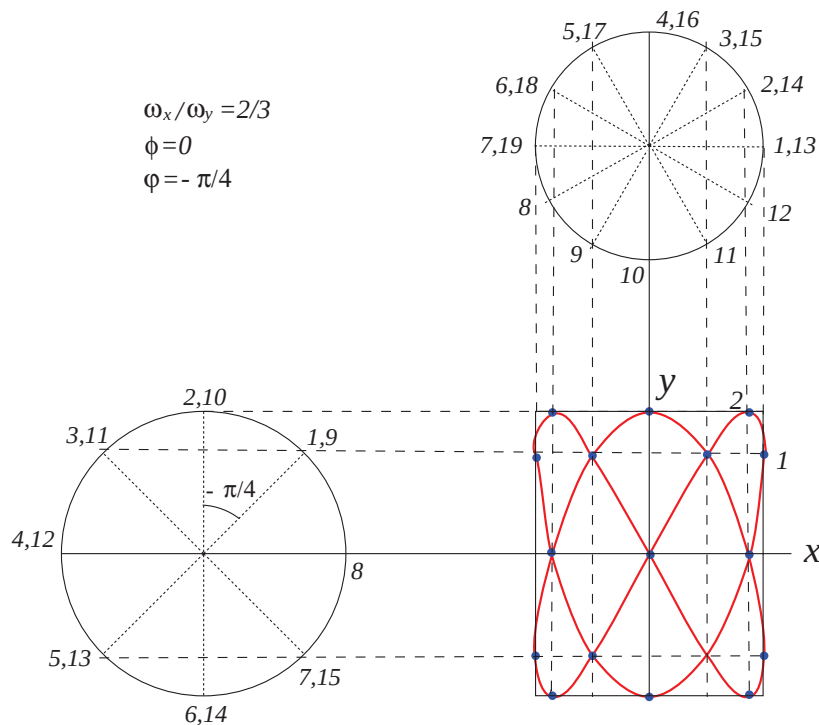




Figura 4.13



4.4. Problemes resolts i problemes proposats

4.4.1. Problemes resolts

Problema 4.1. Superposició de dos MHS de la mateixa direcció

Esbrineu les equacions dels moviments resultants que resulten de la superposició dels dos MHS

$$\begin{aligned}x_1 &= 6 \sin 2t \\x_2 &= 8 \sin(2t + \phi)\end{aligned}$$

si ϕ és igual a 0, π , $\pi/2$ o $\pi/3$, respectivament.

Solució

a) Si $\phi = 0$. En aquest cas: $x = x_1 + x_2 = 6 \sin 2t + 8 \sin 2t = 14 \sin 2t$.

Si $\phi = \pi$ rad. Anàlogament: $x = x_1 + x_2 = 6 \sin 2t - 8 \sin 2t = -2 \sin 2t$.

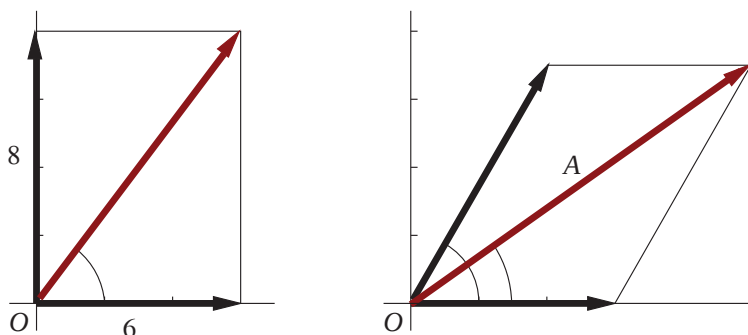
b) Si $\phi = \frac{\pi}{2}$. Ara, de la superposició resulta

$$x = x_1 + x_2 = A \cos(2t + \varphi) \quad (1)$$



d'on A i φ els podem treure del diagrama de la suma dels fasors corresponents —v. figura 4.14 esquerra.

Figura 4.14



Pel teorema de Pitàgores,

$$A = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10 \quad \varphi = \arctan \frac{8}{6} = 0,92730 \text{ rad}$$

- c) Si $\phi = \pi/3$. L'expressió de l'oscil·lació resultant torna a ser com la (1). A la figura 4.14 dreta és mostra el diagrama de fasors d'aquest cas. Per (A.12), tenim

$$A = \sqrt{6^2 + 8^2 + 2 \times 6 \times 8 \times \cos \pi/3} = 12,166 \quad \text{i} \quad 8^2 = A^2 + 6^2 - 2 \times 6 \times A \cos \varphi$$

d'on resulta $\varphi = 0,60589$ rad. En definitiva, ens queda

$$x = x_1 + x_2 = 12,17 \sin(2t + 0,6059)$$

Problema 4.2. Força central $F = -kr$ i trajectòria el·líptica

Una partícula de massa m que es mou sobre el pla xy està sotmesa a la *força central*: $F = -kr$, on k és una constant positiva i r és el vector posició. A l'instant $t = 0$, la posició i la velocitat inicials són, respectivament, $(x_0, 0)$ i $(0, v_0)$.

- Demostreu que la partícula fa un MHS segons l'eix x i un altre segons l'eix y , ambdós de freqüència angular $\omega = \sqrt{k/m}$, i que la seva trajectòria és una l'el·lipse.
- Calculeu quant valen l'energia i el moment angular de la partícula a l'instant inicial i comproveu que es conserven.

Solució

Si hi apliquem la segona llei de Newton, tenim: $-kr = ma$, equació vectorial que podem reescriure en components de la forma

$$-k(x\mathbf{u}_x + y\mathbf{u}_y) = m \left(\frac{d^2x}{dt^2} \mathbf{u}_x + \frac{d^2y}{dt^2} \mathbf{u}_y \right)$$



i, igualant les components, ens queda el sistema de dues equacions diferencials

$$-kx = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$-ky = m \frac{d^2y}{dt^2}$$

que són les equacions diferencials de dos MHS, un per a la x i l'altra per a la y . Observem un fet molt important: en cadascuna de les dues equacions, només apareix una de les coordenades, o la x o la y . D'aquest fet, se'n diu que les dues equacions diferencials estan *desacoblades*. Això simplifica molt la resolució del sistema la qual, en aquest cas, és immediata. Si fem $\omega = \sqrt{k/m}$, la solució general de cadascuna de les dues equacions és, com sabem,

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

$$y(t) = B \cos(\omega t + \varphi)$$

on els valors de les constants A , B , ϕ i φ els determinarem a partir de les condicions inicials que ens diu l'enunciat.

Si $t = 0$ tenim per a x i v_x , y i v_y :

$$- x(0) = x_0 = A \cos \phi, \quad v_x(0) = 0 = -\omega \sin \phi; \quad \text{d'on surt que:} \quad \phi = 0, A = x_0.$$

$$- y(0) = 0 = A \cos \varphi, \quad v_y(0) = v_0 = -\omega B \sin \varphi; \quad \text{d'on surt que:} \quad \varphi = -\frac{\pi}{2}, B = \frac{v_0}{\omega}.$$

Així doncs, les components del vector posició de la partícula són

$$x(t) = x_0 \cos \omega t \tag{1}$$

$$y(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t \tag{2}$$

i, derivant, tenim les components de la seva velocitat

$$v_x(t) = -\omega x_0 \sin \omega t \tag{3}$$

$$v_y(t) = v_0 \cos \omega t \tag{4}$$

Si sumem $\cos^2 \omega t$ i $\sin^2 \omega t$, de (1) i (2), veiem que la trajectòria de la partícula és l'el·lipse

$$\frac{x^2}{x_0^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2} = 1$$

D'altra banda, un camp de forces $\mathbf{F} = -k\mathbf{r}$ és un camp central i conservatiu, i recordem que això vol dir, en general, que es conserva tant el moment angular com l'energia de la partícula. Comprovem-ho.



- El moment angular de la partícula val, en general:

$$\mathbf{L} = m \mathbf{r} \times \mathbf{v} = m (x\mathbf{u}_x + y\mathbf{u}_y) \times (v_x\mathbf{u}_x + v_y\mathbf{u}_y) = m (xv_y - yv_x)\mathbf{u}_z$$

i substituint les x , y , v_x , v_y per les seves expressions (1), (2), (3) i (4), i simplificant, s'arriba al resultat:

$$\mathbf{L} = m x_0 v_0 \mathbf{u}_z$$

que és el moment angular inicial, amb el qual queda demostrada la seva conservació.

- Pel que fa a l'energia, recordem també que, si una força és central, és a dir, de direcció radial i el seu mòdul només depèn de r , $F(r)$, llavors la força és conservativa. És a dir, existeix la funció escalar energia potencial $U(r)$, que també només depèn de r i que està relacionada amb la força $F(r)$ de la forma: $F(r) = -\frac{dU(r)}{dr}$. Per tant,

$$U = - \int F(r) dr = +k \int r dr = \frac{1}{2}kr^2 + C$$

essent C una constant arbitrària que podem determinar prenent l'origen d'energia potencial, $U = 0$, per exemple, a $r = 0$; amb la condició $C = 0$. Però $r^2 = x^2 + y^2$ i, en conseqüència, U queda com:

$$U = \frac{1}{2}kr^2 = \frac{1}{2}k(x^2 + y^2) = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}ky^2$$

és a dir, que aquí també s'aplica el principi de superposició: l'energia potencial del moviment resultant de superposar un MHS segons x i un altre MHS segons y és la suma de les energies potencials de cadascun d'ells per separat.

- Calculem ara la suma de l'energia potencial U més la cinètica K en un instant qualsevol. Tenim, pel que hem vist fins ara,

$$E = U + K = \frac{1}{2}kr^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}k(x^2 + y^2) + \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2)$$

on, substituint les x , y , v_x , v_y per les seves expressions d'(1),..., (4), i simplificant, arribem a E

$$E = \frac{1}{2}kx_0^2 + \frac{1}{2}mv_0^2$$

que és, efectivament, una constant i que correspon a l'energia a l'instant inicial.

Problema 4.3. Trajectòria el·líptica

Una partícula fa dos MHS simultanis perpendiculars entre si donats per les equacions —tot en unitats SI—

$$\begin{aligned} x(t) &= 5 \cos 3\pi t \\ y(t) &= 3 \sin 3\pi t \end{aligned} \tag{1}$$



- Demostreu que el moviment resultant de la partícula és una el·lipse.
- Trobeu el primer instant de temps positiu en què la velocitat de la partícula forma un angle de 30° amb l'eix x . Quin angle forma, en aquest instant, el vector posició de la partícula amb la velocitat?
- En quins dos instants immediatament posteriors torna la partícula a tenir la mateixa celeritat?

Solució

- Només cal prendre (1) i fer

$$\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = \cos^2 3\pi t + \sin^2 3\pi t = 1$$

que és l'equació d'una el·lipse centrada a l'origen amb els eixos principals dirigits segons x i y —v. figura 4.15.

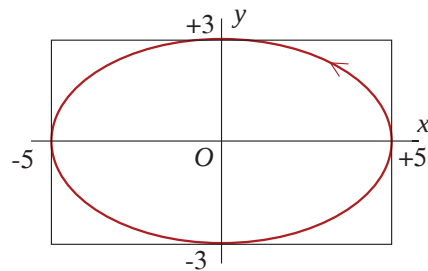


Figura 4.15

- Derivant $x(t)$ i $y(t)$, n'obtenim la velocitat de la partícula

$$\begin{aligned} v_x(t) &= -15\pi \sin 3\pi t \\ v_y(t) &= 9\pi \cos 3\pi t \end{aligned}$$

Seguint les instruccions de l'enunciat, ens interessen els instants de temps t tals que

$$\tan 30^\circ = \frac{v_y}{v_x} = \frac{9 \cos 3\pi t}{-15 \sin 3\pi t} = -\frac{3}{5} \frac{1}{\tan 3\pi t}$$

és a dir, els donats per

$$t = -\frac{1}{3\pi} \arctan\left(\frac{3}{5 \tan 30^\circ}\right) \quad (2)$$

El valor numèric de t que obtenim amb la calculadora directament de (2) és $t_0 = -0,085374$ s. Però aquest és un instant de temps negatiu. És el moment en el qual la velocitat de la partícula forma l'angle de 30° que diu l'enunciat, però és anterior a $t = 0$. Com que després d'un període $T = 2\pi/\omega$ la partícula torna a tenir el mateix vector velocitat però el temps serà positiu, l'instant que ens interessa és

$$t_1 = t_0 + T = t_0 + \frac{2\pi}{3\pi} = 0,58129 \text{ s}$$



En aquest instant, la posició de la partícula val, per (1), $x(t_1) = 3,467 \text{ m}$ i $y(t_1) = -2,162 \text{ m}$. L'angle θ que forma el vector posició amb l'eix x ve donat per

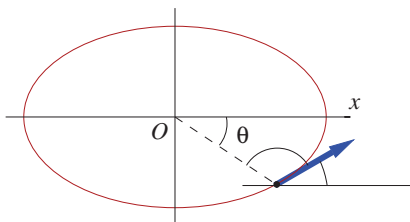
$$\theta = \arctan \frac{y(t_1)}{x(t_1)} = -31,95^\circ$$

i l'angle α que determinen el vector posició i la velocitat val —v. figura 4.16—

$$\alpha = 180^\circ - 30^\circ - |\theta| = 118,1^\circ$$

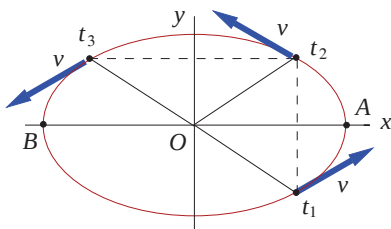
En una trajectòria circular, aquest angle sempre seria 90° .

Figura 4.16



- c) La forma de l'el·lipse i el moviment de la partícula presenten simetria respecte dels eixos x i y . Això vol dir que els dos instants immediatament posteriors a t_1 en els quals el mòdul de la velocitat de la partícula torna a ser la que tenia a t_1 són t_2 i t_3 en els quals la posició de la partícula és representada a la figura 4.17.

Figura 4.17



Sigui Δt l'interval de temps que ha de transcórrer des de t_1 perquè la partícula arribi al punt $A(5, 0)$ sobre l'eix de simetria x . Com que a $t = 0$ la partícula és a A , aleshores $\Delta t = T - t_1$. I, d'altra banda, l'interval de temps que ha de passar per tal que vagi de la posició corresponent a t_1 fins a la de t_3 és mig període. Per tant, tenim

$$t_2 = t_1 + 2\Delta t = T + \Delta t = 2T - t_1 = 0,7520 \text{ s}$$

$$t_3 = t_1 + \frac{T}{2} = 0,9146 \text{ s}$$

Problema 4.4. Sentit del moviment en les el·lipses

La trajectòria el·líptica d'una partícula ve donada per les equacions paramètriques

$$\begin{aligned} x(t) &= A \cos \omega t \\ y(t) &= B \cos(\omega t + \phi) \end{aligned}$$



Demostreu que, en general, un angle $\phi > 0$ correspon a una el·lipse recorreguda en sentit horari, i a l'inrevés.

Solució

Si tenim un cas particular sempre podem trobar el sentit del gir de la partícula tempejant: conegudes les dues equacions del moviment, per a $x(t)$ i per a $y(t)$, anem donant valors a t i anem veient cap a on va la partícula. Però hi podem trobar una regla general.

Com es mostra en la figura 4.18, sigui θ l'angle de les coordenades polars, és a dir, l'angle determinat per l'eix x i el vector posició de la partícula. Doncs bé, el sentit del gir de la partícula és el signe que té la seva velocitat angular, $d\theta/dt$.

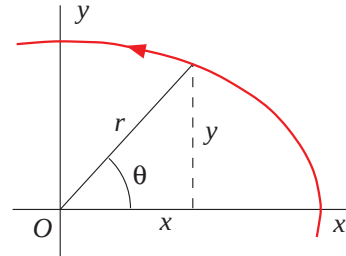


Figura 4.18

Com sabem, la relació entre les coordenades x, y de la partícula i l'angle θ és

$$\tan \theta = \frac{y}{x}$$

Derivant aquesta equació respecte del temps n'obtenim

$$\frac{d(\tan \theta)}{dt} = \frac{1}{\cos^2 \theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{x^2} \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) \quad (1)$$

Si considerem que

$$x(t) = A \cos \omega t \quad \text{i} \quad y(t) = B \cos(\omega t + \phi)$$

substituïm a (1) i simplifiquem, arribem a

$$\frac{d\theta}{dt} = -\omega AB \frac{\cos^2 \theta}{x^2} \sin \phi$$

Com que $\cos^2 \theta$ i $\omega AB/x^2$, excepte singularitats, són sempre positius, aleshores, el sentit de la velocitat angular ve determinat pel signe de $-\sin \phi$.

En la disposició habitual dels eixos x i y —de x a y , en sentit antihorari—, un angle $\phi > 0$ tal que $-\sin \phi < 0$ indica, doncs, una el·lipse recorreguda en sentit horari, i a l'inrevés.

Problema 4.5. Dibuixar una figura de Lissajous 1 : 2

Una partícula de massa m que es mou en el pla XY descriu la figura de Lissajous donada per

$$\begin{aligned} x(t) &= A \sin \omega t \\ y(t) &= A \sin(2\omega t + \phi) \end{aligned}$$

- a) Aplicant el mètode de les dues projeccions, dibuixeu “a mà” la trajectòria de la partícula per al cas $\phi = 0$.



- b) Trobeu la força que actua sobre la partícula, així com les expressions de l'energia potencial i l'energia cinètica en funció del temps. Quant val l'energia total E de la partícula?

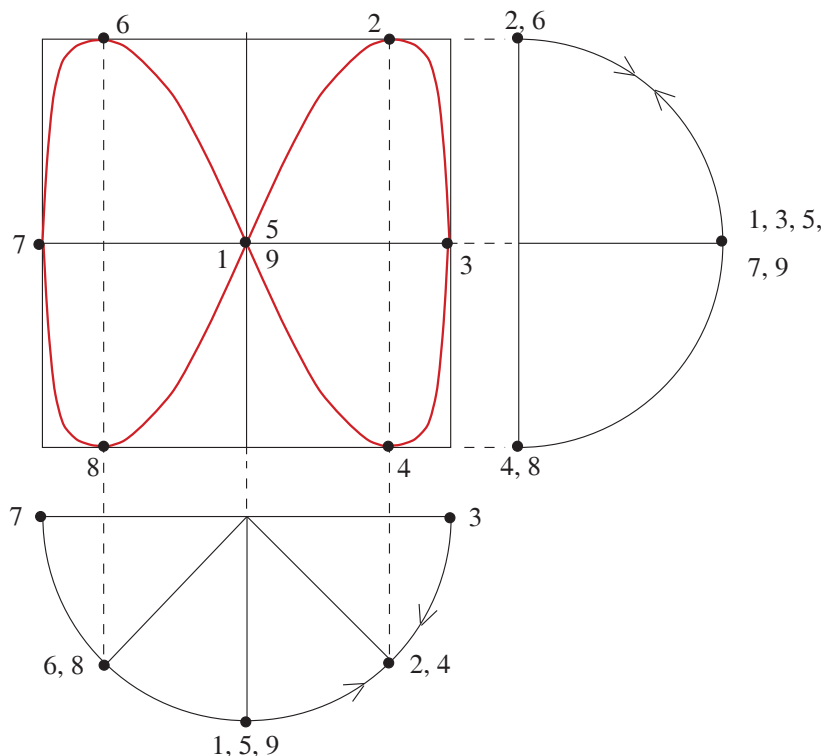
Solució

- a) Primer, trobem el període del moviment resultant. Aquest és el mínim comú múltiple dels períodes segons x i segons y . És a dir, val $T = n_x T_x = n_y T_y$ si n_x i n_y són els enters més petits que satisfan aquesta relació. En aquest cas, simplement tenim $n_x = 1$ i $n_y = 2$ ja que

$$T = 1 \times \frac{2\pi}{\omega} = 2 \times \frac{2\pi}{2\omega} = \frac{2\pi}{\omega}$$

A la figura 4.19, es mostra la construcció punt a punt de la corresponent corba de Lissajous a partir dels dos MHS $x(t)$ i $y(t)$, disposats de forma horitzontal i vertical, respectivament.

Figura 4.19



- b) La velocitat i l'acceleració de la partícula vénen donades per les derivades de $x(t)$ i $y(t)$

$$v_x(t) = -\omega A \cos \omega t$$

$$a_x(t) = -\omega^2 A \sin \omega t = -\omega^2 x$$

$$v_y(t) = -2\omega A \cos(2\omega t + \phi)$$

$$a_y(t) = -4\omega^2 A \sin(2\omega t + \phi) = -4\omega^2 y$$



Aplicant ara la segona llei de Newton, trobem la força

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m(a_x \mathbf{u}_x + a_y \mathbf{u}_y) = -m\omega^2(x \mathbf{u}_x + 4y \mathbf{u}_y)$$

que, a diferència de l'exemple, no és central. Quant a les energies cinètica i potencial de la partícula, per les expressions anteriors de x , y , v_x i v_y tenim

- Energia cinètica K :

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2) = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 (\cos^2 \omega t + 4\cos^2(2\omega t + \phi))$$

- Energia potencial U . Prenent —com és habitual— l'origen de l'energia potencial en el punt d'equilibri, tenim:

$$\begin{aligned} U &= \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -m\omega^2 \int (x \mathbf{u}_x + 4y \mathbf{u}_y) \cdot d\mathbf{r} = -m\omega^2 \int (x dx + 4y dy) = \\ &= -\frac{1}{2}m\omega^2 (x^2 + 4y^2) = -\frac{1}{2}m\omega^2 A^2 (\sin^2 \omega t + 4\sin^2(2\omega t + \phi)) \end{aligned}$$

Sumant K i U , tenim l'energia total. En efecte, comprovem que és constant i que val

$$E = K + U = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 (1 + 4) = \frac{5}{2}m\omega^2 A^2$$

D'aquests últims resultats, podem veure que, si $E_{(x)}$ i $E_{(y)}$ són les energies que tindria la partícula si només es desplaçés segons x o segons y , respectivament, aleshores, $E = E_{(x)} + E_{(y)}$.

4.4.2. Problemes proposats

Problema 4.6. Superposició de tres MHS

Una partícula està sotmesa simultàniament a tres MHS de la mateixa direcció i freqüència d'amplituds 4, 5 i 6 unitats, respectivament. Si sabem que la fase del segon MHS està avançada $\pi/4$ rad respecte del primer i la del tercer, $\pi/3$ rad respecte del segon, esbrineu l'amplitud del MHS resultant de la superposició i la fase del moviment respecte del primer MHS.

Resp.: $A = 11,08$ unitats, $\varphi = 1,001$ rad

Problema 4.7. Energia en la superposició de dos MHS

Una partícula està sotmesa, simultàniament, a dos MHS de la mateixa freqüència i direcció però d'amplituds diferents i desfasats l'angle ϕ .

Siguin E_1 i E_2 les energies que tindria la partícula si només fes un dels dos MHS. Demostreu que, aleshores, en la superposició dels dos MHS, l'energia de la partícula passa a ser

$$E = E_1 + E_2 + 2\sqrt{E_1 E_2} \cos \phi$$



Comproveu aquest resultat per a diversos casos particulars de ϕ ; per exemple, $\phi = 0$ i $\phi = \pi/2$.

Problema 4.8. Superposició de dos MHS perpendiculars

Esbrineu les equacions de les trajectòries resultants del moviment d'una partícula superposició dels dos MHS perpendiculars

$$\begin{aligned}x &= 4 \sin \omega t \\y &= 3 \sin(\omega t + \phi)\end{aligned}$$

si ϕ és igual a 0, $\pi/2$, π . Per a $\pi/2$, feu, a més, una gràfica de la trajectòria i determineu el sentit del moviment de la partícula.

Resp.: $y = \frac{3}{4}x$; $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$, en sentit horari; $y = -\frac{3}{4}x$

Problema 4.9. MHS rectilini

Les components x, y del moviment d'una partícula són dos MHS de la mateixa freqüència. En unitats SI

$$\begin{aligned}x(t) &= 5 \cos\left(2t - \frac{\pi}{6}\right) \\y(t) &= 3 \cos\left(2t - \frac{7\pi}{6}\right)\end{aligned}$$

- Demostreu que el moviment resultant de la partícula és un MHS sobre la recta $y = -3x/5$.
- Trobeu tots els instants t en què la partícula passa per l'origen i
- la celeritat amb què ho fa.

Resp.: b) $t = (3n - 1)\frac{\pi}{6}$, amb $n = 0, 1, 2, \dots$, c) $v = 136$ m/s

Problema 4.10. Superposició de MHS perpendiculars

En unitats SI, les equacions de moviment d'una partícula de massa $m = 1$ kg són, per als tres casos (A), (B) i (C), les següents:

$$\begin{array}{lll}\text{A)} & x = 6 \sin t & \text{B)} & x = 6 \sin 2t & \text{C)} & x = 6 \sin 3t \\ & y = 4 \cos 2t & & y = 4 \cos 2t & & y = 4 \cos 2t\end{array}$$

- Trobeu i dibuixeu les trajectòries dels casos (A) i (B).
- Esbrineu els períodes i les energies dels tres moviments periòdics.

Resp.: a) A) $y = 4 - \frac{2}{9}x^2$, B) $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$,

$$\text{b) } T_A = 2T_B = T_C = 2\pi \text{ s, } E_A = 50 \text{ J, } E_B = 104 \text{ J, } E_C = 194 \text{ J}$$



Problema 4.11. Dibuix de les figures de Lissajous

Utilitzant com a referència la representació fasorial de dos MHS, construïu “a mà”, sobre paper quadriculat, les figures de Lissajous corresponents a les dues parelles d'equacions paramètriques:

a) $x = \sin 3t$, $y = \sin(4t + \pi/6)$

b) $x = \sin(t + \pi)$, $y = \sin 3t$

Comproveu que són les dues corbes representades a la figura 4.20.

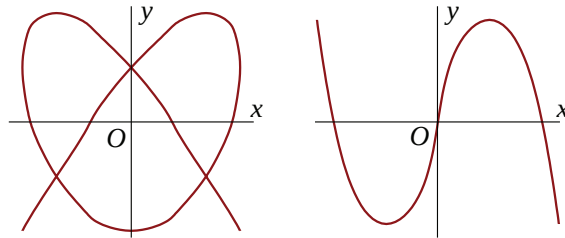


Figura 4.20

Problema 4.12. Superposició de 3 MHS perpendiculars entre si

Les equacions de moviment d'una partícula que es mou en l'espai són, en unitats del SI

$$x(t) = 6 \cos 20\pi t$$

$$y(t) = 7 \cos(8\pi t + \pi/6)$$

$$z(t) = 8 \cos(12\pi t + \pi/3)$$

Quina mena de moviment fa la partícula? Quant val el període del seu moviment?

Resp.: Fa un moviment periòdic de període $T = 1/2$ s

Problema 4.13. Partícula entre quatre molles

Una partícula de massa $m = 0,050$ kg està subjectada per quatre molles, com s'indica a la figura 4.21. Les dues molles de constant k_1 determinen l'eix x i les altres dues, perpendiculars a aquestes, de constant k_2 , l'eix y . L'origen d'aquest sistema de coordenades és la posició d'equilibri de la partícula.

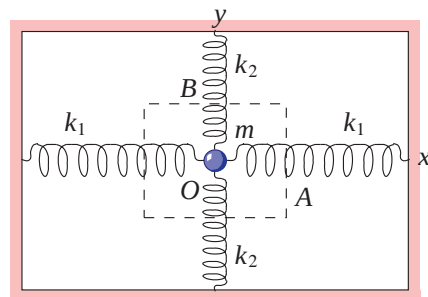


Figura 4.21

Suposant desplaçaments de la partícula molt petits per comparació a la longitud de les molles, descriviu quina mena de moviment i quina trajectòria farà si les constants de les molles i les condicions inicials $x_0, y_0, v_{x_0}, v_{y_0}$ són les següents:



- a) $k_1 = k_2 = k$, i $x_0 = 0, y_0 = b, v_{x_0} = v_0, v_{y_0} = 0$
 b) $k_1 = 4k_2$, i $x_0 = y_0 = 0, v_{x_0} = v_{y_0} = v_0$
 c) $k_1 = 4k_2/9$, i $x_0 = y_0 = a, v_{x_0} = v_0, v_{y_0} = 0$
 d) És periòdic el moviment si $k_1 = 2k_2$?

Resp.: a) El·lipse: $\frac{2k}{mv_0^2}x^2 + \frac{y^2}{b^2} = 1$;

b) Figura de Lissajous tipus: $x = A \sin 2\omega t, y = 2A \sin \omega t$, amb $\omega = \sqrt{\frac{k_1}{2m}}$,

$A = \frac{v_0}{2\omega}$; c) Figura de Lissajous, d) No és periòdic

Problema 4.14. Trajectòria el·líptica d'una partícula entre dues molles

La partícula de massa m del problema anterior està subjectada ara només per les dues molles de constant k_1 , que estan allargades fins assolir la tensió F . Si la longitud total de les dues molles allargades amb la partícula és L , quina relació hi ha d'haver entre aquesta longitud L i la tensió F per tal que la partícula, posada en moviment molt a prop de l'origen, descrigui una trajectòria el·líptica al voltant d'aquest?

Resp.: $F = k_1 L/2$

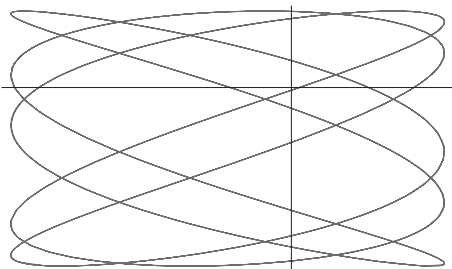
Problema 4.15. Sobre les figures de Lissajous

Suposeu que esteu davant d'una figura de Lissajous —per exemple, la figura 4.22. Traceu una línia recta paral·lela a l'eix x que talli la corba en diversos punts sense que cap d'ells sigui una intersecció. Feu el mateix amb una altra recta ara paral·lela a l'eix y . Siguin N_x i N_y el nombre de vegades que la recta paral·lela a l'eix x i la paral·lela a la y , respectivament, tallen la corba de la figura.

a) Demostreu que $\frac{\omega_x}{\omega_y} = \frac{N_y}{N_x}$

b) Apliqueu aquest resultat a la figura 4.22. Quant val el quocient ω_x/ω_y ?

Figura 4.22



Resp.: $\omega_x/\omega_y = 5/3$. La figura és $x = 9 \cos 5t, y = 5 \cos(3t + 2\pi/3)$.



Oscil·lacions i sèries de Fourier

Al capítol anterior hem vist que la linealitat de l'equació diferencial de les oscil·lacions forçades feia que es complís el *principi de superposició*. Recordem que això vol dir que si tenim N “funcions força impulsora”, $F_n(t)$, amb $n = 1, 2, \dots, N$, i les N corresponents solucions $x_n(t)$ de les equacions diferencials amb aquestes forces aplicades individualment, aleshores, si apliquem una força impulsora $F(t)$ que sigui combinació lineal de les $F_n(t)$ anteriors, la solució de la nova equació diferencial, $x(t)$, serà la mateixa combinació lineal de les F_n , però per a les x_n . Esquemàticament:

$$\begin{array}{lll} \text{si} & F_n(t) & \longrightarrow x_n(t), \quad n = 1, 2, \dots, N \\ \text{aleshores} & F(t) = \sum_{n=1}^N c_n F_n(t) & \longrightarrow x(t) = \sum_{n=1}^N c_n x_n(t) \end{array} \quad (5.1)$$

on les c_n són constants qualssevol.

5.1. Sèries de Fourier (SF)

5.1.1. Teorema de Fourier

Sigui $f(t)$ una funció periòdica de període T definida a l'interval $]0, T[$ i estesa fora d'aquest interval a partir $f(t+T) = f(t)$. Sigui $\omega = 2\pi/T$ la freqüència angular o pulsació de la funció. Es defineix com a *sèrie de Fourier* —a partir d'ara, SF— de la funció $f(t)$ el sumatori

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t) \quad (5.2)$$

on els coeficients a_n i b_n per a $n = 0, 1, 2, \dots$ vénen donats —v. problema 5.1— per:

$$\begin{array}{lll} \text{si } n = 0 & a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt & b_0 = 0 \\ \text{si } n \geq 1 & a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos n\omega t dt & b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin n\omega t dt \end{array} \quad (5.3)$$

La freqüència angular ω s'anomena *freqüència fonamental* perquè és la més baixa i perquè totes les altres, $n\omega$, les *freqüències harmòniques*, són múltiples d'aquesta. El conjunt de termes del sumatori (5.2), amb $n > 1$, s'anomenen els *harmònics superiors*.

El conjunt dels coeficients a_n i b_n , ordenats segons les freqüències respectives, ω , 2ω , 3ω , ..., s'anomena l'*espectre discret de freqüències*, i la descomposició de la funció $f(t)$ en la suma d'harmònics (5.2), *anàlisi de Fourier* de la funció.

Com es demostra en els textos de matemàtiques, si $f(t)$ satisfà les *condicions de Dirichlet* següents:

- $f(t)$ està definida i és uniforme, excepte en un nombre finit de punts de $]0, T[$,
- $f(t)$ i $\frac{df}{dt}$ són quasicontínues en $]0, T[$,

aleshores, la SF de $f(t)$, (5.2), convergeix cap a:

- $f(t)$ en els punts on la funció és contínua,
- la mitjana entre el límit de la funció per l'esquerra i el límit per la dreta en els punts de discontinuïtat.

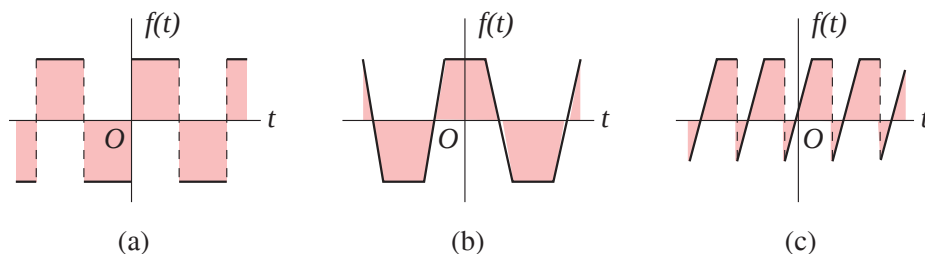
Des del punt de vista matemàtic, les condicions de Dirichlet són suficients però no necessàries. De fet, com hem vist, són molt poc restrictives i, a la pràctica, quasi totes les funcions amb significat físic les compleixen.

Entre moltes altres, les SF presenten les propietats següents:

1. Una funció $f(t)$ es diu que és *parella* si $f(-t) = f(t)$. Són parelles, per exemple, t^2 , $\cos \omega t$, $\sin^2 \omega t$, etc. I una funció $f(t)$ es diu que és *senar* si $f(-t) = -f(t)$. Són senars, per exemple, t^3 , $\sin \omega t$, $\sin \omega t \cos \omega t$, etc. A les funcions parelles, el desenvolupament (5.2) només conté termes en cosinus, i a les funcions senars només n'hi ha en sinus. A les que no són ni parelles ni senars n'hi ha de tots dos tipus; vegeu també el problema 5.8.

A la figura 5.1, s'han esquematitzat les gràfiques de tres funcions periòdiques: la (a) és senar; la (b) és parella, i la (c) no és ni senar ni parella.

Figura 5.1



2. Utilitzant els resultats (A.82) i (A.83) sobre integrals trigonomètriques definides, es pot demostrar fàcilment que els coeficients a_n i b_n corresponents a la funció $f(t)$, donats per (5.3), verifiquen la *igualtat de Parseval*



$$\frac{1}{2T} \int_0^T f^2(t) dt = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \quad (5.4)$$

que, com veurem a la secció §5.2.2, està molt relacionada amb l'energia.

3. En els textos de matemàtiques, es demostren els teoremes que diuen:

- La SF de $f(u)$ es pot *integrar terme a terme* des de t_0 fins a t i en resulta una nova sèrie que convergeix uniformement cap a $\int_{t_0}^t f(u) du$, sempre que $f(u)$ sigui quasi-contínua a l'interval $[0, T]$ i t_0 i t pertanyin a aquest interval. Vegeu l'exemple 5.4.
- La SF de $f(t)$ es pot *derivar terme a terme* i en resulta una nova sèrie que convergeix uniformement cap a $g(t) = \frac{df(t)}{dt}$, sempre que $g(t)$ sigui quasicontínua en l'interval $[0, T]$.

Exemple 5.1. Sèrie de Fourier d'una ona quadrada positiva

Feu el desenvolupament en SF de la funció periòdica $f(t)$ —ona quadrada positiva— definida per

$$f(t) = \begin{cases} F_0, & \text{si } 0 < t < T/2 \\ 0, & \text{si } T/2 < t < T \end{cases} \quad (5.5)$$

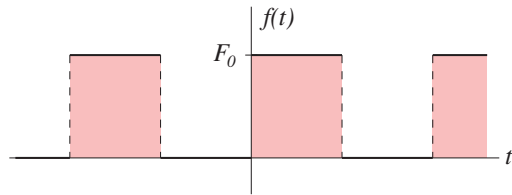


Figura 5.2

Solució

Hem de calcular els coeficients del desenvolupament (5.2) donats per (5.3). Així, per a les b_n tenim

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T} \left(\int_0^{T/2} + \int_{T/2}^T \right) = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} F_0 \sin \frac{2\pi n}{T} t dt = F_0 \frac{1}{n\pi} (1 - \cos n\pi) = \\ &= \begin{cases} = 0, & \text{si } n \text{ és parell} \\ = F_0 \frac{2}{n\pi}, & \text{si } n \text{ és senar} \end{cases} \end{aligned}$$

Per a a_0 , trobem

$$a_0 = \frac{1}{T} \left(\int_0^{T/2} F_0 dt + \int_{T/2}^T 0 \cdot dt \right) = \frac{1}{2} F_0$$

Les altres a_n , $n > 0$, resulten nul·les. Per tant, el desenvolupament queda com

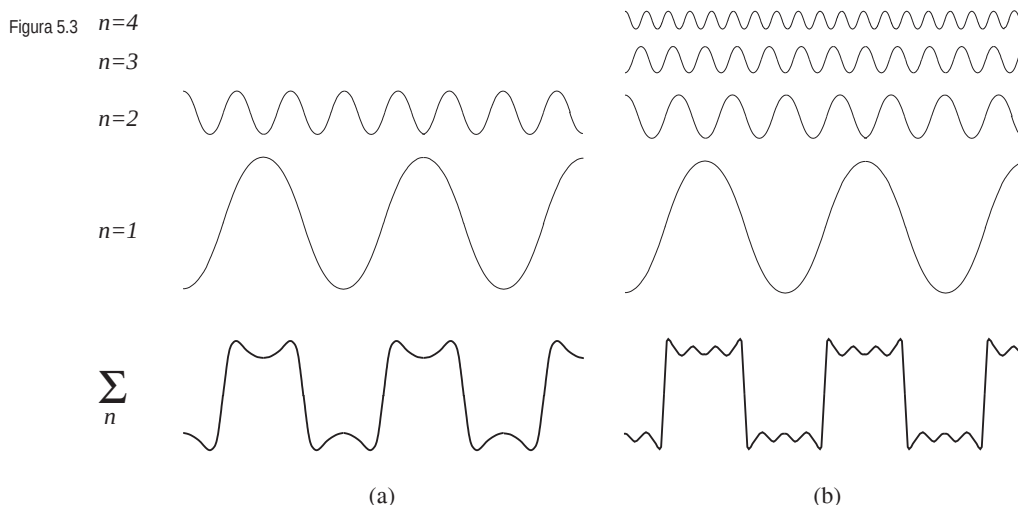
$$f(t) = \frac{F_0}{2} + F_0 \frac{2}{\pi} \left(\sin t + \frac{\sin 3t}{3} + \frac{\sin 5t}{5} + \dots \right) \quad (5.6)$$



Fixem-nos que els coeficients d'aquesta sèrie: $1, 1/3, 1/5$, etc. decreixen molt poc d'un terme al següent. D'aquest fet es diu que la sèrie és de *convergència lenta*: calen molts termes de la sèrie truncada per aconseguir una aproximació bona de la funció. Aquest fet és molt corrent: les funcions amb discontinuïtats són, en general, de convergència més lenta que les funcions més "suaus" sense discontinuïtats.

Observem, també, que a $t = 0$ la sèrie dóna $F_0/2$, és a dir, la mitjana dels límits de la funció a $t = 0$ per l'esquerra i per la dreta. Això és general per a tots els punts de discontinuïtat de qualsevol funció que desenvolupem.

A la figura 5.3, s'han representat els primers termes de la sèrie (5.6) i les sumes respectives. Com veiem, a la columna (a) només n'hi ha els dos primers i a la (b), els quatre primers.

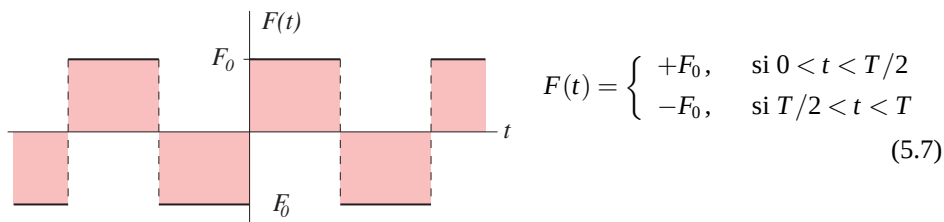


Malgrat que la sèrie (5.6) és de convergència molt lenta, es pot apreciar que la suma amb només quatre termes ja es comença a acostar bastant a la funció (5.5).

Exemple 5.2. Sèrie de Fourier d'una ona quadrada

Trobeu el desenvolupament de Fourier de la funció periòdica $F(t)$ —ona quadrada— definida per

Figura 5.4



Solució

Observem que aquesta funció $F(t)$ es relaciona amb la $f(t)$ de l'exemple 5.1 de la forma

$$F(t) = 2f(t) - F_0$$



i, per tant, per (5.6) el desenvolupament de Fourier de $F(t)$, (5.7), serà

$$F(t) = F_0 \frac{4}{\pi} \left(\sin \omega t + \frac{\sin 3\omega t}{3} + \frac{\sin 5\omega t}{5} + \dots \right) = \frac{4F_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin(2n-1)\omega t \quad (5.8)$$

on, naturalment, $\omega = 2\pi/T$.

Exemple 5.3. Sèrie de Fourier d'una dent de serra

Esbrineu la sèrie de Fourier corresponent a la funció *dent de serra*, de període T , definida com

$$f(t) = \frac{2F_0}{T}t, \quad \text{si } -T/2 < t < T/2 \quad (5.9)$$

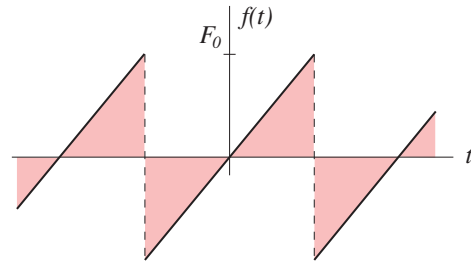


Figura 5.5

Solució

Aquesta és una funció senar que només tindrà sinus en el seu desenvolupament. Efectivament, si $\omega = 2\pi/T$, aplicant (5.3) s'arriba fàcilment al resultat

$$f(t) = \frac{2F_0}{\pi} \left(\frac{\sin \omega t}{1} - \frac{\sin 2\omega t}{2} + \frac{\sin 3\omega t}{3} - \dots \right) \quad (5.10)$$

Exemple 5.4. Sèrie de Fourier d'una ona triangular positiva

Trobeu el desenvolupament de Fourier de la funció $f(t)$ ona triangular següent:

$$f(t) = 2F_1 \frac{|t|}{T} = \begin{cases} 2F_1 \frac{+t}{T}, & \text{si } 0 < t < T/2 \\ 2F_1 \frac{-t}{T}, & \text{si } -T/2 < t < 0 \end{cases} \quad (5.11)$$

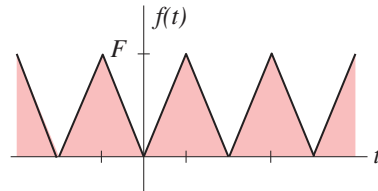


Figura 5.6

Solució

Aquesta funció és parella i, per les propietats que hem vist a la secció §5.1, el seu desenvolupament només tindrà cosinus. Aplicant ara l'expressió (5.3) per al càlcul de les a_n , en podem trobar sense cap dificultat els coeficients i, en definitiva, la SF corresponent.

Aquesta és la forma directa de trobar el desenvolupament de Fourier, però també n'hi ha una altra que, en bastants ocasions, pot anar molt bé. Fixem-nos que, si fem $F_1 = F_0 \cdot T/2$, llavors la funció (5.11) és la integral de la funció ona quadrada (5.7). Per tant, si integrem terme a terme la sèrie (5.8) amb $F_0 = 2F_1/T = F_1\omega/\pi$, ens queda



$$\begin{aligned}
 f(t) &= \int F(t) dt = \frac{4}{\pi} \frac{F_1 \omega}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \int \sin(2n-1)\omega t dt = \\
 &= -\frac{4F_1}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos(2n-1)\omega t + C
 \end{aligned} \quad (11)$$

on C és la constant d'integració que podem determinar a partir d'un valor de t i $f(t)$. Per exemple, com que a $t = 0$ tenim que $f(0) = 0$, veiem, per (1), que

$$C = \frac{4F_1}{\pi^2} \left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots \right)$$

Si ara provem $t = T/4$, per al qual $f(T/4) = F_1/2$, per (1) resulta $C = F_1/2$ —i d'aquí obtenim, de passada, quant val la sèrie numèrica anterior:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

Finalment, doncs, la sèrie (1) queda com

$$f(t) = F_1 \left\{ \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \left(\frac{\cos \omega t}{1^2} + \frac{\cos \omega 3t}{3^2} + \frac{\cos \omega 5t}{5^2} + \dots \right) \right\} \quad (5.12)$$

Observem que així com la sèrie (5.8) es pot integrar terme a terme i tot va bé, no passa el mateix si la volem derivar. En efecte, com és immediat de comprovar, si la derivem, queda una sèrie *no convergent* i no la funció constant zero que podríem esperar de la derivada de la funció (5.7).

En els exemples següents i en els problemes del final del capítol, veurem altres funcions periòdiques importants i els desenvolupaments corresponents.

5.2. Sèries de Fourier i estats estacionaris

5.2.1. Aplicació de les SF a les oscil·lacions forçades

Suposem que la força impulsora $F(t)$ que actua sobre un oscil·lador és periòdica, de període $2\pi/\omega$, i que, per tant, la podem desenvolupar en SF com (5.2)

$$F(t) = F_0 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t) \quad (5.13)$$

Per la linealitat que vèiem a (5.1) i els resultats de la secció §3.2, la solució $x(t)$, per a l'estat estacionari, serà, doncs

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_0}{n\omega Z_n} (a_n \cos(n\omega t - \delta_n) + b_n \sin(n\omega t - \delta_n)) \quad (5.14)$$

on, per (3.22) i (3.11),

$$Z_n = m \sqrt{\left(\frac{\omega_0^2 - n^2 \omega^2}{n\omega} \right)^2 + 4\beta^2} \quad \tan \delta_n = \frac{2\beta n\omega}{\omega_0^2 - n^2 \omega^2} \quad (5.15)$$



Com veurem tot seguit les expressions (5.15) són vàlides fins i tot per a $n = 0$.

Si en diem

$$\mu = \frac{\omega}{\omega_0} \quad (5.16)$$

i recordem que el factor de qualitat és $Q = \omega_0/2\beta$, aleshores, de (5.15) obtenim que els coeficients amb a_n —i, anàlogament, amb b_n — de (5.14) i els angles δ_n els podem posar, per a tota n , com

$$F_0 \frac{a_n}{n\omega Z_n} = \frac{F_0}{m\omega_0^2} \frac{a_n}{\sqrt{(1 - n^2\mu^2)^2 + \frac{n^2\mu^2}{Q^2}}} \quad (5.17)$$

$$\tan \delta_n = \frac{1}{Q} \frac{n\mu}{1 - n^2\mu^2} \quad (5.18)$$

Si l'amortiment és molt petit, és a dir, Q bastant gran, les dues expressions anteriors poden simplificar-se i queden com

$$F_0 \frac{a_n}{n\omega Z_n} = \frac{F_0}{m\omega_0^2} \frac{a_n}{|1 - n^2\mu^2|} \quad \text{i} \quad \delta_n \approx 0 \quad (5.19)$$

Això sí, en aquest cas, recordem que si l'amortiment és estrictament nul l'estat transitori perdurarà per sempre i l'estat estacionari no s'arribarà a assolir mai.

Vegem com s'aplica tot això a diversos exemples.

Exemple 5.5. Sèrie de Fourier i oscil·lacions forçades per una ona quadrada

Un oscil·lador de massa m , freqüència pròpia ω_0 i amortiment molt petit està sotmès a la força periòdica $F(t)$ ona quadrada que hem vist a l'exemple 5.2.

Si $m = 1$ kg, $F_0 = 1$ N i $\omega_0 = 10$ rad/s, estudieu l'estat estacionari de l'oscil·lador per a les tres freqüències $\mu = \omega/\omega_0 = \{0, 1; 0, 3; 1, 5\}$.

Solució

Com hem vist a l'exemple 5.2, el desenvolupament de Fourier de $F(t)$ és (5.8), amb $\omega = 2\pi/T$,

$$F(t) = F_0 \frac{4}{\pi} \left(\sin \omega t + \frac{\sin 3\omega t}{3} + \frac{\sin 5\omega t}{5} + \dots \right) = \frac{4F_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin(2n-1)\omega t \quad (1)$$

Com que, en aquest exemple, $\beta \approx 0$, per (5.19) i (1) resulta, finalment, la sèrie

$$x(t) = \frac{F_0}{m\omega_0^2} \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1) |1 - (2n-1)^2\mu^2|} \sin(2n-1)\omega t$$

Substituint els valors numèrics i $n = 1, 2, 3, \dots$, obtenim els tres casos següents segons μ .



- $\mu = \omega/\omega_0 = 0,1$

$$\begin{aligned}
 x(t) = F_0 \times 10^{-3} \\
 &+ 12,8610 \sin(1 \cdot 3t) + 4,6639 \sin(3 \cdot 3t) + 3,3953 \sin(5 \cdot 3t) + 3,5665 \sin(7 \cdot 3t) \\
 &+ 7,4458 \sin(9 \cdot 3t) + 5,5119 \sin(11 \cdot 3t) + 1,4194 \sin(13 \cdot 3t) + 0,6791 \sin(15 \cdot 3t) \\
 &+ 0,3963 \sin(17 \cdot 3t) + 0,2567 \sin(19 \cdot 3t) + 0,1778 \sin(21 \cdot 3t) + 0,1290 \sin(23 \cdot 3t) \\
 &+ 0,0970 \sin(25 \cdot 3t) + 0,0750 \sin(27 \cdot 3t) + 0,0593 \sin(29 \cdot 3t) + 0,0477 \sin(31 \cdot 3t) \\
 &+ 0,0390 \sin(33 \cdot 3t) + 0,0323 \sin(35 \cdot 3t) + 0,0271 \sin(37 \cdot 3t) + 0,0230 \sin(39 \cdot 3t) \\
 &+ 0,0196 \sin(41 \cdot 3t) + 0,0169 \sin(43 \cdot 3t) + 0,0147 \sin(45 \cdot 3t) + 0,0128 \sin(47 \cdot 3t) \\
 &+ 0,0113 \sin(49 \cdot 3t) + 0,0100 \sin(51 \cdot 3t) + 0,0089 \sin(53 \cdot 3t) + \dots
 \end{aligned}$$

Com veiem, el terme més significatiu és el primer, però l'amplitud torna a fer-se important en el cinquè, que correspon a la freqüència $\omega_5 = 9\omega = 27$ rad/s. Més enllà del sisè els coeficients es van fent més petits, però molt lentament... Per tal que els coeficients siguin $< 0,01$, hem d'esperar al $2n - 1 = 53$, mentre que perquè siguin $< 0,001$ hem d'esperar al $2n - 1 = 109$.

- $\mu = \omega/\omega_0 = 0,3$

$$\begin{aligned}
 x(t) = F_0 \times 10^{-3} (\\
 &+ 13,9916 \sin(1 \cdot 3t) + 22,3375 \sin(3 \cdot 3t) + 2,0372 \sin(5 \cdot 3t) + 0,5334 \sin(7 \cdot 3t) \\
 &+ 0,2249 \sin(9 \cdot 3t) + 0,1170 \sin(11 \cdot 3t) + 0,0689 \sin(13 \cdot 3t) + 0,0441 \sin(15 \cdot 3t) \\
 &+ 0,0299 \sin(17 \cdot 3t) + 0,0213 \sin(19 \cdot 3t) + 0,0157 \sin(21 \cdot 3t) + 0,0118 \sin(23 \cdot 3t) \\
 &+ 0,0092 \sin(25 \cdot 3t) + \dots)
 \end{aligned}$$

En aquest cas, el terme més significatiu no és el primer sinó el segon, que té la freqüència $\omega_2 = 3 \cdot 3 = 9$ rad/s pròxima a la natural $\omega_0 = 10$ rad/s. Més enllà del tercer, els coeficients es van fent més petits, també lentament...

- $\mu = \omega/\omega_0 = 1,5$

$$\begin{aligned}
 x(t) = F_0 \times 10^{-3} (\\
 &+ 10,1859 \sin(1 \cdot 3t) + 0,2205 \sin(3 \cdot 3t) + 0,0461 \sin(5 \cdot 3t) + 0,0166 \sin(7 \cdot 3t) \\
 &+ 0,0078 \sin(9 \cdot 3t) + 0,0043 \sin(11 \cdot 3t) + 0,0026 \sin(13 \cdot 3t) + 0,0017 \sin(15 \cdot 3t) \\
 &+ 0,0012 \sin(17 \cdot 3t) + 0,0008 \sin(19 \cdot 3t) + 0,0006 \sin(21 \cdot 3t) + 0,0005 \sin(23 \cdot 3t) \\
 &+ 0,0004 \sin(25 \cdot 3t) + \dots)
 \end{aligned}$$

En aquest últim cas, com passa en general si $\omega > \omega_0$, predomina clarament l'harmònic fonamental i el moviment és, bastant aproximadament, un MHS de freqüència ω amb les petites correccions introduïdes pels altres harmònics.

A les figures 5.7 s'han esquematitzat les gràfiques de $x(t)(\times 10^3)$ corresponents a aquests tres casos durant uns quants períodes. Les gràfiques es comenten per si mateixes: a les (a) i (b), sobretot a la primera, en què $\mu = \omega/\omega_0 \ll 1$, és a dir, $\omega_0 < \omega$ o $T > T_0$, a $x(t)$ encara s'aprecia l'efecte de la forma quadrada de $F(t)$; a la (c), amb $\omega_0 > \omega$ i $T < T_0$, ja no.

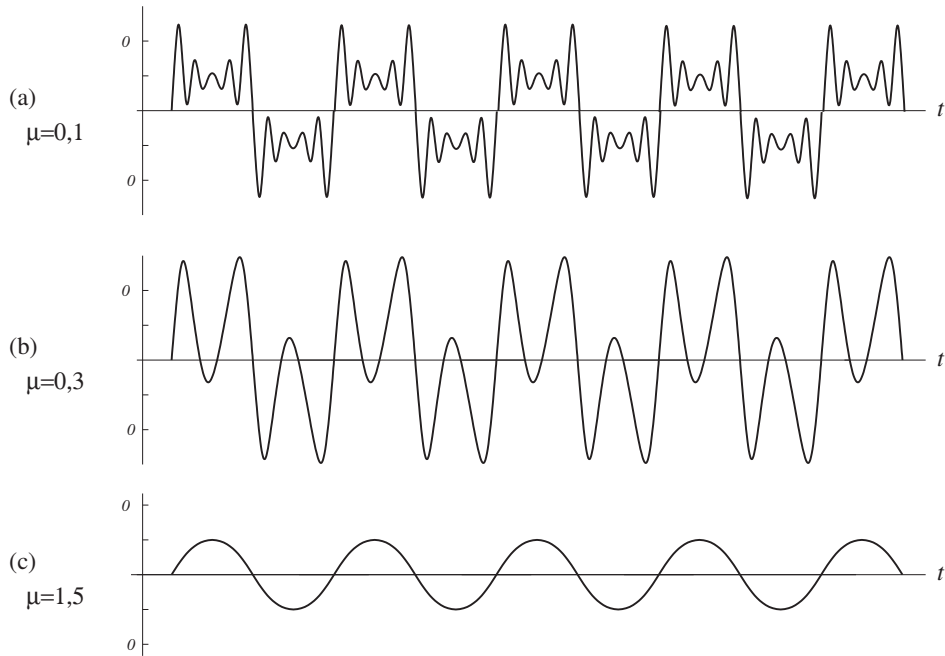


Figura 5.7

Exemple 5.6. Sèrie de Fourier i oscil·lacions forçades per un sinus rectificat

El mateix oscil·lador de l'exemple 5.5 anterior està sotmès a la força periòdica $F(t)$ en la forma del *sinus rectificat* següent:

$$f(t) = F_0 \left| \sin \frac{2\pi}{T} t \right|, \text{ si } 0 < t < T \quad (5.20)$$

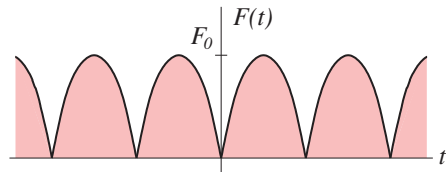


Figura 5.8

Sabem que a aquesta funció força li correspon el desenvolupament de Fourier següent —es demana demostrar-ho en el problema 5.9—:

$$f(t) = F_0 \left\{ \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \left(\frac{\cos \omega t}{1 \cdot 3} + \frac{\cos 2\omega t}{3 \cdot 5} + \frac{\cos 3\omega t}{5 \cdot 7} + \dots \right) \right\} \quad (5.21)$$

on, naturalment, $\omega = 2\pi/T$. Prenent, com abans, $\omega_0 = 10$ rad/s, $m = 1$ kg, i $\beta \approx 0$, estudieu el moviment estacionari de l'oscil·lador per a les tres freqüències: $\mu = \omega/\omega_0 = \{0,3; 0,8; 1,5\}$.

Solució

Igual com hem fet a l'exemple anterior, trobem $x(t)$ a partir de (5.14) i (5.19). El terme $2F_0/\pi$ de (5.21) queda com $2F_0/\pi m \omega_0^2$ ja que, de fet, és una força estàtica; els altres porten al desenvolupament següent:



$$x(t) = \frac{F_0}{m\omega_0^2} \left(\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2 - 1) |1 - n(\omega/\omega_0)^2|} \cos n\omega t \right)$$

Substituint els valors numèrics i $n = 1, 2, 3, \dots$ obtenim, per a cada μ , les sèries següents.

- $\mu = \omega/\omega_0 = 0,3$

$$\begin{aligned} x(t) = & F_0 \cdot 6,36620 \times 10^3 & -F_0 \cdot 10^3 (\\ & + 4,6639 \cos(1 \cdot 3t) & + 1,3263 \cos(2 \cdot 3t) & + 1,9147 \cos(3 \cdot 3t) & + 0,4593 \cos(4 \cdot 3t) \\ & + 0,1029 \cos(5 \cdot 3t) & + 0,0398 \cos(6 \cdot 3t) & + 0,0192 \cos(7 \cdot 3t) & + 0,0105 \cos(8 \cdot 3t) \\ & + 0,0063 \cos(9 \cdot 3t) & + 0,0040 \cos(10 \cdot 3t) & + 0,0027 \cos(11 \cdot 3t) & + 0,0019 \cos(12 \cdot 3t) \\ & + 0,0013 \cos(13 \cdot 3t) & + 0,0010 \cos(14 \cdot 3t) & + \dots) \end{aligned}$$

Com podem apreciar, els termes més significatius són, amb diferència, els tres primers. Aquí també el tercer és el que té la freqüència $\omega_3 = 3 \cdot 3 = 9$ rad/s més pròxima a la natural, $\omega_0 = 10$ rad/s. A partir del quart, els coeficients es van fent més petits, però ara més ràpidament que a l'exemple anterior. A la figura 5.9, s'ha representat $x(t)(\times 10^3)$ durant uns quants períodes.

Figura 5.9



- $\mu = \omega/\omega_0 = 0,8$

$$\begin{aligned} x(t) = & F_0 \cdot 6,36620 \times 10^3 & -F_0 \cdot 10^3 (\\ & + 11,7893 \cos(1 \cdot 3t) & + 0,5441 \cos(2 \cdot 3t) & + 0,0764 \cos(3 \cdot 3t) & + 0,0219 \cos(4 \cdot 3t) \\ & + 0,0086 \cos(5 \cdot 3t) & + 0,0040 \cos(6 \cdot 3t) & + 0,0022 \cos(7 \cdot 3t) & + 0,0012 \cos(8 \cdot 3t) \\ & + 0,0008 \cos(9 \cdot 3t) & & & + \dots) \end{aligned}$$

En aquest cas, el terme dominant és el primer. El moviment és un MHS, amb una petita correcció de menys del 5% per part del segon, i molt més petites per part dels següents.

- $\mu = \omega/\omega_0 = 1,5$

$$\begin{aligned} x(t) = & F_0 \cdot 6,36620 \times 10^3 & -F_0 \cdot 10^3 (\\ & + 3,3953 \cos(1 \cdot 3t) & + 0,1061 \cos(2 \cdot 3t) & + 0,0189 \cos(3 \cdot 3t) & + 0,0058 \cos(4 \cdot 3t) \\ & + 0,0023 \cos(5 \cdot 3t) & + 0,0011 \cos(6 \cdot 3t) & + 0,0006 \cos(7 \cdot 3t) & + \dots) \end{aligned}$$

Aquí torna a dominar l'armònic fonamental, amb una petita correcció d'un 3% per part del segon harmònic i molt més petites per part dels següents.



Exemple 5.7. Sèrie de Fourier i oscil·lacions forçades amb amortiment

L'oscil·lador de l'exemple 5.5 està sotmès ara a una força de fricció viscosa per a la qual el factor de qualitat val $Q = 3$ —és a dir, $\beta = \omega_0/6$. Torneu a estudiar el moviment estacionari de l'oscil·lador per a la freqüència $\omega/\omega_0 = 0,3$ tenint en compte ara l'amortiment.

Solució

Abans de començar, fixem-nos que, en aquest cas, l'amortiment té la seva importància. Ara ja hi aplicarem les expressions (5.17) i (5.18), amb les b_n donades per (5.8). Ens quedarà

$$x(t) = \frac{F_0}{m\omega_0^2} \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)} \frac{1}{\sqrt{[1 - (2n-1)^2\mu^2]^2 + \frac{(2n-1)^2\mu^2}{Q^2}}} \sin[(2n-1)\omega t - \delta_n]$$

amb l'angle δ_n donat, en general per (5.18), i que aquí resulta

$$\tan \delta_n = \frac{(2n-1)\mu}{Q(1 - (2n-1)^2\mu^2)}$$

Fent les operacions numèriques per a $2n-1 = 1, 3, 5, \dots$, n'obtenim

$$x(t) = F_0 \times 10^{-3} ($$

+12,2625 sin(1 · 3t - 0,1095)	+2,8070 sin(3 · 3t - 1,0062)	+0,9111 sin(5 · 3t + 0,3805)
+0,3722 sin(7 · 3t + 0,2025)	+0,1829 sin(9 · 3t + 0,1421)	+0,1023 sin(11 · 3t + 0,1108)
+0,0627 sin(13 · 3t + 0,0912)	+0,0411 sin(15 · 3t + 0,0778)	+0,0284 sin(17 · 3t + 0,0679)
+0,0204 sin(19 · 3t + 0,0603)	+0,0151 sin(21 · 3t + 0,0542)	+0,0115 sin(23 · 3t + 0,0493)
+0,0090 sin(25 · 3t + 0,0452)	+0,0071 sin(27 · 3t + 0,0418)	+0,0058 sin(29 · 3t + 0,0388)
+0,0047 sin(31 · 3t + 0,0362)	+0,0039 sin(33 · 3t + 0,0340)	+0,0033 sin(35 · 3t + 0,0320)
+ ...)		

A la figura 5.10, es mostra aquesta resposta $x(t)(\times 10^3)$ durant uns quants períodes: compareu-la amb la gràfica (b) de la figura 5.7 de l'exemple 5.5, què és el mateix cas, però allà sense amortiment.

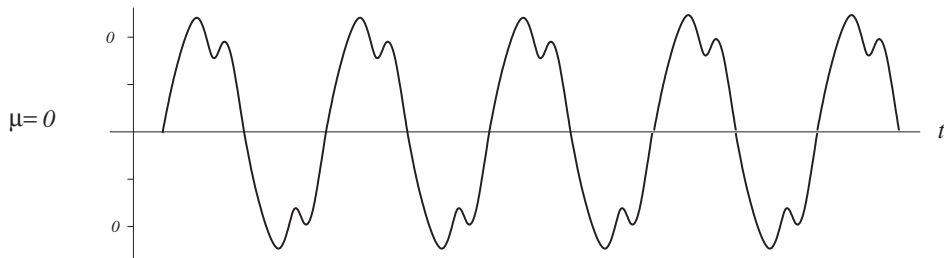


Figura 5.10



5.2.2. Energia i sèrie de Fourier

Considerem una força externa $F(t)$ periòdica, que desenvolupem en sèrie de Fourier

$$F(t) = F_0 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t)$$

i que actua sobre la partícula d'un oscil·lador originant-ne un moviment periòdic $x(t)$ tal que, en l'estat estacionari, podem expressar la seva velocitat en una sèrie de Fourier com ara aquesta altra

$$v(t) = \dot{x}(t) = v_0 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (A_n \cos n\omega t + B_n \sin n\omega t)$$

Com fèiem a la secció §3.5 ara ens preguntem quanta potència, de mitjana, subministra la força externa a l'oscil·lador, que, en l'estat estacionari, és com preguntar quanta energia té l'oscil·lador. Com sabem, la potència instantània subministrada és el producte $P(t) = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = F v$ i la mitjana —apèndix §A.4— serà

$$\begin{aligned} \langle P \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T F(t) v(t) dt = \frac{1}{2} F_0 v_0 \frac{\omega}{\pi} \cdot \\ &\cdot \int_0^{2\pi/\omega} \left[\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t) \right] \left[\sum_{n=0}^{\infty} (A_n \cos n\omega t + B_n \sin n\omega t) \right] dt \quad (5.22) \end{aligned}$$

Ara bé, aquesta integral queda extraordinàriament simplificada. Si ens hi fixem bé, aquest producte de sumatoris dóna lloc a integrals del tipus

$$\int_0^{2\pi/\omega} \cos n\omega t \sin m\omega t dt \quad \text{o tipus} \quad \int_0^{2\pi/\omega} \sin n\omega t \sin m\omega t dt$$

etc. Precisament, aquestes integrals trigonomètriques estan recollides a l'apèndix §A.3.2, d'on deduïm que només les d'un integrant tipus (A.82), com $\sin^2 n\omega t$ o $\cos^2 n\omega t$, són diferents de zero. Així, la integral (5.22) queda com

$$\langle P \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} F_0 v_0 (a_n A_n + b_n B_n) \quad (5.23)$$

És a dir, la potència mitjana total subministrada és igual a la suma de les potències de cadascuna de les components de Fourier. Aquest resultat es pot generalitzar a les energies de la forma següent:

L'energia total d'una oscil·lació periòdica és exactament la suma de les energies corresponents a cadascuna de les components de Fourier.

5.3. Integral de Fourier

Una funció $f(t)$ no periòdica la podem entendre com una funció que té un període que va des de $-\infty$ fins a $+\infty$. En vista d'això, ens podem preguntar si l'anàlisi de Fourier



que hem vist i aplicat a la secció §5.1 es pot estendre a les funcions no periòdiques. La resposta és que sí i, de fet, veurem que hi ha una gran similitud entre els casos de la funció periòdica i el de la funció no periòdica.

Teorema de la integral de Fourier

Si $f(t)$ compleix les *condicions de Dirichlet* —esmentades a la secció §5.1— i la integral $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt$ convergeix, aleshores la funció $f(t)$ es pot expressar com

$$f(t) = \int_0^{\infty} [A(\omega) \cos \omega t + B(\omega) \sin \omega t] d\omega \quad (5.24)$$

essent $A(\omega)$ i $B(\omega)$ dues funcions de ω definides per

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t dt \quad B(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t dt \quad (5.25)$$

Com en el teorema de la SF, en els punts de discontinuïtat de $f(t)$ la integral (5.24) val la mitjana entre els límits per l'esquerra i per la dreta de la funció.

Aquestes expressions (5.24) i (5.25) són, en el fons, semblants a (5.2) i (5.3), que hem vist a la secció §5.1. Les funcions $A(\omega)$ i $B(\omega)$ fan el mateix paper a la integral (5.24) que les constants a_n i b_n donades per (5.3) a la sèrie (5.2): en la descomposició de la funció $f(t)$ en una integral de funcions sinus i cosinus, representen l'amplitud, la contribució o el pes de cada terme segons la freqüència ω de què es tracti. En ambdós casos, per a les a_n , b_n i les $A(\omega)$, $B(\omega)$, les integrals que les determinen s'estenen a tot el període corresponent.

D'altra banda, la diferència més notable i més característica entre el cas de la funció periòdica i el de la funció no periòdica és que, en aquesta última, el sumatori de la sèrie (5.2) ha quedat convertit en la integral (5.24). Això significa que, en la SF, l'espectre de freqüències és discret: ω , 2ω , 3ω , ..., mentre que en la integral de Fourier tenim un *espectre de freqüències continu*: com veiem a (5.24) i (5.25), totes les freqüències, des de 0 fins a ∞ , contribueixen, més o menys, al desenvolupament de $f(t)$. Els valors $A(\omega)$ i $B(\omega)$ són les amplituds en els desenvolupaments en cosinus i sinus corresponents a l'interval de freqüències entre ω i $\omega + d\omega$.

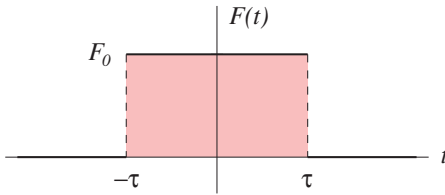
Les dues integrals (5.25) són les dues components de la *transformada de Fourier*, eina matemàtica potentíssima de gran aplicació en tots els camps de la física i la tecnologia. A la secció §5.5, veurem una forma més compacta d'expressar el desenvolupament (5.25) i la transformada de Fourier.

A continuació, vegem-ne dos exemples. En el primer, veurem com es fa el desenvolupament en integral de Fourier d'un pols rectangular; en el segon, com sorgeix la necessitat de la distribució contínua de freqüències per a les funcions no periòdiques. I a la pròxima secció estudiarem com es relaciona la durada d'un tren d'ones o senyal sinusoidal amb l'interval de freqüències que cal per sintetitzar-lo.

**Exemple 5.8. Integral de Fourier d'un pols rectangular**

Sigui la funció no periòdica $f(t)$ *pols rectangular* definida com

Figura 5.11



$$f(t) = \begin{cases} F_0, & \text{si } -\tau < t < \tau \\ 0, & \text{si } |t| > \tau \end{cases} \quad (5.26)$$

Feu-ne el desenvolupament en integral de Fourier.

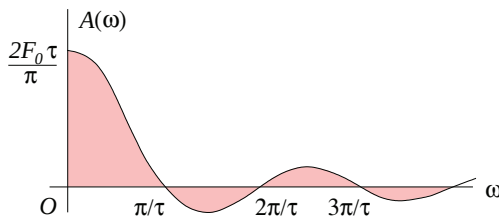
Solució

Calculem les funcions $A(\omega)$ i $B(\omega)$ corresponents. Bé, de fet, anàlogament al que hem vist a la secció §5.1 que passa amb els coeficients a_n i b_n de les sèries de Fourier, si $f(t)$ és senar, la funció és $A(\omega) = 0$ i, si $f(t)$ és parella, la funció és $B(\omega) = 0$. En aquest exemple, la funció (5.26) és parella i, per tant, $B(\omega) = 0$. Quant a la $A(\omega)$, per (5.25) tenim que

$$A(\omega) = \frac{F_0}{\pi} \int_{-\tau}^{\tau} \cos \omega t \, dt = \frac{F_0}{\pi \omega} \left[\sin \omega t \right]_{-\tau}^{\tau} = \frac{2F_0\tau}{\pi} \frac{\sin \omega \tau}{\omega \tau} \quad (5.27)$$

A la figura 5.12, hi ha representada la funció $A(\omega)$. Fixem-nos com l'allargament o l'escurçament de tota la gràfica depèn de τ .

Figura 5.12



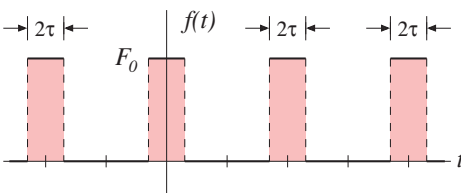
I ara, per (5.24) i (5.27), podem posar la funció pols rectangular (5.26) com la integral de Fourier

$$f(t) = \frac{2F_0\tau}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \omega \tau}{\omega \tau} \cos \omega t \, d\omega \quad (5.28)$$

Exemple 5.9. Espectre discret i espectre continu

Sigui la funció periòdica $f(t)$ *impuls o pols rectangular* definida per

Figura 5.13



$$f(t) = \begin{cases} F_0, & \text{si } 0 < t < \tau \\ 0, & \text{si } \tau < t < T - \tau \\ F_0, & \text{si } T - \tau < t < T \end{cases} \quad (5.29)$$



on F_0 i τ són constants. Fent $\omega = 2\pi/T$, el seu desenvolupament en SF és —com es demana que es demostrï al problema 5.12—

$$f(t) = F_0 \frac{\omega\tau}{\pi} + F_0 \frac{2}{\pi} \left(\frac{\sin \omega\tau}{1} \cos \omega t + \frac{\sin 2\omega\tau}{2} \cos 2\omega t + \frac{\sin 3\omega\tau}{3} \cos 3\omega t + \dots \right) \quad (5.30)$$

Doncs bé, estudiem la relació entre l'espectre discret de freqüències d'aquesta funció i l'espectre continu del pols rectangular aïllat de l'exemple 5.8.

Solució

El terme general de la sèrie (5.30), si $n > 0$, és

$$a_n = F_0 \frac{2}{\pi} \frac{\sin(n2\omega\tau)}{n} = 4F_0 \frac{\tau}{T} \frac{\sin n\omega\tau}{n\omega\tau} \quad (1)$$

Per tal de normalitzar les a_n , introduïm les a_n^* , que per (1) queden com

$$a_n^* = \frac{T}{2\pi} a_n = \frac{2F_0\tau}{\pi} \frac{\sin n\omega\tau}{n\omega\tau} \quad (2)$$

Veiem que a_n^* té una expressió molt semblant a la funció $A(\omega)$ donada per (5.27) de l'exemple anterior. Això sí, no oblidem que les ω de les dues expressions tenen significats diferents.

La a_n^* donada per (2) també podem entendre-la com una funció de $n\omega$, $a_n^*(n\omega)$. En aquest sentit, de (2) deduïm que $a_n^*(n\omega)$ passa per zero cada cop que $n\omega\tau = k\pi$, essent $k = 1, 2, \dots$, és a dir, per als valors de n —zeros— donats per

$$n_k = k \frac{\pi}{\omega\tau} = k \frac{T}{2\tau}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3)$$

o, el que és equivalent, per als valors de $n\omega$ donats per

$$n_k\omega = k \frac{T}{2\tau} \cdot \frac{2\pi}{T} = k \frac{\pi}{\tau}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (4)$$

que resulten independents del valor de T .

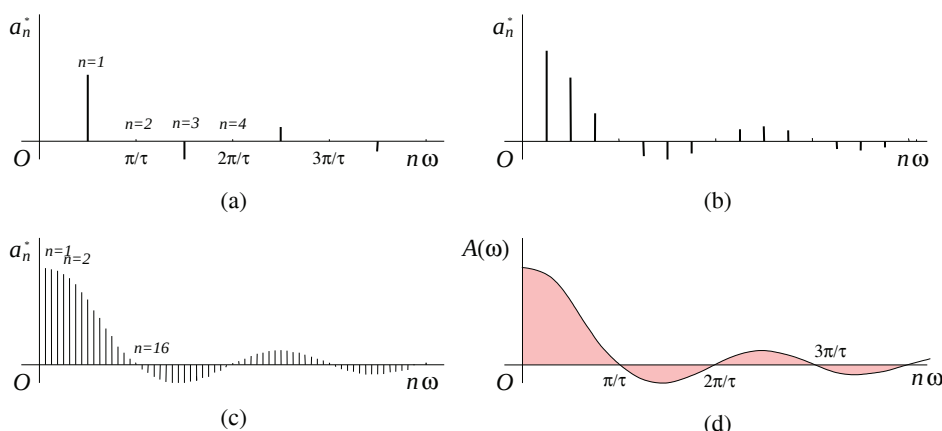
D'altra banda, ara ens podem preguntar: Quin nombre de freqüències hi ha entre l'origen, $n = 0$, i el primer zero de la $a_n^*(n\omega)$? O entre dos zeros qualssevol consecutius? Per (3) i (4), tenim que

$$\Delta n = n_k - n_{k-1} = \frac{T}{2\tau} \quad \text{i} \quad \Delta(n\omega) = \omega \Delta n = \frac{\pi}{\tau} \quad (5)$$

A la figura 5.14, s'ha representat gràficament la a_n^* donada per (2) en funció de $n\omega$, per als valors discrets de $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, per als tres quocients τ/T : (a) $1/4$, (b) $1/8$, (c) $1/16$. Observem que en aquestes tres gràfiques, queden molt ben reflectides l'expressió (4) —a les tres gràfiques, els zeros són a $k\pi/\tau$ — i la (5) —la “densitat de freqüències” és proporcional a T/τ . Si féssim T molt, molt gran, les freqüències s'ajuntarien tant que semblaria un espectre continu. Fixem-nos que, a mesura que τ/T disminueix va apareixent amb més claretat un embolcall a l'espectre discret de a_n^* , i que aquest embolcall és

$A(\omega)$, l'espectre continu del pols aïllat, representat a la figura 5.14 (d) —compareu-la amb la figura 5.12 de l'exemple 5.8.

Figura 5.14



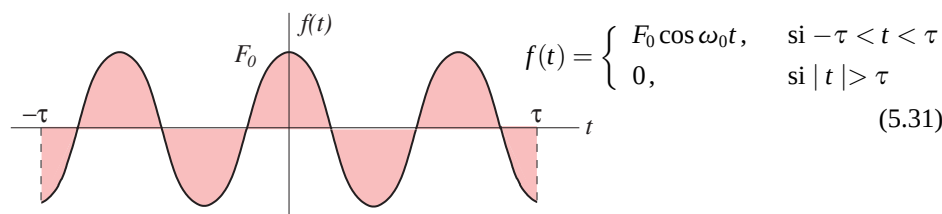
Així doncs, amb aquest exemple, hem vist la tendència de l'espectre a fer-se continu si la funció periòdica tendeix a deixar-ho de ser.

5.4. Anàlisi de Fourier d'un pols harmònic finit

Una oscil·lació o una ona harmònica en sentit estricte no pot donar-se en la realitat, ja que això voldria dir que existeix des de sempre i per sempre. En la realitat el que tenim són polsos harmònics, que vénen a ser com oscil·lacions o ones harmòniques però de durada finita, és a dir, tenen un instant en què comencen i un instant en què acaben. Els polsos són tan importants que dedicarem aquesta secció a estudiar-los amb detall fent-los l'anàlisi de Fourier.

Per a aquesta anàlisi, definim la funció *pols harmònic finit* de freqüència ω_0 i durada 2τ com

Figura 5.15



Si l'oscil·lació s'estengués a tot el temps, és a dir, des de $-\infty$ fins a ∞ , l'anàlisi de Fourier seria ben simple: només contribuiria a la funció la freqüència ω_0 . Però, com que la funció és zero fins a $t = -\tau$ i torna a ser-ho des de $t = +\tau$, i només hi ha oscil·lació entre aquests dos instants, hem d'afegir a $F_0 \cos \omega_0 t$ una sèrie contínua d'altres harmònics de forma que la suma de tots ells reproduïx exactament el pols (5.31).

Com que la funció és parella, només contribuirà a (5.24) el terme amb $A(\omega)$, ja que $B(\omega) = 0$. Per (5.25) i per (A.23), tindrem



$$\begin{aligned}
 A(\omega) &= \frac{F_0}{\pi} \int_{-\tau}^{\tau} \cos \omega_0 t \cos \omega t dt = \frac{F_0}{2\pi} \int_{-\tau}^{\tau} [\cos(\omega_0 - \omega)t + \cos(\omega_0 + \omega)t] dt = \\
 &= \frac{F_0 \tau}{\pi} \left(\frac{\sin(\omega - \omega_0)\tau}{(\omega - \omega_0)\tau} + \frac{\sin(\omega + \omega_0)\tau}{(\omega + \omega_0)\tau} \right)
 \end{aligned} \quad (5.32)$$

Si, com passa en moltes ocasions d'interès, la durada del pols és bastant més gran que el període de l'oscil·lació, és a dir, $2\tau \gg 2\pi/\omega_0$, aleshores $(\omega_0 + \omega)\tau \gg \pi$, per a qualsevol ω , la qual cosa vol dir que el segon quocient de (5.32) es fa molt petit, fins i tot per a $\omega = 0$, i a la suma (5.32) predomina el primer, que a $\omega = \omega_0$ pren el valor màxim, 1. Per tant, si $\omega_0 \tau \gg \pi$, podem aproximar (5.32) per

$$A(\omega) \approx \frac{F_0 \tau}{\pi} \frac{\sin(\omega - \omega_0)\tau}{(\omega - \omega_0)\tau} \quad (5.33)$$

Aquesta funció $A(\omega)$ donada per (5.33) s'ha representat a la figura 5.16. Hi podem apreciar que, si bé hi ha una freqüència dominant que correspon a $\omega = \omega_0$ —on hi ha el màxim—, per sintetitzar un pols finit cal una distribució contínua de freqüències. Com veiem també a (5.33), i s'ha expressat a la figura 5.16, a mesura que fem créixer τ la funció $A(\omega)$ es va encongint en ω i es converteix en un pic centrat en ω_0 cada cop més alt i estret. També podem fixar-nos que la funció pols rectangular (5.26) és un cas particular — $\omega_0 = 0$ — del pols harmònic finit, la qual cosa també queda reflectida en les corresponents $A(\omega)$, la (5.33) i la (5.28).

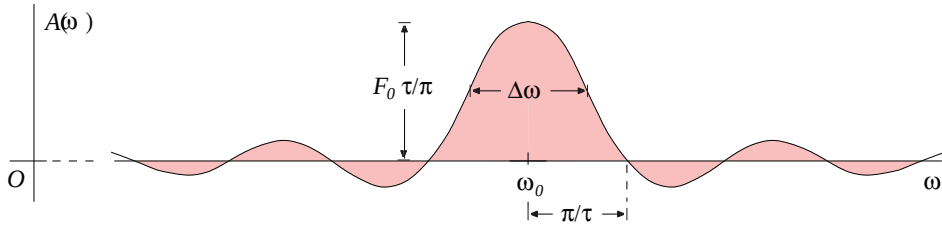


Figura 5.16

Podem acabar de veure encara millor la relació entre la durada del pols i la distribució de freqüències introduint-hi l'*amplada del pic* $\Delta\omega$. Aquesta $\Delta\omega$ dóna una idea clara de la grandària, a la pràctica, del marge de freqüències que intervenen en la integral de Fourier de la funció $f(t)$ —que, en teoria, és infinit. De forma semblant a com vam fer per a l'amplada de la ressonància a la secció §3.6, definim $\Delta\omega$ com l'interval tal que, per a les ω

$$\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2} < \omega < \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2} \quad \text{llavors} \quad A(\omega) > \frac{1}{2}A(\omega_0) = \frac{1}{2}F_0\tau \quad (5.34)$$

Com que la solució de la inequació $\sin x/x > 1/2$ és, com és ben fàcil de comprovar, $|x| < 1,895$, aleshores, per (5.33) i (5.34), trobem que $\Delta\omega\tau = 3,79$. Si, finalment, en lloc de τ posem $\Delta t = 2\tau$, és a dir, la durada del pols, i n'arrodonim el resultat, ens queda que la relació entre $\Delta\omega$ i Δt és, aproximadament,

$$\Delta\omega \Delta t \approx 2\pi \quad (5.35)$$

Aquesta última relació ens expressa que,

com més petita sigui la durada Δt del pols, més marge de freqüències $\Delta\omega/2$ al voltant de ω_0 caldrà per representar-lo, i a l'inrevés.



L'aproximació (5.35), i tot el que se'n desprèn, és molt important en camps com l'òptica i les telecomunicacions, però, sobretot, és fonamental en la *mecànica quàntica*. En la visió quàntica de la física, les partícules es descriuen per polsos finits o paquets d'ona d'una freqüència angular ω proporcional a l'energia que tenen. En aquesta interpretació, la relació (5.35) és l'expressió del *principi d'incertesa de Heisenberg* que, més o menys, vol dir que el producte de la incertesa en l'energia que té una partícula per la incertesa en l'instant de temps que estem considerant no es pot fer mai zero sinó que té un valor finit, de forma que si millorem el coneixement d'una d'aquestes magnituds automàticament empitjora el de l'altra.

5.5. La transformada de Fourier

És molt interessant observar que el desenvolupament en sèrie de Fourier (5.2) que hem vist anteriorment, amb els coeficients donats per (5.3), també té un tractament molt senzill amb nombres complexos.¹ Per mitjà de les igualtats (C.13), tenim que

$$\begin{aligned} a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t &= a_n \frac{e^{in\omega t} + e^{-in\omega t}}{2} + b_n \frac{e^{in\omega t} - e^{-in\omega t}}{2i} = \\ &= \frac{1}{2}(a_n - ib_n)e^{in\omega t} + \frac{1}{2}(a_n + ib_n)e^{-in\omega t} = c_n e^{in\omega t} + c_{-n} e^{-in\omega t}, \end{aligned}$$

amb $n = 1, 2, \dots$ i, per tant, podem posar la SF (5.2) de la funció $f(t)$, de període $T = 2\pi/\omega$, com

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t} \quad (5.36)$$

on c_n són els coeficients complexos donats per la integral següent i que es relacionen amb els a_n i b_n de (5.3) de la forma

$$c_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) e^{-in\omega t} dt = \begin{cases} (a_n - ib_n)/2, & \text{si } n > 0 \\ (a_{-n} + ib_{-n})/2, & \text{si } n < 0 \\ a_0/2, & \text{si } n = 0 \end{cases} \quad (5.37)$$

Anàlogament, amb la representació complexa, la integral de Fourier (5.24) pot posar-se com²

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (5.38)$$

en què $\mathcal{F}(\omega)$ és, precisament, la *transformada de Fourier* complexa de la funció $f(t)$, donada per

$$\mathcal{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (5.39)$$

¹ A l'apèndix C, es fa un repàs dels nombres complexos i de la representació complexa de les oscil·lacions.

² A la igualtat (5.38) el coeficient $1/2\pi$ és convencional, és a dir, es pot posar o no; si no es posa (5.38), és més semblant a (5.36), però s'haurà de posar a la (5.39).



i de la qual, comparant (5.38) i (5.39) amb les homòlogues (5.24) i (5.25), veiem que $\mathcal{F}(\omega)$ està molt relacionada amb $A(\omega)$ i $B(\omega)$.

L'analogia entre la transformada de Fourier i les sèries de Fourier es manifesta clarament en el fet que la transformada també té la seva *igualtat de Parseval* que, de forma anàloga a la (5.4), ara estableix

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{F}(\omega)|^2 d\omega \quad (5.40)$$

Vegem, per acabar, un exemple de transformada de Fourier.

Exemple 5.10. Transformada de Fourier d'una gaussiana

Sigui la *funció gaussiana*

$$f(t) = F_0 e^{-at^2} \quad (1)$$

en què F_0 i a són constants. Calculeu i interpreteu la seva transformada de Fourier.

Solució

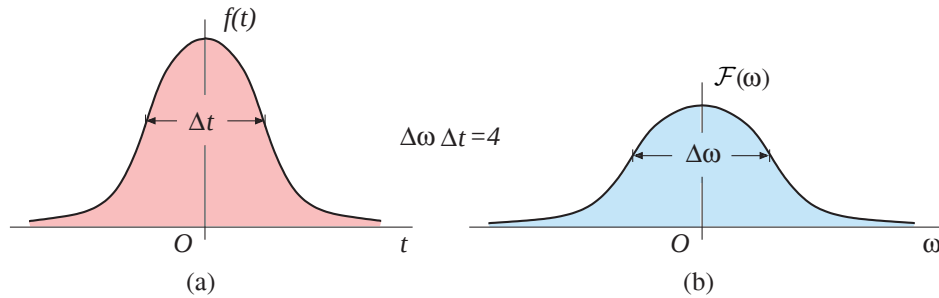


Figura 5.17

Abans de començar, vegem com es relaciona el paràmetre a amb l'amplada Δt característica de la *campana de Gauss* (1) —v. figura 5.17 (a). Com és fàcil de comprovar igualant a zero la segona derivada de (1), a $t_0 = \sqrt{\frac{1}{2a}}$ i a $-t_0$ hi ha els dos punts d'inflexió d'(1), que es corresponen amb l'altura relativa $f(t_0)/F_0 = 1/\sqrt{e} = 0,606$. Així doncs, una bona indicació de l'amplada Δt de (1) és $2t_0$, és a dir,

$$\Delta t = 2\sqrt{\frac{1}{2a}} \quad (2)$$

Esbrinem ara la transformada de (1). Per a això, apliquem l'expressió (5.39) i trobem

$$\mathcal{F}(\omega) = F_0 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2} e^{-i\omega t} dt \quad (3)$$

Com que podem fer

$$-at^2 - i\omega t = -\left(t\sqrt{a} + i\frac{\omega}{2\sqrt{a}}\right)^2 - \frac{\omega^2}{4a}$$



i ara, aplicant el canvi de variable $u = t\sqrt{a} + i\frac{\omega}{2\sqrt{a}}$, per al qual $dt = du/\sqrt{a}$, aleshores (3) queda com

$$\mathcal{F}(\omega) = F_0 \frac{1}{\sqrt{a}} e^{-\omega^2/4a} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du \quad (4)$$

El valor d'una integral com ara aquesta última està tabulat en (A.87). Tenint en compte que la funció e^{-u^2} és parella, la integral val, doncs, $\sqrt{\pi}$. I, finalment, la transformada (4) queda com

$$\mathcal{F}(\omega) = F_0 \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\omega^2/4a} \quad (5)$$

Així doncs, la transformada d'una funció gaussiana és una nova gaussiana. Podem caracteritzar l'amplada d'aquesta última —v. figura 5.17 (b)— aplicant l'expressió (2) adaptada a (5), i ens queda

$$\Delta\omega = 2\sqrt{2a} = \frac{4}{\Delta t}$$

d'on trobem, de forma semblant a la (5.35), que $\Delta\omega \Delta t = 4$. En definitiva, si $f(t)$ és una gaussiana estreta —amb una Δt petita—, la transformada gaussiana és ampla —amb $\Delta\omega$ gran—, i a l'inrevés. En termes de l'anàlisi de Fourier, això és com dir que, com més “estreta o ràpida” transcorre la gaussiana $f(t)$, més freqüències abastarà, és a dir, en llenguatge d'enginyeria de telecomunicacions, tindrà més *amplada de banda*. Observeu que aquest detall està en la línia del que hem vist a la secció §5.4 en relació amb el pols harmònic finit.

5.6. Problemes resolts i problemes proposats

5.6.1. Problemes resolts

Problema 5.1. Els coeficients de les sèries de Fourier

Trobeu les dues expressions (5.3) que donen els coeficients del desenvolupament d'una funció en sèrie de Fourier. Per a això, podeu fer el següent. Per trobar les a_n , multipliqueu tota la igualtat (5.2) per $\cos n\omega t$ i integreu entre 0 i $T = 2\pi/\omega$. Totes aquestes integrals s'anul·len excepte la de la a_n . I per a b_n feu el mateix però amb $\sin n\omega t$.

Solució

És a dir, per a m enter, hem d'integrar

$$\begin{aligned} \int_0^T f(t) \cos m\omega t dt &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^T (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t) \cos m\omega t dt = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^T \cos n\omega t \cos m\omega t dt + \sum_{n=0}^{\infty} b_n \int_0^T \sin n\omega t \cos m\omega t dt \end{aligned}$$



Per (A.82), (A.83) i (A.81) sabem que en aquests dos sumatoris d'integrals l'única que resulta ser diferent de zero és la corresponent a $\cos \cdot \cos$ i $n = m$. Així, com que $T = 2\pi/\omega$, tenim

$$\int_0^T f(t) \cos n\omega t dt = a_n \int_0^T \cos^2 n\omega t dt = a_n \frac{\pi}{\omega} = a_n \frac{T}{2}$$

d'on es dedueix el coeficient a_n . I anàlogament amb els coeficients b_n i $\sin m\omega t$.

Problema 5.2. Sèrie de Fourier d'un sinus semirectificat

Segui la funció $g(t)$ sinus semirectificat, de període $T = 2\pi/\omega$, definida com —v. figura 5.18—

$$g(t) = \begin{cases} F_0 \sin \omega t, & \text{si } nT \leq t \leq (n+1/2)T \\ 0, & \text{si } (n+1/2)T \leq t \leq nT \end{cases} \quad (5.41)$$

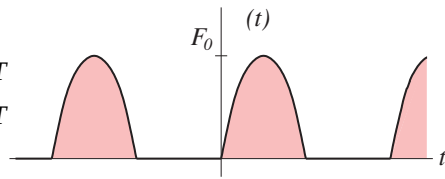


Figura 5.18

amb $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Sabent que el desenvolupament de la funció sinus rectificat $f(t) = F_0 |\sin \omega t|$ és la donada a (5.21) —com es demana demostrar al problema 5.9—, trobeu el desenvolupament del sinus semirectificat definit abans.

Solució

El sinus semirectificat (5.41) està relacionat amb el simplement rectificat $f(t)$ de la forma $g(t) = [F_0 \sin \omega t + f(t)]/2$, i, en conseqüència, la sèrie corresponent a $g(t)$ es relaciona amb la sèrie de $f(t)$ de (5.21) de la mateixa manera

$$g(t) = F_0 \left\{ \frac{\sin \omega t}{2} + \frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi} \left(\frac{\cos 2\omega t}{1 \cdot 3} + \frac{\cos 4\omega t}{3 \cdot 5} + \frac{\cos 6\omega t}{5 \cdot 7} + \dots \right) \right\} \quad (5.42)$$

Problema 5.3. Sèrie de Fourier d'una successió de paràboles

Trobeu el desenvolupament en SF de la funció periòdica $g(t)$ definida com —v. figura 5.19—

$$g(t) = 4F_0 \frac{t^2}{T^2}, \quad \text{si } -T/2 < t < T/2 \quad (5.43)$$

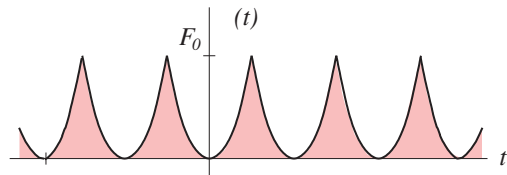


Figura 5.19

Solució

Podem fer-ho calculant els coeficients a_n , b_n per (5.3), o per integració de la sèrie (5.10) corresponent a la funció (5.9). En efecte, per (5.43) i (5.9) veiem que



$$g(t) = \frac{4}{T} \int f(t) dt = -\frac{4}{T} \frac{2F_0}{\pi} \frac{1}{\omega} \left(\frac{\cos \omega t}{1^2} - \frac{\cos 2\omega t}{2^2} + \frac{\cos 3\omega t}{3^2} - \dots \right) + C \quad (1)$$

on C és la constant d'integració. Tal com vam fer a l'exemple 5.4, podem intentar trobar la C donant un valor concret a t i imposant que (1) valgui el que resulta per (5.43). En aquest cas, aquest mètode no és immediat ja que sempre hi apareix una sèrie numèrica. Però també podem calcular C fixant-nos que la C és la constant a_0 de (5.3), és a dir, que

$$C = a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} 4F_0 \frac{t^2}{T^2} dt = \frac{F_0}{3} \quad (2)$$

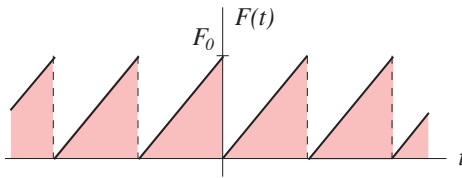
Així, de (1) i (2) obtenim

$$g(t) = \frac{F_0}{3} - \frac{4F_0}{\pi^2} \left(\frac{\cos \omega t}{1^2} - \frac{\cos 2\omega t}{2^2} + \frac{\cos 3\omega t}{3^2} - \dots \right)$$

Problema 5.4. Estat estacionari d'un oscil·lador i sèrie de Fourier, 1

Un oscil·lador no amortit està sotmès a la força periòdica $F(t)$ *dent de serra positiva* donada per —v. figura 5.20—

Figura 5.20



$$F(t) = F_0 \frac{t}{T}, \quad \text{si } 0 < t < T \quad (5.44)$$

Sabent que el desenvolupament en SF d'aquesta funció ve donat —com es demana demostrar al problema 5.11— per la sèrie següent:

$$F(t) = F_0 \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \left(\frac{\sin \omega t}{1} + \frac{\sin 2\omega t}{2} + \frac{\sin 3\omega t}{3} + \dots \right) \right] \quad (5.45)$$

en què $\omega = 2\pi/T$, estudieu el moviment de l'oscil·lador en l'estat estacionari si $\omega/\omega_0 = 0,3$ i $m = 1$ kg, $\omega_0 = 10$ rad/s, $\beta \approx 0$.

Solució

Aplicant les expressions (5.13), (5.14) i (5.15), tindrem la sèrie —ara en sinus— per a l'elongació $x(t)$ de l'oscil·lador. Com que $\beta \approx 0$, llavors $\delta_n = 0$ i pel que fa a $\omega_n Z_n = n\omega Z_n$, per (5.14) queda com

$$\omega_n Z_n = \omega_n m \frac{|\omega_0^2 - \omega_n^2|}{\omega_n} = m |\omega_0^2 - n^2 \omega^2|$$

de manera que, per a $n = 0$, $\omega_n Z_n = m\omega_0^2$, i el terme $F_0/2$ de (5.45) dóna lloc a $F_0/2m\omega_0^2$, és a dir, a una força estàtica. En definitiva, per a aquesta força, la sèrie (5.15) és

$$x(t) = \frac{F_0}{m\omega_0^2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n |1 - n^2 \omega^2 / \omega_0^2|} \sin n\omega t \right) \quad (5.46)$$



Substituint $m = 1 \text{ kg}$, $\omega_0 = 10 \text{ rad/s}$, $\omega = 3 \text{ rad/s}$, i $n = 1, 2, 3, \dots$, obtenim

$$\begin{aligned}
 x(t) = & F_0 \cdot 5 \times 10^{-3} - F_0 \cdot 0,318310 \times 10^{-3} (\\
 & + 10,9890 \sin(1 \cdot 3t) + 7,8125 \sin(2 \cdot 3t) + 17,5439 \sin(3 \cdot 3t) + 5,6818 \sin(4 \cdot 3t) \\
 & + 1,6000 \sin(5 \cdot 3t) + 0,7440 \sin(6 \cdot 3t) + 0,4189 \sin(7 \cdot 3t) + 0,2626 \sin(8 \cdot 3t) \\
 & + 0,1766 \sin(9 \cdot 3t) + 0,1250 \sin(10 \cdot 3t) + 0,0919 \sin(11 \cdot 3t) + 0,0697 \sin(12 \cdot 3t) \\
 & + 0,0541 \sin(13 \cdot 3t) + 0,0429 \sin(14 \cdot 3t) + 0,0346 \sin(15 \cdot 3t) + 0,0284 \sin(16 \cdot 3t) \\
 & + 0,0235 \sin(17 \cdot 3t) + 0,0197 \sin(18 \cdot 3t) + 0,0167 \sin(19 \cdot 3t) + 0,0143 \sin(20 \cdot 3t) \\
 & + 0,0123 \sin(21 \cdot 3t) + 0,0107 \sin(22 \cdot 3t) + 0,0093 \sin(23 \cdot 3t) + 0,0082 \sin(24 \cdot 3t) \\
 & + \dots)
 \end{aligned}$$

Com veiem, el terme més significatiu és el tercer, que, en aquest cas, és el que té la freqüència $\omega_3 = 3 \cdot 3 = 9 \text{ rad/s}$ més pròxima a la natural $\omega_0 = 10 \text{ rad/s}$. A partir del quart, els coeficients es van fent més petits, però molt lentament... A la figura 5.21, es pot observar la gràfica de l'elongació $x(t)(\times 10^3)$, per a $F_0 = 1 \text{ N}$, durant uns sis períodes. Fixem-nos com afecta la freqüència pròpia les oscil·lacions i com la "forma" de la funció $F(t)$ es reflecteix en el moviment.

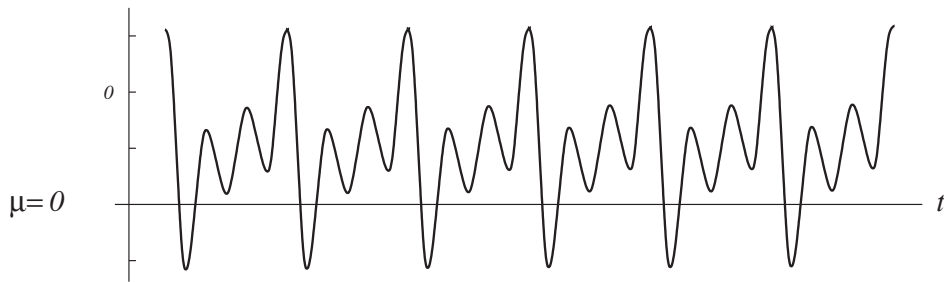


Figura 5.21

Problema 5.5. Estat estacionari d'un oscil·lador i sèrie de Fourier, 2

Un oscil·lador molt poc amortit està sotmès a una força externa $F(t)$ com l'impuls periòdic o pols rectangular (5.29) de l'exemple 5.9. Amb els valors de $\omega_0 = 10 \text{ rad/s}$, $m = 1 \text{ kg}$, i $\beta \approx 0$, i prenent $\alpha = 2\pi/100$, estudieu l'estat estacionari de l'oscil·lador per a la freqüència $\omega = 0,3 \omega_0$.

Solució

Partim de (5.14) i (5.19) per obtenir-ne la sèrie corresponent. Del desenvolupament en SF de $F(t)$, en (5.30), tenim que, per a $n = 0$, la força estàtica $\alpha F_0/\pi$ donarà lloc a $\alpha F_0/\pi m \omega_0^2$, i $x(t)$ resulta ser

$$x(t) = \frac{F_0}{m \omega_0^2} \left(\frac{\alpha}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \alpha}{n^2 |1 - n^2 (\omega/\omega_0)^2|} \cos n \omega t \right)$$

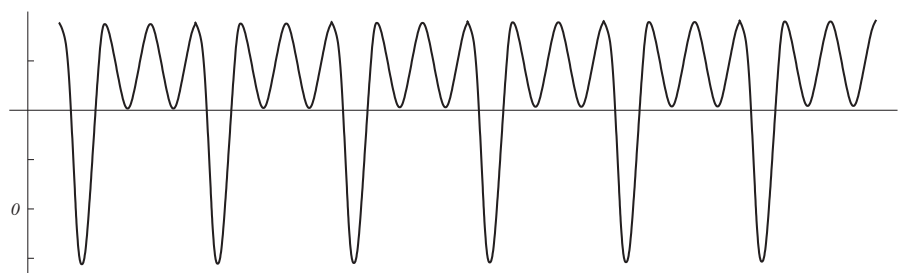
Substituint els valors numèrics i $n = 1, 2, 3, \dots$ tenim

$$\begin{aligned}
 x(t) = & F_0 \cdot 0,2000 \times 10^{-3} + F_0 \cdot 10^{-3} (\\
 & + 0,4393 \cos(1 \cdot 3t) + 0,3117 \cos(2 \cdot 3t) + 0,6976 \cos(3 \cdot 3t) + 0,2249 \cos(4 \cdot 3t) \\
 & + 0,0630 \cos(5 \cdot 3t) + 0,0291 \cos(6 \cdot 3t) + 0,0162 \cos(7 \cdot 3t) + 0,0101 \cos(8 \cdot 3t) \\
 & + \dots)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+0,0067 \cos(9 \cdot 3t) \quad +0,0047 \cos(10 \cdot 3t) \quad +0,0034 \cos(11 \cdot 3t) \quad +0,0025 \cos(12 \cdot 3t) \\
 &+0,0019 \cos(13 \cdot 3t) \quad +0,0015 \cos(14 \cdot 3t) \quad +0,0012 \cos(15 \cdot 3t) \quad +0,0010 \cos(16 \cdot 3t) \\
 &+0,0008 \cos(17 \cdot 3t) \quad +0,0006 \cos(18 \cdot 3t) \quad +0,0005 \cos(19 \cdot 3t) \quad + \dots
 \end{aligned}$$

Els termes més significatius són, amb diferència, els quatre primers. Aquí també el tercer, el més gran, és el que té la freqüència $\omega_3 = 3 \cdot 3 = 9$ rad/s més pròxima a la natural de l'oscil·lador, $\omega_0 = 10$ rad/s. A partir del cinquè, els coeficients es van fent lentament petits. A la figura 5.22, està representada $x(t)(\times 10^3)$, durant uns cinc períodes.

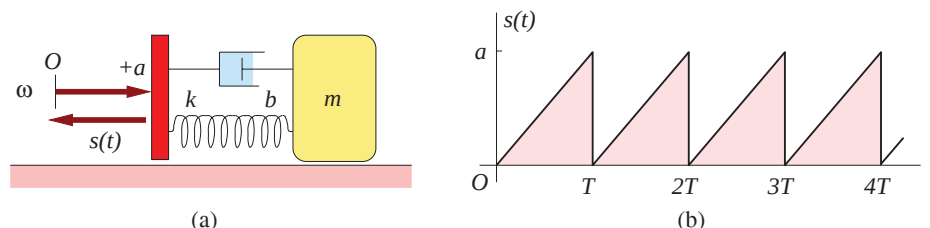
Figura 5.22



Problema 5.6. Oscil·lador forçat pel moviment periòdic del suport

La paret a la qual està unida la molla de l'oscil·lador amortit que es mostra a la figura 5.23 (a) està sotmesa a un desplaçament periòdic de tipus dent de serra positiu —v. figura 5.23 (b). Estudieu les oscil·lacions de la massa en l'estat estacionari i trobeu els primers termes de la sèrie de Fourier per a l'elongació x . Apliqueu el resultat general obtingut al cas en què $\omega_0 = \sqrt{k/m} = 37,5$ rad/s, i $\eta = \frac{\beta}{\omega_0} = 0,50$, i pel que fa a la força impulsora $a = 1$ m, i $\mu = \frac{\omega}{\omega_0} = 0,24$.

Figura 5.23



Solució

Primera part. Aquest problema és semblant al 3.7.1. Anomenem x la posició de la massa m de l'oscil·lador respecte d'un punt fix de l'horitzontal, i sigui $s(t)$ la posició de la paret o suport a què estan lligats la molla i l'amortidor. Aplicant la segona llei de Newton a la massa m trobem

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -k(x-s) - b \left(\frac{dx}{dt} - \frac{ds}{dt} \right)$$

o, el que és el mateix,

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = ks + b \frac{ds}{dt} \quad (1)$$



d'on veiem que en resulta una oscil·lació forçada per la força

$$F(t) = ks(t) + b \frac{ds(t)}{dt} \quad (2)$$

Fixem-nos que, en les t múltiples de T , la força $F(t)$ es fa “infinita durant un instant”.

Segona part. D'altra banda, abans ja hem vist —problema 5.4— que el desenvolupament de la funció dent de serra positiva ve donat per la sèrie de Fourier (5.45). Per tant, el desplaçament $s(t)$ que es mostra a la figura 5.23 (b) ve donat per

$$\frac{s(t)}{a} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin n\omega t \quad (3)$$

sèrie que, derivada terme a terme, proporciona

$$\frac{1}{a} \frac{ds}{dt} = -\frac{\omega}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \cos n\omega t \quad (4)$$

Així doncs, la “força” $F(t)$ donada a (2) es pot escriure com

$$F(t) = \frac{ka}{2} - \frac{a}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{k}{n} \sin n\omega t + b\omega \cos n\omega t \right) \quad (5)$$

Utilitzant la igualtat trigonomètrica (A.21) podem posar (5) de la forma

$$F(t) = \frac{ka}{2} - \frac{a}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sqrt{k^2 + n^2 \omega^2 b^2} \cdot \sin(n\omega t + \phi_n), \quad \text{amb } \tan \phi_n = \frac{n\omega b}{k} \quad (6)$$

També veiem que la sèrie-força (5) i (6) no convergeix en les t múltiples de T .

Tercera part. Trobem l'elongació $x(t)$ de la massa aplicant les expressions (3.14) i (3.14) a cadascun dels termes de la sèrie (6). Com que $b/m = 2\beta$ i $k/m = \omega_0^2$, tenim

$$x(t) = \frac{a}{2} - \frac{a}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sqrt{\frac{\omega_0^4 + 4\beta^2 n^2 \omega^2}{(\omega_0^2 - n^2 \omega^2)^2 + 4\beta^2 n^2 \omega^2}} \cdot \sin(n\omega t + \gamma_n), \quad \text{amb}$$

$$\gamma_n = \arctan \frac{2\beta n\omega}{\omega_0^2} - \arctan \frac{2\beta n\omega}{\omega_0^2 - n^2 \omega^2}$$

o, en termes de μ i η ,

$$x(t) = \frac{a}{2} - \frac{a}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sqrt{\frac{1 + 4n^2 \mu^2 \eta^2}{(1 - n^2 \mu^2)^2 + 4n^2 \mu^2 \eta^2}} \cdot \sin(n\omega t + \gamma_n), \quad \text{amb}$$

$$\gamma_n = \arctan(2n\mu\eta) - \arctan \frac{2n\mu\eta}{1 - n^2 \mu^2}$$

Substituint els valors numèrics i $n = 1, 2, 3, \dots$ tenim els termes següents:



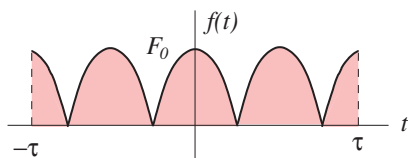
$$\begin{aligned} \frac{\pi}{a} \cdot x(t) = & 1,57080 - \\ & -1,05604 \sin(1 \cdot 9t - 0,01617) \quad -0,60025 \sin(2 \cdot 9t - 0,1199) \quad -0,44535 \sin(3 \cdot 9t - 0,3497) \\ & -0,33029 \sin(4 \cdot 9t - 0,6469) \quad -0,23287 \sin(5 \cdot 9t + 2,2381) \quad -0,16356 \sin(6 \cdot 9t + 2,0610) \\ & -0,11830 \sin(7 \cdot 9t - 1,9461) \quad -0,08871 \sin(8 \cdot 9t - 1,8702) \quad -0,06876 \sin(9 \cdot 9t - 1,8181) \\ & -0,05479 \sin(10 \cdot 9t - 0,7807) \quad -0,04469 \sin(11 \cdot 9t - 0,7529) \quad -0,03714 \sin(12 \cdot 9t - 0,7316) \\ & -0,03137 \sin(13 \cdot 9t - 0,7148) \quad -0,02685 \sin(14 \cdot 9t - 0,7011) \quad -0,02033 \sin(15 \cdot 9t - 0,6899) \\ & -0,02033 \sin(16 \cdot 9t - 0,6806) \quad -0,01793 \sin(17 \cdot 9t - 0,6726) \quad -0,01593 \sin(18 \cdot 9t - 0,6657) \\ & -0,01426 \sin(19 \cdot 9t - 0,6598) \quad -0,01283 \sin(20 \cdot 9t - 0,6545) \quad -0,01161 \sin(21 \cdot 9t - 0,6499) \\ & -0,01056 \sin(22 \cdot 9t - 0,6457) \quad -0,00964 \sin(23 \cdot 9t - 0,6421) \quad - \dots \end{aligned}$$

Com veiem, la sèrie convergeix bastant lentament.

Problema 5.7. Transformada de Fourier d'una funció no periòdica

Sigui la funció no periòdica $f(t)$ definida com el *pols finit* —v. figura 5.24—

Figura 5.24



$$f(t) = \begin{cases} F_0 \cos^2 \omega_0 t, & \text{si } -\tau \leq t \leq \tau \\ 0, & \text{si } |t| > \tau \end{cases} \quad (5.47)$$

Trobeu-ne la transformada de Fourier $\mathcal{F}(\omega)$.

Solució

Per (A.26) i (C.13), la funció $\cos^2 \omega_0 t$ es pot posar com

$$\cos^2 \omega_0 t = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\omega_0 t = \frac{1}{2} + \frac{e^{i2\omega_0 t} + e^{-i2\omega_0 t}}{4}$$

I ara, aplicant (5.39), tenim que

$$\mathcal{F}(\omega) = F_0 \frac{1}{2} \int_{-\tau}^{+\tau} e^{-i\omega t} dt + F_0 \frac{1}{4} \int_{-\tau}^{+\tau} e^{i(-\omega + 2\omega_0)t} dt + F_0 \frac{1}{4} \int_{-\tau}^{+\tau} e^{i(-\omega - 2\omega_0)t} dt$$

d'on, per (C.13), resulta, finalment

$$\mathcal{F}(\omega) = F_0 \tau \left(\frac{\sin \omega \tau}{\omega \tau} + \frac{\sin(\omega - 2\omega_0)\tau}{2(\omega - 2\omega_0)\tau} + \frac{\sin(\omega + 2\omega_0)\tau}{2(\omega + 2\omega_0)\tau} \right)$$

Observeu que aquest resultat està d'acord amb el (5.27) de l'exemple 5.8 si $\tau \ll \pi/\omega_0$, i, qualitativament, també amb la transformada d'una gaussiana de l'exemple 5.5 si $\tau \approx \pi/\omega_0$.



5.6.2. Problemes proposats

Problema 5.8. SF de les funcions parelles i de les senars

- a) Demostreu que qualsevol funció es pot descompondre de forma única en la suma d'una funció parella més una senar.
- b) Sigui la funció $f(t)$. Aleshores, comproveu que la suma

$$f(t) = f_p(t) + f_s(t), \quad \text{amb} \quad f_p(t) = \frac{f(t) + f(-t)}{2}, \quad f_s(t) = \frac{f(t) - f(-t)}{2}$$

correspon a la descomposició de $f(t)$ en una funció parella, $f_p(t)$, més una de senar, $f_s(t)$.

- c) Finalment, demostreu que la SF d'una funció parella només pot tenir termes en cosinus —i, potser, una constant—, mentre que en la sèrie per a una funció senar només hi poden aparèixer termes en sinus.

Problema 5.9. Sèrie de Fourier d'un sinus rectificat

Feu el desenvolupament en sèrie de Fourier de la funció *sinus rectificat* definida per (5.20) i demostreu la solució donada per (5.21).

Problema 5.10. Sèrie de Fourier d'un sinus de qt

Comproveu que el desenvolupament en sèrie de Fourier de la funció $f(t) = F_0 \sin qt$, amb q no enter, ve donat per

$$F_0 \sin qt = F_0 \frac{2 \sin q\pi}{\pi} \left(\frac{\sin t}{1^2 - q^2} + \frac{2 \sin 2t}{2^2 - q^2} + \frac{3 \sin 3t}{3^2 - q^2} + \dots \right), \quad q \text{ no enter}$$

Problema 5.11. Sèrie de Fourier d'una dent de serra positiva

Sigui la funció *dent de serra positiva*: $F(t) = F_0 t/T$, si $0 < t < T$, que ja hem vist al problema 5.4. A partir del desenvolupament de la funció similar *dent de serra* (5.9) de l'exemple 5.3, demostreu que el desenvolupament de $F(t)$ (5.44) és el que hem donat per (5.45) del problema 5.4.

Problema 5.12. Sèrie de Fourier d'un impuls periòdic

Demostreu que a la funció impuls periòdic $F(t)$ definida per (5.29) a l'exemple 5.9 li correspon la SF donada pel desenvolupament (5.30).

Problema 5.13. Propietats de la transformada de Fourier

Si les transformades de Fourier de les funcions $f(t)$ i $g(t)$ són $\mathcal{F}(\omega)$ i $\mathcal{G}(\omega)$, respectivament, comproveu les propietats següents:

$$\begin{aligned} g(t) &= \frac{df(t)}{dt} & \mathcal{G}(\omega) &= i\omega \mathcal{F}(\omega) \\ g(t) &= t f(t) & \mathcal{G}(\omega) &= i \frac{d\mathcal{F}(\omega)}{d\omega} \end{aligned}$$



Oscil·lacions i transformació de Laplace

Al capítol 3, hem estudiat les oscil·lacions forçades per una força externa harmònica i, al capítol anterior, hem aplicat els desenvolupaments en sèrie de Fourier per a l'estudi de l'estat estacionari de les oscil·lacions forçades per qualsevol tipus de força periòdica. Complementàriament, en aquest capítol ens ocuparem, sobretot, de l'estat transitori de les oscil·lacions forçades, especialment quan les forces impulsores presenten salts i discontinuïtats o ni tan sols són periòdiques. Per a això, utilitzarem una tècnica matemàtica relativament simple però molt potent i general: la *transformació de Laplace*. Aquesta és una eina molt útil i que s'ha utilitzat àmpliament en diversos camps, tant de la matemàtica aplicada com de la més abstracta. En particular, resulta un mètode molt pràctic per resoldre alguns tipus bastant freqüents d'equacions diferencials. Com veurem al llarg del capítol, el gran avantatge d'aquest mètode és que, en la majoria dels casos, es passa d'haver de resoldre una equació diferencial amb condicions inicials a haver de resoldre una “simple” equació algebraica.

6.1. Transformació de Laplace (TL)

6.1.1. Transformació de Laplace

Donada una funció $f(t)$ de la variable real t definida per a $t \geq 0$, s'anomena *transformada de Laplace de f* —a partir d'ara, TL— la funció de p que resulta de la integral

$$\mathcal{F}(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt \quad (6.1)$$

Si bé en el cas general el paràmetre p pot ser un nombre complex, per a les explicacions i els exemples que veurem en aquest capítol en tenim prou tractant-lo com a real.

Les condicions per a l'existència de la TL de la funció $f(t)$ són bastant febles: n'hi ha prou que sigui contínua a trossos —fins i tot, pot fer-se infinita en alguns punts—, però



no pot créixer més de pressa que l'exponencial quan t tendeix cap a infinit. Així, per exemple, ni $1/t$, ni e^{t^2} tenen TL, però sí en tenen $1/\sqrt{t}$ i e^{-t^2} .

També podem representar la TL de la funció $f(t)$ com l'operador TL, $\mathcal{L}$, que actua sobre $f(t)$: $\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{F}(p)$. Com veurem després, aquest és un operador lineal que admet operador invers, la transformació inversa de Laplace, que representarem com $\mathcal{L}^{-1}$, de forma que $\mathcal{L}^{-1}[\mathcal{F}(p)] = f(t)$.

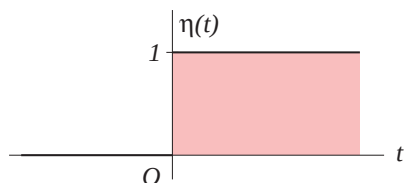
Com es pot comprovar, el límit $p \rightarrow +\infty$ de la TL $\mathcal{F}(p)$ d'una funció sempre dona 0. Aquest és un resultat important perquè ens diu que no totes les funcions de p són transformades d'alguna funció de t . Per exemple, p^2 , $\sin p$, $2 \ln p$ o una constant no són transformades de cap funció.

Unicitat de la transformada inversa. Per la pròpia definició de la TL com una integral, és fàcil veure que, rigorosament parlant, donada una funció $\mathcal{F}(p)$, hi poden haver dues funcions $f_1(t)$ i $f_2(t)$ transformades inverses. Ara bé, si $f_1(t)$ i $f_2(t)$ són funcions contínues per a tot $t \geq 0$ i $\mathcal{L}[f_1(t)] = \mathcal{L}[f_2(t)]$, llavors sí que podem afirmar que $f_1(t) = f_2(t)$. Sense aquesta propietat, no tindria sentit aquest capítol.

Exemple 6.1. Transformada de la funció salt unitari

Esbrineu la TL de la funció salt unitari de Heaviside, definida com —v. figura 6.1—

Figura 6.1



$$\eta(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t > 0 \end{cases} \quad (6.2)$$

Solució

Aplicant la definició (6.1), en resulta la integral

$$\mathcal{L}[\eta(t)] = \int_0^{\infty} e^{-pt} dt = -\left[\frac{1}{p} e^{-pt}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{p}, \quad \text{si } p > 0 \quad (TL-01)$$

Com veurem després en diversos exemples, aquesta funció és fonamental en les aplicacions de les TL.

Exemple 6.2. TL del sinus

Obteniu la TL de la funció $f(t) = \sin \omega t$.

Solució

Partim de la definició (6.1) i hi apliquem el mètode de la integració per parts (A.69) fent $u = \sin \omega t$, $dv = e^{-pt} dt$, i, per tant, $v = -e^{-pt}/p$ i $du = \omega \cos \omega t$. Així, trobem

$$\mathcal{L}[\sin \omega t] = \int_0^{\infty} \sin \omega t e^{-pt} dt = \left[-\frac{1}{p} \sin \omega t e^{-pt}\right]_0^{\infty} + \frac{\omega}{p} \int_0^{\infty} \cos \omega t e^{-pt} dt$$



Prenent els límits, entre zero i infinit, el terme entre claudàtors es fa nul i, quant a la integral següent, tornant a aplicar la integració per parts i traient límits, queda

$$\mathcal{L}[\sin \omega t] = -\frac{\omega}{p^2} \left[\cos \omega t e^{-pt} \right]_0^\infty - \frac{\omega^2}{p^2} \int_0^\infty \sin \omega t e^{-pt} dt = +\frac{\omega}{p^2} - \frac{\omega^2}{p^2} \mathcal{L}[\sin \omega t]$$

d'on resulta

$$\mathcal{L}[\sin \omega t] = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} \quad (TL-04)$$

Com anirem veient, en el càlcul de les integrals (6.1) s'utilitza molt sovint el mètode de la integració per parts —v. (A.69). Malgrat això, també veurem una mica més endavant que, per trobar la TL, per exemple, de la funció $\cos \omega t$, no caldrà tornar a fer cap integral sinó que la podrem determinar ràpidament a partir del resultat (TL-04) i l'aplicació d'alguna de les propietats generals que veurem a continuació.

Les TL d'altres funcions es troben de forma anàloga a la de l'exemple anterior. A la taula TL —pàg. 222— hi ha indicades les TL d'algunes de les sis funcions més importants. Les TL de moltes altres funcions poden deduir-se d'aquestes i de l'aplicació de les propietats de la TL que comentarem a continuació i que estan resumides a la mateixa taula TL.

6.1.2. Propietats de la TL

Siguin $\mathcal{F}(p)$ i $\mathcal{G}(p)$ les TL de les funcions $f(t)$ i $g(t)$, respectivament. La TL té les propietats següents:

1. La TL és lineal. Efectivament, com es veu immediatament per la definició (6.1), si a i b són dues constants qualssevol, tenim que

$$\mathcal{L}[a f(t) + b g(t)] = a \mathcal{F}(p) + b \mathcal{G}(p) \quad (TL-07)$$

2. Sigui $g(t) = f(t - \tau)$, essent τ una constant. Aleshores, fent el canvi de variable $t' = t - \tau$, tenim

$$\mathcal{L}[f(t - \tau)] = \int_{-\tau}^{\infty} f(t') e^{-p(t' + \tau)} dt' = e^{-p\tau} \int_{-\tau}^{\infty} f(t') e^{-pt'} dt'$$

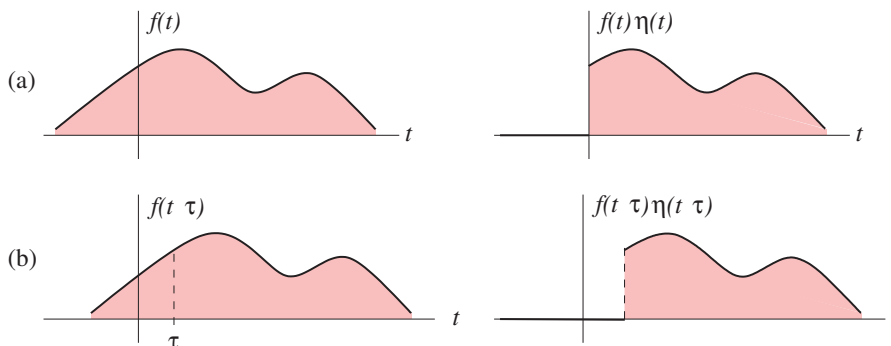
Ara atenció. Fixem-nos que

$$\text{si } t < 0, f(t) = 0, \quad \text{aleshores} \quad \mathcal{L}[f(t - \tau)] = e^{-p\tau} \mathcal{F}(p) \quad (6.3)$$

I, a l'inrevés. Si tenim la TL $\mathcal{G}(p) = e^{-p\tau} \mathcal{F}(p)$, pel que acabem de veure, la transformació inversa de $\mathcal{G}(p)$ dona $f(t - \tau)$, però per a una $f(t)$ que ha de ser nul·la si $t < 0$. Tot això pot quedar molt clar si fem ús de la funció salt de Heaviside que hem vist en l'exemple 6.1. Així, essent $f(t)$ una funció qualsevol no necessàriament zero per a $t < 0$ i la TL de la qual sigui $\mathcal{F}(p)$, tenim que

$$\text{si } \mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{F}(p) \quad \text{aleshores} \quad \mathcal{L}^{-1}[e^{-p\tau} \mathcal{F}(p)] = f(t - \tau) \cdot \eta(t - \tau) \quad (TL-08)$$

Figura 6.2



A la figura 6.2 (a) es mostra una funció $f(t)$ qualsevol i el significat de la funció $f(t)\eta(t)$ —la que és nul·la si $t < 0$ —; a la figura 6.2 (b), es mostren la funció $f(t-\tau)$ i la $f(t-\tau)\eta(t-\tau)$, que apareixerà sovint més endavant.

3. Sigui $g(t) = f(at)$, essent a una constant. Aleshores, fent el canvi de variable $t' = at$, tenim

$$\mathcal{L}[f(at)] = \int_0^\infty f(t') e^{-pt'/a} \frac{dt'}{a} = \frac{1}{a} \mathcal{F}\left(\frac{p}{a}\right), \quad a > 0 \quad (TL-09)$$

4. Derivem respecte de p la integral (6.1). Tenim

$$\frac{d\mathcal{F}(p)}{dp} = - \int_0^\infty t f(t) e^{-pt} dt = -\mathcal{L}[t f(t)]$$

I, si derivem successivament, n'obtenim

$$\mathcal{L}[t^n f(t)] = (-1)^n \frac{d^n \mathcal{F}(p)}{dp^n} \quad (TL-10)$$

5. Sigui $g(t) = e^{-at} f(t)$. Aleshores, tenim

$$\mathcal{L}[e^{-at} f(t)] = \int_0^\infty f(t) e^{-(p+a)t} dt = \mathcal{F}(p+a) \quad (TL-11)$$

6. Sigui $g(t) = \frac{df(t)}{dt}$. Aleshores, fent $u = e^{-pt}$, $dv = \frac{df(t)}{dt}$, $v = f(t)$ i $du = -p e^{-pt}$, aplicant la integració per parts (A.69) ens queda

$$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = \left[e^{-pt} f(t)\right]_0^\infty + p \int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt = -f(0) + p \mathcal{F}(p) \quad (TL-12)$$

Si $g(t) = \frac{d^2 f(t)}{dt^2}$, o derivades d'ordre superior, anàlogament es pot veure que

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2 f(t)}{dt^2}\right] = p^2 \mathcal{F}(p) - p f(0) - \frac{df}{dt}(0) \quad (TL-13)$$



7. Sigui ara $g(t) = \int_0^t f(t') dt'$. Fent $u = \int_0^t f(t') dt'$ i $dv = e^{-pt} dt$, i integrant per parts (A.69) trobem que

$$\mathcal{L} \left[\int_0^t f(t') dt' \right] = -\frac{1}{p} \left[e^{-pt} \cdot \int_0^t f(t') dt' \right]_0^\infty + \frac{1}{p} \int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt = \frac{1}{p} \mathcal{F}(p) \quad (TL-14)$$

8. En general, s'anomena *producte de convolució* de les dues funcions $f_1(t)$ i $f_2(t)$, i es representa per $f_1(t) * f_2(t)$, la funció

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t-t') f_2(t') dt' \quad (6.4)$$

Es pot demostrar que aquest producte és commutatiu

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t-t') f_2(t') dt' = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t') f_2(t-t') dt'$$

associatiu i, fins i tot, distributiu respecte de la suma. Fixeu-vos també que, si suposem que $f_1(t)$ i $f_2(t)$ són nul·les per a $t < 0$, llavors

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(t-t') f_2(t') dt' \quad (6.5)$$

Doncs bé, no costa gaire demostrar que la TL del producte de convolució val

$$\mathcal{L}[f_1(t) * f_2(t)] = \mathcal{F}_1(p) \cdot \mathcal{F}_2(p) \quad (TL-15)$$

Observeu que, si prenem $f_1(t) = \eta(t)$ com a cas particular, trobem la propietat demostrada en l'apartat anterior sobre la TL d'una integral.

9. Sigui $f(t)$ una funció nul·la fora de l'interval $[0, T]$. Aleshores, la funció $g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f(t - nT)$ és una funció periòdica basada en ella —v. figura 6.3.

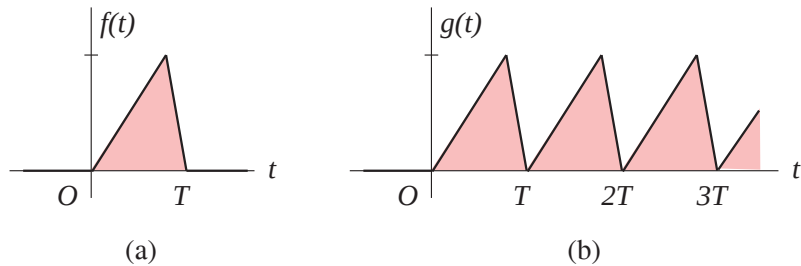


Figura 6.3

Si $\mathcal{F}(p) = \mathcal{L}[f(t)]$, aplicant la propietat (6.3) que acabem de veure i la igualtat (A.65) tenim que

$$\mathcal{L} \left[\sum_{n=0}^{\infty} f(t - nT) \right] = \mathcal{F}(p) \sum_{n=0}^{\infty} e^{-npT} = \frac{\mathcal{F}(p)}{1 - e^{-pT}} \quad (TL-16)$$

Anàlogament, si $g(t)$ és una sèrie alterna de la forma

$$g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n f(t - nT) \quad \text{llavors} \quad \mathcal{L}[g(t)] = \frac{\mathcal{F}(p)}{1 + e^{-pT}} \quad (TL-17)$$



Taula TL de transformacions de Laplace

Funció original	Transformada	
$\eta(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 < t \\ 1, & \text{si } t > 0 \end{cases}$	$\mathcal{F}(p) = \frac{1}{p}$	(TL-01)
$f(t) = t^n$	$\mathcal{F}(p) = \frac{n!}{p^{n+1}}$	(TL-02)
$f(t) = e^{-at}$	$\mathcal{F}(p) = \frac{1}{p+a}$	(TL-03)
$f(t) = \sin \omega t$	$\mathcal{F}(p) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$	(TL-04)
$f(t) = \cos \omega t$	$\mathcal{F}(p) = \frac{p}{p^2 + \omega^2}$	(TL-05)
$f(t) = \delta(t - \tau)$	$\mathcal{F}(p) = e^{-p\tau}$	(TL-06)
Propietats generals de la transformació. Si $\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{F}(p)$ i $\mathcal{L}[g(t)] = \mathcal{G}(p)$, ...		
$g(t) = \lambda f_1(t) + \mu f_2(t)$	$\mathcal{G}(p) = \lambda \mathcal{F}_1(p) + \mu \mathcal{F}_2(p)$	(TL-07)
$g(t) = f(t - \tau) \eta(t - \tau)$	$\mathcal{G}(p) = e^{-p\tau} \mathcal{F}(p)$	(TL-08)
$g(t) = f(at)$	$\mathcal{G}(p) = \frac{1}{a} \mathcal{F}\left(\frac{p}{a}\right)$	(TL-09)
$g(t) = t^n f(t)$	$\mathcal{G}(p) = (-1)^n \frac{d^n \mathcal{F}(p)}{dp^n}$	(TL-10)
$g(t) = e^{-at} f(t)$	$\mathcal{G}(p) = \mathcal{F}(p+a)$	(TL-11)
$g(t) = \frac{df(t)}{dt}$	$\mathcal{G}(p) = p \mathcal{F}(p) - f(0)$	(TL-12)
$g(t) = \frac{d^2 f(t)}{dt^2}$	$\mathcal{G}(p) = p^2 \mathcal{F}(p) - pf(0) - \frac{df}{dt}(0)$	(TL-13)
$g(t) = \int_0^t f(t') dt'$	$\mathcal{G}(p) = \frac{1}{p} \mathcal{F}(p)$	(TL-14)
$g(t) = f_1(t) * f_2(t)$	$\mathcal{G}(p) = \mathcal{F}_1(p) \cdot \mathcal{F}_2(p)$	(TL-15)
$g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f(t - nT)$	$\mathcal{G}(p) = \frac{\mathcal{F}(p)}{1 - e^{-pT}}$	(TL-16)
$g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n f(t - nT)$	$\mathcal{G}(p) = \frac{\mathcal{F}(p)}{1 + e^{-pT}}$	(TL-17)

Vegem ara alguns exemples de com s'apliquen aquestes propietats.

Exemple 6.3. TL d'una funció no simple

Si A , β i ω són constants, trobeu la TL de la funció: $f(t) = A t e^{-\beta t} \sin \omega t$

Solució

Anem per etapes. La TL de la funció $f_1(t) = \sin \omega t$ ja la tenim a (TL-04). La TL de $f_2(t) = A e^{-\beta t} f_1(t)$ ens la dóna l'expressió (TL-11)



$$\mathcal{F}_2(p) = \mathcal{L}[Ae^{-\beta t} \sin \omega t] = A \frac{\omega}{(p + \beta)^2 + \omega^2}$$

I la TL de la funció $f(t) = t f_2(t)$ ens ve donada per la propietat (TL-10), de la qual resulta

$$\mathcal{L}[f(t)] = -\frac{d\mathcal{F}_2(p)}{dp} = 2\omega A \frac{p + \beta}{[(p + \beta)^2 + \omega^2]^2}$$

De forma anàloga, es poden obtenir, per exemple, aquests altres resultats:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\sinh \omega t] &= \frac{\omega}{p^2 - \omega^2} & \mathcal{L}[\cosh \omega t] &= \frac{p}{p^2 - \omega^2} \\ \mathcal{L}[t \sin \omega t] &= \frac{2\omega p}{(p^2 + \omega^2)^2} & \mathcal{L}[t \cos \omega t] &= \frac{p^2 - \omega^2}{(p^2 + \omega^2)^2} \\ \mathcal{L}[t^2 \sin \omega t] &= \frac{6\omega p^2 - 2\omega^3}{(p^2 + \omega^2)^3} & \mathcal{L}[t^2 \cos \omega t] &= \frac{2p^3 - 6\omega^2 p}{(p^2 + \omega^2)^3} \end{aligned}$$

Exemple 6.4. TL de la funció pols o impuls rectangular

Trobeu la TL de la funció *impuls o pols rectangular* definida com —v. figura 6.4—

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t < \tau \\ 1, & \text{si } \tau < t < \tau + \varepsilon \end{cases} \quad (6.6)$$

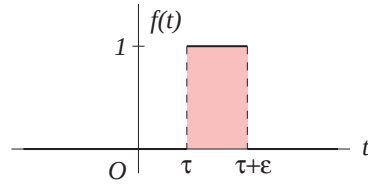


Figura 6.4

Solució

Partim de la funció de Heaviside $\eta(t)$ definida a l'exemple 6.1 i de la qual sabem que la TL és (TL-01), $1/p$ —v. figura 6.5 (a).

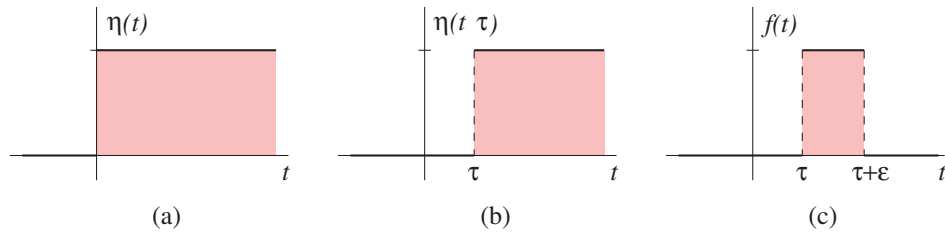


Figura 6.5

La funció $\eta(t - \tau)$ és el mateix salt, però traslladat a $t = \tau$ —v. figura 6.5 (b). La seva TL ve donada per la propietat (TL-08), $e^{-p\tau}/p$. I la funció (6.6) —v. figura 6.5 (c)— podem posar-la com

$$f(t) = \eta(t - \tau) - \eta(t - \tau - \varepsilon)$$

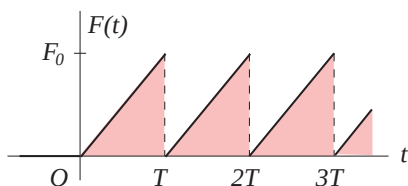
i, per tant, la TL val

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{e^{-p\tau}}{p} (1 - e^{-p\varepsilon}) \quad (6.7)$$

**Exemple 6.5. TL d'una funció periòdica**

Trobeu la TL de la funció periòdica *dent de serra positiva* definida com —v. figura 6.6—

Figura 6.6

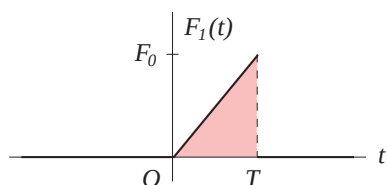


$$F(t) = \begin{cases} F_0 \frac{t}{T}, & \text{si } 0 < t < T \\ F(t) = F(t - T), & \text{si } T < t \end{cases} \quad (6.8)$$

Solució

Introduïm la funció *primera dent de serra*, definida com $F_1(t) = F_0 t/T$, si $0 < t < T$, i $F_1(t) = 0$, si t és fora d'aquest interval. Podem descriure aquesta funció de la forma següent.

Figura 6.7



$$F_1(t) = F_0 \frac{t}{T} [\eta(t) - \eta(t - T)] \quad (1)$$

Aplicant-hi ara les expressions (TL-01), (TL-08) i (TL-10), tenim que la TL de la funció (1) val

$$\mathcal{F}_1(p) = -\frac{d}{dp} \left(\frac{F_0}{T} \frac{1}{p} (1 - e^{-pT}) \right) = \frac{F_0}{T} \frac{1}{p^2} (1 - e^{-pT} (1 + pT))$$

I, quant a la funció periòdica (6.8), per mitjà de la propietat (TL-16), resulta que

$$\mathcal{L}[F(t)] = \frac{F_0}{T} \frac{1}{p^2} \left(1 + \frac{pT}{1 - e^{pT}} \right) \quad (6.9)$$

Exemple 6.6. La delta de Dirac i les percussions

Sigui la “funció” *delta de Dirac* $\delta(t)$, definida com

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t \neq 0, \\ \infty, & \text{si } t = 0, \end{cases} \quad \text{tal que } \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \delta(t) dt = f(0), \text{ i, en concret, } \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (6.10)$$

Interpreteu-ne el seu significat físic i trobeu-ne la TL.

Solució

La delta de Dirac no és una funció en sentit rigorós però, malgrat això, és molt pràctic treballar-hi com si ho fos, i se n'obtenen resultats correctes. A les figures 6.8 (a) i (b), s'ha representat una funció *impuls rectangular*, de base ε i altura $h = 1/\varepsilon$, de forma que, independentment del valor de ε , l'àrea de l'impuls sempre val 1 —v. figura 6.8 (b).

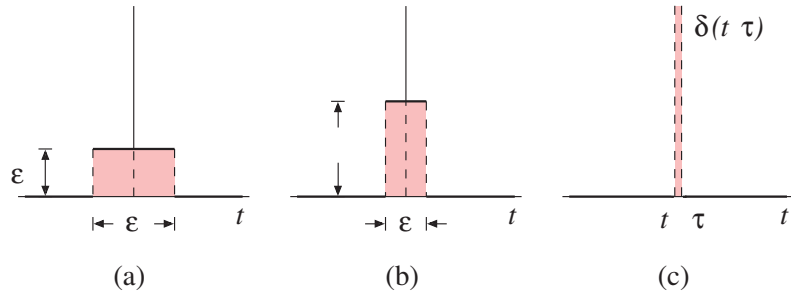


Figura 6.8

Doncs bé, la delta de Dirac $\delta(t - \tau)$ és aquest impuls en el límit en què l'amplada ε tendeix a zero, és a dir, és un impuls infinitament estret i infinitament alt en $t = \tau$ —v. figura 6.8 (c). Un exemple físic d'una delta de Dirac pot ser, per exemple, una *percussió*, és a dir, una força molt intensa durant un interval de temps molt petit. A l'exemple 6.12 i al problema 6.3, veiem un parell d'aplicacions de la delta de Dirac.

Sigui l'impuls unitari de l'exemple 6.4, però ara multiplicat per $1/\varepsilon$, de forma que l'àrea sota el rectangle és, per a qualsevol ε , 1. La TL d'aquesta funció és (6.7), dividida per ε . Doncs bé, el límit d'aquesta expressió quan ε tendeix a zero serà la TL de $\delta(t - \tau)$. Aplicant-hi la regla de L'Hôpital per al càlcul del límit següent, tenim, doncs,

$$\mathcal{L}[\delta(t - \tau)] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{e^{-p\tau}}{p} \frac{1 - e^{-p\varepsilon}}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{e^{-p\tau}}{p} p e^{-p\varepsilon} = e^{-p\tau}$$

També podem obtenir la TL de $\delta(t - \tau)$ si ens fixem que

$$\int_0^t \delta(t' - \tau) dt' = \eta(t - \tau)$$

Ara, per la propietat (TL-14) i per (TL-01), tornem a tenir que $\mathcal{L}[\delta(t - \tau)] = e^{-p\tau}$.

6.2. Aplicacions de la TL a les oscil·lacions

6.2.1. TL i l'estat transitori de les oscil·lacions forçades

En aquesta secció, generalitzarem a una força impulsora $F(t)$ qualsevol allò que al capítol 3 hem vist per a una força impulsora harmònica. Així, partim de l'equació diferencial (3.4) corresponent a un oscil·lador amortit, però ara sotmès a una força externa impulsora $F(t)$ qualsevol en lloc del cas concret $F_0 \cos \omega t$. Amb la notació habitual,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F(t)}{m} \quad (6.11)$$

Suposem que les condicions inicials de l'oscil·lador siguin

$$x(0) = x_0, \quad v(0) = v_0 \quad (6.12)$$

Si en aquesta secció anomenem $\mathcal{X}(p)$ i $\mathcal{F}(p)$ les TL de $x(t)$ i $F(t)/m$, respectivament, és a dir,



$$\mathcal{L}[x(t)] = \mathcal{X}(p) \quad \text{i} \quad \mathcal{L}\left[\frac{1}{m}F(t)\right] = \mathcal{F}(p) \quad (6.13)$$

aleshores, d'acord amb les propietats (TL-12) i (TL-13), tenim que

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2x}{dt^2}\right] = p^2 \mathcal{X}(p) - px_0 - v_0 \quad (6.14)$$

$$\mathcal{L}\left[2\beta \frac{dx}{dt}\right] = 2\beta (p \mathcal{X}(p) - x_0) \quad (6.15)$$

$$\mathcal{L}[\omega_0^2 x] = \omega_0^2 \mathcal{X}(p) \quad (6.16)$$

i la transformada de l'equació diferencial (6.11) és

$$(p^2 + 2\beta p + \omega_0^2) \mathcal{X}(p) - (p + 2\beta)x_0 - v_0 = \mathcal{F}(p) \quad (6.17)$$

de la qual es pot aïllar $\mathcal{X}(p)$ i es té

$$\mathcal{X}(p) = \frac{1}{p^2 + 2\beta p + \omega_0^2} \cdot [\mathcal{F}(p) + (p + 2\beta)x_0 + v_0] \quad (6.18)$$

Si sabem trobar la transformada inversa de (6.18), és a dir, la funció $x(t)$, haurem resolt l'equació diferencial (6.11) amb les condicions inicials corresponents i, en definitiva, haurem resolt el problema de l'estat transitori de l'oscil·lador.

En general, trobar la transformada inversa no és immediat i, de fet, pot arribar a ser força complicat. Si bé no hi ha regles generals per obtenir la transformada inversa, l'experiència i la utilització de taules preparades —bastant més completes que la taula TL de la pàgina 222— permeten acabar trobant $x(t)$.

6.2.2. Transformada inversa de $\mathcal{X}(p)$

La dificultat per trobar la transformada inversa consisteix habitualment a saber reescriure (6.18) —o, en general, la funció $\mathcal{X}(p)$ de què es tracti— en sumes de funcions les transformades inverses de les quals siguin conegudes o estiguin tabulades. Vegem-ne un parell de casos senzills, relacionats amb oscil·ladors no amortits, i després en farem unes consideracions generals.

Exemple 6.7. Transformada inversa de Laplace (sense amortiment)

Trobeu la transformada inversa de les dues funcions

$$\text{a) } \mathcal{Z}_1(p) = \frac{1}{p(p^2 + \omega_0^2)} \quad \text{b) } \mathcal{Z}_2(p) = \frac{1}{p^2(p^2 + \omega_0^2)}$$

Solució

Per trobar la transformada inversa d'aquestes funcions de p , utilitzem el “truquet” següent:



$$\mathcal{Z}_1(p) = \frac{1}{p(p^2 + \omega_0^2)} = \frac{1}{\omega_0^2} \frac{p^2 + \omega_0^2 - p^2}{p(p^2 + \omega_0^2)} = \frac{1}{\omega_0^2} \left(\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2 + \omega_0^2} \right) \quad (6.19)$$

$$\mathcal{Z}_2(p) = \frac{1}{p^2(p^2 + \omega_0^2)} = \frac{1}{\omega_0^2} \frac{p^2 + \omega_0^2 - p^2}{p^2(p^2 + \omega_0^2)} = \frac{1}{\omega_0^2} \left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{\omega_0} \frac{\omega_0}{p^2 + \omega_0^2} \right) \quad (6.20)$$

i ara, amb l'ajuda de (TL-01), (TL-04) i (TL-05) de la taula TL, trobem que

$$\mathcal{L}^{-1}[\mathcal{Z}_1(p)] = \frac{1}{\omega_0^2} (1 - \cos \omega_0 t) \quad \mathcal{L}^{-1}[\mathcal{Z}_2(p)] = \frac{1}{\omega_0^2} \left(t - \frac{1}{\omega_0} \sin \omega_0 t \right) \quad (6.21)$$

6.2.3. Transformació inversa d'un quocient de polinomis

Resulta molt freqüent haver de trobar la transformada inversa d'un quocient de polinomis com ara

$$\mathcal{Z}(p) = \frac{P(p)}{Q(p)} = \frac{a_0 + a_1 p + \dots + a_m p^m}{b_0 + b_1 p + \dots + b_n p^n} \quad (6.22)$$

El que s'ha de fer, en aquests casos, és el desenvolupament de la fracció algebraica (6.22) en suma de fraccions simples. Sense entrar en gaires detalls —que, d'altra banda, es troben en els textos de càlcul en estudiar la integració de funcions racionals—, només recordarem que, per fer aquest desenvolupament, cal conèixer les arrels del polinomi $Q(p)$. Cada arrel dóna lloc a fraccions simples, de manera que, essent A i B dues constants reals, si l'arrel a és:

- real i simple: la fracció és del tipus $\frac{A}{p-a}$;
- real i de multiplicitat k : les fraccions són del tipus $\frac{A}{(p-a)^k}$;
- complexa i simple: la fracció és del tipus $\frac{Ap+B}{p^2+bp+c}$, amb $b^2-4c < 0$;
- complexa i de multiplicitat k : les fraccions són del tipus $\frac{Ap+B}{(p^2+bp+c)^k}$, amb $b^2-4c < 0$,

Les A i B s'han de determinar igualant la suma de fraccions simples al quocient (6.22). Un cop fet aquest desenvolupament, trobar la transformada inversa de cadascuna de les fraccions simples ja és molt senzill. Fixem-nos que, en aquest cas, hem passat d'un problema amb una equació diferencial —per exemple, la (6.11)— a un altre amb una equació algebraica —trobar les arrels del $Q(p)$ de (6.22)—, la qual cosa, en la majoria dels casos, representa una disminució considerable de dificultat.

Tornant als problemes d'oscil·lacions —equació (6.11), amb $\beta < \omega_0$ —, va molt bé reescriure (6.18) introduint-hi la freqüència $\omega_1^2 = \omega_0^2 - \beta^2$, de forma que quedi

$$\mathcal{X}(p) = \frac{1}{\omega_1} \frac{\omega_1}{(p+\beta)^2 + \omega_1^2} \mathcal{F}(p) + \frac{(p+2\beta)x_0 + v_0}{(p+\beta)^2 + \omega_1^2} \quad (6.23)$$



Com anirem veient amb diversos exemples, és bastant freqüent que, a partir de l'expressió anterior, hàgim de trobar la transformada inversa d'expressions com les que analitzem a l'exemple següent.

Exemple 6.8. Transformada inversa de Laplace (amb amortiment)

Trobeu la transformada inversa de les dues expressions següents, en què $\omega_1^2 = \omega_0^2 - \beta^2$

$$\text{a) } \mathcal{Z}_1(p) = \frac{1}{p[(p+\beta)^2 + \omega_1^2]} \quad \text{b) } \mathcal{Z}_2(p) = \frac{1}{p^2[(p+\beta)^2 + \omega_1^2]}$$

Solució

Primer les descompondrem en fraccions simples.

- a) En el primer cas, tenim una arrel real i dues complexes conjugades. Per tant, establim la igualtat següent:

$$\mathcal{Z}_1(p) = \frac{1}{p[(p+\beta)^2 + \omega_1^2]} = \frac{A}{p} + \frac{B(p+\beta) + C}{(p+\beta)^2 + \omega_1^2} \quad (1)$$

de la qual, desenvolupant-ne la suma i traient les tres potències de p que hi apareixen, p^0 , p i p^2 factor comú, arribem a les tres equacions per A , B i C

$$\begin{cases} 1 = A\beta^2 + A\omega_1^2 \\ 0 = 2A\beta + B\beta + C \\ 0 = A + B \end{cases}$$

d'on resulten $A = 1/\omega_0^2$, $B = -1/\omega_0^2$, $C = -\beta/\omega_0^2$. Així doncs, podem tornar a escriure (1) com

$$\mathcal{Z}_1(p) = \frac{1}{\omega_0^2} \left[\frac{1}{p} - \frac{p+\beta+\beta}{(p+\beta)^2 + \omega_1^2} \right] = \frac{1}{\omega_0^2} \left[\frac{1}{p} - \frac{p+\beta}{(p+\beta)^2 + \omega_1^2} - \frac{\beta}{\omega_1} \frac{\omega_1}{(p+\beta)^2 + \omega_1^2} \right] \quad (6.24)$$

i de la qual, per (TL-01), (TL-04), (TL-05) i (TL-11) de la taula TL, la transformada inversa és

$$\mathcal{L}^{-1}[\mathcal{Z}_1(p)] = \frac{1}{\omega_0^2} \left[1 - e^{-\beta t} \left(\cos \omega_1 t + \frac{\beta}{\omega_1} \sin \omega_1 t \right) \right] \quad (6.25)$$

- b) Per a aquest cas, tenim una arrel amb multiplicitat dos i dues complexes conjugades. Anàlogament a com hem fet en el cas anterior, ara establim la igualtat

$$\mathcal{Z}_2(p) = \frac{1}{p^2[(p+\beta)^2 + \omega_1^2]} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p^2} + \frac{C(p+\beta) + D}{(p+\beta)^2 + \omega_1^2} \quad (2)$$

posant comú denominador i igualant-ne els numeradors, a partir de les quatre potències de p obtenim les quatre equacions per a les constants A , B , C i D



$$\begin{cases} 1 = B\beta^2 + B\omega_1^2 \\ 0 = A\beta^2 + A\omega_1^2 + 2B\beta \\ 0 = 2A\beta + B + C\beta + D \\ 0 = A + C \end{cases}$$

d'on resulten $A = -2\beta/\omega_0^4$, $B = 1/\omega_0^2$, $C = 2\beta/\omega_0^4$ i $D = -1/\omega_0^2 + 2\beta^2/\omega_0^4$. Així doncs, podem tornar a escriure (2) com

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_2(p) &= \frac{1}{\omega_0^4} \left[\frac{-2\beta}{p} + \frac{\omega_0^2}{p^2} - \frac{2\beta(p+\beta) + \omega_0^2 - 2\beta^2}{(p+\beta)^2 + \omega_1^2} \right] = \\ &= \frac{1}{\omega_0^4} \left[-2\beta \frac{1}{p} + \omega_0^2 \frac{1}{p^2} - 2\beta \frac{p+\beta}{(p+\beta)^2 + \omega_1^2} - \frac{\omega_0^2 - 2\beta^2}{\omega_1} \frac{\omega_1}{(p+\beta)^2 + \omega_1^2} \right] \quad (6.26) \end{aligned}$$

de la qual, per (TL-01), (TL-04), (TL-05) i (TL-11) de la taula TL, la transformada inversa és

$$\mathcal{L}^{-1}[\mathcal{Z}_2(p)] = \frac{1}{\omega_0^4} \left[-2\beta + \omega_0^2 t - e^{-\beta t} \left(2\beta \cos \omega_1 t + (\omega_0^2 - 2\beta^2) \sin \omega_1 t \right) \right] \quad (6.27)$$

Vegem ara unes aplicacions de la TL a l'estudi dels oscil·ladors forçats.

Exemple 6.9. Resposta d'un oscil·lador a una força de pols triangular

Un oscil·lador de massa m , freqüència pròpia ω_0 i de fricció negligible està inicialment en equilibri i en repòs a l'origen. A partir de $t = 0$, li apliquem la força de pols triangular $F(t)$ següent —v. figura 6.9. Estudieu la resposta d'aquest oscil·lador des de $t = 0$.

$$F(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } |t - T/2| > T/2 \\ 2F_0 \frac{t}{T}, & \text{si } 0 < t \leq \frac{T}{2} \\ 2F_0 \left(1 - \frac{t}{T}\right), & \text{si } \frac{T}{2} \leq t < T \end{cases} \quad (6.28)$$

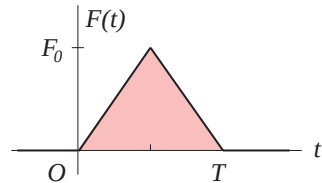


Figura 6.9

Solució

Primer, hem de trobar la TL de la força $F(t)$. Ho podem fer de diverses maneres. Per exemple, aplicant directament la definició (6.1) a (6.28). Però, encara que acabi resultant més llarg, ara ho farem a través de la funció $\eta(t)$ de Heaviside.

La funció *pol triangular* (6.28) és la superposició de les funcions $F_1(t)$ i $F_2(t)$, representades a la figura 6.10, com la (a) i la (b), respectivament. Amb l'ajuda de la funció salt unitari de Heaviside, $\eta(t)$, les funcions $F_1(t)$ i $F_2(t)$ es poden escriure com

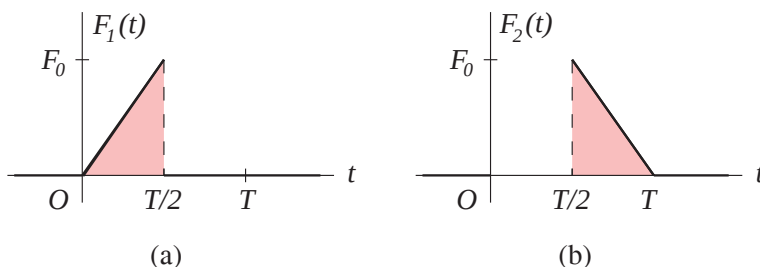
$$F_1(t) = \frac{2F_0}{T} t [\eta(t) - \eta(t - T/2)] \quad \text{i} \quad F_2(t) = 2F_0 \left(1 - \frac{t}{T}\right) [\eta(t - T/2) - \eta(t - T)]$$



I la suma de les dues dóna

$$F(t) = F_1(t) + F_2(t) = 2F_0 [\eta(t - T/2) - \eta(t - T)] + 2F_0 \frac{t}{T} [\eta(t) - 2\eta(t - T/2) + \eta(t - T)]$$

Figura 6.10



A partir de les propietats (TL-01), (TL-08), (TL-10) i simlicant, resulta

$$\mathcal{L}\left[\frac{F(t)}{m}\right] = \mathcal{F}(p) = \frac{2F_0}{mT} \cdot \frac{1 - 2e^{-pT/2} + e^{-pT}}{p^2}$$

Aplicant ara l'equació (6.23), tenim

$$\mathcal{X}(p) = \frac{2F_0}{mT} \frac{1 - 2e^{-pT/2} + e^{-pT}}{p^2 \cdot (p^2 + \omega_0^2)} \quad (1)$$

Utilitzant per a $1/p^2(p^2 + \omega_0^2)$ la descomposició (6.19) que hem vist a l'exemple 6.7, aleshores (1) quedarà

$$\mathcal{X}(p) = \frac{F_0}{m\omega_0^2} \frac{2}{T} \left[\frac{1}{p^2} - \frac{1}{\omega_0} \frac{\omega_0}{p^2 + \omega_0^2} \right] (1 - 2e^{-pT/2} + e^{-pT}) \quad (2)$$

Ara, aplicant a (2) la propietat (TL-08) i les transformades (TL-02) i (TL-04), tenim que

$$\begin{aligned} x(t) = \frac{F_0}{m\omega_0^2} \frac{2}{T} & \left[t - \frac{1}{\omega_0} \sin \omega_0 t - \right. \\ & - 2\eta(t - T/2) \left(t - \frac{T}{2} \right) + \frac{2}{\omega_0} \eta(t - T/2) \sin \omega_0(t - T/2) + \\ & \left. + \eta(t - T) (t - T) - \frac{1}{\omega_0} \eta(t - T) \sin \omega_0(t - T) \right] \end{aligned}$$

o, el que és el mateix,

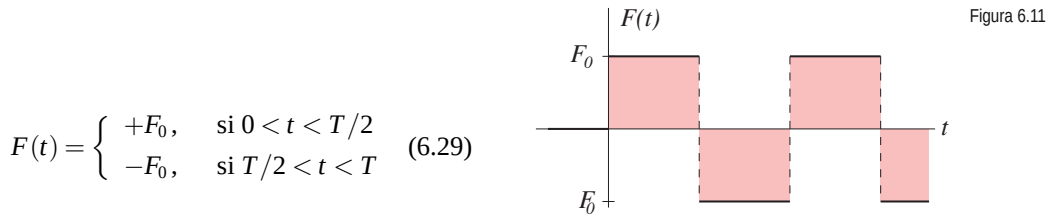
$$\begin{aligned} \text{— si } 0 < t \leq T/2 \quad x(t) &= \frac{F_0}{m\omega_0^2} \frac{2}{T} \left(t - \frac{1}{\omega_0} \sin \omega_0 t \right) \\ \text{— si } T/2 < t \leq T \quad x(t) &= \frac{F_0}{m\omega_0^2} \frac{2}{T} \left[\left(t - \frac{1}{\omega_0} \sin \omega_0 t \right) - 2 \left(t - \frac{T}{2} \right) + \frac{2}{\omega_0} \sin \omega_0(t - T/2) \right] \\ \text{— si } t > T \quad x(t) &= \frac{F_0}{m\omega_0^2} \frac{2}{T} \left[\left(t - \frac{1}{\omega_0} \sin \omega_0 t \right) - 2 \left(t - \frac{T}{2} \right) + \frac{2}{\omega_0} \sin \omega_0(t - T/2) \right. \\ & \quad \left. + (t - T) - \frac{1}{\omega_0} \sin \omega_0(t - T) \right] \end{aligned}$$



En aquest exemple, ha quedat molt ben reflectit un dels grans avantatges de la tècnica de la TL. Trobant la transformada inversa $x(t)$ de la funció (2) $\mathcal{X}(p)$, hem aconseguit, d'un cop, tota la informació sobre la resposta de l'oscil·lador a la força $F(t)$: en una sola funció, hi ha compactats els tres casos possibles per a t , sense haver-nos de preocupar de les condicions inicials, que l'expressió analítica de la força canvia bruscament a $t = T/2$, i torna a canviar a $t = T$, etc. En els exemples següents, torna a quedar palès el que estem dient.

Exemple 6.10. Oscil·lador, sense amortiment, forçat per una ona quadrada

Un oscil·lador de massa m i freqüència pròpia ω_0 , sense amortiment, és sotmès, a partir de $t = 0$, a una força externa periòdica $F(t)$, de període T , del tipus *ona quadrada*, definida com —v. figura 6.11—



Sabent que a l'instant inicial la partícula es trobava en repòs a l'origen, estudieu la resposta de l'oscil·lador a la força externa que hi és aplicada.

Solució

La funció $F(t)$ és una repetició alternada d'una funció impuls semblant a la que ja hem vist a l'exemple 6.4. En aquest cas, el "primer tram" impuls de $F(t)$ és $g(t)/F_0 = \eta(t) - \eta(t - T/2)$, la TL de la qual val, per (TL-01) i (TL-08),

$$\mathcal{L}[g(t)] = F_0 \frac{1}{p} \left(1 - e^{-pT/2} \right)$$

Aplicant ara la propietat (TL-17), considerant que aquí s'alterna la part de la funció que va de 0 a $T/2$, tenim que

$$\mathcal{L}[F(t)] = F_0 \frac{1 - e^{-pT/2}}{p(1 + e^{-pT/2})} \quad (6.30)$$

Aplicant, doncs, aquesta transformada a l'expressió (6.23), en la qual ara $\beta = 0$, ens queda

$$\mathcal{X}(p) = \frac{F_0}{m} \frac{1}{p(p^2 + \omega_0^2)} \frac{1 - e^{-pT/2}}{1 + e^{-pT/2}} \quad (1)$$

Per la descomposició que es mostra a (6.19), podem reescriure (1) de la forma

$$\mathcal{X}(p) = \frac{F_0}{m\omega_0^2} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p^2 + \omega_0^2} \right) \frac{1 - e^{-pT/2}}{1 + e^{-pT/2}} \quad (2)$$



D'altra banda, podem desenvolupar aquest últim factor amb les exponencials com a (A.65)

$$\begin{aligned} \frac{1 - e^{-pT/2}}{1 + e^{-pT/2}} \frac{1 - e^{-pT/2}}{1 - e^{-pT/2}} &= \frac{1 - 2e^{-pT/2} + e^{-pT}}{1 - e^{-pT}} = \\ &= \left(1 - 2e^{-pT/2} + e^{-pT}\right) \sum_{n=0}^{\infty} e^{-npT} = \\ &= 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{-npT} - e^{-(n-1/2)pT}\right) = 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k e^{-kpT/2} \end{aligned}$$

Per tant, la igualtat (2) queda com

$$\mathcal{X}(p) = \frac{F_0}{m\omega_0^2} \left(\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2 + \omega_0^2} \right) \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k e^{-kpT/2} \right] \quad (3)$$

de la qual, aplicant-hi (TL-01), (TL-05) i (TL-08), podem obtenir fàcilment la transformada inversa, que resulta

$$x(t) = \frac{F_0}{m\omega_0^2} \left\{ 1 - \cos \omega_0 t + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \eta(t - kT/2) \cdot [1 - \cos \omega_0(t - kT/2)] \right\} \quad (4)$$

És a dir,

$$x(t) = \frac{F_0}{m\omega_0^2} \cdot \begin{cases} +1 - \cos \omega_0 t & \text{—si } 0 < t \leq T/2 \\ -1 - \cos \omega_0 t + 2 \cos \omega_0(t - T/2) & \text{—si } T/2 < t \leq T \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ (-1)^N - \cos \omega_0 t + 2 \sum_{k=1}^N (-1)^k \cos \omega_0(t - kT/2) & \text{—si } \frac{N}{2}T < t \leq \frac{N+1}{2}T \end{cases}$$

Encara podem anar una mica més enllà. Si en aquesta última expressió desenvolupem el $\cos \omega_0(t - kT/2)$, podem posar-la com

$$\text{—si } \frac{N}{2}T < t \leq \frac{N+1}{2}T \quad x(t) = \frac{F_0}{m\omega_0^2} \left[(-1)^N + A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t \right]$$

on les constants A i B valen

$$A = -1 + 2 \sum_{k=1}^N (-1)^k \cos k\omega_0 T/2, \quad B = 2 \sum_{k=1}^N (-1)^k \sin k\omega_0 T/2$$

expressions que, a partir de les igualtats (A.36) i (A.35), prenent $\alpha = \omega_0 T/2 + \pi$, es poden simplificar com

$$A = -2 + \frac{(-1)^N \cos \int N+1/2 \omega_0 T/2}{\cos \omega_0 T/2}$$

i anàlogament per a B .


Exemple 6.11. Oscil·lador, amb amortiment, forçat per una ona quadrada

Tornem a fer l'exemple 6.10, però ara suposant que l'oscil·lador és sotmès a un amortiment caracteritzat pel paràmetre β .

Solució

Suposem que $\beta < \omega_0$. En aquest cas, l'efecte de l'amortiment és, per (6.23), reescriure l'equació (1) de l'exemple de la forma

$$\mathcal{X}(p) = \frac{F_0}{m} \frac{1}{p \sqrt{(p+\beta)^2 + \omega_1^2}} \frac{1 - e^{-pT/2}}{1 + e^{-pT/2}} \quad (1)$$

essent, amb la notació habitual, $\omega_1^2 = \omega_0^2 - \beta^2$.

El terme central de (1) es pot expressar en fraccions simples com es mostra a (6.24), en l'exemple 6.8. Així doncs, podem tornar a escriure (1) com

$$\mathcal{X}(p) = \frac{F_0}{m\omega_0^2} \left(\frac{1}{p} - \frac{p+\beta}{(p+\beta)^2 + \omega_1^2} - \frac{\beta}{\omega_1} \frac{\omega_1}{(p+\beta)^2 + \omega_1^2} \right) \frac{1 - e^{-pT/2}}{1 + e^{-pT/2}} \quad (2)$$

Aquesta equació és l'equivalent a la (2) de l'exemple 6.10. Si ara substituïm l'última fracció amb les exponencials per la sèrie corresponent, com hem fet en el pas de (2) a (3) en l'exemple anterior, tenim

$$\mathcal{X}(p) = \frac{F_0}{m\omega_0^2} \left(\frac{1}{p} - \frac{p+\beta}{(p+\beta)^2 + \omega_1^2} - \frac{\beta}{\omega_1} \frac{\omega_1}{(p+\beta)^2 + \omega_1^2} \right) \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k e^{-kpT/2} \right] \quad ((3))$$

Estat transitori

Per mitjà de (TL-01), (TL-03), (TL-05) i (TL-08) de (3), n'obtenim la transformada inversa

$$x(t) = \frac{F_0}{m\omega_0^2} \left\{ 1 - e^{-\beta t} \left(\cos \omega_1 t + \frac{\beta}{\omega_1} \sin \omega_1 t \right) - \right. \\ \left. - 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \eta(t - kT/2) \cdot \left[1 - e^{-\beta t} \left(\cos \omega_1(t - kT/2) + \frac{\beta}{\omega_1} \sin \omega_1(t - kT/2) \right) \right] \right\}$$

o, el que és equivalent, si

$$\frac{N}{2}T < t \leq \frac{N+1}{2}T$$

tenim que

$$x(t) = \frac{F_0}{m\omega_0^2} \left[(-1)^N - e^{-\beta t} \left(\cos \omega_1 t + \frac{\beta}{\omega_1} \sin \omega_1 t \right) + \right. \\ \left. + 2 \sum_{k=1}^N (-1)^k e^{-\beta(t - kT/2)} \left(\cos \omega_1(t - kT/2) + \frac{\beta}{\omega_1} \sin \omega_1(t - kT/2) \right) \right]$$



Com hem fet a l'exemple 6.10, podem tornar a escriure de forma més abreujada l'expressió anterior desenvolupant el $\cos \omega_1(t - kT/2)$ i el $\sin \omega_1(t - kT/2)$ i reagrupant

$$x(t) = \frac{F_0}{m\omega_0^2} \left[(-1)^N + e^{-\beta t} (A \cos \omega_1 t + B \sin \omega_1 t) \right] \quad (5)$$

on els paràmetres A i B dependents de N són

$$A = -1 + 2 \sum_{k=1}^N (-1)^k e^{k\beta T/2} \left[\cos k\omega_1 T/2 - \frac{\beta}{\omega_1} \sin k\omega_1 T/2 \right] \quad (6)$$

$$B = -\frac{\beta}{\omega_1} + 2 \sum_{k=1}^N (-1)^k e^{k\beta T/2} \left[\sin k\omega_1 T/2 + \frac{\beta}{\omega_1} \cos k\omega_1 T/2 \right] \quad (7)$$

Estat estacionari

Vegem com queda l'expressió (5) si t es fa molt gran i l'amortiment és suficient per tal que $\beta T \gg 1$.

En aquestes condicions, els sumatoris de (6) i (7) queden reduïts a l'últim sumand, per al qual tindrem

$$\lim_{t \rightarrow \infty} A e^{-\beta t} \approx (-1)^N 2 e^{-\beta(t - NT/2)} \left(\cos N\omega_1 T/2 - \frac{\beta}{\omega_1} \sin N\omega_1 T/2 \right)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} B e^{-\beta t} \approx (-1)^N 2 e^{-\beta(t - NT/2)} \left(\sin N\omega_1 T/2 + \frac{\beta}{\omega_1} \cos N\omega_1 T/2 \right)$$

Així, (5) queda ara com

$$x(t) \approx (-1)^N \frac{F_0}{m\omega_0^2} \left[1 + 2 e^{-\beta(t - NT/2)} \sin(\omega_1 t + \phi) \right]$$

amb l'angle ϕ donat per

$$\tan \phi = \frac{\sin \phi}{\cos \phi} = \frac{\sin N\omega_1 T/2 + \frac{\beta}{\omega_1} \cos N\omega_1 T/2}{\cos N\omega_1 T/2 - \frac{\beta}{\omega_1} \sin N\omega_1 T/2}$$

6.3. Mètode de Green-Borel

Tornant a les expressions (6.18) i (6.23) s'anomena *funció de transferència* el factor

$$\mathcal{G}(p) = \frac{1}{p^2 + 2\beta p + \omega_0^2}$$

—o l'equivalent a (6.23)— i que depèn exclusivament dels paràmetres de l'oscil·lador. Tal com està formulada la $\mathcal{X}(p)$ de (6.23), podem veure que, per (6.5) i la propietat



(TL-15), la funció $x(t)$ és el producte de convolució de les transformades inverses de $\mathcal{G}(p)$ i $\mathcal{F}(p)$ —més la transformació inversa d'un quocient de polinomis quan hi ha condicions inicials no nul·les.

La transformada inversa de $\mathcal{G}(p)$ és, per (TL-04), la funció

$$g(t) = e^{-\beta t} \sin \omega_1 t \quad (6.31)$$

El segon sumand de (6.23) també el podem posar de la forma

$$x_0 \frac{p + \beta}{(p + \beta)^2 + \omega_1^2} + \frac{\beta x_0 + v_0}{\omega_1} \frac{\omega_1}{(p + \beta)^2 + \omega_1^2}$$

la transformada inversa del qual és, a partir de (TL-04) i (TL-05),

$$e^{-\beta t} \left(x_0 \cos \omega_1 t + \frac{\beta x_0 + v_0}{\omega_1} \sin \omega_1 t \right) \quad (6.32)$$

Així doncs, podem posar la solució de l'equació diferencial (6.11) amb les condicions (6.12), com la suma de (6.32) —on van les condicions inicials— més el producte de convolució $g(t) * F(t)/m$, és a dir,

$$x(t) = \frac{1}{m\omega_1} \int_0^t F(t') e^{-\beta(t-t')} \sin \omega_1(t-t') dt' + \quad (6.33)$$

$$+ e^{-\beta t} \left(x_0 \cos \omega_1 t + \frac{\beta x_0 + v_0}{\omega_1} \sin \omega_1 t \right) \quad (6.34)$$

Suposem que les condicions inicials fossin nul·les, és a dir, que $x_0 = v_0 = 0$. Fixem-nos que, si la força $F(t)$ fos una delta de Dirac en $t = 0$, és a dir, $\delta(t)$, aleshores, de (6.23) i (TL-01) veiem que $\mathcal{X}(p) = \mathcal{G}(p)$, és a dir, la resposta de l'oscil·lador a un impuls $\delta(t)$ és la transformada inversa (6.31) de la funció de transferència del sistema. Per tant, la integral (6.33) ens està dient que la resposta del sistema ara a una força arbitrària $F(t)$ és el producte de convolució de la força per la resposta a un impuls $\delta(t)$.

La recerca de la $x(t)$ a partir de la convolució (6.33) s'anomena *mètode de Green o de Green-Borel*. Vegem ara un parell d'exemples molt senzills d'aplicació d'aquest mètode.

Exemple 6.12. Percussió aplicada a un oscil·lador

Sigui un oscil·lador de paràmetres m , ω_0 , β i $\omega_1^2 = \omega_0^2 - \beta^2$. Si inicialment és a l'origen en repòs, estudieu-ne el moviment si a $t = 0$ se li aplica la *perccussió* $I(t) = I_0 \delta(t)$, on $\int_0^\infty I(t) dt = I_0$ és la quantitat de moviment total aplicada a l'oscil·lador.

Solució

Per la definició (6.10) de $\delta(t)$ tenim que

$$\int_{-a}^{+b} f(t) \delta(t) dt = f(0) \quad (6.35)$$



on $f(t)$ és una funció integrable entre $[-a, b]$, $a, b > 0$. Aplicant-hi directament la integral (6.33) del mètode de Green-Borel, per la propietat anterior tenim

$$x(t) = \frac{1}{m\omega_1} I_0 \int_0^t \delta(t') e^{-\beta(t-t')} \sin \omega_1(t-t') dt' = \frac{I_0}{m\omega_1} e^{-\beta t} \sin \omega_1 t$$

Com es podia esperar, se n'obté el mateix resultat que si a la partícula de l'oscil·lador, estant a l'origen, se li comunica una velocitat inicial $v_0 = I_0/m$.

Al problema 6.3 es demana estudiar la resposta de l'oscil·lador si se li aplica una successió infinita de percussions.

Exemple 6.13. Força constant sobtada aplicada a un oscil·lador

Continuem amb el mateix oscil·lador de l'exemple anterior i amb les mateixes condicions inicials. Com serà el seu moviment si ara, en lloc d'aplicar-hi una percussió, hi apliquem, a partir de $t = 0$, una força constant F_0 ?

Solució

Aquest és un cas semblant al d'una molla fixada al sostre a la qual, a $t = 0$, pengem un pes F_0 a l'extrem lliure i el conjunt comença a oscil·lar des del repòs amb un cert amortiment —v. problema 2.10. L'estat final del sistema tornarà a ser el repòs amb la molla allargada un Δx donat per $k\Delta x = F_0$, és a dir, $\Delta x = F_0/(m\omega_0^2)$.

La força aplicada és, matemàticament, de la forma $F(t) = F_0 \eta(t)$. Aplicant-hi la integral de Green-Borel (6.33) tindrem ara

$$x(t) = \frac{F_0}{m\omega_1} \int_0^t e^{-\beta(t-t')} \sin \omega_1(t-t') dt' \quad (1)$$

Fent ara el canvi de variables $z = t - t'$, amb $dt' = -dz$, i utilitzant el resultat (A.76), la integral (1) queda com

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{F_0}{m\omega_1\omega_0^2} \left[e^{-\beta(t-t')} \int \sin \omega_1(t-t') + \omega_1 \cos \omega_1(t-t') \right]_0^t = \\ &= \frac{F_0}{m\omega_0^2} \left[1 - e^{-\beta t} \left(\cos \omega_1 t + \frac{\beta}{\omega_1} \sin \omega_1 t \right) \right] \end{aligned}$$

Com veiem, aquest resultat està totalment d'acord amb el que ja havíem previst per a l'oscil·lador. Per cert, aquesta última expressió de $x(t)$ ja ens ha sortit a (6.25).

6.4. Problemes resolts i problemes proposats

6.4.1. Problemes resolts

Problema 6.1. TL d'una escala i una ona triangular

Siguin les dues funcions (a) i (b) representades a la figura 6.12: la (a), la funció $f(t)$ escala, i la (b) o funció $g(t)$ ona triangular, respectivament. Definiu-les en termes de la funció unitària de Heaviside $\eta(t)$ i, a partir d'aquí, trobeu-ne les TL.

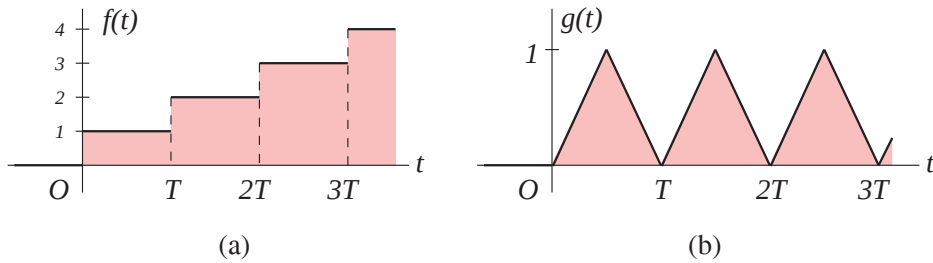


Figura 6.12

Solució

a) En termes de la funció $\eta(t)$, aquesta funció escalonada la podem definir com

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \eta(t - nT)$$

La TL d'aquest sumatori és, per (TL-01) i la propietat (TL-08), o directament, per la (TL-16), la següent:

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{p} \frac{1}{1 - e^{-pT}} \quad (1)$$

b) A l'exemple 6.10, hem definit la funció ona quadrada $F(t)$ i n'hem trobat la TL, equació (6.30). Si prenem $F_0 = 1$, la funció $F(t)$ es relaciona amb l'ona triangular $g(t)$ de la forma

$$\frac{dg(t)}{dt} = \frac{2}{T} F(t)$$

i, com que per (TL-12) tenim que

$$\mathcal{L}[g(t)] = \left(\frac{2}{T} \mathcal{L}[F(t)] + g(0) \right) \frac{1}{p}$$

finalment, n'obtenim

$$\mathcal{L}[g(t)] = \frac{2}{T} \frac{1}{p^2} \frac{1 - e^{-pT/2}}{1 + e^{-pT/2}}$$

Fixeu-vos que també hauríem pogut trobar aquest resultat aplicant la propietat (TL-17) a la funció “triangle únic” donada a (6.28), prenent $F_0 = 1$.

Problema 6.2. Aplicació de la TL a la resolució d'EDO

Apliqueu el mètode de la TL per resoldre les dues equacions diferencials següents:

a) $\frac{d^2x}{dt^2} + x = 2e^t$, amb $x(0) = 1$, $\frac{dx}{dt}(0) = 2$;

b) $\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 4x = 8e^{-2t}$, amb $x(0) = 1$, $\frac{dx}{dt}(0) = 1$.

**Solució**

- a) Aplicant la TL a tota l'equació diferencial, per (TL-03), (TL-12) i (TL-13), ens queda l'equació algebraica

$$p^2 \mathcal{X}(p) - p - 2 + \mathcal{X}(p) = \frac{2}{p-1}$$

de la qual deduïm

$$\mathcal{X}(p) = \frac{p+p^2}{(p^2+1)(p-1)} = \frac{1}{p-1} + \frac{1}{p^2+1}$$

Comparant aquesta última expressió amb (TL-03) i (TL-04), resulta

$$x(t) = \sin t + e^t$$

- b) Fent el mateix que a l'equació de l'apartat (a), arribem a l'equació algebraica

$$(p^2 + 4p + 4) \mathcal{X}(p) = \frac{8}{p+2} + p + 4 + 1$$

d'on trobem

$$\mathcal{X}(p) = \frac{p^2 + 7p + 18}{(p+2)^3} = \frac{8}{(p+2)^3} + \frac{3}{(p+2)^2} + \frac{1}{p+2}$$

i, d'aquí,

$$x(t) = e^{-2t} (1 + 3t + 4t^2)$$

Problema 6.3. Oscil·lador sotmès a una “pinta de Dirac”

Estudieu la resposta de l'oscil·lador amortit de l'exemple 6.12 si ara la força aplicada no és una percussió, sinó una successió de forces, iguals entre si i separades per l'interval de temps T .

Solució

La successió de percussions a què fa referència l'enunciat la podem descriure com el sumatori —*pinta de Dirac*—

$$I(t) = I_0 \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT)$$

la TL del qual val, per (TL-16) i (TL-06),

$$\mathcal{L}[I(t)] = \frac{I_0}{1 - e^{-pT}} = I_0 \sum_{n=0}^{\infty} e^{-npT}$$



La TL de la posició $x(t)$ val, doncs, per (6.23),

$$\mathcal{X}(p) = \frac{I_0}{m\omega_1} \frac{\omega_1}{(p + \beta)^2 + \omega_1^2} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-npT}$$

Per (TL-04), (TL-08) i (TL-11), tenim que la transformada inversa d'aquesta última expressió és

$$x(t) = \frac{I_0}{m\omega_1} \sum_{n=0}^{\infty} \eta(t - nT) e^{-\beta(t - nT)} \sin \omega_1(t - nT)$$

que és com dir

$$x(t) = \frac{I_0}{m\omega_1} \cdot \begin{cases} e^{-\beta t} \sin \omega_1 t & \text{—si } 0 < t \leq T \\ e^{-\beta t} \sin \omega_1 t + e^{-\beta(t-T)} \sin \omega_1(t-T) & \text{—si } T < t \leq 2T \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ \sum_{n=0}^N e^{-\beta(t-nT)} \sin \omega_1(t-nT) & \text{—si } NT < t \leq (N+1)T \end{cases}$$

Si desenvolupem el $\sin \omega_1(t - nT)$ d'aquesta última expressió, el resultat general el podem escriure com

$$\text{si } NT < t \leq (N+1)T \quad x(t) = \frac{I_0}{m\omega_1} e^{-\beta t} (A \sin \omega_1 t + B \cos \omega_1 t)$$

amb els paràmetres A i B que valen

$$A = \sum_{n=0}^N e^{n\beta T} \cos n\omega_1 T \quad B = - \sum_{n=0}^N e^{n\beta T} \sin n\omega_1 T$$

Problema 6.4. Estat transitori degut a una dent de serra positiva

Un oscil·lador de massa m , freqüència pròpia ω_0 i fricció negligible està inicialment en repòs a l'origen. A partir de $t = 0$, hi apliquem la força periòdica $F(t)$ de tipus *dent de serra positiva*, definida com (6.8) a l'exemple 6.5. Estudieu la resposta d'aquest oscil·lador a la força aplicada.

Solució

A l'exemple 6.5, ja hem trobat la TL de la força $F(t)$, equació (6.9). Així doncs, l'aplicació de l'expressió (6.23) ens porta al resultat

$$\mathcal{X}(p) = \frac{F_0}{mT} \frac{1}{p^2 + \omega_0^2} \cdot \left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p} \frac{T e^{-pT}}{1 - e^{-pT}} \right)$$

que podem reescriure com

$$\mathcal{X}(p) = \frac{F_0}{mT} \left[\frac{1}{p^2(p^2 + \omega_0^2)} - \frac{1}{p(p^2 + \omega_0^2)} \left(\frac{T e^{-pT}}{1 - e^{-pT}} \right) \right] \quad (1)$$



En aquesta expressió, apareixen els quocients $1/p^2(p^2 + \omega_0^2)$ i $1/p(p^2 + \omega_0^2)$ dels que ja hem vist, a (6.20) i (6.19), respectivament, de l'exemple 6.7, quina és la seva descomposició en fraccions simples. I, pel que fa al factor amb l'exponencial, resulta convenient desenvolupar-lo en sèrie. Per (A.65), quedarà com

$$\frac{e^{-pT}}{1 - e^{-pT}} = e^{-pT} (1 + e^{-pT} + e^{-2pT} + e^{-3pT} + \dots) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-npT} \quad (2)$$

Així, per (6.20), (6.19) i (2), la $\mathcal{X}(p)$ (1) queda de la forma

$$\mathcal{X}(p) = \frac{F_0}{m\omega_0^2} \frac{1}{T} \left[\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2 + \omega_0^2} - T \left(\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2 + \omega_0^2} \right) \sum_{n=1}^{\infty} e^{-npT} \right] \quad (3)$$

Ara ens queda trobar la transformada inversa de (3). Per les propietats (TL-02) i (TL-04), tenim

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2 + \omega_0^2} \right] = t - \frac{1}{\omega_0} \sin \omega_0 t \quad (4)$$

i, per les (TL-01) i (TL-08),

$$\mathcal{L}^{-1} \left[T \left(\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2 + \omega_0^2} \right) \sum_{n=1}^{\infty} e^{-npT} \right] = T \sum_{n=1}^{\infty} \int \eta(t - nT) - \eta(t - nT) \cos \omega_0(t - nT) \quad (5)$$

Finalment, per (3), (4) i (5), la resposta $x(t)$ de l'oscil·lador queda com

$$x(t) = \frac{F_0}{m\omega_0^2} \frac{1}{\omega_0 T} \left(\omega_0 t - \sin \omega_0 t - \omega_0 T \sum_{n=1}^{\infty} \eta(t - nT) \int -\cos \omega_0(t - nT) \right) \quad (6)$$

L'expressió (6) és una forma molt compacta d'escriure que

$$\text{—si } 0 < t \leq T \quad x(t) = \frac{F_0}{m\omega_0^2} \frac{1}{\omega_0 T} (\omega_0 t - \sin \omega_0 t)$$

$$\text{—si } T < t \leq 2T \quad x(t) = \frac{F_0}{m\omega_0^2} \frac{1}{\omega_0 T} [\omega_0(t - T) - \sin \omega_0 t + \omega_0 T \cos \omega_0(t - T)]$$

$$\text{—si } 2T < t \leq 3T$$

$$x(t) = \frac{F_0}{m\omega_0^2} \frac{1}{\omega_0 T} [\omega_0(t - 2T) - \sin \omega_0 t + \omega_0 T \cos \omega_0(t - T) + \cos \omega_0(t - 2T)]$$

i, en general,

$$\text{—si } NT < t \leq (N + 1)T$$

$$x(t) = \frac{F_0}{m\omega_0^2} \frac{1}{\omega_0 T} \left[\omega_0(t - NT) - \sin \omega_0 t + \omega_0 T \sum_{n=1}^N \cos \omega_0(t - nT) \right]$$



Si desenvolupem el $\cos \omega_0(t - nT)$, aquesta última expressió la podem posar com

$$\text{si } NT < t \leq (N+1)T \quad x(t) = \frac{F_0}{m\omega_0^2} \frac{1}{\omega_0 T} [\omega_0(t - NT) + A \sin \omega_0 t + B \cos \omega_0 t]$$

on A i B, per (A.36) i (A.35), vénen donades per

$$A = -1 + \omega_0 T \sum_{n=1}^N \sin n\omega_0 T = -1 + \omega_0 T \frac{\sin(N+1)\omega_0 T/2 \cdot \sin N\omega_0 T/2}{\sin \omega_0 T/2}$$

$$B = \omega_0 T \sum_{n=1}^N \cos n\omega_0 T = \omega_0 T \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sin(N+1)\omega_0 T/2}{2 \sin \omega_0 T/2} \right)$$

Problema 6.5. Aplicació del mètode de Green-Borel

Apliqueu el mètode de Green-Borel per trobar l'equació de moviment d'un oscil·lador que es caracteritza pels paràmetres m , ω_0 , β i $\omega_1^2 = \omega_0^2 - \beta^2$, inicialment en repòs a l'origen, sotmès, a partir de $t = 0$, a la força $F(t) = F_0 e^{-\gamma t}$.

Solució

Substituint $F(t) = F_0 e^{-\gamma t}$, la integral (6.33) de Green-Borel pren, en aquest cas, la forma

$$x(t) = \frac{F_0}{m\omega_1} e^{-\gamma t} \int_0^t e^{-\beta(t-t')} \sin \omega_1(t-t') dt'$$

Fent ara el canvi de variables $z = t - t'$, amb $dt' = -dz$, tenint en compte (A.76), ens queda

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{-F_0}{m\omega_1} e^{-\gamma t} \int e^{-\beta z} \sin \omega_1 z dz = \\ &= \frac{-F_0}{m\omega_1} e^{-\gamma t} \left[\frac{e^{-\beta(t-t')} - \beta \sin \omega_1(t-t') - \omega_1 \cos \omega_1(t-t')}{\omega_1^2 + \beta^2} \right]_0^t = \\ &= \frac{F_0}{m\omega_0^2} e^{-\gamma t} \left[1 - e^{-\beta t} \left(\cos \omega_1 t - \frac{\beta}{\omega_1} \sin \omega_1 t \right) \right] \end{aligned}$$

6.4.2. Problemes proposats

Problema 6.6. TL d'una rampa de baixada

Trobeu la TL de la funció “baixada en rampa” següent:

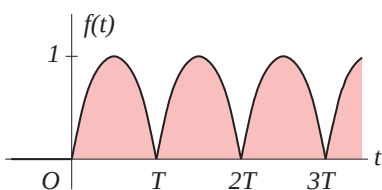
$$F(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ 2-t & \text{si } 1 \leq t < 2 \\ 0, & \text{si } 2 \leq t \end{cases}$$

$$\text{Resp.: } \mathcal{L}[f(t)] = \frac{p - e^{-p} + e^{-2p}}{p^2}$$

**Problema 6.7. TL d'un sinus rectificat**

Trobeu la TL de la funció *sinus rectificat* $f(t)$, de període T , tal que —v. figura 6.13—

Figura 6.13



$$f(t) = \sin \frac{\pi t}{T}, \text{ si } 0 \leq t \leq T \quad (6.36)$$

$$\text{essent } f(t) = 0, \text{ si } t < 0, \text{ i}$$

$$f(t+t) = f(t), \text{ si } t > T.$$

Resp.: $\mathcal{L}[f(t)] = \frac{\pi T}{4q^2 + \pi^2} \frac{e^q + e^{-q}}{e^q - e^{-q}}, \text{ amb } q = \frac{1}{2}pT$

Problema 6.8. TL d'un sinus semirectificat

Continuant en la línia del problema anterior, esbrineu quina és la TL de la funció sinus semirectificat de període T —funció que s'ha mostrat al problema 5.2.

Resp.: $\mathcal{L}[f(t)] = \frac{\pi T/2}{(\pi^2 + q^2)(1 - e^{-q})}, \text{ amb } q = \frac{1}{2}pT$

Problema 6.9. TL inverses

a) Feu la descomposició en fraccions simples de les fraccions

$$\mathcal{F} = \frac{2p+1}{p^2(p^2+1)}, \quad \mathcal{G} = \frac{6p^3-3p^2+3p-1}{p^2(p^2+1)}$$

b) Fent prèviament les corresponents descomposicions, trobeu les funcions originals $f(t)$ de les TL següents:

$$\mathcal{F}_1(p) = \frac{2p+3}{p^3+4p^2+3p}, \quad \mathcal{F}_2(p) = \frac{2p+3}{p^3+4p^2+5p}, \quad \mathcal{F}_3(p) = \frac{1}{(p+2)(p-1)^2}$$

Resp.: a) $\mathcal{F} = \frac{2}{p} - \frac{2}{p^2} - \frac{2p+1}{p^2+1}, \quad \mathcal{G} = \frac{3}{p} - \frac{1}{p^2} - \frac{3p-2}{p^2+1},$

$$\text{b) } f_1(t) = 1 - \frac{e^{-t} - e^{-3t}}{2}, \quad f_2(t) = \frac{3}{5} + \frac{e^{-2t}}{5}(4\sin t - 3\cos t),$$

$$f_3(t) = \frac{1}{9} (e^{-2t} - e^t + 3te^t)$$

Problema 6.10. Resolució d'EDO per la TL

Malgrat que, en aquests casos, no sigui la manera més ràpida de fer-ho, aplicant el mètode de la TL resoleu les equacions diferencials següents:

a) $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} - 2x = 2 + 2t - 2t^2, \text{ amb } x(0) = 4, \frac{dx}{dt}(0) = 1$



b) $\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 3x = 1$, amb $x(0) = 3$, $\frac{dx}{dt}(0) = -2$

c) $\frac{d^2x}{dt^2} + 9x = 18\cos 3t$, amb $x(0) = 0$, $\frac{dx}{dt}(0) = 9$

Resp.: a) $x(t) = 3e^t + e^{-2t} + t^2$, b) $x(t) = \frac{1}{3} + 3e^{-t} - \frac{1}{3}e^{-3t}$,

c) $x(t) = 3(1+t)\sin 3t$

Problema 6.11. Percussió sobre un oscil·lador no amortit

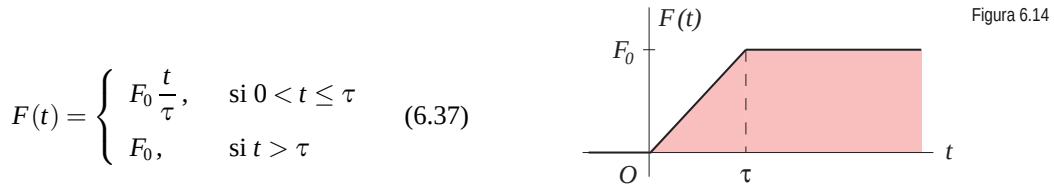
Una massa m lligada a una molla de constant k sense amortiment està oscil·lant lliurement. En un instant determinat, que prenem com $t = 0$, la massa és a x_0 amb una velocitat v_0 . Si a l'instant posterior $t = \tau$ la massa rep una percussió de tipus $I(t) = I_0\delta(t - \tau)$, trobeu la TL de la posició $x(t)$ de la massa i la pròpia $x(t)$.

Resp.: $\mathcal{X}(p) = \frac{x_0 p + v_0}{p^2 + \omega_0^2} + \frac{I_0}{m} \frac{e^{-\tau p}}{p^2 + \omega_0^2}$, amb $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, i

$$x(t) = x_0 \cos \omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t + \eta(t - \tau) \frac{I_0}{m\omega_0} \sin \omega_0(t - \tau)$$

Problema 6.12. Oscil·lador sotmès a una força en rampa

Un oscil·lador no amortit de massa m i freqüència pròpia ω_0 queda sotmès, a partir de $t = 0$, a la força en rampa següent —v. figura 6.14—



Sabent que a l'instant $t = 0$ la partícula es trobava a l'origen amb la velocitat v_0 , trobeu: a) l'expressió analítica única de la força en termes de la funció de Heaviside $\eta(t)$; b) la transformada $\mathcal{X}(p)$ de la posició, i c) la posició $x(t)$ per a qualsevol $t > 0$.

Resp.: a) $F(t) = F_0 \frac{t}{\tau} [\eta(t) - \eta(t - \tau)] + F_0 \eta(t - \tau)$,

b) $\mathcal{X}(p) = \frac{v_0}{p^2 + \omega_0^2} + \frac{F_0}{m\tau} \frac{1 - e^{-p\tau}}{p^2(p^2 + \omega_0^2)}$,

c)

—si $0 < t < \tau$, $x(t) = \frac{F_0}{m\omega_0^2} \frac{t}{\tau} + \left(v_0 - \frac{F_0}{m\omega_0^2} \right) \frac{\sin \omega_0 t}{\omega_0}$; (v. problema 3.7)

—si $t > \tau$, $x(t) = \frac{F_0}{m\omega_0^2} + \left(v_0 - \frac{F_0}{m\omega_0^2} \right) \frac{\sin \omega_0 t}{\omega_0} + \frac{F_0}{m\omega_0^2 \tau} \frac{\sin \omega_0(t - \tau)}{\omega_0}$

**Problema 6.13. Força externa harmònica amortida**

Trobeu la resposta d'un oscil·lador amortit, que és caracteritzat pels paràmetres m , ω_0 i β sotmès a la força externa

$$F(t) = F_0 e^{-\beta t} \sin \omega_0 t$$

Les condicions inicials són $x_0 = v_0 = 0$.

Resp.: $x(t) = \frac{F_0}{m\beta^2} e^{-\beta t} \left(\frac{\omega_0}{\omega_1} \sin \omega_1 t - \sin \omega_0 t \right)$, amb $\omega_1^2 = \omega_0^2 - \beta^2$

Problema 6.14. Utilització del producte de convolució

Utilitzant la propietat fonamental (TL-15) del producte de convolució:

a) trobeu la TL de les funcions següents:

$$f(t) = \int_0^t (t-t')^2 \cos 2t' dt', \quad g(t) = \int_0^t e^{-(t-t')} \sin t' dt'$$

b) trobeu la TL inversa d'aquestes altres funcions:

$$\mathcal{F}(p) = \frac{p}{(p+1)(p^2+4)}, \quad \mathcal{G}(p) = \frac{1}{p^4(p^2+1)}$$

Resp.: a) $\mathcal{F}(p) = \frac{2}{p^2(p^2+4)}$, $\mathcal{G}(p) = \frac{1}{(p+1)(p^2+1)}$

b) $f(t) = \int_0^t e^{-(t-t')} \cos 2t' dt'$, $g(t) = \frac{1}{6} \int_0^t (t-t')^3 \sin t' dt'$

Problema 6.15. Mètode de Green-Borel

Generalitzant el problema 6.13, apliqueu el mètode de Green-Borel per trobar el comportament d'un oscil·lador de les característiques m , ω_0 , β i $\omega_1^2 = \omega_0^2 - \beta^2$, inicialment en repòs a l'origen, sotmès, a partir de $t = 0$, a la força $F(t) = F_0 e^{-\gamma t} \sin \omega t$.



Oscil·ladors no lineals

7.1. Desviacions de la linealitat

A la secció §1.5, hem vist com en els casos en què l'energia potencial de la qual deriva una força restauradora es pot desenvolupar en sèrie de Taylor al voltant d'un mínim i existeix el terme quadràtic del desenvolupament, el moviment oscil·latori corresponent és, per a petites amplituds, un MHS. En aquella secció, ens interessava destacar sobretot que el MHS és tan freqüent en la natura i en la tècnica perquè és la conseqüència de la *linealitat* de les forces restauradores, i la linealitat és, en la majoria dels casos, la primera aproximació al comportament de molts sistemes.

Exemples ben coneguts d'aquest fet són els pèndols i les molles. Aquests, com sabem, responen linealment quan les amplituds o les forces aplicades són petites, però deixen de ser lineals quan se sobrepassen uns límits. Per exemple, hi ha algunes forces que presenten una certa simetria en el sentit que, en mòdul, $|F(-x)| = |F(x)|$. Per a aquestes, una primera aproximació no lineal de la força i de l'energia potencial és del tipus

$$F(x) = -kx + \varepsilon x^3, \quad U(x) = \frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{4}\varepsilon x^4 \quad (7.1)$$

A la figura 7.1, es mostren les forces i les energies potencials per a tres casos corrents de desviació de la linealitat. Per tal de fer més palesa la diferència, s'han representat en línia contínua les forces i energies reals i, en discontinua, l'aproximació lineal.

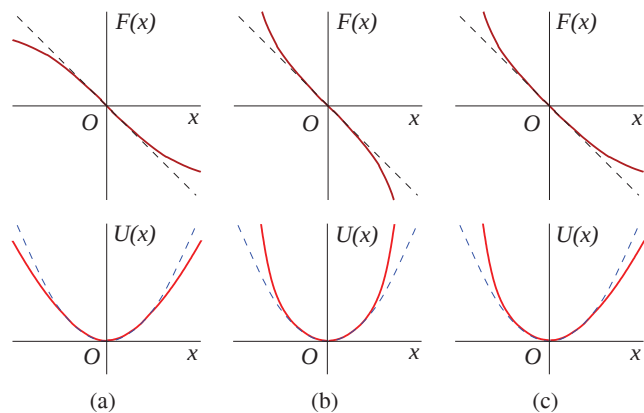


Figura 7.1

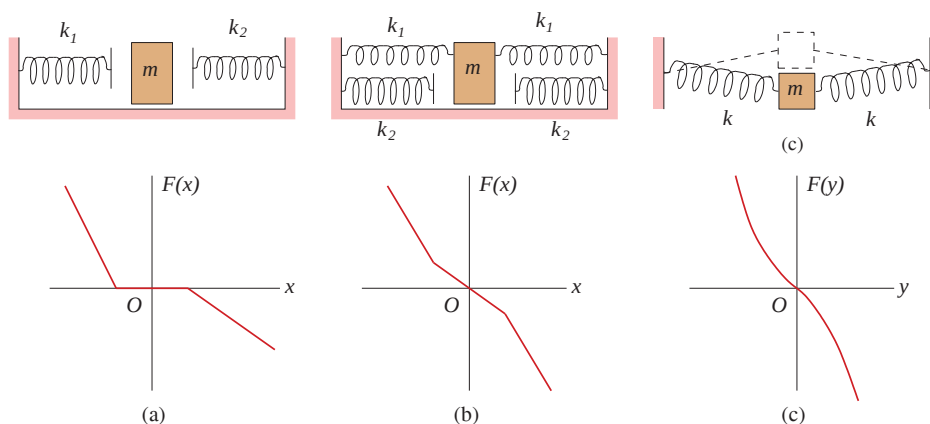
En el cas de la figura 7.1 (a) —anomenat *sistema tou*— $\varepsilon > 0$; és el cas dels pèndols físics, en què el moment del pes val —v. secció §1.3.2 i (A.56)—

$$M(\theta) = -mgh \sin \theta \approx -mgh \cdot \theta + mgh/6 \cdot \theta^3$$

En canvi, en el cas de la figura 7.1 (b) —*sistema dur*— $\varepsilon < 0$: un cop sobrepassat el límit elàstic lineal el sistema es comença a saturar: la força ha d'incrementar-se molt per tal que la molla s'allargui una mica més. Finalment, en el cas de la figura 7.1 (c), s'ha representat un sistema mixt: tou per a les $x > 0$ i dur per a les $x < 0$; la força és del tipus $F(x) = -kx + \varepsilon x^2$, $\varepsilon > 0$.

No cal anar gaire lluny per trobar sistemes no lineals: un sistema perfectament lineal pot deixar-ho de ser només fent algun petit canvi. És el cas dels sistemes molla-massa que s'han representat a les figures 7.2. A (a) i (b), només ha calgut deixar un espai mort entre les molles i la massa per passar de tenir forces restauradores lineals a forces $F(x)$ no lineals dures —v. problema 7.7. En el cas que es representa a la figura 7.2 (c), tenim una partícula lligada a dues molles iguals que, en el punt mitjà d'equilibri, tenen la seva longitud natural i, per tant, no estan tensades. Com sabem, les oscil·lacions longitudinals de la partícula en la direcció de les molles són harmòniques simples. En canvi, com es demana demostrar al problema 7.9, les oscil·lacions transversals no són lineals, ni tan sols les d'amplitud molt petita.

Figura 7.2



En tractar amb sistemes no lineals, s'ha de tenir sempre present que la solució general no es pot obtenir pel principi de superposició, que ara no és vàlid. A més, en els sistemes no lineals poden aparèixer efectes nous que no es donen en els lineals; així, la ressonància en les oscil·lacions forçades no es presenta en la mateixa forma que com l'hem vista a la secció §3.3.2. El tema és de gran interès pràctic i és objecte d'una recerca intensa si bé aquí només en podem fer una petita introducció.

7.2. El pèndol... per a angles no petits

Recordem que l'expressió (1.20) del període del pèndol simple només és vàlida per a amplituds petites, ja que és el resultat d'haver aproximat el $\sin \theta$ per θ a l'equació diferencial (1.16). Si l'amplitud del pèndol no és massa petita, el moviment deixa de ser harmònic simple i el període comença a dependre de l'amplitud de l'oscil·lació.



El que farem ara és millorar l'estudi del moviment del pèndol considerant-ne els efectes no lineals, és a dir, aquells per als quals ja no és vàlid que $\sin \theta \approx \theta$. Ho farem per dues vies:

- a) partint de la conservació de l'energia, de forma semblant a com vam arribar a (1.37);
- b) tractant de resoldre, aproximadament, l'equació diferencial (1.16) del pèndol simple.

7.2.1. Període del pèndol simple amb angles no petits

Comencem aplicant la conservació de l'energia, $E = K + U$. En aquest cas, la lentilla té, en general, una energia cinètica K que val, amb la notació de la secció §1.3, i considerant que la trajectòria és circular,

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m \left(L \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \quad (7.2)$$

Pel que fa a l'energia potencial U , aquesta és gravitatòria. Si prenem com a origen de l'energia potencial el punt més baix de la trajectòria i anomenem h l'altura de la lentilla respecte d'aquest punt, tindrem

$$U = mgh = mgL(1 - \cos \theta) = 2mgL \sin^2 \frac{\theta}{2} \quad (7.3)$$

Sigui ara Θ l'amplitud angular del moviment. Quan $\theta = \Theta \leq \pi$, la partícula no tindrà energia cinètica i tota l'energia serà només potencial. Per (7.3), se segueix, doncs

$$E = 2mgL \sin^2 \frac{\Theta}{2} \quad (7.4)$$

Per (7.2), (7.3) i (7.4), la conservació ens diu que

$$\frac{1}{2}mL^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + 2mgL \sin^2 \frac{\theta}{2} = 2mgL \sin^2 \frac{\Theta}{2}$$

equació de la qual podem simplificar mL i aïllar dt

$$dt = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{L}{g}} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2 \frac{\Theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}}}$$

El període T del pèndol serà quatre vegades el temps d'anar des del mínim, $\theta = 0$, fins al màxim, $\theta = \Theta$

$$T = 2 \sqrt{\frac{L}{g}} \int_0^\Theta \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2 \frac{\Theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}}} \quad (7.5)$$

Aquesta integral no surt a les taules d'integrals usuals. Farem el canvi de variable $\theta \rightarrow z$ donat per



$$z = \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\Theta}{2}} \quad \text{d'on} \quad dz = \frac{1}{2} \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\Theta}{2}} d\theta$$

de manera que, si $\theta = 0$, $z = 0$ i, si $\theta = \Theta$, $z = 1$. Si anomenem $k = \sin \frac{\Theta}{2}$, llavors el període (7.5) queda com

$$T = 4\sqrt{\frac{L}{g}} \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} \quad (7.6)$$

Aquesta integral sí que surt en els textos especialitzats de matemàtiques i diuen d'ella que defineix una funció $F(k)$ anomenada *integral el·líptica completa de primera espècie* —v. apèndix §A.5—, funció que no es pot expressar en termes de funcions elementals.

Si $k^2z^2 \ll 1$, podem fer un desenvolupament en sèrie de l'arrel quadrada, com a (A.64) i, integrant terme a terme (7.6), aconseguim

$$F(k) = \frac{\pi}{2} \left\{ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 k^4 + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 k^6 + \dots \right\}$$

que, substituïda a (7.6), resulta, finalment

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \left\{ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2 \frac{\Theta}{2} + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \sin^4 \frac{\Theta}{2} + \dots \right\} \quad (7.7)$$

Veiem, doncs, que el període T depèn de l'amplitud de l'oscil·lació Θ d'una forma laboriosa. Fixem-nos, però, que si Θ és molt petita, recuperem el període d'un pèndol simple, que hem vist a (1.20). Si Θ és petita, però no tant com abans, podem limitar (7.7) als dos primers termes de la sèrie i substituir $\sin^2 \Theta/2 \approx \Theta^2/4$, de manera que l'expressió (7.7) queda de la forma

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \left(1 + \frac{\Theta^2}{16} \right) \quad (7.8)$$

Així, aquest $\Theta^2/16$ representa una primera correcció a la fórmula (1.20), $T = 2\pi\sqrt{L/g}$. Però, malgrat que és una primera correcció, val a dir que l'expressió (7.8) és tan bona que, per a una amplitud de fins i tot $\pi/6$ rad = 30° , l'error relatiu comès per (7.8), respecte de l'expressió (7.7), és només del $-0,024\%$ —uns 21 s menys per dia en un rellotge de pèndol.

7.2.2. Moviment del pèndol: aproximació de tercer ordre

L'equació diferencial (1.16) del pèndol simple és, com hem vist a la secció §1.3.1,

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L} \sin \theta = 0 \quad (7.9)$$



equació que, com hem comentat, no té solució en termes de funcions elementals. En aquella mateixa secció, varem fer l'aproximació lineal $\sin \theta \approx \theta$, vàlida per a angles molt petits, que dóna lloc al MHS del pèndol

$$\theta(t) = \Theta \cos \omega_0 t, \quad \text{amb} \quad \omega_0^2 = \frac{g}{L} \quad (7.10)$$

expressió en què Θ és l'amplitud de l'oscil·lació i en què hem pres la condició inicial que a $t = 0$ el pèndol es trobava en repòs amb l'elongació màxima.

Si el pèndol oscil·la amb una amplitud Θ petita, però “no molt petita”, podem aproximar el sinus fins al tercer ordre, és a dir, posar $\sin \theta \approx \theta - \theta^3/6$, de manera que la equació (7.9) queda com

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2 \theta = \varepsilon \theta^3, \quad \varepsilon = \frac{1}{6} \omega_0^2 \quad (7.11)$$

Com que l'angle θ és petit en tot moment, podem suposar $\varepsilon \theta^3 \ll \omega_0^2 \theta$. Si $\varepsilon \theta^3$ fos estrictament zero, la funció $\theta(t)$ solució de (7.11) seria la (7.10). D'altra banda, sabem per trigonometria, igualtat (A.28), que $\cos^3 \omega t$ està relacionat amb $\cos 3\omega t$. Tot això ens fa pensar que una solució aproximada de l'equació (7.11) podria ser una funció com la següent:

$$\theta(t) = \Theta(\cos \omega t + \lambda \cos 3\omega t) \quad (7.12)$$

on $\lambda \ll 1$ i ω —molt semblant a ω_0 — són paràmetres a determinar. Fem-ho.

Derivant (7.12) i substituint a (7.11), tenim

$$\begin{aligned} & -\omega^2 \Theta(\cos \omega t + 9\lambda \cos 3\omega t) + \omega_0^2 \Theta(\cos \omega t + \lambda \cos 3\omega t) = \\ & = \varepsilon \Theta^3 \cos^3 \omega t + 3\Theta^3 \lambda \cos^2 \omega t \cos 3\omega t + \dots \end{aligned} \quad (7.13)$$

Com que l'amplitud Θ ja és bastant petita, Θ^3 encara ho serà més; en conseqüència, negligirem els termes amb $\lambda \Theta^3$, $\lambda^2 \Theta^3$, etc. Desenvolupant el $\cos^3 \omega t$ —(A.27)—, podem tornar a escriure (7.13) com

$$\begin{aligned} & \Theta \cos \omega t \cdot \left[-\omega^2 + \omega_0^2 - \frac{1}{8} \Theta^2 \omega_0^2 \right] + \\ & \Theta \cos 3\omega t \cdot \left[-9\lambda \omega^2 + \lambda \omega_0^2 - \frac{1}{24} \omega_0^2 \Theta^2 \right] = 0 \end{aligned}$$

A més, com que les funcions $\cos \omega t$ i $\cos 3\omega t$ són linealment independents,¹ aleshores l'interior dels dos claudàtors ha de ser zero. Quedant-nos només amb l'aproximació de primer ordre a λ , trobem

$$\omega^2 = \omega_0^2 \left(1 - \frac{1}{8} \Theta^2 \right) \quad \lambda = -\frac{1}{192} \Theta^2 \quad (7.14)$$

¹ A l'apèndix §B.2.1, s'explica què vol dir que dues funcions siguin linealment independents.



En resum, l'elongació $\theta(t)$ d'un pèndol ve donada, en una aproximació de tercer ordre, per

$$\theta(t) \approx \Theta \cos \omega t - \frac{\Theta^3}{192} \cos 3\omega t \quad (7.15)$$

amb un període de

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega_0} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{8}\Theta^2}} \approx \frac{2\pi}{\omega_0} \left(1 + \frac{1}{16}\Theta^2\right) \quad (7.16)$$

que coincideix amb el donat per (7.8).

Veiem, doncs, per (7.15), que les conseqüències del petit terme no lineal en θ^3 a (7.11) són modificar lleugerament la freqüència pròpia i, sobretot, l'aparició del tercer harmònic. A la secció §7.4, en què estudiarem més sistemàticament els efectes dels termes no lineals, veurem que això és general.

7.3. L'espai fàsic

L'estat de moviment d'una partícula que es mou sobre l'eix x queda perfectament determinat si considerem la seva posició x i la seva velocitat $v = \frac{dx}{dt}$. Com que x i v van

variant contínuament, després d'un interval de temps determinat, tindrem una successió de punts (x, v) que podrem representar gràficament. El pla o sistema de referència xv en què es fa aquesta representació s'anomena *espai fàsic* i la corba que mostra l'evolució de l'estat x, v de la partícula, *trajectòria* a l'espai fàsic.

Un dels avantatges de treballar amb l'espai fàsic és que molt sovint és més fàcil trobar la trajectòria $v(x)$ de la partícula a l'espai fàsic que l'equació de moviment $x(t)$. Per exemple, si la partícula es mou en un camp de forces conservatiu del qual $U(x)$ és l'energia potencial, aleshores la conservació de l'energia

$$\frac{1}{2}mv^2 + U(x) = E \quad (7.17)$$

ens dóna directament la trajectòria

$$v(x) = \frac{2}{m} \sqrt{E - U(x)} \quad (7.18)$$

En el cas d'un oscil·lador harmònic simple, en què $U(x) = kx^2/2$, podem reescriure (7.17) de la forma

$$\frac{x^2}{\left(\frac{2E}{k}\right)} + \frac{v^2}{\left(\frac{2E}{m}\right)} = 1 \quad (7.19)$$

on veiem que la seva trajectòria en el pla fàsic xv és una el·lipse en què el quocient de semieixos val $\sqrt{k/m} = \omega_0$ i en què l'escala o grandària de l'el·lipse ve determinada per l'energia E .



A la figura 7.3 (a), s'ha representat, a la part superior, la paràbola típica de l'energia potencial d'un oscil·lador harmònic simple amb tres nivells d'energia i, a la part inferior, les tres trajectòries el·líptiques corresponents a l'espai fàsic.

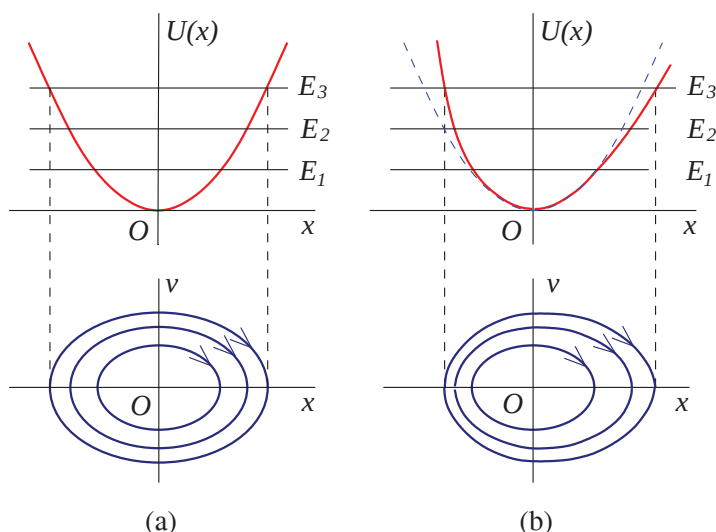


Figura 7.3

A les tres trajectòries representades, hem afegit una fletxa petita per indicar el sentit del moviment de la partícula a l'espai fàsic. En aquest cas, les fletxetes indiquen que, per exemple, si $x > 0$ i $v > 0$, llavors la velocitat de la partícula decreix, com efectivament així és.

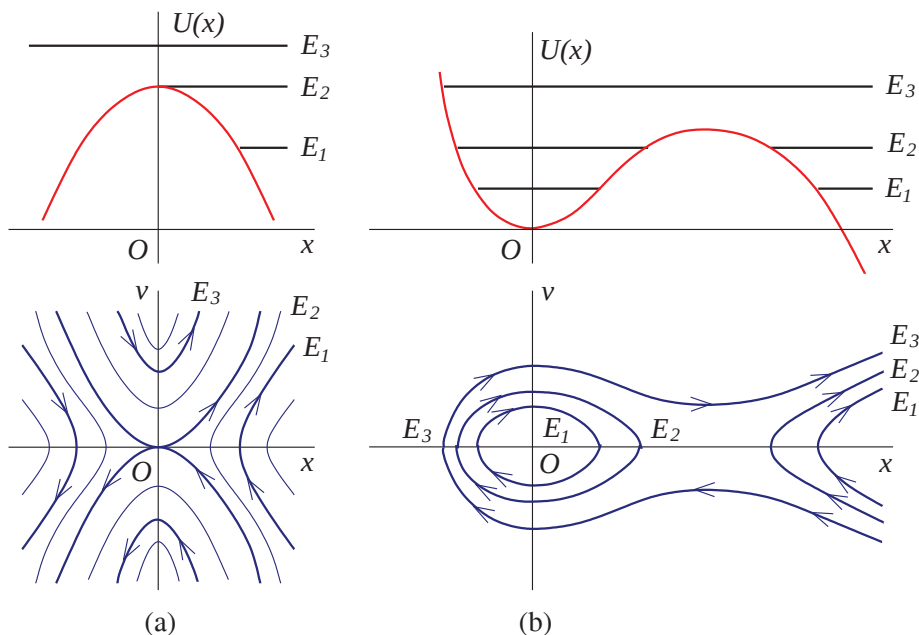
Fixem-nos que, en general, dues trajectòries de l'espai fàsic no poden tallar-se. Si ho fessin en un punt, per exemple, el x_0, v_0 , voldria dir que, per a unes mateixes condicions inicials, les x_0, v_0 , i sota una mateixa força, la partícula podria moure's de dues formes diferents, la qual cosa no té sentit i, a més, entra en contradicció amb el teorema d'unicitat de la solució de l'equació diferencial del moviment.

També convé notar que, si una partícula fa un moviment periòdic —de període T —, aleshores la trajectòria a l'espai fàsic és tancada, ja que $x(t+T) = x(t)$ i $v(t+T) = v(t)$.

A més, com que $v = \frac{dx}{dt}$, d'aquí tenim que, formalment, $T = \oint dt = \oint \frac{dx}{v(x)}$.

Encara que l'energia potencial sigui bastant més complicada que $U(x) = kx^2/2$, l'expressió (7.18) ens permet —ni que sigui qualitativament— representar les trajectòries a l'espai fàsic. Si $U(x)$ val U_0 en $x = x_0$, un mínim relatiu, les trajectòries a l'espai fàsic seran corbes tancades semblants a el·lipses centrades a $(x_0, 0)$. Això és el que es mostra a la figura 7.3 (b) anterior en què, per simplificar, s'ha pres $x_0 = 0$ i $U_0 = 0$. En canvi, al voltant d'un màxim d'energia potencial en què, com ja sabem, el moviment no serà oscil·latori, les trajectòries a l'espai fàsic són corbes que no es tanquen. Així, per exemple, si $U(x) = -kx^2/2$, les trajectòries són hipèrboles. Aquest és el cas que es representa a la figura 7.4 (a): fixeuvos en la relació entre els diferents nivells d'energia E i les trajectòries.

Figura 7.4



Exemple 7.1. Estudi qualitatiu en el diagrama de fases

Una partícula és sotmesa a la força no lineal

$$F(x) = -kx + cx^2$$

en la qual $c > 0$. Estudieu qualitativament el moviment general de la partícula.

Solució

Aquesta força deriva de l'energia potencial

$$U(x) = - \int F(x) dx = \frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{3}cx^3 \quad (1)$$

Derivant i igualant a zero (1), trobem

$$\frac{dU}{dx} = kx - cx^2 = 0$$

i d'aquí veiem que a $x_0 = 0$ i $x_1 = k/c$ és possible que hi hagi dos extrems. Derivant per segona vegada la $U(x)$, trobem

$$\frac{d^2U}{dx^2} = k - 2cx \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_0 = 0 \quad \rightarrow \quad \left(\frac{d^2U}{dx^2} \right)_{x_0} > 0, \quad \text{és un mínim} \\ x_1 = \frac{k}{c} \quad \rightarrow \quad \left(\frac{d^2U}{dx^2} \right)_{x_1} < 0, \quad \text{és un màxim} \end{cases}$$



A la figura 7.4 (b) es mostra, a dalt, la gràfica de $U(x)$ i, a baix, les trajectòries possibles de la partícula a l'espai fàsic. Les equacions de les trajectòries vénen donades, com ja hem vist abans, per la conservació de l'energia, d'on resulta

$$\frac{x^2 \left(1 - \frac{2c}{3k}x\right)}{\left(\frac{2E}{k}\right)} + \frac{v^2}{\left(\frac{2E}{m}\right)} = 1 \quad (2)$$

Si $c = 0$, aquesta equació correspon a una el·lipse. Si $c > 0$, però l'energia E és tal que $0 < E < E_{\max}$, essent $E_{\max} = U(x_1) = kx_1^2/6$, l'equació (2) representa una corba tancada al voltant de l'origen de (x, v) —moviment oscil·latori: casos de E_1 i E_2 de la figura 7.4 (b)— i una corba oberta lluny d'ell —moviment no periòdic: cas de E_3 , mateixa figura 7.4 (b); per a una energia superior a $E_{\max}$, no importa on es trobi inicialment la partícula: el moviment no serà periòdic.

Exemple 7.2. Espai fàsic d'una oscil·lació amortida

Com són les trajectòries possibles a l'espai fàsic d'una partícula que fa un moviment oscil·latori amortit?

Solució

Si la posició i la velocitat de la partícula vénen donades per

$$x(t) = Ae^{-\beta t} \cos(\omega t + \phi) \quad v(t) = \frac{dx}{dt} = -Ae^{-\beta t} [\beta \cos(\omega t + \phi) + \omega \sin(\omega t + \phi)]$$

Si $T = 2\pi/\omega$, llavors tenim

$$x(t+T) = e^{-\beta T} x(t) \quad v(t+T) = e^{-\beta T} v(t) \quad (1)$$

Siguin (x, v) les coordenades cartesianes d'un punt de l'espai fàsic i (ρ, θ) les coordenades polars corresponents del mateix punt. Com sabem, la relació entre el radi vector ρ i x i v és $\rho^2 = x^2 + v^2$. Doncs bé, si β fos zero, la partícula faria un MHS, la trajectòria seria una el·lipse i el radi vector ρ compliria que $\rho(t+T) = \rho(t)$. Si, com és el nostre cas, $\beta > 0$, aleshores, per (1) tenim que

$$\rho(t+T) = \sqrt{x^2 + v^2} = e^{-\beta T} \rho(t)$$

per la qual cosa veiem que la trajectòria a l'espai fàsic és una mena d'espiral el·líptica orientada cap a l'interior i que tendeix cap a l'origen.

7.4. Mètode de les sèries de perturbacions

Per resoldre equacions diferencials no lineals, no hi ha cap mètode general. Ara bé, per als casos en què els termes no lineals de l'equació són molt petits en comparació dels lineals, sí que s'han desenvolupat diverses tècniques que troben solucions aproximades de l'equació. D'entre totes elles destaquen, especialment, la de les sèries de perturbacions de Poisson-Poincaré, de la qual farem una introducció en aquesta mateixa secció, i la de la mitjana, que veurem en la pròxima.



7.4.1. Sèries de pertorbacions

Il·lustrem el mètode amb un exemple concret. Sigui l'equació diferencial no lineal

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon x^3 \quad (7.20)$$

en la qual ε és un paràmetre petit en valor absolut. Generalitzem allò que hem vist a la secció §7.2.2 per al pèndol.

Si ε fos estrictament zero, la solució de (7.52) seria la funció ben coneguda $x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi)$. Doncs bé, el fet que ε sigui petit ens fa pensar que la funció solució de (7.20) pugui desenvolupar-se en la sèrie següent de potències de ε

$$x(t) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \dots \quad (7.21)$$

on hem de determinar les funcions $x_1(t)$, $x_2(t)$, etc. i en la qual, és clar, $x_0(t)$ és la funció esmentada abans per a $\varepsilon = 0$.

Si, a partir de (7.21), desenvolupem x^3 fins a la ε^2 , ens queda

$$x^3 = \left[x_0 + (\varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \dots) \right]^3 = x_0^3 + \varepsilon 3x_0^2 x_1 + \varepsilon^2 (3x_0^2 x_2 + 3x_0 x_1^2) + \dots \quad (7.22)$$

Substituint (7.21) i (7.22) a (7.20) tallant en els termes d'ordre superior a ε^2 , (7.20) queda com

$$\begin{aligned} \ddot{x}_0 + \varepsilon \ddot{x}_1 + \varepsilon^2 \ddot{x}_2 + \dots + \omega_0^2 x_0 + \varepsilon \omega_0^2 x_1 + \varepsilon^2 \omega_0^2 x_2 + \dots = \\ = \varepsilon x_0^3 + \varepsilon^2 3x_0^2 x_1 + \dots \end{aligned} \quad (7.23)$$

Com que aquesta equació ha de ser vàlida per a qualsevol ε , aleshores, igualant els coeficients de les diferents potències de ε , resulta el conjunt següent d'equacions diferencials —lineals!—

$$\ddot{x}_0 + \omega_0^2 x_0 = 0 \quad (7.24)$$

$$\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = x_0^3 \quad (7.25)$$

$$\ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 = 3x_0^2 x_1 \quad (7.26)$$

... ..

Si les condicions inicials són, per exemple, a $t = 0$, $x(0) = A$, $\dot{x}(0) = 0$, aleshores, de (7.21) tenim que

$$\left. \begin{aligned} x_0(0) = A, & \quad x_1(0) = x_2(0) = \dots = 0 \\ \dot{x}_0(0) = 0, & \quad \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = \dots = 0 \end{aligned} \right\} \quad (7.27)$$

Llavors, de (7.24) obtenim

$$x_0(t) = A \cos \omega_0 t \quad (7.28)$$

és a dir, la solució de l'equació (7.20) a l'aproximació lineal. El mètode consisteix a utilitzar aquesta primera funció $x_0(t)$, ara coneguda, a la segona equació (7.25) i resoldre-la per obtenir $x_1(t)$; a continuació, amb x_0 i x_1 , podem passar a la tercera, i així anar fent fins a la precisió que vulguem.



Substituint, doncs, $x_0(t)$ a (7.25) i considerant la relació trigonomètrica (A.28) per al $\cos^3 \omega_0 t$, tenim

$$\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = \frac{3}{4} A^3 \cos \omega_0 t + \frac{1}{4} A^3 \cos 3\omega_0 t \quad (7.29)$$

La solució d'aquesta última equació diferencial és —com es demana a l'exercici B.2 de l'apèndix B—

$$x_1(t) = \frac{A^3}{32\omega_0^2} (12\omega_0 t \sin \omega_0 t - \cos 3\omega_0 t) \quad (7.30)$$

en què apareix el $\sin \omega_0 t \dots$ amb l'amplitud proporcional al temps!

Un terme proporcional al temps com $12\omega_0 t \sin \omega_0 t$, que s'anomena *terme secular*, destrueix la periodicitat de la funció $x_1(t)$ i, per tant, de la $x(t)$. D'altra banda, per la física involucrada en el problema, podem estar segurs que la solució de (7.20) ha de ser una funció periòdica. Així doncs, alguna cosa no va bé.

7.4.2. Eliminació dels termes seculars

L'error està en el plantejament del mètode d'aproximació que estem utilitzant. Tal com l'hem plantejat, la funció $x_0(t)$ té una freqüència ω_0 i les funcions següents $x_1(t)$, $x_2(t)$, etc. en tindran freqüències múltiples. Però la realitat és que precisament un dels efectes més significatius del terme no lineal εx^3 és que el paper que fa la freqüència pròpia ω_0 a tot el sistema ara el fa la freqüència ω lleugerament diferent de ω_0 . Aquesta petita diferència de freqüències és la responsable de l'aparició del terme secular a (7.30) i els que anirien apareixent més a $x_2(t)$, etc. si continuéssim amb l'equació (7.26) i les següents. Però, per què apareixen els termes seculars?

Descomposem l'equació (7.29) en dues de més simples, una per a $x_a(t)$ i una altra per a $x_b(t)$:

$$\ddot{x}_a + \omega_0^2 x_a = \frac{1}{4} A^3 \cos 3\omega_0 t \quad (7.31)$$

$$\ddot{x}_b + \omega_0^2 x_b = \frac{3}{4} A^3 \cos \omega_0 t \quad (7.32)$$

Com que aquestes equacions són lineals, tenim que $x_1(t) = x_a(t) + x_b(t)$. Aquestes dues equacions corresponen a dos oscil·ladors sense amortiment forçats per forces impulsors harmòniques. En el cas de (7.31), la freqüència és $3\omega_0$ —és a dir, tres vegades la pròpia. La resposta de l'oscil·lador, a l'estat estacionari, serà un MHS de la mateixa freqüència $3\omega_0$:

$$x_a(t) = \frac{1}{32} \frac{A^3}{\omega_0^2} \cos 3\omega_0 t$$

L'equació (7.32) correspon a la d'un oscil·lador forçat en què la freqüència de la força externa coincideix amb la pròpia ω_0 . És a dir, estem davant d'un cas de ressonància en què l'amortiment és molt petit i, pel que hem dit al capítol 3, la solució particular

$$x_b(t) = \frac{3}{8} \frac{A^3}{\omega_0} t \sin \omega_0 t$$



correspon a l'estat estacionari, després d'un temps molt llarg en què l'amplitud del MHS seria molt gran. Com veiem, doncs, la solució matemàtica de l'equació (7.32) i, per tant, de la (7.29), amb el seu terme secular, encaixa amb la interpretació física que podem fer del cas.

Comencem desenvolupant la funció $x(t)$ en sèrie, igual com hem fet abans a (7.21)

$$x(t) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \dots \quad (7.33)$$

però ara també desenvoluparem la freqüència en sèrie de potències de ε , de la forma

$$\omega_0^2 = \omega^2 + \mu_1 \varepsilon + \mu_2 \varepsilon^2 + \dots \quad (7.34)$$

expressió en la qual μ_1 , μ_2 , etc. són paràmetres que dependran de ω_0 i de l'amplitud A però independents del temps que anirem determinant sobre la marxa imposant la condició que els termes seculars que hi puguin aparèixer s'anul·lin.

Tornant a substituir (7.33) i (7.22) a (7.20), tenint en compte que ara $\omega_0^2 x$ és el producte de (7.33) per (7.34) i, com hem fet abans, tallant en els termes d'ordre superior a ε^2 , l'equació (7.20) queda d'una forma semblant a la (7.23), de la qual, tornant a igualar els coeficients amb la mateixa potència de ε , obtenim el sistema d'equacions

$$\ddot{x}_0 + \omega^2 x_0 = 0 \quad (7.35)$$

$$\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = x_0^3 - \mu_1 x_0 \quad (7.36)$$

$$\ddot{x}_2 + \omega^2 x_2 = 3x_0^2 x_1 - \mu_1 x_1 - \mu_2 x_0 \quad (7.37)$$

... ..

Amb les mateixes condicions inicials (7.27), la solució de (7.35) és

$$x_0(t) = A \cos \omega t \quad (7.38)$$

funció que substituïm a (7.36) per tal d'obtenir-ne l'equació equivalent a la (7.29) però que ara resulta

$$\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = \left(\frac{3}{4} A^2 - \mu_1 \right) A \cos \omega t + \frac{1}{4} A^3 \cos 3\omega t \quad (7.39)$$

Com hem comentat abans, el responsable de l'aparició del terme secular a (7.30) és el $\cos \omega t$. L'anul·lem, doncs, prenent μ_1 com

$$\mu_1 = \frac{3}{4} A^2 \quad (7.40)$$

de manera que ara ens queda l'equació

$$\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = \frac{1}{4} A^3 \cos 3\omega t \quad (7.41)$$

la solució de la qual, amb les condicions inicials (7.27) imposades, és

$$x_1(t) = \frac{A^3}{32\omega^2} (\cos \omega t - \cos 3\omega t) \quad (7.42)$$



Tenim, doncs, que amb l'exactitud de la primera potència de ε , és a dir, en la primera aproximació no lineal, la solució de l'equació (7.20) és, per (7.38) i (7.42),

$$x(t) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) = A \left(1 + \varepsilon \frac{A^2}{32\omega^2} \right) \cos \omega t - \varepsilon \frac{A^3}{32\omega^2} \cos 3\omega t \quad (7.43)$$

amb la freqüència ω que, també en primera aproximació, val, per (7.34) i (7.40),

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \varepsilon \frac{3A^2}{4\omega_0^2}} \approx \omega_0 \left(1 - \varepsilon \frac{3}{8} \frac{A^2}{\omega_0^2} \right) \quad (7.44)$$

Si, amb una aproximació de primer ordre en ε , ja tenim suficient precisió amb (7.43) i (7.44), podem donar per acabat el càlcul. Si ε no és prou petit o en volem més exactitud, necessitem l'aproximació de segon ordre... o de tercer, etc.

7.4.3. Aproximació de segon ordre

Substituint $x_0(t)$, $x_1(t)$ i μ_1 a l'equació (7.37), considerant les igualtats trigonomètriques (A.27) i (A.37) que desenvolupen el $\cos^3 \omega t$ i el $\cos^2 \omega t \cos 3\omega t$, respectivament, i fent les operacions corresponents, s'arriba a l'equació per a $x_2(t)$

$$\ddot{x}_2 + \omega^2 x_2 = \left(\frac{3A^4}{128\omega^2} - \mu_2 \right) A \cos \omega t - \frac{3A^5}{128\omega^2} \cos 5\omega t \quad (7.45)$$

Observem que, com podíem esperar, hi ha un terme amb $\cos 5\omega t$ i que, durant la manipulació algebraica, s'han cancel·lat els termes amb $\cos 3\omega t$. I, com també esperàvem, hi torna a aparèixer un terme amb $\cos \omega t$, que dóna lloc a una ressonància i, en definitiva, a un terme secular.

Com hem fet anteriorment, anul·larem aquest terme imposant que

$$\mu_2 = -\frac{3A^4}{128\omega^2} \quad (7.46)$$

Per (7.45) i (7.37), ara ens queda l'equació

$$\ddot{x}_2 + \omega^2 x_2 = -\frac{3}{128} \frac{A^5}{\omega^2} \cos 5\omega t \quad (7.47)$$

la solució de la qual, ja amb les condicions inicials (7.27) imposades, és

$$x_2(t) = -\frac{A^5}{1024\omega^4} (\cos \omega t - \cos 5\omega t) \quad (7.48)$$

En definitiva, fins al segon ordre en ε la solució $x(t)$ de l'equació (7.20) és $x = x_0 + x_1 + x_2$, és a dir, per (7.38), (7.42) i (7.48),

$$x(t) = A \left(1 + \varepsilon \frac{A^2}{32\omega^2} - \varepsilon^2 \frac{A^4}{1024\omega^4} \right) \cos \omega t - \varepsilon \frac{A^3}{32\omega^2} \cos 3\omega t + \varepsilon^2 \frac{A^5}{1024\omega^4} \cos 5\omega t \quad (7.49)$$



essent ω la donada per (7.34), (7.40) i (7.46),

$$\omega_0^2 = \omega^2 + \varepsilon \frac{3}{4} \frac{A^2}{\omega_0^2} - \varepsilon^2 \frac{3}{128} \frac{A^4}{\omega^2} \quad (7.50)$$

Negligint tots els termes d'ordre superior a ε^2 de (7.50), podem aïllar ω aplicant les aproximacions

$$\omega = \omega_0 \left[1 - \varepsilon \frac{3}{4\omega_0^2} + \varepsilon^2 \frac{3A^4}{128\omega_0^2} \frac{1}{\omega_0^2 \left(1 - \varepsilon \frac{3}{4\omega_0^2} + \dots \right)} \right]^{1/2} \approx \omega_0 \left[1 - \varepsilon \frac{3}{4\omega_0^2} + \varepsilon^2 \frac{3A^4}{128\omega_0^2} \right]^{1/2}$$

i ara la de l'arrel quadrada en segon ordre. Per (A.68), tenim finalment

$$\omega = \omega_0 \left(1 - \varepsilon \frac{3}{8} \frac{A^2}{\omega_0^2} + \varepsilon^2 \frac{3}{256} \frac{A^4}{\omega_0^4} \right) \quad (7.51)$$

I així podríem continuar desenvolupant fins al tercer ordre de ε , el quart o el que convingués.

7.5. Mètode de Krylov i Bogoliubov

El mètode¹ que veurem ara és bastant general i, en els casos en què funciona, especialment ràpid quan només ens interessa una primera aproximació no lineal.

Considerem una equació diferencial no lineal de la forma

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon f(x, \dot{x}) \quad (7.52)$$

en què ε és un paràmetre petit en valor absolut i $f(x, \dot{x})$ una funció d'aquestes dues magnituds.

Si ε fos estrictament zero, la solució de (7.52) seria la funció ben coneguda $x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi)$. Aquest mètode consisteix a buscar solucions a (7.52) de la forma

$$x(t) = A(t) \cos \left[\int \omega_0 t + \phi(t) \right] \quad (7.53)$$

en les quals, com indica la notació, $A(t)$ i $\phi(t)$ són funcions del temps que hem de determinar.

Si derivem (7.53), tenim

$$\dot{x} = \dot{A} \cos(\omega_0 t + \phi) - (\omega_0 + \dot{\phi}) A \sin(\omega_0 t + \phi)$$

De totes les funcions possibles de la mena (7.53), quedem-nos només amb les que compleixen la condició

¹ Alguns autors anomenen mètode de Krylov-Bogoliubov el sistema d'eliminació dels termes seculars que hem vist a la secció 7.4.2.



$$\dot{A} \cos(\omega_0 t + \phi) - \dot{\phi} A \sin(\omega_0 t + \phi) = 0 \quad (7.54)$$

de manera que $\dot{x}$ queda com

$$\dot{x} = -\omega_0 A(t) \sin(\omega_0 t + \phi(t)) \quad (7.55)$$

Fixem-nos que la condició (7.54) limita la varietat de funcions a provar però que, en principi, no representa cap aproximació. De moment, tot segueix essent rigorosament exacte.

Derivant $\dot{x}$, ens queda

$$\ddot{x} = -\omega_0 \dot{A} \sin(\omega_0 t + \phi) - \omega_0^2 A \cos(\omega_0 t + \phi) - \omega_0 A \dot{\phi} \cos(\omega_0 t + \phi) \quad (7.56)$$

i portant (7.55) i (7.56) a (7.52), resulta

$$-\omega_0 \dot{A} \sin(\omega_0 t + \phi) - \omega_0 A \dot{\phi} \cos(\omega_0 t + \phi) = \varepsilon f(x, \dot{x}) \quad (7.57)$$

Si ara en diem

$$\theta(t) = \omega_0 t + \phi(t) \quad (7.58)$$

les equacions (7.54) i (7.57) poden tornar-se a escriure com el sistema

$$\dot{A} \sin \theta + \dot{\phi} A \cos \theta = -\frac{\varepsilon}{\omega_0} f(x, \dot{x})$$

$$\dot{A} \cos \theta - \dot{\phi} A \sin \theta = 0$$

i d'aquí deduïm fàcilment

$$\dot{A} = -\frac{\varepsilon}{\omega_0} f(A \cos \theta, -A \sin \theta) \sin \theta \quad (7.59)$$

$$\dot{\phi} = -\frac{\varepsilon}{\omega_0 A} f(A \cos \theta, -A \sin \theta) \cos \theta \quad (7.60)$$

amb $\dot{\phi} = \dot{\theta} - \omega_0$, per (7.58).

Així, doncs, hem passat de l'equació diferencial (7.52) per a $x(t)$ al sistema anterior de dues equacions per a $A(t)$ i $\phi(t)$. Quin avantatge ha comportat aquest canvi? Doncs que si ε és petit i, per tant, $\dot{A}$ i $\dot{\phi}$ varien molt poc al llarg d'un període —és a dir, l'interval de temps durant el qual θ s'incrementa en 2π —, aleshores, podem aproximar els segons membres de (7.59) i (7.60) per les respectives mitjanes, prenent A , durant un període, com a constant. És a dir,

$$\dot{A} \approx -\frac{\varepsilon}{2\pi\omega_0} \int_0^{2\pi} f(A \cos \theta, -A \sin \theta) \sin \theta d\theta \quad (7.61)$$

$$\dot{\phi} \approx -\frac{\varepsilon}{2\pi\omega_0 A} \int_0^{2\pi} f(A \cos \theta, -A \sin \theta) \cos \theta d\theta \quad (7.62)$$

Fixem-nos que, per a aquelles funcions $f(x, \dot{x})$ per a les quals $\dot{\phi} \neq 0$, la no linealitat fa que la freqüència de l'oscil·lació no sigui ω_0 sinó, en primera aproximació, $\omega = \omega_0 + \dot{\phi}$.



És el cas, per exemple, de $f(x, \dot{x}) = x^3$. Vegem l'aplicació d'aquest mètode a aquest últim cas.

Exemple 7.3. Aplicació del mètode de Krylov i Bogoliubov

Tornem a considerar l'equació diferencial no lineal (7.20)

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon x^3$$

en la qual ε és un paràmetre molt petit. Apliqueu el mètode anterior per resoldre-la en primera aproximació de ε si les condicions inicials són $x(0) = A$ i $\dot{x}(0) = 0$.

Solució

En aquest cas, $f(x, \dot{x}) = x^3 = A \cos^3 \theta$, i les expressions (7.63) i (7.62) queden com

$$\dot{A} \approx -\frac{\varepsilon A^3}{2\pi\omega_0} \int_0^{2\pi} \cos^3 \sin \theta d\theta = 0$$

$$\dot{\phi} \approx -\frac{\varepsilon A^2}{2\pi\omega_0} \int_0^{2\pi} \cos^4 \theta d\theta = -\frac{\varepsilon A^2}{2\pi\omega_0} \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos 2\theta + \frac{1}{8} \cos 4\theta \right) d\theta = -\frac{3}{8} \frac{\varepsilon A^2}{\omega_0}$$

Si $\dot{A} = 0$, aleshores A és constant, mentre que $\phi = \dot{\phi}t + \phi_0$, essent $\phi_0 = 0$ el valor inicial. I, per (7.53), ens quedarà

$$x(t) = A \cos \omega_0 \left(1 - \varepsilon \frac{3}{8} \frac{A^2}{\omega_0^2} \right) t \quad (7.63)$$

resultat que està “bastant” d'acord amb els que hem trobat abans —amb més feina— a (7.44) i (7.51)

7.6. Oscil·ladors no lineals forçats

Com s'ha comentat des del primer moment d'aquest capítol, la no-linealitat dels sistemes implica una sèrie de canvis notables respecte dels casos lineals. El més important és la no-validesa del principi de superposició, la qual cosa pot portar a fenòmens sorprenents i nous que no es donen en els sistemes lineals. Aquest és el cas de la ressonància.

Per exemple, pensem en el típic oscil·lador no lineal d'equació diferencial (7.20) —que hem estudiat a la secció §7.4— al qual ara afegim la força impulsora exterior $F(t) = F_0 \cos \Omega t$.

$$\ddot{x} + (\omega_0^2 - \varepsilon x^2)x = F_0 \cos \Omega t \quad (7.64)$$

Recordem que l'expressió (7.51) proporciona la freqüència “natural” ω d'aquest sistema no lineal i que, com veiem, ara aquesta no és constant sinó que augmenta o disminueix a mesura que l'amplitud A de l'oscil·lació varia. En conseqüència, i al contrari de la ressonància en sistemes lineals, sigui quina sigui la freqüència Ω de la força impulsora l'amplitud de l'oscil·lació forçada no es pot fer mai gaire gran.

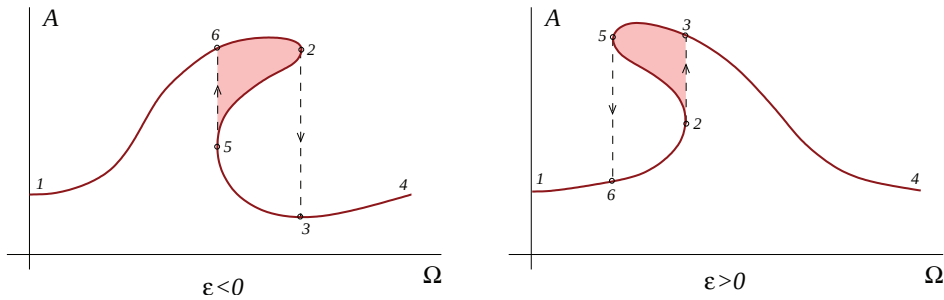


Figura 7.5

A la figura 7.5 s'ha representat qualitativament l'amplitud de l'oscil·lació forçada del sistema donat per (7.64) en funció de la freqüència Ω impulsora. Com ja s'indica, la figura 7.5 esquerra és per a un sistema “dur” ($\varepsilon < 0$) i la figura 7.5 dreta, per a un de “tou” ($\varepsilon > 0$). D'entrada, ja veiem que mostren diferències molt significatives respecte de la figura 3.4 de la secció §3.3.1.

Suposem tots els altres paràmetres constants, és a dir, ω_0^2 , ε i F_0 , i també que, inicialment, la freqüència de la força impulsora, Ω , és molt petita —punt 1 de les dues figures anteriors. Si anem augmentant la freqüència Ω lentament l'amplitud A de l'oscil·lació forçada va creixent, anant del punt 1 al 2, però un cop allà l'amplitud passa bruscament del 2 al 3 —efecte salt— i continua del 3 al 4 de les gràfiques anteriors. Un cop estem en una freqüència Ω alta, per exemple la corresponent al punt 4, si anem disminuint lentament Ω , l'amplitud passarà pel punt 3 fins arribar al 5. Si seguim disminuint Ω , aquí l'amplitud A tornarà a fer un altre salt, passant de la corresponent al punt 5 al 6, i continuarà cap a l'1. Així doncs, al contrari que per als sistemes lineals, en aquests hi pot haver, per a una freqüència impulsora Ω determinada, dues amplituds d'oscil·lació ben diferents.

Per acabar, cal afegir que, també a diferència de les oscil·lacions forçades amb una força restauradora lineal, en les quals aquesta és no lineal, la freqüència d'oscil·lació no és necessàriament la freqüència Ω de la força impulsora, sinó que pot ser més petita que aquesta, la qual cosa dóna lloc a les *oscil·lacions subharmòniques*.

7.7. Problemes resolts i problemes proposats

7.7.1. Problemes resolts

Problema 7.1. Correcció de 2n ordre a la velocitat màxima d'un pèndol

Considerem un pèndol simple de longitud L l'amplitud del qual és l'angle Θ , ara no necessàriament petit. Aplicant-hi la conservació de l'energia mecànica, trobeu la velocitat màxima V de la lentilla. D'aquest resultat rigorosament exacte, feu-ne una primera aproximació i comproveu que es correspon amb el que surt de considerar el moviment del pèndol com un MHS de petita amplitud. Del resultat exacte anterior feu-ne una segona aproximació i comproveu que aquesta representa una correcció relativa a la velocitat donada pel MHS de $-\Theta^2/24$.

Solució

Sigui m la massa de la lentilla. Prenent l'origen de l'energia potencial en el punt més baix del pèndol, la conservació de l'energia aplicada entre aquest i el de l'amplitud màxima dóna



$$\frac{1}{2}mV^2 = mgL(1 - \cos \Theta)$$

d'on surt

$$V = \sqrt{2gL(1 - \cos \Theta)} \quad (1)$$

Si desenvolupem en sèrie el cosinus com a (A.57) i el substituïm a (1) tenim

$$V = \sqrt{2gL} \left(\frac{\Theta^2}{2} - \frac{\Theta^4}{24} + \dots \right)^{1/2} \quad (2)$$

En una primera aproximació, és a dir, agafant només el primer terme de la sèrie, ens quedarà

$$V \approx V_1 = \Theta \sqrt{gL}$$

D'acord amb l'expressió (1.19), la màxima velocitat lineal de la lentilla del pèndol val

$$V_{(mhs)} = L \omega \Theta = L \sqrt{\frac{g}{L}} \Theta = \Theta \sqrt{gL}$$

amb la qual cosa queda comprovat.

Si fem una segona aproximació a (2) agafant el primer i el segon terme del desenvolupament ens quedarà

$$V \approx V_2 = \sqrt{2gL} \left(\frac{\Theta^2}{2} - \frac{\Theta^4}{24} \right)^{1/2} = \Theta \sqrt{gL} \sqrt{1 - \frac{\Theta^2}{12}} \approx \Theta \sqrt{gL} \left(1 - \frac{\Theta^2}{24} \right)$$

I la correcció relativa de la segona aproximació a la primera és

$$\frac{V_2 - V_1}{V_1} = \frac{\Theta^2}{24} \quad (3)$$

Així, per exemple, per a un angle de $\Theta = 0,1 \text{ rad} = 5,74^\circ$, aquesta correcció es del 0,42%. Fixeu-vos que la correcció (3) és diferent de la correcció de 2n ordre del període donada per (7.8)

Problema 7.2. Oscil·lació amortida per una fricció seca

Un sistema molla-massa disposat sobre una superfície horitzontal rugosa consta d'un bloc de massa m unit a una molla de constant de força k . El bloc se separa una longitud A_0 respecte de la seva posició d'equilibri i es deixa anar, per la qual cosa comença a oscil·lar. La superfície fa una petita força de *fricció seca* sobre el bloc, i els coeficients de fricció dinàmica i estàtica són μ i μ_s , respectivament. Negligint la resistència de l'aire esbrineu:

- la diferència d'amplituds entre dues oscil·lacions consecutives i
- quantes oscil·lacions farà el bloc abans d'aturar-se i a quina distància del punt d'equilibri quedarà en repòs?



Apliqueu els resultats al cas: $m = 0,10 \text{ kg}$, $k = 10 \text{ N/m}$, $A_0 = 0,40 \text{ m}$, $\mu = 0,050$ i $\mu_s = 0,055$.

Solució

- a) D'entrada, notem que, efectivament, es tracta d'una oscil·lació no lineal. Es deixa per al lector dibuixar la gràfica de la força total $F(x)$ que actua sobre la partícula en funció de l'elongació x , com hem fet a la secció §7.1. Primer, fixem-nos que aquesta força, per al mateix punt x , no és la mateixa si la partícula va o si torna.

A causa de la fricció amb la taula, la partícula anirà perdent energia contínuament i, en conseqüència, la seva amplitud anirà disminuint. Com ja sabem, A_0 és l'amplitud inicial del moviment; siguin ara A_1 la màxima elongació del bloc —“amplitud”— després de la primera mitja oscil·lació; A_2 el mateix després de la segona mitja oscil·lació, és a dir, després de la primera oscil·lació completa; $A_3, A_4, \dots$, és a dir, A_n , és l’“amplitud” del moviment després que el bloc hagi efectuat n mitges oscil·lacions —v. figura 7.6.

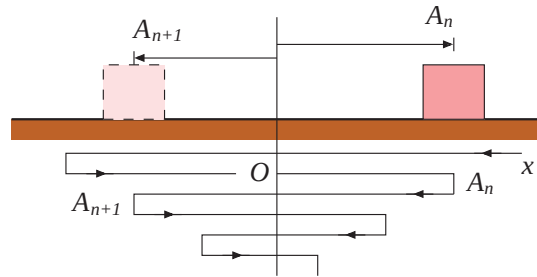


Figura 7.6

La “pèrdua” d'amplitud d'una oscil·lació a la següent, ΔA , serà, doncs,

$$\Delta A = A_n - A_{n+2} \quad (1)$$

La força de fricció seca F_f que actua sobre una partícula en moviment sobre un pla horitzontal val, com és ben sabut: $F_f = \mu N = \mu mg$, on N és la normal que, en aquest cas, coincideix amb el pes del bloc. El treball W_f que fa la força de fricció F_f al llarg del desplaçament del bloc entre A_n i A_{n+1} serà, doncs, en valor absolut

$$|W_f| = \mu mg(A_n + A_{n+1})$$

Per la no-conservació de l'energia, tenim que aquest treball ha de ser igual a la diferència d'energia potencial elàstica entre l'instant de l'elongació màxima de l'oscil·lació n i la $n + 1$, és a dir,

$$\frac{1}{2}kA_n^2 - \frac{1}{2}kA_{n+1}^2 = \mu mg(A_n + A_{n+1}) \quad (2)$$

I com que

$$\frac{1}{2}k(A_n^2 - A_{n+1}^2) = \frac{1}{2}k(A_n - A_{n+1})(A_n + A_{n+1})$$



podem simplificar $(A_n + A_{n+1})$ a (2) i n'obtenim

$$A_n - A_{n+1} = \frac{2\mu mg}{k}$$

Fixem-nos que aquesta diferència i, per tant, ΔA són independents de n , és a dir, del temps. Així doncs, per (1) trobem el que ens demanen

$$\Delta A = \frac{4\mu mg}{k} \quad (3)$$

Substituint valors numèrics, tenim: $\Delta A = 1,96 \text{ cm}$.

b) Quan s'aturarà el bloc en aquest moviment oscil·latori d'amplitud decreixent?

A l'apartat anterior només hem considerat la força de fricció dinàmica, la que actua mentre el bloc està en moviment. Aquesta força frenarà però mai no aturarà definitivament el bloc. En efecte, si aquest s'està movent cap a l'origen, la seva celeritat està creixent i, si s'està movent cap enfora, la força de fricció dinàmica només fa que el bloc s'aturi una mica més aviat del que ho faria si no actués, però com que la força elàstica de la molla ara és màxima, torna a posar en marxa el bloc, ara cap a l'origen. Així doncs, la fricció dinàmica va dissipant l'energia del bloc i reduint-ne l'amplitud però no l'aturarà.

El que aturarà el moviment del bloc serà la força de fricció estàtica que, com la fricció dinàmica, és de mòdul constant, $|F_s| = \mu_s mg$. Aquesta força actua sobre el bloc només durant els instants de temps en els quals el bloc s'atura abans del canvi de sentit del moviment. Això passa cada semioscil·lació, a l'instant en què el valor absolut de l'elongació x és màxima, x_M i, en conseqüència, també és màxima, en valor absolut, la força elàstica, que val $kx_M = kA_n$. Per tant, cada cop que el bloc que s'aturi actuarà la fricció estàtica: si el bloc està prou allunyat de l'origen, la força restauradora és més gran que la de fricció estàtica i començarà una nova semioscil·lació, però, si en una de les aturades la força recuperadora no és prou gran, dominarà la fricció estàtica i allà es quedarà el bloc en repòs sense oscil·lar i amb la molla estirada A_N . Per consegüent, s'aturarà definitivament quan l'amplitud A_N compleixi

$$kA_N \leq \mu_s mg \quad (4)$$

d'on trobem la distància $d = A_N$ a la qual el bloc quedarà en repòs. I, respecte del nombre N de semioscil·lacions que farà abans d'aturar-se definitivament, per (4) i (3), tindrem

$$kA_N = k \left(A_0 - N \frac{\Delta A}{2} \right) = kA_0 - N 2\mu mg \leq \mu_s mg$$

d'on resulta

$$N \geq \frac{kA_0 - \mu_s mg}{2\mu mg}$$

Substituint de nou els valors numèrics, obtenim $N = 40,2 \approx 41$ semioscil·lacions i $d \approx 5,6 \text{ mm}$.



Problema 7.3. Oscil·lacions d'una partícula sobre una paràbola: primera aproximació no lineal

Estudieu el moviment d'una partícula que, per raó del seu propi pes, es desplaça sense fricció sobre la paràbola

$$y = ax^2$$

—v. figura 7.7— de manera que l'eix x és horitzontal i l'eix y és vertical. Si suposem que a l'instant inicial la partícula es troba en repòs en el punt (x_0, ax_0^2) , aplicant-hi la conservació de l'energia trobeu el període de la seva oscil·lació al voltant de l'origen:

- En una aproximació lineal d'oscil·lacions petites. Què vol dir aquí “oscil·lacions petites”?
- En una primera aproximació no lineal.

Solució

Atenció amb aquest problema que, en una primera reflexió, pot desorientar: si bé l'energia potencial és del tipus gravitatori $U = mgy = mga^2x^2$, és a dir, proporcional a x^2 , com la deguda a la força $F = -kx$ del MHS, aquest moviment, en no ser rectilini, no és rigorosament un MHS. Vegem-ho amb detall.

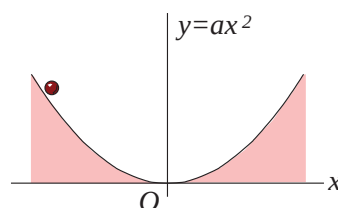


Figura 7.7

Com en tants altres problemes, en aquest aplicar la conservació de l'energia serà molt més pràctic que aplicar la segona llei de Newton, en la qual interven el pes de la partícula i la reacció normal de la corba sobre ella. Aquesta última força és de lligament, és a dir, la força que juntament amb el pes manté la partícula sobre la corba. Amb el mètode energètic, podem prescindir-ne totalment ja que no fa treball. Com que no hi ha fricció en el desplaçament de la partícula, es conserva l'energia mecànica E , suma de la potencial gravitatòria U més la cinètica K . A $t = 0$, no hi ha energia cinètica, i la potencial, prenent l'origen d'energia potencial en $y = 0$, val

$$E = mgy_0 = mga^2x_0^2 \quad (2)$$

En un instant qualsevol t , tindrem

$$U = mgy = mga^2x^2 \quad (3)$$

i

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 \right] = \frac{1}{2}m \left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right] \left(\frac{dx}{dt} \right)^2$$

que, per (1), podem posar com

$$K = \frac{1}{2}m(1 + 4a^2x^2) \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \quad (4)$$



De (3) i (4), es dedueix

$$\frac{1}{2}m(1+4a^2x^2)\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + mgax^2 = E \quad (5)$$

equació que, com assenyalàvem abans, expressa la conservació de l'energia. Si la derivem respecte del temps i simplifiquem, tenim

$$(1+4a^2x^2)\frac{d^2x}{dt^2} + 4a^2x\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + 2gax = 0 \quad (6)$$

equació diferencial del moviment per a x i que, clarament, no és lineal. Consegüentment, la partícula no fa un MHS.

a) Ara bé, si tenim

$$4a^2x^2 \ll 1 \quad (7)$$

$$2a\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \ll g \quad (8)$$

és a dir, si l'oscil·lació és de poca amplitud, l'equació (6) queda simplificada com l'equació diferencial d'un MHS

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2gax = 0$$

i un període de $T = 2\pi\sqrt{\frac{1}{2ga}}$.

D'altra banda, si comparem aquest període amb el d'un pèndol simple, veiem que $1/2a$ fa el paper de la longitud L del pèndol. Diguem, doncs, que $L = 1/2a$. També tenim que, per conservació de l'energia, la celeritat v_{max} amb què passa la partícula pel punt d'equilibri $O = (0,0)$ és la màxima i, si parteix de x_0 , val $v_{max} = \sqrt{2gy_0} = \sqrt{2gax_0^2}$. Per tant, (8), és a dir, $2av^2 \ll g$, amb (7), queda com

$$4a^2v^2 \leq 4a^2v_{max}^2 = 8ga^3x_0^2 \ll 2ga$$

és a dir, $4a^2x_0^2 = \left(\frac{x_0}{L}\right)^2 \ll 1$. Així doncs, “oscil·lacions petites”, en aquest cas, vol dir que l'amplitud x_0 sigui molt més petita que la longitud $L = 1/2a$ del pèndol simple equivalent.

b) Per al cas general en què no podem fer l'aproximació a un MHS, podem calcular el període considerant que aquest és, per simetria, quatre vegades el temps d'anar de $x = x_0$ a l'origen $x = 0$. De (5) i (2), acaba sortint

$$v = \frac{dx}{dt} = \sqrt{2ga}\sqrt{\frac{x_0^2 - x^2}{1 + 4a^2x^2}} \quad (9)$$



Així doncs, el període ve donat per la integral

$$T = 4 \int_0^{x_0} \frac{dx}{v} = \frac{4}{\sqrt{2ga}} \int_0^{x_0} \sqrt{\frac{1+4a^2x^2}{x_0^2-x^2}} dx$$

o, el que és el mateix,

$$T = \frac{4}{\sqrt{2ga}} \int_0^1 \sqrt{\frac{1+c^2z^2}{1-z^2}} dz \quad \text{amb} \quad z = \frac{x}{x_0}, \text{ i } c^2 = 4a^2x_0^2 \quad (10)$$

Aquesta integral és una *integral el·líptica completa de segona espècie* com la (A.98) de l'apèndix §A.5; (10) no té, per tant, primitiva en termes de funcions elementals si bé es pot donar com la sèrie (A.101). Però nosaltres mateixos, si $c^2z^2 \ll 1$, podem fer l'aproximació $\sqrt{1+c^2z^2} \approx 1 + c^2z^2/2$. Llavors, considerant (A.71) i (A.72), la integral (8) dona

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{2ga}}{4} T &\approx \int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{1-z^2}} + \frac{c^2}{2} \frac{z^2}{\sqrt{1-z^2}} \right) dz = \\ &= \left[\arcsin z - \frac{c^2 z \sqrt{1-z^2}}{4} + \frac{c^2}{2} \arcsin z \right]_0^1 = \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{1}{2} c^2 \right) \end{aligned}$$

i, per (10),

$$T \approx 2\pi \sqrt{\frac{1}{2ga}} (1 + a^2x_0^2)$$

aproximació vàlida fins al segon ordre en ax_0 .

Problema 7.4. Mètode de les pertorbacions: en segon ordre

Sigui l'equació diferencial no lineal

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon x^2 \quad (7.65)$$

en què el valor absolut de ε és un paràmetre petit. Sabent que les condicions inicials són $x(0) = A$, $\dot{x}(0) = 0$, apliqueu el mètode de les pertorbacions de la secció §7.4 per trobar la funció $x(t)$ aproximada fins al segon ordre en ε .

Solució

Desenvoluparem la funció $x(t)$ i la freqüència ω_0^2 en sèrie de potències de ε com a (7.33) i (7.34). Elevem al quadrat la sèrie per a $x(t)$ i fem el producte $\omega_0^2 x$. Negligint els termes d'ordre superior a ε^2 , si substituïm tot a l'equació (7.65) i igulem els factors amb la mateixa potència de ε obtenim les equacions

$$\ddot{x}_0 + \omega^2 x_0 = 0 \quad (7.66)$$

$$\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = x_0^2 - \mu_1 x_0 \quad (7.67)$$

$$\ddot{x}_2 + \omega^2 x_2 = 2x_0 x_1 - \mu_1 x_1 - \mu_2 x_0 \quad (7.68)$$

... ..



Amb les condicions inicials de l'enunciat, la solució $x_0(t)$ de (7.66) és $x_0(t) = A \cos \omega t$, que, substituïda a la (7.67), ens dona per a $x_1(t)$

$$\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = \frac{A^2}{2} - \mu_1 A \cos \omega t + \frac{A^2}{2} \cos 2\omega t \quad (7.69)$$

Si, com hem dit a la secció §7.4, volem que no apareguin termes seculars a $x(t)$, hem de prendre $\mu_1 = 0$ perquè desaparegui el terme amb $\cos \omega t$. La nova equació diferencial, amb les condicions inicials $x_1(0) = 0$ i $\dot{x}_1(0) = 0$ incloses té, com a solució,

$$x_1(t) = \frac{A^2}{6\omega^2} (3 - 2 \cos \omega t - \cos 2\omega t) \quad (7.70)$$

Així, doncs, en una primera aproximació $\omega = \omega_0$ i

$$x(t) = \varepsilon \frac{A^2}{2\omega_0^2} + A \left(1 - \varepsilon \frac{A}{3\omega_0^2} \right) \cos \omega_0 t - \varepsilon \frac{A^2}{6\omega_0^2} \cos 2\omega_0 t \quad (7.71)$$

Per a una segona aproximació, substituïm x_0 , x_1 i μ_1 a l'equació (7.68). Simplificant, queda com

$$\ddot{x}_2 + \omega^2 x_2 = -\frac{A^3}{3\omega^2} + \left(\frac{5}{6} \frac{A^3}{\omega^2} - \mu_2 A \right) \cos \omega t - \frac{A^3}{3\omega^2} \cos 2\omega t - \frac{A^3}{6\omega^2} \cos 3\omega t \quad (7.72)$$

Perquè el $\cos \omega t$ no doni termes seculars, hem d'imposar $\mu_2 = 5A^2/6\omega^2$, per la qual cosa ω quedarà, en una segona aproximació, tal que $\omega_0^2 = \omega^2 + \varepsilon^2 \mu_2$. Treballant fins a ε^2 , ens queda que

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \varepsilon^2 \frac{5}{6} \frac{A^2}{\omega_0^2 \omega^2}} = \omega_0 \sqrt{1 - \varepsilon^2 \frac{5A^2}{6\omega_0^2 (\omega_0^2 - \varepsilon^2 \mu_2)}} \approx \omega_0 \left(1 - \varepsilon^2 \frac{5}{12} \frac{A^2}{\omega_0^4} \right) \quad (7.73)$$

Pel que fa a $x_2(t)$, satisfà l'equació

$$\ddot{x}_2 + \omega^2 x_2 = -\frac{A^3}{3\omega^2} - \frac{A^3}{3\omega^2} \cos 2\omega t - \frac{A^3}{6\omega^2} \cos 3\omega t$$

amb les condicions $x_2(0) = 0$ i $\dot{x}_2(0) = 0$. La solució de l'equació amb aquestes condicions inicials és

$$x_2(t) = -\frac{A^3}{3\omega^4} + \frac{35}{144} \frac{A^3}{\omega^4} \cos \omega t + \frac{A^3}{9\omega^4} \cos 2\omega t - \frac{A^3}{48\omega^4} \cos 3\omega t \quad (7.74)$$

I, finalment, $x(t)$ serà, en una segona aproximació,

$$x(t) = \varepsilon \frac{A^2}{2\omega^2} - \varepsilon^2 \frac{A^3}{3\omega^4} + A \left(1 - \varepsilon \frac{A}{3\omega^2} + \varepsilon^2 \frac{35}{144} \frac{A^2}{\omega^4} \right) \cos \omega t - \left(\varepsilon \frac{A^2}{6\omega^2} - \varepsilon^2 \frac{A^3}{9\omega^4} \right) \cos 2\omega t - \varepsilon^2 \frac{A^3}{48\omega^4} \cos 3\omega t$$

amb ω donada per (7.73).



7.7.2. Problemes proposats

Problema 7.5. El principi de superposició no és vàlid

Una partícula està sotmesa a la força restauradora no lineal $F = -kx^n$, amb n enter, $n > 1$. Així, la seva equació de moviment és

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x + \varepsilon x^n = 0$$

Demostreu que el principi de superposició no és vàlid per a aquesta equació.

Problema 7.6. Moviment periòdic no harmònic simple

En el mecanisme representat a la figura 7.8, una roda gira a la velocitat angular constant ω al voltant del seu centre C . A la distància R del centre de la roda està articulada la barra BA , de tal forma que el seu altre extrem A està obligat a moure's sobre l'eix DE . És clar que aquest moviment és oscil·latori, però no és un MHS. Si $R \ll L$, comproveu que, en una primera aproximació, en el moviment de l'extrem A apareix un harmònic superior de freqüència 2ω . Així, el moviment de A al voltant del punt mitjà és

$$x(t) \approx R \cos \omega t + \frac{1}{4} \frac{R^2}{L} \cos 2\omega t + L - \frac{1}{4} \frac{R^2}{L}$$

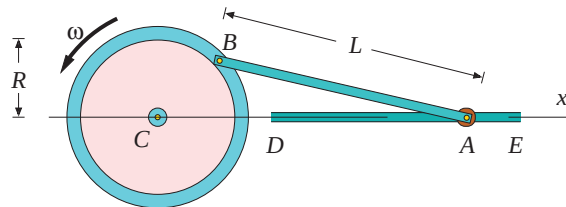


Figura 7.8

Problema 7.7. Molles i oscil·lador no lineal

Una partícula de massa m està entre dues molles diferents, de constants k_1 i k_2 —v. figura 7.9, (a) i (b). Ara bé, en aquest problema, les molles tenen la longitud natural justa per arribar a tocar la massa centrada sense fer cap força. En un primer muntatge, (a), lliguem les molles a la massa i deixem que aquesta oscil·li. Com sabem, en aquest cas l'oscil·lació serà harmònica simple. A continuació, muntatge (b), desenganxem les molles de les masses i tornem a fer oscil·lar el sistema. Doncs bé, feu una gràfica de la força total sobre la massa en funció de x i comproveu que el sistema, a (b), deixa de ser totalment lineal i, per tant, aquestes oscil·lacions ja no són estrictament harmòniques simples, si bé la seva freqüència és independent de l'“amplitud” de l'oscil·lació. Feu les gràfiques de la força en funció de l'elongació x , i la de x respecte del temps. Quant val la relació ω_b/ω_a entre la freqüència del cas (b) i la del cas (a)?

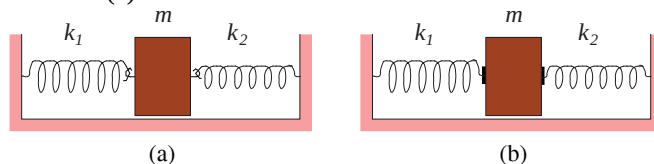
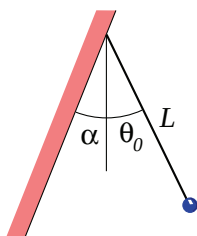


Figura 7.9

Resp.: $\frac{\omega_b}{\omega_a} = \frac{2\sqrt{k_1 k_2}}{(\sqrt{k_1} + \sqrt{k_2})\sqrt{k_1 + k_2}}$

Problema 7.8. Pèndol simple i pèndol no lineal

Figura 7.10



Un pèndol simple constituït per una barra molt prima de longitud L i una boleta penja d'una paret que està inclinada un angle α respecte de la vertical —v. figura 7.10. La barra se separa un angle θ_0 ($\theta_0 > \alpha$) de la vertical en direcció perpendicular a la paret i es deixa caure per tal que oscil·li. Suposant els angles α i θ_0 petits i que el xoc de la boleta amb la paret és completament elàstic, trobeu el període de l'oscil·lació en funció de l'“amplitud” θ_0 .

Resp.: $T = \sqrt{\frac{L}{g}} \left(\pi + 2 \arcsin \frac{\alpha}{\theta_0} \right)$

Problema 7.9. Oscil·lador no lineal 100%

Una partícula està unida a dues molles iguals tal com s'indica a la figura 7.11 (a). En aquest estat, les molles tenen la seva longitud natural L_0 . A continuació, es desplaça la partícula una distància x en la direcció perpendicular a la de les molles, essent $x \ll L_0$ —v. figura 7.11 (b).

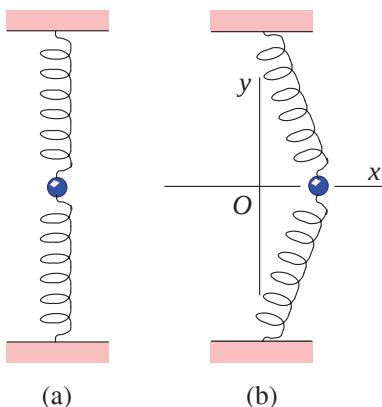
- a) Demostreu que, aproximadament, la força resultant que actua sobre la partícula ve donada per

$$F_x \approx -k \frac{x^3}{L_0^2}$$

és a dir, es tracta d'una força restauradora no lineal; per tant, el moviment de la partícula serà oscil·latori però no un MHS.

- b) La massa de la partícula és $m = 0,1$ kg, la longitud natural de les molles $L_0 = 1$ m i la seva constant de força $k = 500$ N/m. Si la partícula s'ha desplaçat inicialment la distància $x_0 = 6$ cm des de l'origen i després s'ha deixat anar, esbrineu la velocitat amb què passarà per aquest punt.

Figura 7.11



Resp.: b) $v = \frac{x_0^2}{L_0} \sqrt{\frac{k}{2m}} = 0,18$ m/s



Problema 7.10. Electrò oscil·lant entre dos ions positius

Tornant a l'apartat (a) del problema 1.61 de l'electrò que oscil·la transversalment entre dos ions positius, trobeu ara l'equació diferencial del moviment de l'electrò en una segona aproximació i comproveu que és del tipus: $\ddot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon x^3$. Quant val ε ? I quant $\varepsilon x^3 / \omega_0^2 x$?

Resp.: $\varepsilon = 6 \frac{\omega_0^2}{a^2}$, $\frac{\varepsilon x^3}{\omega_0^2 x} = 3 \left(\frac{x}{a}\right)^2$

Problema 7.11. Període d'un pèndol simple

Un rellotge de pèndol simple té el període exacte d'1 s si l'elongació angular és 0.

- Utilitzant l'aproximació en Θ_0^2 de la sèrie (7.16), esbrineu els segons que s'endarrerirà al cap d'un dia aquest rellotge si el pèndol es fa oscil·lar amb una elongació de 5° .
- I quant de temps en l'ordre Θ_0^4 ?

Resp.: a) $\theta_0 = 5^\circ = 0,0873 \text{ rad}$, $\theta_0^2/16 = 4,76 \times 10^{-4}$, $\Delta t = 86400 \times \theta_0^2/16 = 41,2 \text{ s}$,
b) 0,025 s

Problema 7.12. L'espai fàsic

Una partícula està sotmesa a l'energia potencial $U(x)$ donada per

$$U(x) = \frac{1}{2}k (1 - \varepsilon x^2) x^2$$

en què $\varepsilon > 0$ i $\varepsilon x^2 < 1$ en tot moment. Representeu gràficament $U(x)$ i, a partir d'aquí, trajectòries possibles a l'espai fàsic.

Problema 7.13. Període aproximat d'una oscil·lació

Sigui A l'amplitud de les oscil·lacions d'una partícula unida a una molla l'energia potencial de la qual ve donada per l'expressió

$$U(x) = \frac{1}{2}k (1 + \alpha x^2) x^2$$

amb k i α positius, i $\alpha \ll k$. Feu un desenvolupament aproximat de l'arrel quadrada de l'equació (1.37) fins a la primera potència de α . Integrant terme a terme, demostreu que el període de les oscil·lacions ve donat, en una aproximació de primer ordre, per

$$T = T_0(1 - 3\alpha A^2)$$

on T_0 és el període que tindria la partícula si α fos 0.

Problema 7.14. Pertorbacions de tipus x^2

La força a la qual està sotmesa una partícula deguda a una molla lleugerament no lineal ve donada, aproximadament, per



$$F = -k(1 + \alpha x)x, \quad \text{amb } |\alpha x| \ll 1$$

Apliqueu el mètode de les pertorbacions per trobar una aproximació $x(t)$ de primer ordre en α que expliqui el moviment. En primer ordre, quin és el detall més significatiu d'aquest moviment? Comproveu que aquesta solució de primer ordre és compatible amb la més complexa que hem vist al problema resolt 7.4.

Resp.: $x(t) = A \cos \omega_0 t + \alpha \frac{A^2}{6} (\cos 2\omega_0 t - 3)$, amb $\omega_0^2 = k/m$. L'aparició d'un segon harmònic: $2\omega_0$.

Problema 7.15. Pertorbacions de tipus $|\dot{x}| \dot{x}$

Una partícula lligada a una molla de constant k està sotmesa a una petita força de fricció quadràtica en la velocitat

$$F_f = -\gamma |\dot{x}| \dot{x}$$

on γ és una constant petita. Suposant, per exemple, que parteix del repòs en $x(0) = A$, estudieu pel mètode de les pertorbacions en primer ordre el moviment d'aquesta partícula. Fixeu-vos que, com a oscil·lador sotmès a una fricció no lineal, té punts comuns amb el problema 7.2. En aquest últim hem vist que la diferència entre dues amplituds consecutives després de mitja oscil·lació era constant. Quant val, en aquest cas, el quocient entre dues amplituds consecutives?

Resp.: $\frac{A_{n+1}}{A_n} = 1 - \gamma \frac{4}{3} A_n$

Problema 7.16. Pertorbacions de tipus x^5

Segui l'equació diferencial següent corresponent a la dinàmica d'un oscil·lador lleugerament no lineal

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon x^5$$

en què εx^5 representa una petita pertorbació a l'oscil·lador harmònic. Sabent que les condicions inicials són $x(0) = A$, $\dot{x}(0) = 0$, apliqueu el mètode de les pertorbacions en primer ordre en ε , en què se suposa que

$$x(t) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t), \quad \text{i} \quad \omega_0^2 = \omega^2 + \varepsilon \mu$$

per trobar una aproximació a la funció $x(t)$. Heu d'utilitzar la igualtat (A.29).

Resp.: $x(t) = A \cos \omega t - \varepsilon \frac{A^5}{\omega^2} \left(\frac{5}{128} \cos 3\omega t + \frac{1}{384} \cos 5\omega t \right)$, amb $\omega^2 = \omega_0^2 - \varepsilon \frac{5}{8} A^4$

Problema 7.17. Mètode de Krylov i Bogoliubov per a un amortiment viscos molt feble

Comproveu que els resultats que proporciona aquest mètode amb una equació com $\ddot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon \dot{x}$ són coherents amb els exactes d'una oscil·lació amb una mica d'amortiment viscos —v. capítol 2— amb $\beta \ll \omega_0$ i $\beta t \ll 1$.


Problema 7.18. Mètode de Krylov i Bogoliubov per a x^5

Apliqueu aquest mètode a l'equació no lineal del problema 7.16 per esbrinar una primera aproximació de la solució. Compareu el resultat trobat amb l'obtingut pel mètode de les pertorbacions.

Heu d'utilitzar: $\int_0^{\pi/2} \cos^6 t \, dt = 15\pi/96$.

Problema 7.19. Pertorbacions de tipus $\mu x^2 + \nu x^3$

Considerem l'equació diferencial següent corresponent a la dinàmica d'un oscil·lador lleugerament no lineal

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \mu x^2 + \nu x^3$$

en què μ i ν són petits i $\mu x^2 + \nu x^3$ són, doncs, una petita pertorbació a l'oscil·lador harmònic. Apliqueu el mètode de les pertorbacions fins a segon ordre en μ i ν per comprovar que la funció $x(t)$ següent és una solució de segon ordre en μ i ν .

$$x(t) = A \cos \omega t + \frac{\mu A^2}{2\omega_0^2} - \frac{\mu A^2}{6\omega_0^2} \cos 2\omega t + \frac{A^3}{16\omega_0^2} \left(\frac{\mu^2}{3\omega_0^2} + \frac{\nu}{2} \right) \cos 3\omega t$$

$$\text{amb } \omega = \omega_0 \left(1 - \nu \frac{3A^2}{8\omega_0^2} + \mu^2 \frac{5A^2}{12\omega_0^4} \right).$$



Sistemes d'oscil·ladors i ones

Fins ara, hem considerat oscil·ladors o sistemes simples l'estat dels quals queda descrit només amb un sol paràmetre, per exemple, un allargament x , un angle θ , etc. Però, en molts casos d'interès pràctic, els sistemes són més complexos i consten d'un nombre determinat de parts o partícules més o menys interdependents. Per tal d'especificar la posició de cadascuna de les partícules o parts d'un sistema, fins i tot tenint en compte els lligams que tenen entre si, necessitem un nombre mínim de paràmetres superior a 1, l'anomenat *nombre de graus de llibertat*. Si els paràmetres que descriuen l'estat d'aquests sistemes presenten oscil·lacions aquestes s'anomenen *oscil·lacions acoblades* i són l'objecte d'estudi d'aquest capítol.

Els oscil·ladors acoblats, com els oscil·ladors simples, poden ser de naturalesa molt diferent però, com veurem, tots presenten trets comuns. Així doncs, comencem presentant el tema amb un exemple molt senzill de dos oscil·ladors per tal que apareguin els conceptes més importants amb la mínima dificultat. A continuació, generalitzem el mètode per tractar un nombre qualsevol d'oscil·ladors i, finalment, l'apliquem a un cas molt important, la corda discreta, l'estudi de la qual ens portarà a l'aparició del moviment ondulatori. El final del capítol representa, doncs, el pont entre les oscil·lacions simples d'una massa lligada a una molla i la propagació d'una ona elàstica a través d'un medi continu.

8.1. Oscil·ladors acoblats. Modes normals

8.1.1. Dos oscil·ladors acoblats

Considerem el sistema que es presenta a la figura 8.1: dos oscil·ladors iguals de tipus molla-massa, de constants k i m , lligats per una molla de constant k_a .

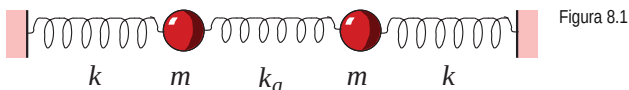


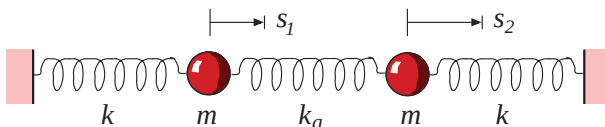
Figura 8.1

El sistema només pot efectuar oscil·lacions longitudinals en la direcció de les molles, que prenem com a eix x , al voltant de les posicions corresponents d'equilibri, x_1 i x_2 , que prenem com a orígens de coordenades¹ s_1 i s_2 de les partícules —v. figura 8.2. Així, si en

¹ Podríem denominar x_1 i x_2 els propis desplaçaments de les partícules respecte de les posicions corresponents

un instant determinat les partícules estan a s_1 i s_2 , això vol dir que, respecte de l'origen de l'eix x , estan a $x_1 + s_1$ i $x_2 + s_2$, i que la molla 1 s'ha allargat s_1 i la molla 2 ho ha fet $s_2 - s_1$, actuant sobre 1 la força restauradora $F_1 = -ks_1 - k_a(s_1 - s_2)$, i anàlogament, amb la 2, essent la força $F_2 = -ks_2 - k_a(s_2 - s_1)$.

Figura 8.2



Aleshores, la segona llei de Newton aplicada a cadascuna d'elles donarà

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 s_1}{dt^2} &= -ks_1 - k_a(s_1 - s_2) \\ m \frac{d^2 s_2}{dt^2} &= -ks_2 - k_a(s_2 - s_1) \end{aligned} \quad (8.1)$$

Aquestes dues equacions es poden reescriure de la forma següent:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 s_1}{dt^2} + \frac{k + k_a}{m} s_1 &= \frac{k_a}{m} s_2 \\ \frac{d^2 s_2}{dt^2} + \frac{k + k_a}{m} s_2 &= \frac{k_a}{m} s_1 \end{aligned} \quad (8.2)$$

en què resulta evident que les oscil·lacions acoblades són una mena d'oscil·lacions forçades, la qual cosa ens fa pensar, després d'haver vist el capítol 3, que el moviment de les partícules serà la superposició de dos MHS de freqüències diferents.

Aquest parell d'igualtats constitueix un *sistema de dues equacions diferencials*, ja que les dues funcions incògnites, s_1 i s_2 , estan presents en cadascuna de les dues equacions. En general, un sistema d'equacions diferencials pot ser molt difícil de resoldre, però aquest cas és molt fàcil si utilitzem el "truquet" següent. Consisteix a introduir-hi les dues noves variables ξ_1 i ξ_2 , que s'anomenen *coordenades normals*, definides com

$$\xi_1 = s_1 + s_2, \quad \xi_2 = s_1 - s_2 \quad \text{de manera que} \quad s_1 = \frac{\xi_1 + \xi_2}{2}, \quad s_2 = \frac{\xi_1 - \xi_2}{2} \quad (8.3)$$

En efecte, si sumem i restem les dues equacions (8.2) i considerem ξ_1 i ξ_2 , obtenim

$$\frac{d^2 \xi_1}{dt^2} = -\frac{k}{m} \xi_1 \quad \frac{d^2 \xi_2}{dt^2} = -\frac{k + 2k_a}{m} \xi_2 \quad (8.4)$$

és a dir, dues equacions diferencials però que ja no formen un sistema, sinó que es poden resoldre independentment una de l'altra. Sovint, d'això se'n diu que s'ha reduït a un sistema d'equacions diferencials separables. De fet, les dues equacions (8.4) corresponen a les equacions de dos MHS independents, un per a la ξ_1 i un altre per a la ξ_2 , que podem representar de la forma següent:

d'equilibri i així no hauria calgut introduir s_1 i s_2 , però s'ha fet així per tal de facilitar la notació en el pas de les oscil·lacions de sistemes discrets a sistemes continus que es fa a la secció §8.5.



$$\xi_1(t) = 2A \cos(\omega_1 t + \phi_1) \quad \xi_2(t) = 2B \cos(\omega_2 t + \phi_2) \quad (8.5)$$

en què A , B , ϕ_1 i ϕ_2 depenen de les quatre condicions inicials, i ω_1 i ω_2 són les anomenades *frequències pròpies o normals*

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k+2k_a}{m}} \quad (8.6)$$

Així, tenim, per (8.3), que el moviment de les partícules és la superposició dels dos MHS (8.5):

$$\begin{aligned} s_1(t) &= A \cos(\omega_1 t + \phi_1) + B \cos(\omega_2 t + \phi_2) \\ s_2(t) &= A \cos(\omega_1 t + \phi_1) - B \cos(\omega_2 t + \phi_2) \end{aligned} \quad (8.7)$$

8.1.2. Oscil·ladors acoblats i modes normals d'oscil·lació

Abans d'extreure conclusions generals sobre els oscil·ladors acoblats, vegem-ne alguns casos particulars molt significatius.

Comencem suposant que les velocitats inicials de les dues masses són nul·les. Això simplifica una mica la notació i no en fa perdre la generalitat. Així doncs, substituint a les derivades de (8.7) el fet que, si $t = 0$, llavors $\dot{s}_1(0) = \dot{s}_2(0) = 0$, resulta que $\phi_1 = \phi_2 = 0$ i, per tant, les coordenades de les partícules queden ara com

$$\begin{aligned} s_1(t) &= A \cos \omega_1 t + B \cos \omega_2 t \\ s_2(t) &= A \cos \omega_1 t - B \cos \omega_2 t \end{aligned} \quad (8.8)$$

Considerem ara els dos casos sobre les condicions inicials de les posicions.

- a) El cas en què les dues masses tenen el mateix desplaçament inicial s_0 : a $t = 0$, tenim $s_1(0) = s_2(0) = s_0$. Substituint a (8.8) trobem

$$\left. \begin{aligned} s_0 &= A + B \\ s_0 &= A - B \end{aligned} \right\} \text{ d'on } A = s_0, B = 0, \text{ i les oscil·lacions queden com}$$

$$s_1(t) = s_2(t) = s_0 \cos \omega_1 t \quad (8.9)$$

És a dir, com era previsible, les dues partícules fan exactament el mateix moviment sense que intervingui la molla d'acoblament. Aquest tipus d'oscil·lacions s'anomenen *oscil·lacions concordants* o de *concordància de fase*. A la figura 8.3, es representen els oscil·ladors en un instant t en què estan amb la màxima elongació i al cap d' $1/4$ i $1/2$ de període $2\pi/\omega_1$.

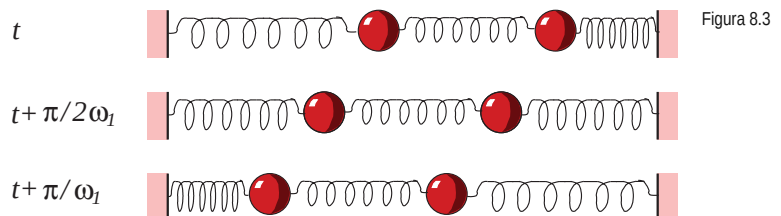


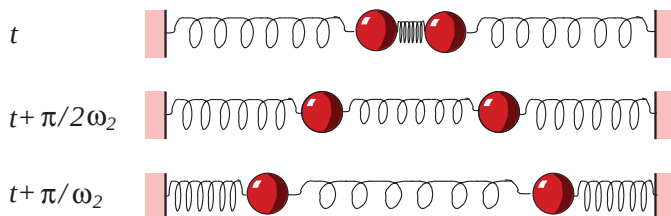
Figura 8.3

- b) El cas en què les dues masses es desplacen la mateixa distància però en sentits oposats: a $t = 0$, $s_1(0) = s_0$ i $s_2(0) = -s_0$. D'aquí es troba que $A = 0$ i $B = s_0$, és a dir,

$$s_1(t) = -s_2(t) = s_0 \cos \omega_2 t \quad (8.10)$$

Així doncs, el moviment de les partícules —com també es podia esperar— és simètric. Aquest segon tipus d'oscil·lacions s'anomenen *oscil·lacions contraposades* o d'*oposició de fase*. Com hem fet per al cas concordant de la figura 8.3, a continuació s'il·lustra l'oposició en haver representat les partícules de l'oscil·lador en tres instants que abasten mig període $2\pi/\omega_2$ —v. figura 8.4.

Figura 8.4



Aquestes dues formes tan particulars d'oscil·lar, les concordants i les contraposades, són les dues més simples en què poden fer-ho les partícules i s'anomenen *modes normals d'oscil·lació*, cadascun d'ells amb la freqüència pròpia corresponent. A partir de les expressions generals (8.8) i les concretes (8.9) i (8.10), veiem que les oscil·lacions generals de les partícules són la superposició dels MHS modes normals d'oscil·lació.

En realitat, això no és una casualitat i els resultats que acabem de trobar per a aquest cas es poden generalitzar. Com es demostra en textos superiors de mecànica:

En qualsevol sistema lineal de N d'oscil·ladors acoblats, existeixen N coordenades normals ξ_i , $i = 1, 2, \dots, N$ que fan separables les N equacions diferencials del sistema, en què cada coordenada normal i oscil·la a una freqüència pròpia ω_i —modes normals. Com que el sistema és lineal, l'oscil·lació general del sistema és la superposició dels N MHS corresponents a les N freqüències ω_i .

A la pròxima secció, insistirem una mica més sobre tot això. Però, primer, acabem aquesta amb unes consideracions sobre l'energia.

8.1.3. Energia del sistema i acoblament

L'energia dels dos oscil·ladors acoblats amb què hem començat la subsecció anterior és la suma de les energies cinètiques de les dues partícules i de les potencials de les tres molles. És a dir,

$$E = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}ks_1^2 + \frac{1}{2}ks_2^2 + \frac{1}{2}k_a(s_1 - s_2)^2 \quad (8.11)$$

Desenvolupant el binomi i reagrupant els termes, l'energia es pot escriure d'aquesta altra forma més interessant

$$E = \left\{ \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}(k + k_a)s_1^2 \right\} + \left\{ \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}(k + k_a)s_2^2 \right\} - k_a s_1 s_2 \quad (8.12)$$



en què es fa palès que l'energia del sistema és la suma de les energies de les dues partícules i de l'energia d'acoblament $-k_a s_1 s_2$ deguda a la interacció entre les partícules.

Observeu que, com que no hi ha friccions, l'energia total E del sistema es conserva però no la de cada partícula per separat, que fins i tot pot arribar a fer-se zero en algun moment. Això queda molt ben reflectit en el cas particular següent.

- Suposem el cas en què es desplaça inicialment només una partícula: si $t = 0$, llavors $s_1(0) = s_0$ i $s_2(0) = 0$. Substituint aquestes condicions a (8.8) s'arriba a

$$\left. \begin{array}{l} s_0 = A + B \\ 0 = A - B \end{array} \right\} \text{ d'on } A = B = \frac{s_0}{2}, \text{ tenint així}$$

$$s_1(t) = \frac{s_0}{2} \cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t) \quad s_2(t) = \frac{s_0}{2} \cos \omega_1 t - \cos \omega_2 t)$$

Per trigonometria, (A.25), podem posar aquestes expressions d'una forma més convenient:

$$\begin{aligned} s_1(t) &= s_0 \cos \left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \right) \cos \left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t \right) \\ s_2(t) &= s_0 \sin \left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \right) \sin \left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t \right) \end{aligned} \quad (8.13)$$

Si, com passa sovint, l'acoblament entre els oscil·ladors és feble —és a dir, si $k_a \ll k$ —, llavors $\omega_1 \approx \omega_2 = \omega$ i $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2 \approx 0$. Comparant aquest cas amb el que hem vist a la secció §4.2.4, veiem que els dos moviments són *pulsacions* de la mateixa amplitud efectiva $A_{ef} = s_0 \cos(\Delta\omega t/2)$ i de la mateixa freqüència ω , però desfasades $\pi/2$ rad entre si, com s'ha representat a la figura 8.5. És el cas de les *oscil·lacions acoblades polsants*, en què la posició i la velocitat —i, per tant, l'energia— d'una de les partícules es fan zero en un cert instant i, per tant, l'energia de l'altra és màxima, ja que $k_a s_1 s_2 = 0$. Al cap de $\pi/\Delta\omega$, passarà just el contrari, tot d'acord amb (8.12).

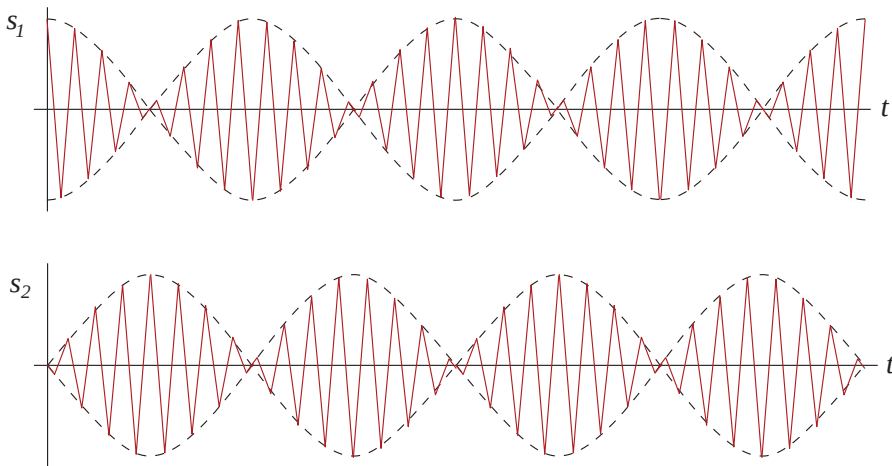


Figura 8.5

Per conservació de l'energia

A la secció §1.6, hem vist la utilitat d'expressar la conservació de l'energia en aquells sistemes oscil·lants en què succeeix. Aquest és el cas dels dos oscil·ladors acoblats d'aquesta secció en què, com no hi ha cap mena de fricció, l'energia total del sistema s'ha de conservar. Així doncs, la derivada respecte del temps de l'expressió (8.11) sobre l'energia ha de ser igual a zero:

$$\frac{dE}{dt} = 0 = m \frac{d^2 s_1}{dt^2} v_1 + m \frac{d^2 s_2}{dt^2} v_2 + k s_1 v_1 + k s_2 v_2 - k_a (s_1 - s_2) (v_1 - v_2)$$

Traient v_1 i v_2 com a factors comuns podem posar la suma anterior com

$$v_1 \cdot \left\{ m \frac{d^2 s_1}{dt^2} + (k + k_a) s_1 - k_a s_2 \right\} + v_2 \cdot \left\{ m \frac{d^2 s_2}{dt^2} + (k + k_a) s_2 - k_a s_1 \right\} = 0$$

Ara bé, com que v_1 i v_2 són independents l'una de l'altra, aquesta suma només pot ser nul·la en tot moment si ho és cadascun dels dos sumands i, per tant, si ho són els interiors de les claus, la qual cosa ens porta directament a retrobar les dues equacions del moviment (8.1).

Exemple 8.1. Dos pèndols acoblats per una molla

Un dels exemples d'oscil·ladors acoblats més simples d'estudiar i fàcils de realitzar s'aconsegueix acoblant dos pèndols iguals, penjats del sostre i separats una distància d . Com es mostra a la figura 8.6, l'acoblament s'efectua per mitjà d'una molla de constant k de la mateixa longitud natural d i que els lliga per punts situats a les distàncies a dels punts de suspensió respectius.

- Si la massa, el moment d'inèrcia i la distància entre els punts de suspensió i els corresponents centres de masses dels pèndols són m , I i h , respectivament, quines són les freqüències pròpies del sistema? I els modes normals d'oscil·lació?
- En quines condicions l'acoblament dels pèndols serà dèbil? Si és així, quant val el període de les pulsacions?

Solució

Figura 8.6

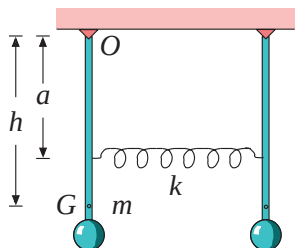
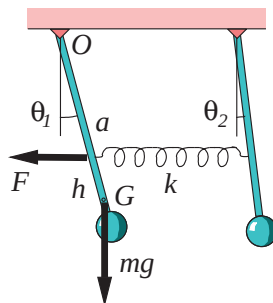


Figura 8.7



- Suposem que, en un instant determinat els pèndols 1 i 2 formen uns angles θ_1 i θ_2 amb la vertical, respectivament, positius en el sentit antihorari —v. figura 8.7. Si, com és habitual en l'estudi dels pèndols, suposem que aquests angles són sempre petits, el moment del pes mg del pèndol 1 respecte del seu punt de suspensió val, com



ja sabem, $-mgh \sin \theta_1 \approx -mgh \theta_1$ —recordeu l'exemple 1.3. D'altra banda, la molla romandrà sempre horitzontal fent la força $F = -ka(\theta_1 - \theta_2)$ i el moment aF sobre el pèndol 1. Naturalment, la situació és anàloga per al pèndol 2.

Així doncs, la segona llei de Newton per a la rotació aplicada a aquests dos pèndols proporciona les dues equacions acoblades següents:

$$I \frac{d^2 \theta_1}{dt^2} = -mgh \theta_1 - ka^2 (\theta_1 - \theta_2)$$

$$I \frac{d^2 \theta_2}{dt^2} = -mgh \theta_2 + ka^2 (\theta_1 - \theta_2)$$

Aquestes dues equacions són formalment equivalents a les (8.1), de manera que el comportament dels dos pèndols també ha de ser idèntic al de les dues masses d'aquell exemple. Així, les dues freqüències pròpies són, per analogia amb les vistes a (8.6):

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{mgh}{I}} \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{mgh + 2ka^2}{I}} \quad (1)$$

que es corresponen amb el mode normal de les oscil·lacions concordants i el de les contraposades, respectivament.

- b) Pel que hem vist a la secció §8.1.2, si $2ka^2 \ll mgh$, llavors $\omega_1 \approx \omega_2$ i l'acoblament serà feble. Així, en aquest cas, només cal girar lleugerament un dels pèndols i mantenir l'altre en la posició d'equilibri per tal que comencin a fer oscil·lacions polsants. Aquestes seran de període

$$T_{puls} = \frac{1}{2} \frac{2\pi}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{\pi}{\Delta\omega}$$

que —com es pot comprovar— desenvolupant la ω_2 de (1) i aplicant $2ka^2 \ll mgh$, resulta, aproximadament, $T_{puls} \approx \frac{mgh}{ka^2} T$, essent T el període dels pèndols sense acoblar.

En el problema 8.23 es presenta un sistema ben diferent però equivalent al d'aquest exemple.

8.2. Sistemes d'oscil·ladors acoblats

En aquesta secció, generalitzem el mètode anterior per tractar els sistemes d'oscil·ladors i trobar totes les freqüències pròpies del sistema. De qualsevol manera, per tal de no complicar innecessàriament el problema, primer considerem un sistema de tres partícules i quatre molles iguals —v. figura 8.8— com ara el de la secció anterior.

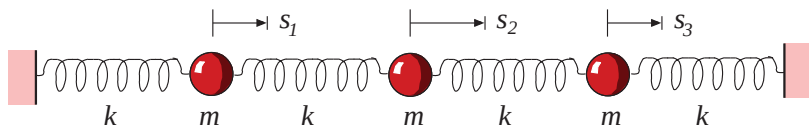


Figura 8.8



Denotem amb punts les derivades respecte del temps: $\dot{s} = \frac{ds}{dt}$, $\ddot{s} = \frac{d^2s}{dt^2}$, etc. Amb aquesta notació les equacions del moviment, una per a cada partícula, són

$$\begin{aligned} m\ddot{s}_1 &= -ks_1 - k(s_1 - s_2) &= -2ks_1 + ks_2 \\ m\ddot{s}_2 &= +k(s_1 - s_2) - k(s_2 - s_3) &= +ks_1 - 2ks_2 + ks_3 \\ m\ddot{s}_3 &= +k(s_2 - s_3) - ks_3 &= +ks_2 - 2ks_3 \end{aligned} \quad (8.14)$$

A la vista de la secció anterior, podem sospitar que el moviment de les partícules serà una superposició de MHS. Si, per tal de simplificar, suposem que les velocitats inicials de les partícules són nul·les, podem assajar aquests MHS:

$$s_1 = A_1 \cos \omega t \quad s_2 = A_2 \cos \omega t \quad s_3 = A_3 \cos \omega t \quad (8.15)$$

on: a) la freqüència ω l'hem de determinar a partir de les característiques de l'oscil·lador, i b) les amplituds A_1 , A_2 i A_3 a partir de les posicions inicials. Substituint (8.15) a (8.14), trobem

$$\left. \begin{aligned} -m\omega^2 A_1 \cos \omega t &= -2kA_1 \cos \omega t + kA_2 \cos \omega t \\ -m\omega^2 A_2 \cos \omega t &= +kA_1 \cos \omega t - 2kA_2 \cos \omega t + kA_3 \cos \omega t \\ -m\omega^2 A_3 \cos \omega t &= +kA_2 \cos \omega t - 2kA_3 \cos \omega t \end{aligned} \right\}$$

Traient-ne el $\cos \omega t$ comú, ens queda un sistema homogeni de tres equacions algebraïques per a les tres incògnites A_1 , A_2 i A_3 i el paràmetre —desconegut— ω^2 . Les funcions (8.15) seran la solució de les equacions (8.14) si i només si el sistema anterior té solució no trivial.

Aquestes tres equacions, que ens proporcionen la freqüència pròpia ω i les relacions A_2/A_1 i A_3/A_1 corresponents, s'escrueixen en forma matricial com

$$\begin{pmatrix} 2k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & 2k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = m\omega^2 \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}$$

o també

$$\begin{pmatrix} 2k - m\omega^2 & -k & 0 \\ -k & 2k - m\omega^2 & -k \\ 0 & -k & 2k - m\omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = 0 \quad (8.16)$$

Si el lector està una mica familiaritzat amb l'àlgebra lineal, de seguida haurà reconegut en aquesta formulació matricial un *problema d'autovalors* —les ω — i de *vectors propis* —vectors de components (A_1, A_2, A_3) —, molt freqüents en física. Com sabem per àlgebra, aquest sistema d'equacions lineals homogeni (8.16) té solució no trivial si i només si el determinant del sistema és zero. Imposant aquesta condició tenim, doncs, l'anomenada *equació característica* del sistema

$$0 = \begin{vmatrix} 2 - m\omega^2/k & -1 & 0 \\ -1 & 2 - m\omega^2/k & -1 \\ 0 & -1 & 2 - m\omega^2/k \end{vmatrix} = (2 - m\omega^2/k) [2 - m\omega^2/k)^2 - 2] \quad (8.17)$$



Aquesta és una equació de tercer grau en $\gamma = (2 - m\omega^2/k)$ de la qual és immediat trobar $\gamma = 0$ i $\gamma = \pm\sqrt{2}$. Per tant, les tres freqüències pròpies són

$$\omega_1^2 = \frac{2k}{m} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad \omega_2^2 = \frac{2k}{m}, \quad \omega_3^2 = \frac{2k}{m} \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad (8.18)$$

Com que $(2k - m\omega_1^2) = k\sqrt{2}$, substituint ara ω_1 en el sistema (8.16), queda

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -1 & 0 \\ -1 & \sqrt{2} & -1 \\ 0 & -1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{d'on resulten:} \quad A_2 = A_1\sqrt{2}, \quad A_3 = A_1$$

A continuació, es fa el mateix per als altres dos modes, ω_2 i ω_3 . Si ara anomenem B_1 i C_1 les amplituds de l'oscil·lació de la partícula 1 en els modes 2 i 3, respectivament, n'obtenim

$$\begin{aligned} \text{Mode 1:} \quad \omega_1 &= \omega_2 \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \rightarrow A_2 = A_1\sqrt{2}, \quad A_3 = A_1 \\ \text{Mode 2:} \quad \omega_2 &= \frac{2k}{m} \rightarrow B_2 = 0, \quad B_3 = -B_1 \\ \text{Mode 3:} \quad \omega_1 &= \omega_2 \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \rightarrow C_2 = -C_1\sqrt{2}, \quad C_3 = C_1 \end{aligned} \quad (8.19)$$

Observant aquests resultats de les A_i —sobretot els signes—, podem veure que en el mode normal 1 de ω_1 l'oscil·lació de les tres masses és del tipus que, en el problema dels dos oscil·ladors acoblats, en dèiem *concordant*. També veiem que, en aquest cas, hi ha dos tipus d'oscil·lacions *contraposades*: les corresponents als modes 2 i 3.

També és interessant adonar-se que, al contrari del que en una primera impressió podria semblar, NO existeix un “mode normal superconcordant” en què $s_1 = s_2 = s_3$ —és a dir, $A_1 = A_2 = A_3$ — i en què les dues molles centrals no treballen, amb una freqüència $\omega^2 = 2k/3m$. Si aquest cas existís, ens hauria sortit com un dels modes normals solució de (8.16). També podem comprovar directament que aquest cas no pot donar-se substituint $s_1 = s_2 = s_3$ a les equacions (8.14) i veient que en surt un sistema incompatible.

El moviment general de cada partícula és la superposició de (8.15) en els tres modes normals. És a dir:

$$\begin{aligned} &\text{mode 1} \qquad \text{mode 2} \qquad \text{mode 3} \\ s_1(t) &= A_1 \cos \omega_1 t + B_1 \cos \omega_2 t + C_1 \cos \omega_3 t \\ s_2(t) &= A_2 \cos \omega_1 t + B_2 \cos \omega_2 t + C_2 \cos \omega_3 t \\ s_3(t) &= A_3 \cos \omega_1 t + B_3 \cos \omega_2 t + C_3 \cos \omega_3 t \end{aligned}$$

que, utilitzant les amplituds relatives resumides a (8.19), es pot simplificar com

$$\begin{aligned} s_1(t) &= A \cos \omega_1 t + B \cos \omega_2 t + C \cos \omega_3 t \\ s_2(t) &= A\sqrt{2} \cos \omega_1 t - C\sqrt{2} \cos \omega_3 t \\ s_3(t) &= A \cos \omega_1 t - B \cos \omega_2 t + C \cos \omega_3 t \end{aligned}$$



Com que ja hem suposat des del principi que les velocitats inicials són zero, llavors només apareixen a l'expressió general tres constants arbitràries, la A , B i C , que es determinen a partir de les tres posicions inicials.

Si, per exemple, aquestes són: a $t = 0$, $s_1(0) = s_0$, $s_2(0) = s_3(0) = 0$, llavors, per substitució a (8.20), trobem que

$$\left. \begin{aligned} s_0 &= A + B + C \\ 0 &= A\sqrt{2} - C\sqrt{2} \\ 0 &= A - B + C \end{aligned} \right\} \text{ d'on surten } A = C = \frac{s_0}{4}, \quad B = \frac{s_0}{2}. \text{ Així,}$$

$$s_1(t) = \frac{s_0}{4} \cos \omega_1 t + 2 \cos \omega_2 t + \cos \omega_3 t$$

$$s_2(t) = \frac{s_0\sqrt{2}}{4} \cos \omega_1 t - \cos \omega_3 t$$

$$s_3(t) = \frac{s_0}{4} \cos \omega_1 t - 2 \cos \omega_2 t + \cos \omega_3 t$$

D'altra banda, per saber quines posicions inicials haurien de tenir les partícules per tal que les oscil·lacions fossin en un mode normal pur, per exemple l'1, només cal imposar a (8.20) que $t = 0$ i $B = C = 0$, i en resulta: $s_1(0) = s_3(0) = s_0$ i $s_2 = s_0\sqrt{2}$. Fent el mateix per als altres dos modes, se n'obtenen els resultats que es resumeixen aquí.

$$\begin{aligned} \text{Mode 1: } s_1(0) = s_3(0) = s_0, \quad s_2(0) = s_0\sqrt{2} & \quad \begin{cases} s_1(t) = s_3(t) = s_0 \cos \omega_1 t \\ s_2(t) = s_0\sqrt{2} \cos \omega_1 t \end{cases} \\ \text{Mode 2: } s_1(0) = -s_3(0) = s_0, \quad s_2(0) = 0 & \quad \begin{cases} s_1(t) = -s_3(t) = s_0 \cos \omega_2 t \\ s_2(t) = 0 \end{cases} \\ \text{Mode 3: } s_1(0) = s_3(0) = s_0, \quad s_2(0) = -s_0\sqrt{2} & \quad \begin{cases} s_1(t) = s_3(t) = s_0 \cos \omega_3 t \\ s_2(t) = -s_0\sqrt{2} \cos \omega_3 t \end{cases} \end{aligned}$$

Generalització

Imaginem ara que estem davant d'un problema amb N oscil·ladors en comptes de 3: què hauriem de fer? Assajar N funcions harmòniques com les (8.15) en les N equacions diferencials del sistema, per obtenir-ne un sistema homogeni d'equacions algebraïques com ara el (8.16) i, a partir d'ell, l'equació característica equivalent a la (8.17) —ara, però, de grau N —, que, un cop resolta, ens proporcionaria les N freqüències pròpies ω_n , $n = 1, \dots, N$. Aquestes poden ser totes diferents o, com en els casos anomenats *degenerats*, n'hi poden haver dues d'iguals o més. A partir de cada ω_n , la resolució del sistema d'equacions algebraïques equivalent al (8.16) ens donaria les amplituds relatives $A_i^{(n)}$, una per a cada mode n i cada partícula i . El moviment general de la partícula i és la superposició

$$s_i(t) = \sum_{n=1}^N A_i^{(n)} \cos \omega_n t$$

on trobem les N^2 amplituds $A_i^{(n)}$ a partir de les N posicions inicials. Això és, precisament, el que farem a la pròxima secció.



8.3. Oscil·ladors acoblats forçats

8.3.1. Estat estacionari dels oscil·ladors acoblats forçats

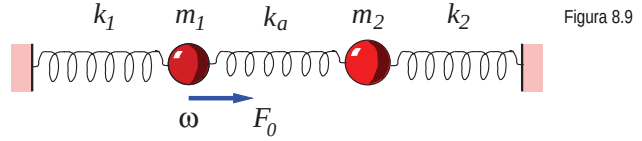


Figura 8.9

Tenim el sistema següent —v. figura 8.9— en el qual la massa m_1 està sotmesa a la força externa

$$F(t) = F_0 \cos \omega t \quad (8.20)$$

La segona llei de Newton per als dos cossos pren la forma

$$m_1 \ddot{s}_1 = -k_1 s_1 - k_a (s_1 - s_2) + F_0 \cos \omega t$$

$$m_2 \ddot{s}_2 = +k_a (s_1 - s_2) - k_2 s_2$$

que es poden tornar a escriure com

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{s}_1 + (k_1 + k_a) s_1 - k_a s_2 &= F_0 \cos \omega t \\ m_2 \ddot{s}_2 - k_a s_1 + (k_a + k_2) s_2 &= 0 \end{aligned} \quad (8.21)$$

Pel que sabem sobre les oscil·lacions forçades i sobre els oscil·ladors acoblats, podem suposar que, un cop ben establert l'estat estacionari, les dues masses es mouran fent MHS de la mateixa freqüència ω que la de la força externa amb amplituds A i B . Com que no hi ha fricció, el desfasament entre aquests dos MHS $s_1(t)$ i $s_2(t)$ i la força externa $F(t)$ és zero o π radianys —canvi de signe. Així doncs, a (8.21) provem

$$s_1(t) = A_1 \cos \omega t \quad s_2(t) = A_2 \cos \omega t \quad (8.22)$$

i, un cop simplificat el $\cos \theta$ comú, ens queda

$$\begin{pmatrix} k_1 + k_a - m_1 \omega^2 & -k_a \\ -k_a & k_a + k_2 - m_2 \omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (8.23)$$

Aplicant la *regla de Cramer* a aquest sistema trobem les amplituds A_1 i A_2 (8.22) corresponents als MHS de l'estat estacionari

$$A_1 = \frac{\begin{vmatrix} F_0 & -k_a \\ 0 & k_a + k_2 - m_2 \omega^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} k_1 + k_a - m_1 \omega^2 & -k_a \\ -k_a & k_a + k_2 - m_2 \omega^2 \end{vmatrix}} = \frac{(k_a + k_2 - m_2 \omega^2) F_0}{(k_1 + k_a - m_1 \omega^2)(k_a + k_2 - m_2 \omega^2) - k_a^2} \quad (8.24)$$

$$A_2 = \frac{\begin{vmatrix} k_1 + k_a - m_1 \omega^2 & F_0 \\ -k_a & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} k_1 + k_a - m_1 \omega^2 & -k_a \\ -k_a & k_a + k_2 - m_2 \omega^2 \end{vmatrix}} = \frac{k_a F_0}{(k_1 + k_a - m_1 \omega^2)(k_a + k_2 - m_2 \omega^2) - k_a^2} \quad (8.25)$$

En la *ressonància*, aquestes amplituds es fan màximes —de fet, infinites. Això passarà a les freqüències ω que anul·len els determinants denominadors anteriors, els quals, d'altra banda, com sabem per la secció anterior, són, com en el cas d'un sol oscil·lador, les dues freqüències pròpies ω_1 i ω_2 donades a (8.56).

Aquest resultat es pot generalitzar:

En un sistema de N oscil·ladors acoblats, hi ha N freqüències de ressonància, que són les freqüències pròpies del sistema.

8.3.2. Absorbidors de vibracions

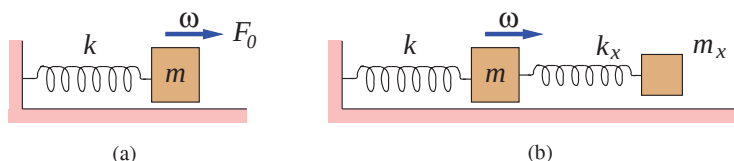
En el valor de l'amplitud A_1 de (8.24) de la secció anterior no haurà passat desapercibuda la resta $k_a + k_2 - m_2\omega^2$ del numerador: si la relació entre aquestes magnituds és tal que la resta dóna zero ¡la massa m_1 no oscil·larà gens! D'alguna manera el segon oscil·lador absorbeix les vibracions forçades del primer.

Aquest fet es pot aprofitar per reduir l'amplitud de vibracions forçades quan es fa indesitjablement gran. Quan s'aplica aquest segon oscil·lador per a que redueixi les oscil·lacions forçades se'n diu que és un *absorbidor de vibracions*. Veiem-ho amb un exemple.

Exemple 8.2. Absorbidor de vibracions

Considerem un sistema molla-massa de paràmetres k i m que està sotmès a una força impulsora externa tipus $F(t) = F_0 \cos \omega t$ —v. figura 8.10 (a) següent. Negligint friccions esbrineu les característiques k_x , m_x que hauria de tenir un altre sistema molla-massa per tal que aplicat al primer —v. figura 8.10 (b)— les vibracions forçades estacionàries d'aquest desapareguessin.

Figura 8.10



Solució

Si s_1 i s_2 són les elongacions de les dues masses respecte de les corresponents posicions d'equilibri, les equacions de moviment dels dos oscil·ladors són

$$m\ddot{s}_1 = -ks_1 - k_x(s_1 - s_2) + F_0 \cos \omega t \quad (8.26)$$

$$m_x\ddot{s}_2 = -k_x(s_2 - s_1) \quad (8.27)$$

En l'estat estacionari, les dues masses es mouran amb la freqüència de la força impulsora i, com que no hi ha friccions, en fase amb ella. És a dir, de la forma

$$s_1 = A \cos \omega t \quad s_2 = B \cos \omega t \quad (2)$$

Així que, substituint (2) a les equacions anteriors i simplificant $\cos \omega t$, trobem el sistema de dues equacions algebraïques per a les amplituds A i B



$$\begin{pmatrix} k + k_x - m\omega^2 & -k_x \\ -k_x & k_x - m_x\omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aplicant la regla de Cramer aquest sistema es resol i se n'obté

$$A = \frac{k_x - m_x\omega^2}{(k + k_x - m\omega^2)(k_x - m_x\omega^2) - k_x^2} F_0 \quad (8.28)$$

$$B = \frac{k_x}{(k + k_x - m\omega^2)(k_x - m_x\omega^2) - k_x^2} F_0$$

Així doncs, només cal que l'absorbidor afegit satisfaci la condició

$$\frac{k_x}{m_x} = \omega^2 \quad (8.29)$$

per tal que la massa m no oscil·li. Aquest resultat es podria també enunciar dient que

La freqüència pròpia de l'absorbidor de vibracions — $\omega_x^2 = k_x/m_x$ — ha de coincidir amb la freqüència de la força impulsora externa.

Els absorbidors de vibracions s'usen, sobretot, quan la freqüència ω de la força externa s'acosta bastant a la pròpia ω_0 de l'oscil·lador original. En aquest cas, l'absorbidor el que fa és canviar la freqüència ω_0 de ressonància de l'oscil·lador per les dues ω_1, ω_2 —ben diferents de ω — del sistema oscil·lador-absorbidor. En el cas bastant habitual en

què $\omega \approx \omega_0 = \sqrt{k/m}$, llavors $A = 0$, si $\frac{k_x}{m_x} \approx \frac{k}{m}$.

8.4. Oscil·lacions acoblades transversals: la corda discreta

A la figura següent, es presenta sobre l'eix x una successió de N partícules iguals de massa m , lligades cadascuna amb l'anterior i amb la següent per molles iguals, de longitud h i constant de força k . Sense pretendre fer un estudi detallat d'aquest sistema, anomenat *corda discreta* —v. figura 8.11— podem fer algunes consideracions senzilles que ens portaran de les *oscil·lacions* d'un sistema discret d'oscil·ladors acoblats a les *ones* d'un sistema continu.

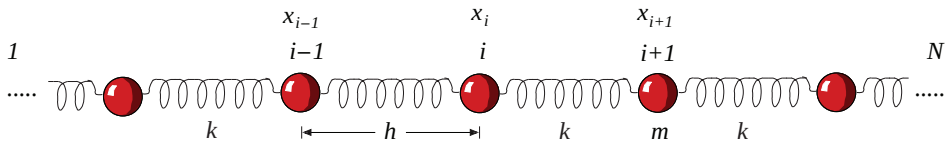


Figura 8.11

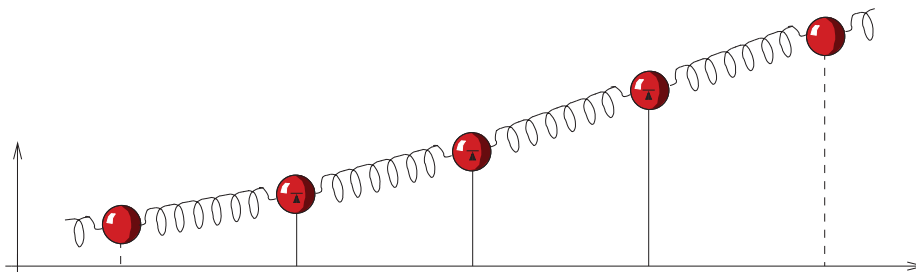
En els exemples que hem tractat fins ara de sistemes acoblats de molles i masses, hem tingut present en tot moment que l'única possibilitat que hi havia per al moviment del sistema eren les vibracions longitudinals. Ara, en canvi, considerarem el cas en què les partícules només poden moure's en la direcció perpendicular —o transversal— al sistema de molles.

De les N partícules del sistema, de moment ens fixem només en tres de consecutives qualssevol, la $i-1$, la i i la $i+1$, $i > 1$, de posicions, sobre l'eix x , $x_{i-1} = x_i - h$, x_i i



$x_{i+1} = x_i + h$, respectivament, i que oscil·laran al llarg del temps, en la direcció de l'eix y al voltant de la posició d'equilibri $y = 0$. Així, les tres partícules anteriors estaran, en un moment determinat, a y_{i-1} , y_i i y_{i+1} —v. figura 8.12.

Figura 8.12



Com és immediat de comprovar, l'estudi de les oscil·lacions transversals d'aquest sistema quan no hi ha cap tensió externa aplicada i, per tant, les forces que s'originen sobre les partícules provenen de l'allargament de les molles és, matemàticament, molt complicat, ja que les forces que apareixen sobre la partícula són *no lineals*, ni tan sols considerant oscil·lacions petites —v. problema 7.9.

Afortunadament, però, té molt més interès el cas en què, sobre el sistema de N molla-massa, hi ha aplicada una tensió externa F , és a dir, el sistema es manté tens tirant dels dos extrems, $i = 1$ i $i = N$, amb una tensió F en sentits oposats —v. figura 8.13.

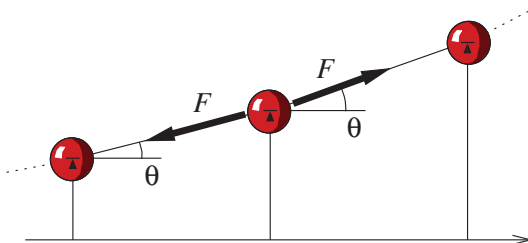
Figura 8.13



Si en aquest cas considerem, a més, que la tensió és prou forta i les oscil·lacions al voltant de $y = 0$ són molt petites, podem fer l'aproximació següent —v. figura 8.14:

La força total que actua sobre la partícula i és la suma vectorial de les tensions que fan sobre ella les partícules $i - 1$ i $i + 1$, tensions que, en mòdul, seran iguals a F i que només variaran una mica en la direcció segons els angles petits θ_{i-1} i θ_i .

Figura 8.14



Amb aquestes suposicions, la força total que actua sobre la partícula i en la direcció y és, doncs, la suma d'aquestes dues components:



$$F_{i(\text{esq})} = -F \sin \theta_{i-1} \approx -F \tan \theta_{i-1} = -F \left(\frac{y_i - y_{i-1}}{h} \right)$$

$$F_{i(\text{dret})} = +F \sin \theta_i \approx +F \tan \theta_i = +F \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h} \right)$$

Així, l'equació del moviment transversal de la partícula i , $i = 2, \dots, N-1$, és, per aplicació de la segona llei de Newton,

$$m \frac{d^2 y_i}{dt^2} = F \left[\frac{y_{i+1} - y_i}{h} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h} \right] \quad (8.30)$$

De la mateixa manera, si considerem que els dos extrems del sistema de molles estan fixos a $y = 0$, llavors les equacions per a les partícules 1 i N són, com és fàcil de comprovar,

$$m \frac{d^2 y_1}{dt^2} = F \left[\frac{y_2 - y_1}{h} - \frac{y_1}{h} \right], \quad m \frac{d^2 y_N}{dt^2} = F \left[\frac{y_{N-1} - y_N}{h} - \frac{y_N}{h} \right] \quad (8.31)$$

Així, ens queda el sistema de N equacions diferencials següent:

$$\begin{aligned} \frac{mh}{F} \frac{d^2 y_1}{dt^2} &= -2y_1 + y_2 \dots\dots +0 +0 +0 \dots\dots +0 +0 \\ &\dots \dots \\ \frac{mh}{F} \frac{d^2 y_i}{dt^2} &= +0 +0 \dots\dots +y_{i-1} -2y_i +y_{i+1} \dots +0 +0 \\ &\dots \dots \\ \frac{mh}{F} \frac{d^2 y_N}{dt^2} &= +0 +0 \dots\dots +0 +0 +0 \dots\dots +y_{N-1} -2y_N \end{aligned}$$

Modes normals d'oscil·lació

A partir de les equacions (8.32) apliquem la tècnica vista a la secció §8.2 per trobar les N freqüències pròpies d'oscil·lació. Si suposem que les N velocitats inicials de les partícules són zero només cal substituir en aquestes equacions funcions de prova tipus $y_i(t) = A_i \cos \omega t$, $i = 1, \dots, N$, obtenint un conjunt de N equacions algebraïques que ens porta a l'equació característica del sistema, equivalent a la (8.17), però per a N . És a dir,

$$\begin{vmatrix} \chi & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & \chi & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \chi & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & \chi & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & \chi \end{vmatrix} = 0 \quad \text{amb} \quad \chi = 2 - \frac{h}{F} m \omega^2 \quad (8.32)$$

Com es dedueix en textos superiors de mecànica, les freqüències pròpies ω_n , solucions de (8.32) vénen donades per l'expressió

$$\omega_n^2 = \frac{2F}{mh} \left(1 - \cos \left[\frac{n\pi}{N+1} \right] \right) \quad (8.33)$$



en què n és un nombre enter qualsevol, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$, si bé, com veiem d'aquí mateix,

- si $n < 0$, $\omega_{-n}^2 = \omega_n^2$;
- per a $n = 0$, $\omega_0 = 0$, és a dir, no hi ha oscil·lacions: el moviment de les partícules es redueix a una simple translació;
- a partir de $n > N$, les ω_n es van repetint i no n'apareixen de noves; així, per exemple, si $N = 8$, per (8.33) tenim que $\omega_9 = \omega_0 = 0$, $\omega_{10} = \omega_8$, $\omega_{11} = \omega_7$, etc.

Així doncs, “només” hi ha N freqüències pròpies d'oscil·lació.

I, pel que fa als modes normals d'oscil·lació, com es pot comprovar substituint aquestes ω_n en les equacions algebraïques que relacionen les A_i —equivalents a les (8.16) de la secció anterior—, a cada ω_n li corresponen N amplituds $A_i^{(n)}$, donades per

$$A_i^{(n)} = \mathcal{A}_n \sin\left(\frac{ni\pi}{N+1}\right), \quad \text{on} \quad i = 1, \dots, N, \quad n = 1, \dots, N \quad (8.34)$$

on les $\mathcal{A}_n$ són les constants arbitràries que depenen de les posicions inicials. Igual que amb les ω_n , també és immediat veure que només hi ha N amplituds $A_i^{(n)}$ diferents.

Per tant, el moviment de la partícula i , com a superposició dels N modes normals, ve donat per la suma

$$y_i(t) = \sum_{n=1}^N \mathcal{A}_n \sin\left(\frac{ni\pi}{N+1}\right) \cdot \cos \omega_n t \quad (8.35)$$

Finalment, si les velocitats inicials no fossin nul·les, llavors hauríem d'assajar, a més de $y_i = A_i \cos \omega t$, solucions del tipus $y_i(t) = B_i \sin \omega t$, i superposar tots dos resultats. Així, l'expressió anterior (8.35) es generalitza de la forma

$$y_i(t) = \sum_{n=1}^N \sin\left(\frac{ni\pi}{N+1}\right) [\mathcal{A}_n \cos \omega_n t + \mathcal{B}_n \sin \omega_n t] \quad (8.36)$$

Abans de continuar fent el pas al continu, concretament amb un parell d'exemples el que acabem de veure.

Exemple 8.3. Modes normals d'oscil·lació transversal

Apliqueu la teoria que acabem de veure sobre la corda discreta a les oscil·lacions transversals dels casos $N = 3$ i $N = 5$.

Solució

a) Per a $N = 3$ partícules

El cas de 3 partícules en oscil·lacions longitudinals ja l'hem estudiat a la secció §8.2. Com que les equacions diferencials dels dos casos, longitudinal (8.14), i transversal (8.30) i (8.31), són matemàticament equivalents, podem esperar que els resultats d'ara siguin molt similars als d'abans. I, en efecte, així és. Per tant, per (8.33), tenim que les freqüències pròpies per a $N = 3$ són



$$\omega_1^2 = \frac{2F}{mh} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad \omega_2^2 = \frac{2F}{mh}, \quad \omega_3^2 = \frac{2F}{mh} \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad (8.37)$$

que, llevat del coeficient inicial, es corresponen a les trobades a (8.18). I, pel que fa a les amplituds $A_i^{(n)}$ de (8.34), substituint $N = 3$ i i i n , d'1, 2 i 3, trobem els valors

$$\begin{array}{ccccc} & n=1 & n=2 & n=3 & \\ i=1 & \mathcal{A}_1 & \mathcal{A}_2 & \mathcal{A}_3 & \\ i=2 & \sqrt{2}\mathcal{A}_1 & 0 & -\sqrt{2}\mathcal{A}_3 & \\ i=3 & \mathcal{A}_1 & -\mathcal{A}_2 & \mathcal{A}_3 & \end{array} \quad (8.38)$$

és a dir, les mateixes que les obtingudes a (8.20) per al cas longitudinal. Naturalment, els valors concrets de $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ i $\mathcal{A}_3$ dependran de les tres posicions inicials.

A les figures 8.15 (a), (b) i (c) es representen les posicions y_i de les tres partícules en els tres modes normals d'oscil·lació a l'instant inicial $t = 0$ en què $y_i = A_i^{(n)}$, d'acord amb (8.38). A més, a la figura 8.15 (d), es mostren les posicions a intervals de temps $1/8$ de període, per al mode normal $n = 2$. Fixeu-vos que, en aquest mode, la partícula $i = 2$ no oscil·la gens.

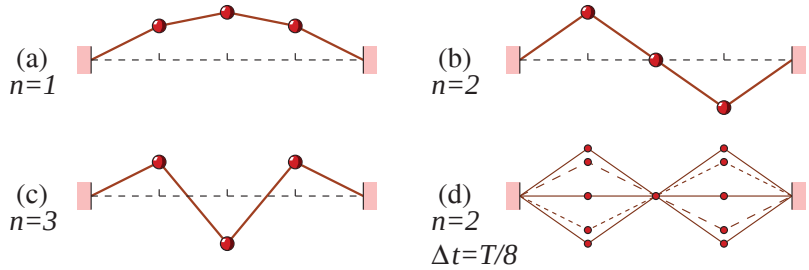


Figura 8.15

b) Per a $N = 5$ partícules

Substituint a (8.33), ara trobem

$$\omega_1^2 = \frac{F}{mh}(2 - \sqrt{2}), \quad \omega_2^2 = \frac{F}{mh}, \quad \omega_3^2 = \frac{2F}{mh}, \quad \omega_4^2 = \frac{3F}{mh}, \quad \omega_5^2 = \frac{F}{mh}(2 + \sqrt{2}) \quad (8.39)$$

I, substituint $N = 5$ i i i n a (8.34), trobem les $A_i^{(n)}$

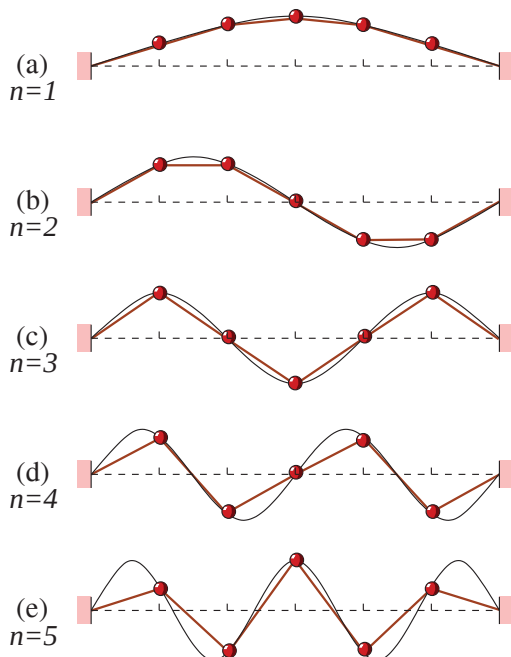
Mode	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$	$i = 5$	
$n = 1 \quad \mathcal{A}_1$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	
$n = 2 \quad \mathcal{A}_2$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	
$n = 3 \quad \mathcal{A}_3$	1	0	-1	0	1	
$n = 4 \quad \mathcal{A}_4$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	
$n = 5 \quad \mathcal{A}_5$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	(8.40)

Com hem fet abans, també ara hem esquematitzat aquests 5 modes normals —v. figures 8.16 de la (a) fins a la (e). Com que les amplituds $A_i^{(n)}$ vénen donades per (8.34), a més de les partícules i les molles —en línia contínua gruixuda— també s'ha representat la gràfica de la funció

$$a_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{h}\right) \quad (8.41)$$

per poder observar amb més claredat com encaixen les partícules en les gràfiques d'aquests sinus.

Figura 8.16



8.5. Pas al continu: ones transversals i longitudinals

8.5.1. Oscil·lacions i ones transversals

L'equació (8.30) pot ser reescrita de la forma

$$\frac{\left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h}\right) - \left(\frac{y_i - y_{i-1}}{h}\right)}{h} - \left(\frac{\mu}{F}\right) \frac{d^2 y_i}{dt^2} = 0 \quad (8.42)$$

Reprement el fil teòric de la secció anterior, ara ens preguntem què passa si h i m tendeixen cap a 0 mentre que N ho fa cap a infinit, de forma que la longitud total $L = (N + 1)h \approx Nh$ i la densitat lineal $\mu = Nm/(N + 1)h \approx m/h$ del sistema de molles i masses es mantenen constants. Vegem-ho.

En aquestes condicions, les partícules tendeixen a estar tan pròximes que, en comptes d'estudiar les N funcions del temps $y_i(t)$ per a cada partícula i , és més convenient passar



a la funció $y(x, t)$ del temps t i de l'espai x . En definitiva, es passa d'un *sistema discret* de N partícules a un *sistema continu* —una corda ordinària— dependent de la posició x :

$$\left. \begin{array}{l} y_i(t) \\ i = 1, 2, \dots, N \end{array} \right\} \longrightarrow \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}} \longrightarrow y(x, t)$$

Però, a més, recordant la definició de derivada parcial com a límit, tenim que

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y_i - y_{i-1}}{h} &= \left[\frac{\partial y}{\partial x} \right]_x & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y_{i+1} - y_i}{h} &= \left[\frac{\partial y}{\partial x} \right]_{x+h} \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left[\frac{\partial y}{\partial x} \right]_{x+h} - \left[\frac{\partial y}{\partial x} \right]_x}{h} &= \left[\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right]_x \end{aligned}$$

Diguem-ne ara

$$c = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \quad (8.43)$$

Així doncs, en el pas al continu fent els límits corresponents, l'equació en diferències finites (8.42) es transforma en l'*equació en derivades parcials de segon ordre* següent, que es denomina *equació d'ona*

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (8.44)$$

Qualsevol magnitud física y que depengui de la posició x i del temps t , $y(x, t)$, que satisfà una igualtat com la (8.44), és una *ona*. Així, en els sistemes —com una corda tensa— que estan inicialment en equilibri:

una ona és una pertorbació de l'estat d'equilibri que es propaga endavant i endarrere pel sistema a una celeritat constant determinada per les pròpies característiques d'aquest.

Infinitos modes normals d'oscil·lació

Per al càlcul de les freqüències pròpies d'oscil·lació quan $N \rightarrow \infty$, hem d'aplicar aquest límit a l'expressió (8.33). Per això, hem de tenir present el desenvolupament de Maclaurin del cosinus fins a segon ordre, (A.57):

$$\cos x \approx 1 - \frac{1}{2}x^2 + \dots \quad \text{si } 0 < x \ll 1$$

que, aplicat a (8.33), dona lloc a

$$\omega_n^2 = \lim_{\substack{m, h \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}} \frac{2F}{mh} \left(1 - \cos \frac{n\pi}{N+1} \right) \approx \frac{2F}{mh} \left(1 - 1 + \frac{1}{2} \frac{n^2 \pi^2}{N^2} \right) = n^2 \pi^2 \frac{F}{NmNh}$$

i, com que $\mu = Nm/L$ i $L = Nh$, llavors tenim

$$\omega^2 = n^2 \pi^2 \frac{F}{\mu L^2}$$



o, el que és el mateix,

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = n \frac{c}{2L} \quad (8.45)$$

on hem introduït la celeritat c de les ones transversals (8.43).

Pel que fa a les amplituds $A_i^{(n)}$ donades a (8.34), com que $x_i = (i-1)h$, tindrem, quan $N \rightarrow \infty$, que

$$\text{si } N \rightarrow \infty \quad \text{llavors} \quad \frac{n i \pi}{N+1} \approx n \pi \frac{x_i + h}{Nh} \approx \frac{n \pi x}{L}$$

i, per tant, quedaran com

$$A_i^{(n)} = \mathcal{A}_n \sin\left(\frac{n \pi x}{L}\right) \quad (8.46)$$

Així doncs, per al cas continu, l'expressió (8.35) es transforma en aquesta altra

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n \sin\left(n \frac{\pi x}{L}\right) \cos\left(n \frac{2\pi c t}{2L}\right) \quad (8.47)$$

Si, com és molt habitual, anomenem *longitud d'ona* λ_n i *període* T_n a

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \quad T_n = \frac{2L}{nc} = \frac{\lambda_n}{c}$$

llavors, (8.47) es pot posar com

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_n} x\right) \cos\left(\frac{2\pi}{T_n} t\right) \quad (8.48)$$

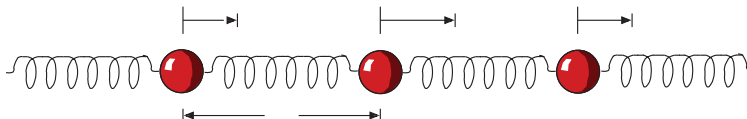
Fixeu-vos que, si prenem una x concreta, la funció $y(t)$ que en resulta és una sèrie de Fourier en t com les que vèiem al capítol 5, i també, si prenem un instant t concret, la $y(x)$ és una sèrie de Fourier en x . La funció $y(x, t)$ de (8.48) és, doncs, *la superposició d'ones estacionàries en una corda de longitud L amb els dos extrems, $x = 0$ i $x = L$, fixats, és a dir, tals que $y(0, t) = y(L, t) = 0$.*

8.5.2. Oscil·lacions i ones longitudinals

Per acabar aquest capítol, vegem com de les oscil·lacions longitudinals també sorgeixen ones longitudinals.

Com s'ha fet a tot aquest capítol, designem s_{i-1} , s_i i s_{i+1} els desplaçaments longitudinals respecte de la posició corresponent d'equilibri de les partícules $i-1$, i i $i+1$, respectivament —v. figura 8.17.

Figura 8.17





Amb aquesta notació, l'equació del moviment per a la partícula i és

$$m \frac{d^2 s_i}{dt^2} = k(s_{i+1} - s_i) - k(s_i - s_{i-1}) \quad (8.49)$$

igualtat que també es pot posar de la forma següent:

$$\frac{\left(\frac{s_{i+1} - s_i}{h}\right) - \left(\frac{s_i - s_{i-1}}{h}\right)}{h} - \left(\frac{m}{kh^2}\right) \frac{d^2 s_i}{dt^2} = 0 \quad (8.50)$$

Aquesta equació és, matemàticament, idèntica a l'equació (8.42). Això vol dir que, si fem el pas al límit $N \rightarrow \infty$ i $h, m \rightarrow 0$, mantenint, com abans, la densitat μ i la longitud L del sistema constants, la igualtat (8.50) se'ns transformarà en una equació d'ona com ara la (8.44), però per al desplaçament $s(x, t)$, amb una celeritat de propagació c_ℓ donada per

$$c_\ell^2 = \lim_{\substack{m, h \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}} \frac{kh^2}{m} = \frac{1}{\mu} \cdot \lim_{\substack{m, h \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}} kh \quad (8.51)$$

és a dir,

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} - \frac{1}{c_\ell^2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0 \quad (8.52)$$

D'altra banda, què significa el límit (8.51)? Vegem-ho.

De la igualtat (1.15) de l'exemple 1.2, sabem que, si unim en sèrie N molles iguals de constant de força individual k , n'obtenim una molla resultant de constant $K = k/N$. Per tant, si apliquem a aquesta molla resultant —de constant $K = k/N$ i longitud $L = Nh$ — una força F , s'allargarà el percentatge $\Delta L/L$ donat per

$$F = -K \Delta L = -\frac{k}{N} \Delta L = -\mathcal{F} \frac{\Delta L}{L} \quad \text{essent} \quad \mathcal{F} = \frac{k}{N} L = kh$$

Així doncs, $\mathcal{F}$ és la força necessària que caldria aplicar a la molla per tal que s'allargués el percentatge $\Delta L/L = 1$.

Per tant, la celeritat c_ℓ donada a (8.51) es pot posar com

$$c_\ell = \sqrt{\frac{\mathcal{F}}{\mu}} \quad (8.53)$$

Observeu que $\mathcal{F}$, igual que μ , —i, per extensió, c_ℓ — és una característica de la molla independent de la longitud d'aquesta, a diferència de k o k/N , que sí que en depenen.

Naturalment, per a aquestes ones longitudinals també són vàlids els raonaments que hem vist sobre els infinits modes normals n i freqüències pròpies: només cal canviar la tensió externa F pel paràmetre del sistema $\mathcal{F} = kh$.



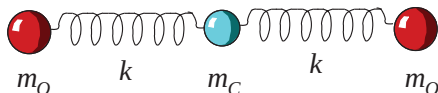
8.6. Problemes resolts i problemes proposats

8.6.1. Problemes resolts

Problema 8.1. Oscil·lacions acoblades de la molècula de CO_2

Una partícula de massa m_o està unida per mitjà d'una molla de constant k a una altra de massa m_c , i aquesta a una tercera de massa m_o per una altra molla idèntica a la primera —v. figura 8.18—, en un conjunt que constitueix un sistema d'oscil·ladors longitudinals acoblats.

Figura 8.18



- Trobeu l'equació característica del sistema i, a partir d'ella, les freqüències pròpies i els modes normals de les oscil·lacions lineals. Comproveu que una de les solucions de l'equació característica és zero i que, per tant, només hi ha dos modes normals.
- Per la química, sabem que la molècula de CO_2 respon a un model com ara aquest sistema que acabem d'exposar, en què les partícules són els àtoms d'oxigen i de carboni, de masses atòmiques relatives 16 i 12, respectivament. En aquest cas, quin és el quocient entre les dues freqüències pròpies de la molècula en vibració longitudinal?
- Trobeu els dos modes normals d'oscil·lació longitudinal.

Solució

- Després d'aplicar la segona llei de Newton a cada partícula, les equacions del moviment són

$$\begin{aligned} m_o \ddot{s}_1 &= -k(s_1 - s_2) &= -ks_1 + ks_2 \\ m_c \ddot{s}_2 &= +k(s_1 - s_2) - k(s_2 - s_3) &= +ks_1 - 2ks_2 + ks_3 \\ m_o \ddot{s}_3 &= +k(s_2 - s_3) &= +ks_2 - ks_3 \end{aligned}$$

Provant

$$s_1 = A_1 \cos \omega t \quad s_2 = A_2 \cos \omega t \quad s_3 = A_3 \cos \omega t$$

resulta

$$\left. \begin{aligned} -m_o \omega^2 A_1 &= -kA_1 + kA_2 \\ -m_c \omega^2 A_2 &= +kA_1 - 2kA_2 + kA_3 \\ -m_o \omega^2 A_3 &= +kA_2 - kA_3 \end{aligned} \right\}$$

és a dir,

$$\begin{pmatrix} k - m_o \omega^2 & -k & 0 \\ -k & 2k - m_c \omega^2 & -k \\ 0 & -k & k - m_o \omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = 0 \quad (1)$$



equació característica

$$\begin{vmatrix} k - m_o \omega^2 & -k & 0 \\ -k & 2k - m_c \omega^2 & -k \\ 0 & -k & k - m_o \omega^2 \end{vmatrix} = (k - m_o \omega^2) [k - m_o \omega^2 (2k - m_c \omega^2) - 2k^2] = 0$$

d'on surten les freqüències pròpies corresponents als tres modes normals:

$$\omega_1^2 = \frac{k}{m_o} \quad \omega_2^2 = \frac{k(m_c + 2m_o)}{m_o m_c} \quad \omega_3 = 0$$

b) Pel que fa a la molècula de CO_2 , el quocient ω_2/ω_1 , amb $m_o/m_c = 16/12$, val

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \sqrt{1 + 2 \frac{m_o}{m_c}} = 1,91$$

c) Si substituïm ω_1^2 a (1), es dedueix que $A_2 = 0$, $A_3 = -A_1$, és a dir, $s_1(t) = -s_2(t)$, $s_3 = 0$, que es correspon amb el mode normal de les oscil·lacions contraposades —v. figura 8.19 (a). Si substituïm ω_2^2 a (1) ara trobem que $s_1(t) = s_3(t) = -\frac{m_c}{2m_o} s_2$ —v. figura 8.19 (b).

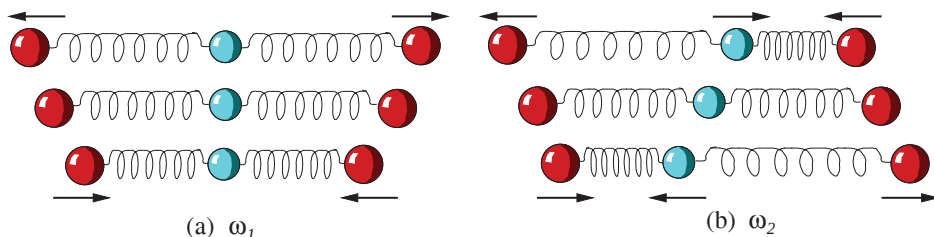


Figura 8.19

Problema 8.2. Dos oscil·ladors acoblats

A la figura 8.20, s'han representat dues partícules iguals de massa m , lligades per dues molles de la mateixa constant k a una paret fixa. El sistema descansa sobre una superfície horitzontal sense fricció.

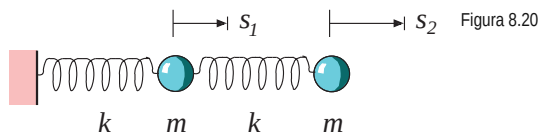


Figura 8.20

Esbrineu:

- Les dues freqüències pròpies.
- Els modes normals de vibració del sistema.
- Canviaria res de substancial si el conjunt pengés verticalment del sostre i estigués sotmès al pes de les partícules?

**Solució**

a) En aquest cas, les equacions del moviment són

$$\begin{aligned} m\ddot{s}_1 &= -ks_1 - k(s_1 - s_2) = -2ks_1 + ks_2 \\ m\ddot{s}_2 &= -k(s_2 - s_1) = +ks_1 - ks_2 \end{aligned}$$

Provant solucions del tipus

$$s_1 = A_1 \cos \omega t \quad s_2 = A_2 \cos \omega t$$

resulta

$$\left. \begin{aligned} -m\omega^2 A_1 &= -2kA_1 + kA_2 \\ -m\omega^2 A_2 &= +kA_1 - kA_2 \end{aligned} \right\}$$

és a dir,

$$\begin{pmatrix} 2k - m\omega^2 & -k \\ -k & k - m\omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = 0 \quad (1)$$

equació característica

$$\begin{vmatrix} 2k - m\omega^2 & -k \\ -k & k - m\omega^2 \end{vmatrix} = (2k - m\omega^2)(k - m\omega^2) - k^2 = (m\omega^2)^2 - 3k(m\omega^2) + k^2 = 0$$

de la qual surten les freqüències pròpies corresponents als dos modes normals:

$$\omega_1^2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \frac{k}{m} \quad \omega_2^2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \frac{k}{m}$$

b) Pel que fa als modes normals:

- Si ara substituïm ω_1^2 a (1) trobem que que

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}+1}{2} & -1 \\ -1 & \frac{\sqrt{5}-1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{d'on:} \quad A_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} A_1$$

- Si substituïm ω_2^2 a (1), trobem que

$$\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{5}-1}{2} & -1 \\ -1 & -\frac{\sqrt{5}+1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{d'on:} \quad B_2 = -\frac{\sqrt{5}-1}{2} B_1$$



Així, el moviment general del sistema és la superposició dels dos modes normals

$$s_1(t) = A \cos \omega_1 t + B \cos \omega_2 t$$

$$s_2(t) = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2} \right) A \cos \omega_1 t - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right) B \cos \omega_2 t$$

on les constants A i B queden determinades per les posicions inicials.

- c) Només canviaria que les molles serien una mica més llargues per tal que aquests estiraments compensessin els pesos de les masses, però no canviarien ni els períodes, ni les amplituds, ni els modes d'oscil·lació.

Problema 8.3. Dos oscil·ladors... acoblats per un amortidor comú

A la figura 8.21, es presenta el cas de dos oscil·ladors simples de tipus molla-massa iguals, interconnectats per mitjà d'un amortidor comú.

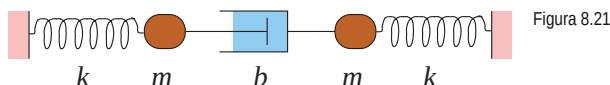


Figura 8.21

Si k , m i b són les constants de les molles, les masses i l'amortidor, respectivament, llavors:

- Esbrineu les equacions diferencials del moviment de les dues masses en funció dels desplaçaments s_1 i s_2 i, fent el canvi de variables, $\xi_1 = s_1 + s_2$, $\xi_2 = s_1 - s_2$, reescriu-les en aquestes variables separables. Quines són les freqüències pròpies del sistema?
- Comproveu que, en el moviment general del sistema, hi ha un estat transitori inicial per passar, un temps després, a un estat estacionari.

Solució

- Després d'aplicar-hi la segona llei de Newton, trobem les dues equacions del moviment

$$\begin{aligned} m\ddot{s}_1 &= -ks_1 - b(\dot{s}_1 - \dot{s}_2) \\ m\ddot{s}_2 &= -ks_2 + b(\dot{s}_1 - \dot{s}_2) \end{aligned} \quad (1)$$

Llavors, fent el canvi,

$$\xi_1 = s_1 + s_2 \quad \xi_2 = s_1 - s_2 \quad (2)$$

les equacions (1) es poden reescriure en variables separables com

$$\ddot{\xi}_1 = -\frac{k}{m}\xi_1 \quad \ddot{\xi}_2 = -\frac{k}{m}\xi_2 - \frac{2b}{m}\dot{\xi}_2$$

És a dir, a ξ_1 li correspon l'equació diferencial d'un MHS i a ξ_2 , una oscil·lació harmònica amortida —v. secció §2.2. Per tant,



$$\xi_1(t) = 2A \cos(\omega_0 t + \phi) \quad \xi_2(t) = 2B e^{-\beta t} \cos(\omega_1 t + \varphi)$$

on, pel que sabem d'aquests moviments, les constants β , ω_0 i ω_1 —aquestes dues últimes, les freqüències pròpies del sistema— valen

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \beta = \frac{b}{m}, \quad \omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

i A , B , ϕ i φ depenen de les condicions inicials.

b) Així, l'equació general del moviment serà la superposició

$$s_1(t) = \frac{\xi_1 + \xi_2}{2} = A \cos(\omega_0 t + \phi) + B e^{-\beta t} \cos(\omega_1 t + \varphi)$$

$$s_2(t) = \frac{\xi_1 - \xi_2}{2} = A \cos(\omega_0 t + \phi) - B e^{-\beta t} \cos(\omega_1 t + \varphi)$$

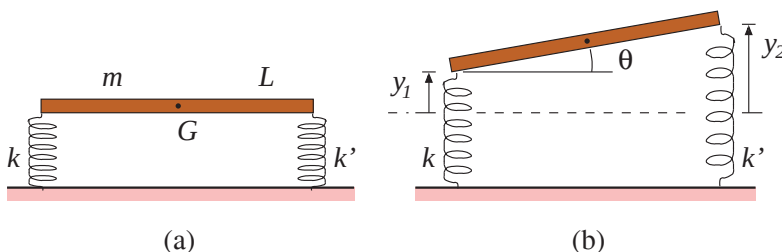
Fixem-nos que, com ara en les oscil·lacions forçades, hi ha un estat transitori inicial i un estat estacionari al qual s'arriba quan l'exponencial s'ha fet gairebé zero. En aquest últim, les velocitats de les dues masses són pràcticament iguals i, per tant, no hi ha fricció viscosa. Així doncs,

$$s_{1\text{est}}(t) = s_{2\text{est}}(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi)$$

Problema 8.4. Oscil·lacions acoblades: barra sobre dues molles, I

Un barra homogènia de longitud L i massa m està suspesa horitzontalment en equilibri per l'acció de dues molles verticals de constants k i k' —v. figura 8.22 (a). En un moment determinat es treu la barra de l'equilibri i tant el seu centre de masses G com la inclinació θ de la barra amb l'horitzontal comencen a efectuar oscil·lacions —v. figura 8.22 (b). Les molles i el centre de la barra masses només poden desplaçar-se verticalment i la inclinació de la barra és, en tot moment, petita.

Figura 8.22



Suposeu que $k' = k$. Observant la simetria d'aquest cas, trobeu quins són els dos modes normals d'oscil·lació de la barra. Quant valen les freqüències pròpies corresponents? De les dues, una és immediata; l'altra porta una mica més de feina.

Nota: Fixeu-vos que el pes de la barra, constant, es compensa amb una encongiment inicial de les molles i, per tant, aquí no fa cap paper i es pot negligir.



Solució

Si $k' = k$, els dos modes normals són:

- el concordant: $y_1(t) = y_2(t) = A \cos \omega_1 t$, $\theta(t) = 0$, amb $\omega_1^2 = \frac{2k}{m}$, i
- el contraposat: $y_2(t) = -y_1(t) = B \cos \omega_2 t$, $\theta(t) = \frac{2B}{L} \cos \omega_2 t$, i com que, per la segona llei de Newton per a la rotació, tenim que

$$\frac{1}{12} mL^2 \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\frac{L}{2} k(2y) = -\frac{k}{2} L^2 \frac{2y}{L} \approx -\frac{k}{2} L^2 \theta$$

acaba resultant: $\omega_2^2 = \frac{6k}{m}$.

Problema 8.5. Oscil·lacions acoblades: barra sobre dues molles, II

Suposem que al problema anterior no hi ha simetria sinó que: $k' = 2k$.

- Plantegeu la segona llei de Newton per al desplaçament del centre de masses i per a la rotació de la barra i d'aquí trobeu les equacions diferencials del moviment en funció dels dos allargaments de les molles respecte de la posició inicial d'equilibri, y_1 i y_2 .
- Trobeu l'equació característica del sistema i les seves freqüències pròpies.

Solució

- Aplicant la segona llei de Newton per a la translació del centre de masses i per a la rotació de la barra entorn seu, tenim

$$\begin{aligned} m \frac{1}{2} \frac{d^2(y_2 + y_1)}{dt^2} &= -ky_1 - k'y_2 \\ I_G \frac{d^2 \theta}{dt^2} &= \frac{L}{2} (ky_1 - k'y_2) \end{aligned} \quad (1)$$

Considerant que $k' = 2k$ i que

$$\tan \theta \approx \theta = \frac{y_2 - y_1}{L}, \quad I_G = \frac{1}{12} mL^2$$

llavors les equacions (1) es poden posar com

$$\begin{aligned} \frac{m}{k} \frac{d^2(y_2 + y_1)}{dt^2} &= -2y_1 - 4y_2 \\ \frac{m}{k} \frac{d^2(y_2 - y_1)}{dt^2} &= +6y_1 - 12y_2 \end{aligned} \quad (8.54)$$



I, restant i sumant aquestes equacions, resulten

$$\begin{aligned}\frac{m}{k} \frac{d^2 y_1}{dt^2} &= -4y_1 + 4y_2 \\ \frac{m}{k} \frac{d^2 y_2}{dt^2} &= +2y_1 - 8y_2\end{aligned}\quad (8.55)$$

b) Llavors, l'equació característica és

$$\begin{vmatrix} 4k - m\omega^2 & -4k \\ -2k & 8 - m\omega^2 \end{vmatrix} = (m\omega^2)^2 - 12k(m\omega^2) + 24k^2 = 0$$

d'on resulten les dues freqüències pròpies

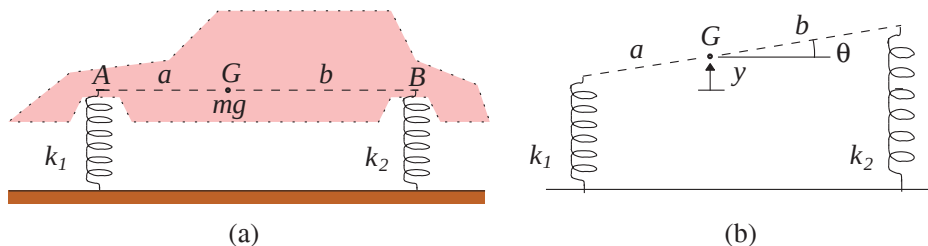
$$\omega^2 = \left(6 \pm \sqrt{12}\right) \frac{k}{m}$$

és a dir, $\omega_1 = 3,076\sqrt{k/m}$ i $\omega_2 = 1,592\sqrt{k/m}$.

Problema 8.6. Oscil·lacions longitudinals normals d'un cotxe

Per tal d'estudiar les vibracions longitudinals d'un cotxe, aquest es pot esquematitzar, en una primera aproximació, com una barra AGB , de massa m , que descansa sobre dos parells de molles i en què G , el centre de masses, és a la distància $\overline{AG} = a$ de la primera molla, de constant k_1 , i a la $\overline{GB} = b$ de la segona, de constant k_2 —v. figura 8.23 (a).

Figura 8.23



Per concretar, suposem que les dades sobre el cotxe són: la massa $m = 1400$ kg; les distàncies $\overline{AG} = a = 1,20$ m i $\overline{GB} = b = 1,80$ m; les constants dels parells de molles són $k_1 = 128$ kN/m i $k_2 = 140$ kN/m, i el radi de gir del cotxe respecte del centre G és $R_g = 1,40$ m.

Plantegeu les equacions del moviment per a les coordenades y i θ que es mostren a la figura 8.23 (b), és a dir, y , o elongació vertical del centre de masses G , i θ , o angle de gir θ de AGB , i esbrineu les dues freqüències normals de vibració.

Solució

Aplicant la segona llei de Newton per a la translació del centre de masses G i per a la rotació del cotxe “ AGB ” al voltant de G , tenim

$$\begin{aligned}m\ddot{y} &= -k_1(y - a\theta) - k_2(y + b\theta) \\ I\ddot{\theta} &= ak_1(y - a\theta) - bk_2(y + b\theta)\end{aligned}$$



és a dir,

$$\begin{aligned}\ddot{y} + \alpha y + \beta \theta &= 0 \\ \ddot{\theta} + \gamma y + \delta \theta &= 0\end{aligned}$$

amb

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{k_1 + k_2}{m} = 191,4 \text{ rad/s}^2 & \beta &= \frac{k_2 b - k_1 a}{m} = 70,29 \text{ m/s}^2 \\ \gamma &= \frac{k_2 b - k_1 a}{I} = \frac{\beta}{R_g^2} = 35,86 \text{ m}^{-1} \cdot \text{s}^2 & \delta &= \frac{k_1 a^2 + k_2 b^2}{I} = 232,5 \text{ s}^{-2}\end{aligned}$$

Provant les funcions $y = A \cos \omega t$ i $\theta = \Theta \cos \omega t$, trobem

$$\begin{aligned}(\alpha - \omega^2)A + \beta \Theta &= 0 \\ \gamma A + (\delta - \omega^2)\Theta &= 0\end{aligned}$$

Les freqüències ω que fan que aquest sistema tingui solució no trivial són les arrels d'igualar el determinant del sistema a zero, és a dir,

$$(\alpha - \omega^2)(\delta - \omega^2) - \beta\gamma = 0$$

i, per tant,

$$\omega^4 - \lambda \omega^2 + \mu = 0, \quad \text{amb } \lambda = \alpha + \delta = 423,9 \text{ s}^{-2}, \quad \mu = \alpha\delta - \beta\gamma = 4,199 \times 10^4 \text{ s}^{-4}$$

d'on resulten $\omega_1 = 12,56 \text{ rad/s}$, i $\omega_2 = 16,31 \text{ rad/s}$, o, el que és equivalent, els períodes $0,500 \text{ s}$ i $0,385 \text{ s}$.

Problema 8.7. Oscil·lacions acoblades forçades.

Un bloc de massa m sobre el qual actua la força harmònica $F(t) = F_0 \cos \omega t$ està unit per mitjà d'una molla de constant k a l'extrem inferior d'una barra homogènia de massa M i longitud L , que penja per l'extrem superior O del sostre com una mena de pèndol físic —v. figura 8.24.

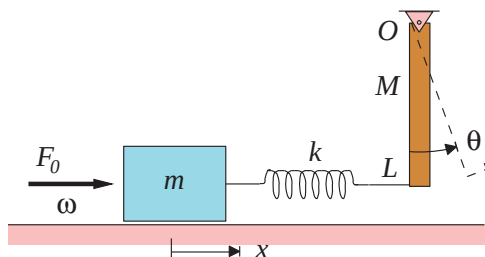


Figura 8.24

Sabent que els moviments del pèndol, la molla i el bloc estan en el mateix pla vertical, que les oscil·lacions de la barra són de petita amplitud i que les friccions són negligibles:

- a) Si $L = 0,5 \text{ m}$, $m = M = 1 \text{ kg}$, $k = 100 \text{ N/m}$, estudieu el moviment del bloc a l'estat estacionari.



- b) Per a quina freqüència ω el bloc no oscil·larà?
- c) I per a quines freqüències ω el sistema entrarà en ressonància? Compareu aquestes freqüències amb freqüències significatives de les parts del sistema: molla-massa, pèndol físic, barra lligada a molla.

Solució

- a) L'equació del moviment rectilini del bloc i la del moviment angular de la barra per a les coordenades x i θ , respectivament, vénen donades per l'aplicació de la segona llei de Newton per a la translació del bloc i per a la rotació del pèndol. Prenent l'origen de x a la posició del bloc corresponent a la longitud natural del bloc i la barra penjant verticalment, i prenent els moments de les forces respecte del centre de rotació O , tenim

$$m\ddot{x} = -k(x - L\theta) + F_0 \cos \omega t$$

$$\left(\frac{1}{3}ML^2\right)\ddot{\theta} = -Mg\frac{L}{2}\theta - k(L\theta - x)L$$

on ja hem substituït el moment d'inèrcia I_O de la barra respecte del seu extrem O pel valor $ML^2/3$. A l'estat estacionari, els moviments d'ambdós cossos seran harmònics simples de la mateixa freqüència ω que la força impulsora F i, com que no hi ha fricció, en fase amb aquesta. Així, podem suposar oscil·lacions forçades del tipus

$$x(t) = A \cos \omega t, \quad \theta(t) = \Theta \cos \omega t \quad (2)$$

Substituint x i θ a les equacions anteriors i simplificant el $\cos \omega t$ comú, queda el sistema següent de dues equacions algebraïques amb dues incògnites:

$$\begin{pmatrix} k - m\omega^2 & -kL \\ -kL & kL^2 + Mg\frac{L}{2} - \frac{1}{3}ML^2\omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ \Theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aplicant la regla de Cramer, resollem aquest sistema trobant

$$A = \frac{\begin{vmatrix} F_0 & -kL \\ 0 & (kL^2 + Mg\frac{L}{2} - \frac{1}{3}ML^2\omega^2) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} k - m\omega^2 & -kL \\ -kL & (kL^2 + Mg\frac{L}{2} - \frac{1}{3}ML^2\omega^2) \end{vmatrix}} = \frac{3k + k_p - M\omega^2}{mM\omega^4 - (kM + 3km + k_p m)\omega^2 + kk_p} F_0$$

$$A = \frac{329,4 - \omega^2}{\omega^4 - 429,4\omega^2 + 2943} \quad \text{amb} \quad k_p = \frac{3g}{2L}M = 29,43 \text{ N/m} \quad (1)$$

- b) Observant el numerador anterior, veiem que el bloc no oscil·larà si

$$\omega = \sqrt{\frac{3k + k_p}{M}} = 18,15 \text{ rad/s}$$



Ho podem comparar amb les freqüències més significatives del sistema:

- Freqüència molla-massa: $\omega_m = \sqrt{\frac{k}{m}} = 10,00 \text{ rad/s}$
- Freqüència pèndol-barra: $\omega_p = \sqrt{\frac{3g}{2L}} = 5,425 \text{ rad/s}$
- Freqüència molla-barra: $\omega_b = \sqrt{\frac{3k}{M}} = 17,32 \text{ rad/s}$

- c) La ressonància s'assolirà a les freqüències en què s'anul·li el denominador de (1), és a dir, en les dues freqüències pròpies solucions de

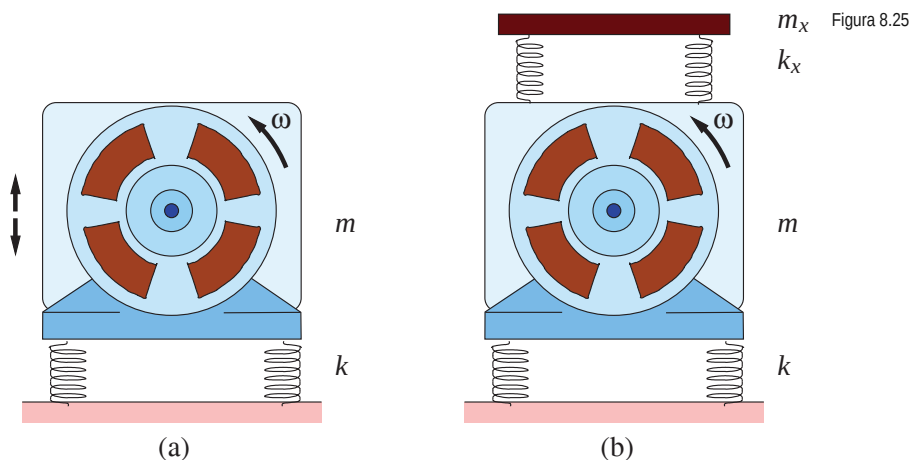
$$\omega^4 - 429,4 \omega^2 + 2943 = 0$$

equació biquadrada de la qual resulta: $\omega^2 = 214,7 \pm 207,8 \text{ rad}^2/\text{s}^2$, és a dir: $\omega_1 = 20,55 \text{ rad/s}$ i $\omega_2 = 2,64 \text{ rad/s}$. De fet, del denominador de (1), amb ω^4 , veiem que l'amplitud A és pràcticament nul·la per a totes les ω excepte les ω_1 i ω_2 pròpies del sistema.

Problema 8.8. Absorbidor de les vibracions forçades d'un motor

Un motor giratori pesant està fixat al terra a través d'unes potes elàstiques —que actuen com unes molles: v. figura 8.25 (a). La velocitat angular del motor ω_m coincideix, aproximadament, amb freqüència natural del sistema motor-potes, ω_0 , la qual cosa, provoca unes vibracions molestes. Es pretén reduir-les col·locant sobre el motor un altre sistema molla-massa per tal que n'absorbeixi les vibracions —v. figura 8.25 (b).

- a) Quina massa m_x i quina constant de força k_x ha de tenir l'absorbidor, relatives a la massa m i constant k de les potes, per tal que elimini les vibracions i, a més a més, les dues noves freqüències pròpies del conjunt motor-absorbidor difereixin, com a mínim, un 20% de ω ?
- b) Apliqueu els resultats a un cas en què la massa del motor és $m = 32 \text{ kg}$ i gira a $\omega_m = 5000 \text{ rpm}$.



**Solució**

- a) Amb l'absorbidor col·locat sobre el motor, tenim un sistema de dos oscil·ladors acoblats amb una de les masses, el motor, sotmesa a una força externa harmònica. Tal com es dedueix a l'exemple 8.2, l'amplitud de l'oscil·lació forçada del motor ve donada per l'expressió (8.28), que és

$$A = \frac{k_x - m_x \omega_m^2}{(k + k_x - m \omega_m^2)(k_x - m_x \omega_m^2) - k_x^2} F_0 \quad (1)$$

en la qual F_0 és l'amplitud de la força ocasionada pel gir del motor, valor desconegut però que és irrellevant en aquest cas.

De la primera condició —que s'eliminin les vibracions del motor—, trobem, veient (1), que $k_x/m_x = \omega_m^2$. D'altra banda, la freqüència natural de vibracions del motor amb potes és $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, que, segons l'enunciat, coincideix bastant bé amb ω_m . Per tant, s'eliminen les vibracions del motor si

$$\frac{k_x}{m_x} = \omega_m^2 \approx \frac{k}{m} \quad (2)$$

Els valors de k_x i m_x per separat els trobarem imposant la segona condició, la del 25%. En efecte, com sabem de l'exemple 8.2, les dues freqüències pròpies del conjunt motor-absorbidor són les arrels del polinomi a ω^4 del denominador de l'equació (1)

$$(k + k_x - m\omega^2)(k_x - m_x\omega^2) - k_x^2 = 0$$

Dividint la igualtat per kk_x , queda

$$\left(1 + \frac{k_x}{k} - \frac{m}{k} \omega^2\right) \left(1 - \frac{m_x}{k_x} \omega^2\right) = 0$$

que també podem posar, per (2), com

$$\left(1 + \frac{k_x}{k} - \frac{\omega^2}{\omega_m^2}\right) \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_m^2}\right) - \frac{k_x}{k} = 0 \quad (3)$$

Si anomenem $\Omega = \frac{\omega}{\omega_m}$ i $K = \frac{k_x}{k}$, llavors (3) es pot reescriure com

$$\Omega^4 - (2 + K)\Omega^2 + 1 = 0 \quad (4)$$

igualtat que ens confirma el que ja sabíem: el sistema motor-absorbidor tindrà dues freqüències pròpies, relacionades amb Ω_1 i Ω_2 , les solucions de (4). Però no oblidem que en aquesta equació la incògnita és K i que Ω ens ve donat per l'enunciat:

$$\Omega_1 \leq 0,80, \quad \Omega_2 \geq 1,20 \quad (5)$$

Així, de (4)

$$K = \frac{\Omega^4 - 2\Omega^2 + 1}{\Omega^2} \quad (6)$$



d'on trobem

- si $\Omega = \Omega_1 = 0,80$, per (6): $K_1 = 0,203$;
- si $\Omega = \Omega_2 = 1,20$, per (6): $K_2 = 0,134$.

Quin d'aquests dos valors de K triem? Dependrà de les dues Ω solució de (4):

$$\Omega^2 = 1 + \frac{K}{2} \pm \sqrt{K + \frac{K^2}{4}} \quad (6)$$

expressió de la qual resulta

- si $K = K_1 = 0,203$, per (6): $\Omega_1 = 0,800$ i $\Omega_2 = 1,250$;
- si $K = K_2 = 0,134$, per (6): $\Omega_1 = 0,834$ i $\Omega_2 = 1,200$.

Dels dos valors possibles de K , només $K = \frac{k_x}{k} = 0,203$ satisfà les condicions (5) de l'enunciat. Així, per (2), hem trobat que les característiques de l'absorbidor que ens demana l'enunciat han de ser:

$$k_x = 0,203k \quad \text{i} \quad m_x = 0,203m$$

- b) Amb les dades finals de l'enunciat, resulten: $m_x = 0,203 \times 32 = 6,50 \text{ kg}$ i, com que $\omega_0 \approx \omega_m = 523,6 \text{ rad/s}$, llavors: $k_x \approx 0,203 \cdot m\omega_m^2 = 1,78 \times 10^6 = 17,8 \text{ kN/cm}$.

Problema 8.9. La corda discreta per a $N = 3$: oscil·lacions forçades

A la segona partícula del sistema de tres oscil·ladors idèntics molla-massa representats a la figura 8.26, se li aplica la força impulsora $f(t) = f_0 \cos \omega t$. Sabent que la tensió inicial F a què estan les molles és relativament gran i que les oscil·lacions transversals de les tres partícules seran petites:

- Esbrineu-ne el moviment a l'estat estacionari.
- Hi ha alguna freqüència per a la qual no hi hauria moviment?
- I per a quines freqüències es presentarà la ressonància de les oscil·lacions?

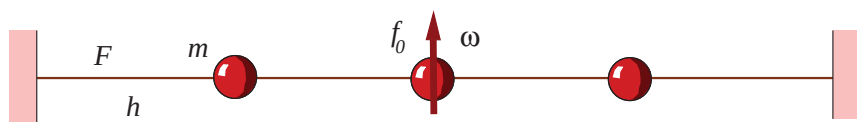
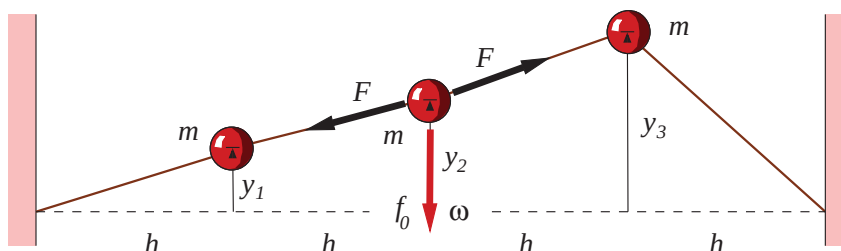


Figura 8.26

Solució

- a) Siguin y_1, y_2, y_3 les elongacions de les tres partícules en un instant qualsevol —v. figura 8.27, en què s'han representat les tres partícules i, per a la segona, les tres forces que actuen sobre ella: les dues tensions F , de mòdul igual però direccions diferents, i l'externa f_0 .

Figura 8.27



La segona llei de Newton, aplicada a les tres partícules, ens proporciona les tres equacions diferencials del moviment, que són

$$m \frac{d^2 y_1}{dt^2} = -F \frac{y_1}{h} - F \frac{y_1 - y_2}{h}$$

$$m \frac{d^2 y_2}{dt^2} = -F \frac{y_2 - y_1}{h} - F \frac{y_2 - y_3}{h} + f_0 \cos \omega t$$

$$m \frac{d^2 y_3}{dt^2} = -F \frac{y_3 - y_2}{h} - F \frac{y_3}{h}$$

Les equacions de moviment anteriors també es podem reescriure de la forma

$$\frac{mh}{F} \frac{d^2 y_1}{dt^2} = -2y_1 + y_2$$

$$\frac{mh}{F} \frac{d^2 y_2}{dt^2} = +y_1 - 2y_2 + y_3 + \frac{h}{F} f_0 \cos \omega t$$

$$\frac{mh}{F} \frac{d^2 y_3}{dt^2} = +y_2 - 2y_3$$

Provant

$$y_1 = A_1 \cos \omega t \quad y_2 = A_2 \cos \omega t \quad y_3 = A_3 \cos \omega t$$

en resulta el sistema de tres equacions amb les tres incògnites A_1 , A_2 i A_3

$$\begin{pmatrix} 2 - \frac{mh}{F} \omega^2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 - \frac{mh}{F} \omega^2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 - \frac{mh}{F} \omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Com ja hem fet en el problema 8.7, l'aplicació de la regla de Cramer a aquest sistema ens permet trobar les amplituds A_1 , A_2 i A_3 corresponents als MHS de l'estat estacionari. Així, trobem

$$A_1 = A_3 = \frac{W^2 (2W^2 - \omega^2)}{D} m^2 f_0 \quad A_2 = \frac{(2W^2 - \omega^2)^2}{D} m^2 f_0 \quad (1)$$



amb W i D que valen

$$W^2 = \frac{F}{mh}, \quad D = (\omega/W)^6 - 6(\omega/W)^4 + 10(\omega/W)^2 - 4 \quad (2)$$

b) De (1), observem que els numeradors de les amplituds A_i es fan zero si

$$\omega^2 = 2W^2 = \frac{2F}{mh}.$$

Per contra, les A_i són màximes —teòricament infinites— si ω és una de les tres freqüències pròpies ω_i arrels del polinomi (2), és a dir, les solucions de l'equació bicúbica $D = 0$. Aplicant-hi les fórmules per a les solucions de les equacions cúbiques —que podem trobar, per exemple, al *Manual de Fórmulas y Tablas de Matemática Aplicada*, de Spiegel, Abellanas i Liu— trobem les tres ω_i que, com es pot comprovar, són

$$\omega_1^2 = 2W^2 \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad \omega_2^2 = 2W^2, \quad \omega_3^2 = 2W^2 \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

8.6.2. Problemes proposats

Problema 8.10. Dos oscil·ladors acoblats

Si, en el cas dels dos oscil·ladors representats a la secció §8.1.1 amb què hem començat aquest capítol, considerem el cas general amb tres molles i dues partícules diferents entre si, de constants i masses, k_1 , m_1 , k_a , m_2 , i k_2 , respectivament, trobeu l'equació característica i les dues freqüències pròpies d'oscil·lació.

Resp.:

$$\omega^2 = \frac{k_1 + k_a}{2m_1} + \frac{k_a + k_2}{2m_2} \pm \sqrt{\left(\frac{k_1 + k_a}{2m_1} + \frac{k_a + k_2}{2m_2}\right)^2 - \frac{k_1 k_a + k_1 k_2 + k_a k_2}{m_1 m_2}} \quad (8.56)$$

Problema 8.11. Molla-massa acoblada a un pèndol

Com s'il·lustra a la figura 8.28, el punt de suspensió d'un pèndol simple està unit a un bloc que llisca sense fricció sobre una superfície horitzontal i que està lligat a una molla fixada a una paret. La longitud i la massa del pèndol, així com la constant de la molla i la massa del bloc són, respectivament, L , m_1 , k i m_2 .

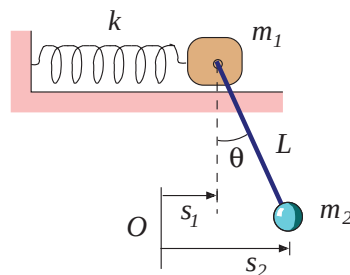


Figura 8.28

- Si les oscil·lacions del pèndol són de petita amplitud, esbrineu, fent-ne les aproximacions habituals, les equacions del moviment de les dues masses per als desplaçaments horitzontals s_1 i s_2 corresponents.
- Suposant ara $m_1 = m_2 = m$, esbrineu les dues freqüències pròpies del sistema.



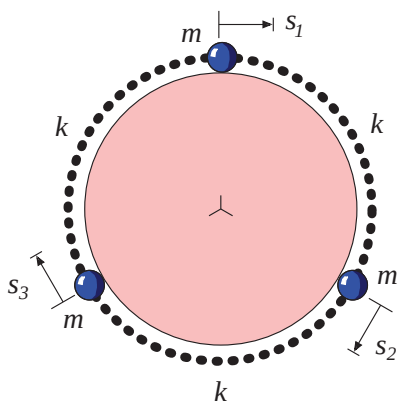
Resp.: a) $m_1 \ddot{s}_1 = -ks_1 + m_2 g \frac{s_2 - s_1}{L}$, $m_2 \ddot{s}_2 = -m_2 g \frac{s_2 - s_1}{L}$;

b) $\omega^2 = \frac{k}{2m} + \frac{g}{L} \pm \sqrt{\left(\frac{k}{2m}\right)^2 + \left(\frac{g}{L}\right)^2}$

Problema 8.12. Oscil·lacions acoblades de tres partícules

A la figura 8.29, es mostra un sistema de tres partícules idèntiques, de massa m , que es desplacen sense fricció sobre una guia circular. Si les partícules estan lligades entre si per molles ideals idèntiques de constant de força k que s'adapten a les guies circulars, trobeu-ne: a) l'equació característica; b) les freqüències pròpies del sistema, i c) els modes normals.

Figura 8.29



Resp.: a) $(\chi + 1)(\chi^2 - \chi - 2) = 0$, amb $\chi = 2 - m\omega^2/k$; b) $\omega_1 = 0$, $\omega_2^2 = \omega_3^2 = \frac{3k}{m}$,
c) mode 1: $s_1 = s_2 = s_3 = C_1 t + C_2$; mode 2: $s_1 = -s_2 = A \cos \omega_2 t$, $s_3 = 0$,
que poden ser indistintament la 1, la 2 o la 3.

Problema 8.13. Tres pèndols simples acoblats per dues molles iguals

Tres pèndols simples iguals, de longitud L i lentilles de masses m , estan acoblats entre si dos a dos per mitjà de dues molles iguals de constant k . Les molles estan lligades a les barres dels pèndols pels seus punts centrals, és a dir, a la distància $L/2$ de la lentilla. Trobeu-ne l'equació característica i les tres freqüències pròpies d'oscil·lació.

Resp.: $(mgL + kL^2/4 - mL^2\omega^2) \int (mgL + kL^2/4 - mL^2\omega^2) (mgL + kL^2/2 - mL^2\omega^2) - k^2L^4/8] = 0$ d'on resulten:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{L}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{g}{L} + \frac{k}{4m}}, \quad \omega_3 = \sqrt{\frac{g}{L} + \frac{3k}{4m}}$$

Problema 8.14. Oscil·lacions de dues barres

Una barra de longitud L i massa m que només pot girar al voltant del seu extrem O està lligada per l'altre extrem a una molla de constant k —v. figura 8.30. De l'extrem



d'aquesta barra penja una altra molla, que també està lligada a l'extrem d'una altra barra articulada en O' . Aquestes segones molla i barra són idèntiques a les primeres. Esbrineu les dues freqüències pròpies del sistema.

Resp.: $\omega^2 = \frac{9 \pm 3\sqrt{5}}{2} \frac{k}{m}$

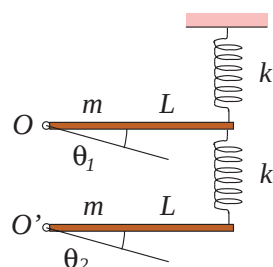


Figura 8.30

Problema 8.15. Oscil·lacions acoblades: modes normals

Quatre molles iguals de constant k i dos cossos de la mateixa massa m —com els que es representen a la figura 8.31— estan penjats del sostre. Les dues molles estan unides per una barra de massa negligible que pot pivotar al voltant del seu punt mitjà fix O . Sense escriure'n cap equació encara, imagineu quins són els dos modes d'oscil·lació normal del sistema. Ara sí, escrivint, plantegeu les equacions del moviment, trobeu-ne les dues freqüències pròpies i confirmeu que els dos modes normals que en resulten són els que s'han imaginat anteriorment.

Resp.: $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{2m}}$

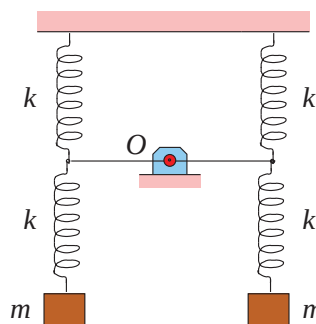


Figura 8.31

Problema 8.16. Oscil·lacions normals d'una taula sobre molles

Tenim una taula o placa rectangular homogènia, de massa m i costats a i b , disposada horitzontalment sobre quatre molles verticals iguals, de constant k , unides al terra —v. figura 8.32. Per consideracions de simetria, esbrineu quins són els tres modes normals d'oscil·lació de la placa i les freqüències pròpies corresponents.

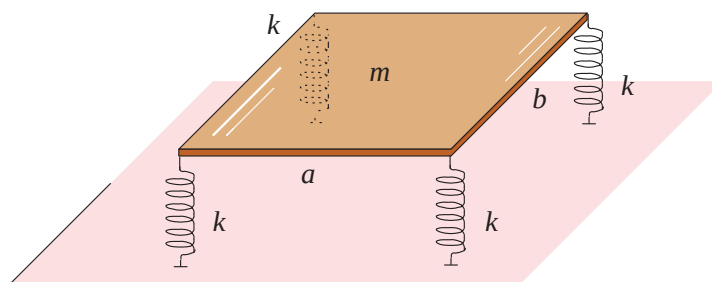


Figura 8.32

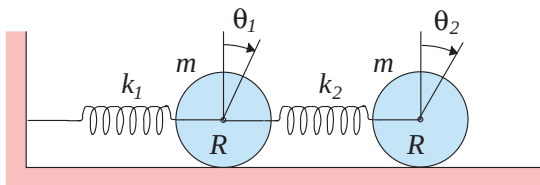
Resp.: $\omega_1 = \sqrt{\frac{4k}{m}}, \omega_2 = \omega_3 = \sqrt{\frac{12k}{m}}$

Problema 8.17. Oscil·lacions acoblades de dos cilindres units per molles

Com podem apreciar a la figura 8.33, dos cilindres iguals, de massa m i radi R , que roden sense lliscar sobre una superfície horitzontal, estan acoblats entre si per una molla de



Figura 8.33

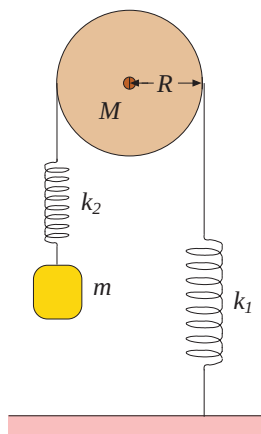


constant k , i un d'ells unit a una paret fixa per mitjà d'una altra molla com l'anterior. Trobeu les dues equacions de moviment dels cilindres en funció dels dos angles θ_1 i θ_2 girats.

Resp.: $\frac{3m}{2}\ddot{\theta}_1 - k_2\theta_2 + (k_1 + k_2)\theta_1 = 0, \quad \frac{3m}{2}\ddot{\theta}_2 + k_2\theta_2 - k_2\theta_1 = 0$

Problema 8.18. Oscil·lacions acoblades amb una politja

Figura 8.34



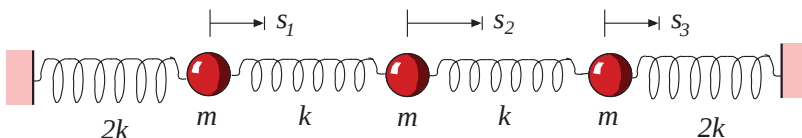
Tal com s'indica a la figura 8.34, una politja cilíndrica de massa M i radi R , lligada al terra per una molla de constant k_1 , s'acobla al bloc de massa m per mitjà de la molla de constant k_2 . Sabent que la corda que fa girar el cilindre no llisca, trobeu: a) les equacions de moviment del bloc i de la politja i l'equació característica corresponent, i b) si $k_1 = k_2 = k$ i $M = m$, les freqüències pròpies del sistema.

Resp.: a) $m\ddot{x} = -k_2(x - R\theta),$
 $\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\ddot{\theta} = -k_1R^2\theta - k_2R(R\theta - x);$
 $\omega^4 - \left(\frac{k_2M + 2(k_1 + k_2)m}{mM}\right)\omega^2 + \frac{2k_1k_2}{mM} = 0,$
 b) $\omega_1 = 0,6622\sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega_2 = 2,136\sqrt{\frac{k}{m}}$

Problema 8.19. Moviment general de 3 oscil·ladors acoblats

Siguin els tres oscil·ladors acoblats de la figura 8.35, en què les tres masses són iguals a m i les constants de les molles, $2k$, k , k i $2k$, respectivament.

Figura 8.35



Esbrineu: a) les freqüències pròpies del sistema i b) les equacions generals del moviment de les partícules. c) Concretueu les equacions anteriors trobant les amplituds per al cas en què a $t = 0$ estan totes en els punts d'equilibri corresponents i en repòs excepte la segona massa, que, des de $s_2 = 0$, surt disparada amb una velocitat inicial v_0 cap a la tercera partícula.



Resp.: a) $\omega_1^2 = \frac{k}{m}$, $\omega_2^2 = \frac{3k}{m}$, $\omega_3^2 = \frac{4k}{m}$;

b) Si A_n i ϕ_n , per a $n = 1, 2, 3$, són constants que depenen de les condicions inicials, llavors el moviment més general ve donat per

$$\begin{pmatrix} s_1(t) \\ s_2(t) \\ s_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) \\ A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) \\ A_3 \cos(\omega_3 t + \phi_3) \end{pmatrix}$$

c) $s_1(t) = s_3(t) = \frac{v_0}{3\omega_1} \sin \omega_1 t - \frac{v_0}{3\omega_3} \sin \omega_3 t$,

$$s_2(t) = \frac{2v_0}{3\omega_1} \sin \omega_1 t + \frac{v_0}{3\omega_3} \sin \omega_3 t$$

Problema 8.20. Oscil·lacions acoblades forçades, 1

En el sistema de dos oscil·ladors representats a la figura 8.36 la paret a la qual està unit el primer vibra efectuant un MHS d'amplitud a i freqüència angular ω . Esbrineu les amplituds dels moviments de les dues partícules a l'estat estacionari.

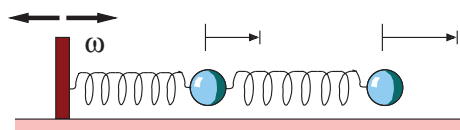


Figura 8.36

Resp.: $s_1 = A_1 \cos \omega t$, $s_2 = A_2 \cos \omega t$, $A_1 = \frac{k_1(k_2 - m_2 \omega^2)a}{D}$, $A_2 = \frac{k_1 k_2 a}{D}$,

amb $D = m_1 m_2 \omega^4 - (k_1 m_2 + k_2 m_1 + k_2 m_2) \omega^2 + k_1 k_2$

Problema 8.21. Oscil·lacions acoblades forçades, 2

En el sistema de dos oscil·ladors longitudinals representats a la figura 8.37, les constants de les molles són k_1 , k_a i k_2 , respectivament, mentre que les dues masses són iguals a m . Si sobre la primera partícula actua la força externa harmònica $F_1 \cos \omega t$ i sobre la segona, la $F_2 \cos \omega t$, ambdues en la direcció de les molles, esbrineu els moviments d'ambdues partícules a l'estat estacionari.

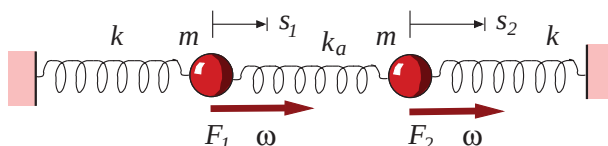


Figura 8.37

Resp.: $s_1 = A_1 \cos \omega t$, $s_2 = A_2 \cos \omega t$,

$$A_1 = \frac{F_1(k_a + k_2 - m\omega^2) + F_2 k_a}{m^2 D}, \quad A_2 = \frac{F_2(k_a + k_1 - m\omega^2) + F_1 k_a}{m^2 D},$$

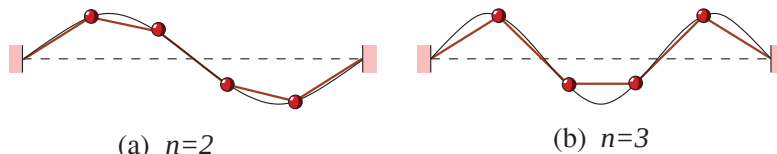
amb $D = m^2 \omega^4 - m(k_1 + 2k_a + k_2) \omega^2 + k_a(k_1 + k_2) + k_1 k_2$

Problema 8.22. Sobre la corda discreta

Com hem vist a l'exemple 8.3, podem esquematitzar fàcilment els N modes normals d'oscil·lació —sense fer cap càlcul— representant la gràfica de la funció $a_n(x)$ de (8.41) entre $x = 0$ i $x = Nh = L$: les partícules estaran sobre la corba sinusoidal a $x = ih$, $i = 1, \dots, N$. Reflexioneu què passaria per a $N = 4$.

Resp.: Per exemple, per a $n = 2$ i $n = 3$ —de $N = 4$ — queden, com es mostra a la figura 8.38,

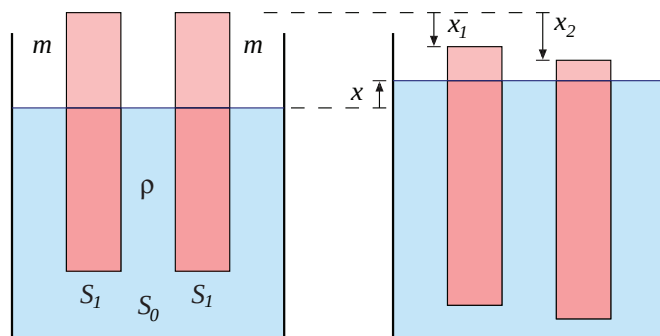
Figura 8.38



Problema 8.23. Principi d'Arquimedes i oscil·ladors acoblats

Al problema 1.7 hem vist com un bloc flotador de secció recta constant efectua oscil·lacions harmòniques simples pujant i baixant del líquid quan se'l treu de l'estat d'equilibri. Considerem ara un recipient cilíndric alt, de secció recta S_0 , amb líquid de densitat ρ fins a un nivell determinat, amb dos flotadors idèntics, de massa m i secció recta S_1 . A la figura 8.39 esquerra, es mostra el sistema en equilibri. Està clar que si, des de la posició d'equilibri, un flotador s'enfonsa x_1 i l'altre x_2 , llavors el nivell del líquid pujarà l'altura x —amb signes!— donada per $(x_1 + x_2)S_1 = -x(S_0 - 2S_1)$ i, si un flotador fa pujar el nivell del líquid en el recipient, això afecta l'altre flotador —v. figura 8.39 dreta. Tenim, doncs, dos oscil·ladors, els dos flotadors, amb l'acoblament que fa el líquid. Suposant que el líquid no se surti del recipient, ni els flotadors toquin el fons, etc., estudeu les oscil·lacions acoblades del sistema i esbrineu quant valen les dues freqüències pròpies. Fixeu-vos que aquest oscil·lador és equivalent al de molles i masses de l'exemple 8.1. En quines condicions hi haurà oscil·lacions polsants?

Figura 8.39



Resp.: $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, $\omega_2 = \sqrt{\frac{k+2k_a}{m}}$, amb $k = \rho g S_1$, $k_a = k \frac{S_1}{S_0 - 2S_1}$. Si $S_1 \ll S_0$.



Repàs de matemàtiques

A.1. Trigonometria

A.1.1. Triangles

- Per al triangle rectangle de la figura A.1 (a), tenim

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} \quad \cos \alpha = \frac{b}{c} \quad \tan \alpha = \frac{a}{b} \quad (\text{A.1})$$

$$\sec \alpha = \frac{c}{b} \quad \operatorname{cosec} \alpha = \frac{c}{a} \quad \cotg \alpha = \frac{b}{a} \quad (\text{A.2})$$

i d'aquestes definicions tenim, entre altres relacions,

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad \cotg \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} \quad (\text{A.3})$$

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} \quad \operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha} \quad (\text{A.4})$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad \sec^2 \alpha - 1 = \tan^2 \alpha \quad (\text{A.5})$$

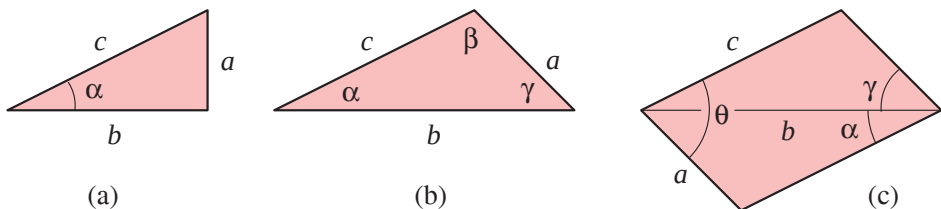


Figura A.1

- Per a un triangle qualsevol com el de la figura A.1 (b) anterior, tenim

$$\text{Suma dels angles:} \quad \alpha + \beta + \gamma = \pi \quad (\text{A.6})$$

$$\text{Llei dels sinus:} \quad \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} \quad (\text{A.7})$$



$$\text{Llei del cosinus: } b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta \quad (\text{A.8})$$

$$\text{Llei de la tangent: } \frac{a+b}{a-b} = \frac{\tan \frac{1}{2}(\alpha + \beta)}{\tan \frac{1}{2}(\alpha - \beta)} \quad (\text{A.9})$$

$$\text{Si } p = \frac{1}{2}(a+b+c), \quad \sin \alpha = \frac{2}{bc} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad (\text{A.10})$$

$$\text{Àrea del triangle: } A = \frac{1}{2}bc \sin \alpha \quad (\text{A.11})$$

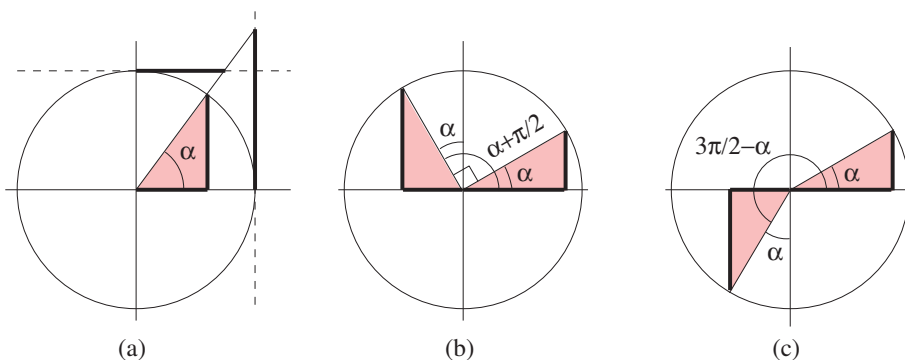
- Del rombe de la figura A.1 (c), tenim

$$\text{Mòdul de la suma de dos vectors: } b^2 = a^2 + c^2 + 2ac \cos \theta, \quad \theta = \alpha + \gamma \quad (\text{A.12})$$

A.1.2. Trigonometria

A la figura A.2 (a), mostrem una circumferència de radi la unitat i un punt P sobre ella. Els punts P , O i A determinen un triangle rectangle, i els segments OA i OP l'angle α .

Figura A.2



Amb la notació de la figura A.2, tenim que els valors de les funcions trigonomètriques de l'angle α són les longituds dels segments corresponents

$$\sin \alpha = \overline{AP} \quad \cos \alpha = \overline{OA} \quad \tan \alpha = \overline{BD} \quad \cotg \alpha = \overline{CE}$$

però amb signe: el sinus i la tangent són negatius si $\overline{AP}$ i $\overline{BD}$ van dirigits cap a les y decreixents, i el cosinus i la cotangent són negatius si $\overline{OA}$ i $\overline{CE}$ van dirigits cap a les x decreixents.

Aquesta representació gràfica de les funcions sinus, cosinus, etc. va molt bé com a regla mnemotècnica per recordar ràpidament relacions entre els valors de les funcions trigonomètriques d'un angle amb els del seu complementari, suplementari, etc. Per exemple, de la figura A.2 (b) veiem immediatament que

$$\cos \left(\alpha + \frac{\pi}{2} \right) = \overline{OA'} = -\overline{AP} = -\sin \alpha$$

I de la figura A.2 (c), per exemple

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \overline{A'P'} = -\overline{OA} = -\cos \alpha$$

En general, els resultats més importants són

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha \quad \cos(-\alpha) = \cos \alpha \quad (\text{A.13})$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \cos \alpha \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \mp \sin \alpha \quad (\text{A.14})$$

$$\sin(\pi \pm \alpha) = \mp \sin \alpha \quad \cos(\pi \pm \alpha) = -\cos \alpha \quad (\text{A.15})$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} \pm \alpha\right) = -\cos \alpha \quad \cos\left(\frac{3\pi}{2} \pm \alpha\right) = \pm \sin \alpha \quad (\text{A.16})$$

Atenció: Fixem-nos que $\sin \alpha = \sin(\pi - \alpha)$, de manera que el coneixement del sinus d'un angle no el determina, ni tan sols entre 0 i 2π . En efecte, hi ha dos valors possibles: α i $\pi - \alpha$. Per exemple, l'arcsinus de $1/2$ igual pot ser $\alpha = \pi/6$ que $\alpha = 5\pi/6$. Quin dels dos angles és el bo? Depèn de les altres dades del cas; si sabem, per exemple, que el $\cos \alpha$ és negatiu, llavors, $\alpha = 5\pi/6$. I el mateix es pot dir de les altres funcions trigonomètriques. Cal anar amb molt de compte amb les calculadores: les funcions $\arcsin x$, $\arccos x$, etc. només retornen un dels dos angles possibles i ha de ser el propi usuari, amb totes les dades del problema, qui ha de decidir quin dels dos angles és el que correspon al seu cas.

α	$0 = 0^0$	$\frac{\pi}{6} = 30^0$	$\frac{\pi}{4} = 45^0$	$\frac{\pi}{3} = 60^0$	$\frac{\pi}{2} = 90^0$	Sinus, cosinus i tangent d'alguns angles
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	
$\tan \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	

A.1.3. Igualtats trigonomètriques d'ús freqüent

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \quad (\text{A.17})$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \quad (\text{A.18})$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} \quad (\text{A.19})$$

$$A \sin \alpha + B \cos \alpha = \sqrt{A^2 + B^2} \sin(\alpha + \phi), \quad \text{amb } \tan \phi = B/A \quad (\text{A.20})$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \quad (\text{A.21})$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \quad (\text{A.22})$$



$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \quad (\text{A.23})$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \quad (\text{A.24})$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha) \quad (\text{A.25})$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha) \quad (\text{A.26})$$

$$\cos^3 \alpha = \frac{1}{4}(3 \cos \alpha + \cos 3\alpha) \quad (\text{A.27})$$

$$\sin^3 \alpha = \frac{1}{4}(3 \sin \alpha - \sin 3\alpha) \quad (\text{A.28})$$

$$\cos^5 \alpha = \frac{1}{16}(10 \cos \alpha + 5 \cos 3\alpha + \cos 5\alpha) \quad (\text{A.29})$$

També tenim

$$\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} \quad \cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} \quad (\text{A.30})$$

$$\sin \alpha = \frac{\tan \alpha}{\pm \sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} \quad \cos \alpha = \frac{1}{\pm \sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} \quad (\text{A.31})$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}} \quad \tan \alpha = \frac{\pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}{\cos \alpha} \quad (\text{A.32})$$

Altres igualtats d'interès són

$$\sin[(m+1)\alpha] = 2 \sin m\alpha \cos \alpha - \sin[(m-1)\alpha] \quad (\text{A.33})$$

$$\cos[(m+1)\alpha] = 2 \cos m\alpha \cos \alpha - \cos[(m-1)\alpha] \quad (\text{A.34})$$

$$\frac{1}{2} + \cos \alpha + \cos 2\alpha + \dots + \cos N\alpha = \frac{\sin[(N+1/2)\alpha]}{2 \sin(\alpha/2)} \quad (\text{A.35})$$

$$\sin \alpha + \sin 2\alpha + \dots + \sin N\alpha = \frac{\sin[(N+1)\alpha/2] \cdot \sin(N\alpha/2)}{\sin(\alpha/2)} \quad (\text{A.36})$$

A.1.4. Exercicis proposats de trigonometria

Problema A.1. Igualtats trigonomètriques

Demostreu les igualtats trigonomètriques següents:

a) $\tan\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\tan \alpha},$

b) $\tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\frac{1}{\tan \alpha}$



$$c) \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4},$$

$$d) \tan \frac{5\pi}{12} = 2 + \sqrt{3},$$

$$e) \cos \frac{5\pi}{4} = \frac{-\sqrt{2}}{2}$$

$$f) \cos 3\alpha = 4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha,$$

$$g) \sin 3\alpha = 3\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha,$$

$$h) \tan 2\alpha = \frac{2\tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

$$i) \cos^4 \alpha = \frac{1}{8}(3 + 4\cos 2\alpha + \cos 4\alpha)$$

j) així com

$$\cos^2 \alpha \cos 3\alpha = \frac{1}{4} \cos \alpha + \frac{1}{2} \cos 3\alpha + \frac{1}{4} \cos 5\alpha \quad (\text{A.37})$$

A.1.5. Funcions hiperbòliques

- Definicions:

$$\sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}, \quad \cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \quad \operatorname{tgh} = \frac{\sinh t}{\cosh t} \quad (\text{A.38})$$

- Algunes relacions útils:

$$\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1 \quad (\text{A.39})$$

$$\sinh(t_1 \pm t_2) = \sinh t_1 \cosh t_2 \pm \cosh t_1 \sinh t_2 \quad (\text{A.40})$$

$$\cosh(t_1 \pm t_2) = \cosh t_1 \cosh t_2 \pm \sinh t_1 \sinh t_2 \quad (\text{A.41})$$

$$\sinh 2t = 2 \sinh t \cosh t \quad (\text{A.42})$$

$$\cosh 2t = \cosh^2 t + \sinh^2 t \quad (\text{A.43})$$

$$\sinh t_1 + \sinh t_2 = 2 \sinh \frac{t_1 + t_2}{2} \cosh \frac{t_1 - t_2}{2} \quad (\text{A.44})$$

$$\sinh t_1 - \sinh t_2 = 2 \cosh \frac{t_1 + t_2}{2} \sinh \frac{t_1 - t_2}{2} \quad (\text{A.45})$$

$$\cosh t_1 + \cosh t_2 = 2 \cosh \frac{t_1 + t_2}{2} \cosh \frac{t_1 - t_2}{2} \quad (\text{A.46})$$

$$\cosh t_1 - \cosh t_2 = 2 \sinh \frac{t_1 + t_2}{2} \sinh \frac{t_1 - t_2}{2} \quad (\text{A.47})$$



- Funcions hiperbòliques inverses:

$$\sinh^{-1} t = \ln \left(t + \sqrt{t^2 + 1} \right), \quad -\infty < t < \infty \quad (\text{A.48})$$

$$\cosh^{-1} t = \ln \left(t + \sqrt{t^2 - 1} \right), \quad t \geq 1 \quad (\text{A.49})$$

- Període de les funcions hiperbòliques: $2\pi i$

$$\sinh(t + 2k\pi i) = \sinh t, \quad \cosh(t + 2k\pi i) = \cosh t \quad (\text{A.50})$$

- Relacions entre les funcions hiperbòliques i les trigonomètriques:

$$\sin(it) = i \sinh t, \quad \cos(it) = \cosh t, \quad \tan(it) = i \tanh t \quad (\text{A.51})$$

$$\sin^{-1}(it) = i \sinh^{-1} t, \quad \cos^{-1} t = \pm i \cosh^{-1} t, \quad \tan^{-1}(it) = i \tanh^{-1} t \quad (\text{A.52})$$

- Equació diferencial de la qual són solució: $\frac{d^2 x}{dt^2} + \alpha x = 0$. Si $\omega = \sqrt{|\alpha|}$, llavors

• si $\alpha > 0$: $x(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$

• si $\alpha < 0$: $x(t) = A \cosh \omega t + B \sinh \omega t$

on A i B estan determinades per les condicions inicials.

A.2. Sèries de Taylor i aproximacions de funcions

Recordem que una funció $y = f(x)$ que té derivades contínues de tots els ordres en un interval de la variable independent x es pot desenvolupar en *sèrie de Taylor* al voltant del punt x_0 de la forma

$$f(x) = f(x_0) + \left(\frac{df}{dx} \right)_{x_0} (x - x_0) + \frac{1}{2!} \left(\frac{d^2 f}{dx^2} \right)_{x_0} (x - x_0)^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{d^3 f}{dx^3} \right)_{x_0} (x - x_0)^3 + \dots \quad (\text{A.53})$$

Si $x_0 = 0$, el desenvolupament anterior sovint s'anomena *sèrie de Maclaurin*. A continuació, es mostren les sèries —i els respectius radis de convergència— que resulten d'aplicar aquest desenvolupament a les funcions següents:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \quad -\infty < x < +\infty \quad (\text{A.54})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \quad -\infty < x < +\infty \quad (\text{A.55})$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - \dots \quad |x| < \frac{\pi}{2} \quad (\text{A.56})$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots \quad -\infty < x < +\infty \quad (\text{A.57})$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots \quad -1 < x \leq 1 \quad (\text{A.58})$$

- Si $|x| \ll 1$, aproximacions en primer ordre de les funcions anteriors són

$$\sin x \approx x, \quad \cos x \approx 1, \quad \tan x \approx x \quad (\text{A.59})$$

$$e^x \approx 1 + x, \quad \ln(1 + x) \approx x \quad (\text{A.60})$$

En ocasions, convé una *aproximació de segon ordre* del cosinus que, per (A.55), és

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2} \quad (\text{A.61})$$

Si $|x| < 1$, el desenvolupament de la funció $(1 + x)^q$ és

$$(1 + x)^q = 1 + qx + \frac{q(q-1)}{2!}x^2 + \frac{q(q-1)(q-2)}{3!}x^3 - \dots \quad (\text{A.62})$$

que constitueix l'anomenada *sèrie binomial*. Aquest resultat es pot estendre amb facilitat a desenvolupaments com, per exemple, el següent. Si $x = e^{-pt}$, $p > 0$, $t > 0$, aleshores, tenim

$$\frac{1}{1 - e^{-pt}} = 1 + e^{-pt} + e^{-2pt} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-npt} \quad (\text{A.63})$$

Si $|x| \ll 1$, una aproximació en primer ordre de la sèrie binomial (A.62) és

$$(1 + x)^q \approx 1 + qx \quad (\text{A.64})$$

Per exemple, si $|x| \ll 1$

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x, \quad \frac{1}{1+x} \approx 1 - x, \quad \frac{1}{(1-x^2)^{3/2}} \approx 1 + \frac{3}{2}x^2 \quad (\text{A.65})$$

o també, per (A.62), en segon ordre

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 \quad (\text{A.66})$$

A continuació es mostren dues taules amb els errors relatius de les aproximacions lineals anteriors per a diversos valors de x .

θ (rad)	θ ($^\circ$)	$\sin \theta$	$ER^{(1)} \sin$	$\cos \theta$	$ER^{(2)} \cos$	$\tan \theta$	$ER^{(3)} \tan$	Errors relatius (ER) en les aproximacions lineals del sinus, el cosinus i la tangent
0,001	$\approx 0^0,057$	0,00100	$-1,7 \times 10^{-7}$	1,00000	$-5,0 \times 10^{-7}$	0,00100	$+3,3 \times 10^{-7}$	
0,01	$\approx 0^0,57$	0,01000	$-1,7 \times 10^{-5}$	0,99995	$-5,0 \times 10^{-5}$	0,01000	$+3,3 \times 10^{-5}$	
0,1	$\approx 5^0,7$	0,09983	$-1,7 \times 10^{-3}$	0,99500	$-5,0 \times 10^{-3}$	0,10033	$+3,3 \times 10^{-3}$	
0,2	$\approx 11^0,5$	0,19867	$-6,7 \times 10^{-3}$	0,98007	$-2,0 \times 10^{-2}$	0,20271	$+1,3 \times 10^{-2}$	
0,4	$\approx 22^0,9$	0,38941	$-2,7 \times 10^{-2}$	0,92106	$-8,6 \times 10^{-2}$	0,42279	$+5,4 \times 10^{-2}$	
0,8	$\approx 45^0,8$	0,717	$-1,2 \times 10^{-1}$	0,697	$-4,3 \times 10^{-1}$	1,030	$+2,2 \times 10^{-1}$	



Errors relatius (ER) en les aproximacions lineals de l'exponencial, el logaritme i la binomial

x	e^x	$ER^{(4)} e^x$	$\ln(1+x)$	$ER^{(5)} \ln(1+x)$	$\sqrt{1+x}$	$ER^{(6)} \sqrt{1+x}$
0,001	1,00100	$5,0 \times 10^{-7}$	0,00999	$-5,0 \times 10^{-4}$	1,00050	$-1,3 \times 10^{-7}$
0,01	1,01005	$5,0 \times 10^{-5}$	0,00995	$-5,0 \times 10^{-3}$	1,00499	$-1,2 \times 10^{-5}$
0,1	1,10517	$4,7 \times 10^{-3}$	0,09531	$-4,9 \times 10^{-2}$	1,04881	$-1,2 \times 10^{-3}$
0,2	1,22140	$1,7 \times 10^{-2}$	0,18232	$-9,7 \times 10^{-2}$	1,09545	$-4,1 \times 10^{-3}$
0,4	1,49182	$6,2 \times 10^{-2}$	0,33647	$-1,9 \times 10^{-2}$	1,18322	$-1,4 \times 10^{-2}$
0,8	2,226	$1,9 \times 10^{-1}$	0,588	$-3,6 \times 10^{-1}$	1,342	$-4,4 \times 10^{-2}$

Nota: Els errors relatius de les taules anteriors, ER , s'han estimat a partir del primer terme no lineal del desenvolupament de Taylor corresponent, tal com s'indica a continuació.

$$(1): ER = \frac{\sin \theta - \theta}{\sin \theta} \approx -\frac{\theta^3/6}{\theta} = -\frac{\theta^2}{6}$$

$$(2): ER = \frac{\cos \theta - 1}{\cos \theta} \approx -\frac{\theta^2/2}{1} = -\frac{\theta^2}{2}$$

$$(3): ER = \frac{\tan \theta - \theta}{\tan \theta} \approx +\frac{\theta^3/3}{\theta} = +\frac{\theta^2}{3}$$

$$(4): ER = \frac{e^x - (1+x)}{e^x} \approx \frac{x^2/2}{1+x} \approx +\frac{x^2}{2}$$

$$(5): ER = \frac{\ln x - x}{\ln x} \approx -\frac{x^2/2}{x} \approx -\frac{x}{2}$$

$$(6): ER = \frac{\sqrt{1+x} - (1 + \frac{1}{2}x)}{\sqrt{1+x}} \approx +\frac{x^2/8}{1 + \frac{1}{2}x} \approx -\frac{x^2}{8}$$

Exemple A.1. Aproximació d'una funció transcendent

a) La funció $F(x)$ està definida per la integral següent:

$$F(x) = \int_0^x e^{-at^2} dt \quad (1)$$

Feu una aproximació de la funció $F(x)$ vàlida per a valors de $|x|$ petits.

b) Aproveiteu aquest resultat per obtenir una aproximació a la funció estadística $\text{fer}(x)$

$$\text{fer}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt \quad (2)$$

de la qual sabem que $\text{fer}(\infty) = 1$ i, per tant, $\text{fer}(0) = 1/2$.

Solució

a) Aquesta integral no té primitiva en termes de funcions elementals. Però sí que podem desenvolupar en sèrie de Maclaurin la funció exponencial $f(t) = e^{-at^2}$ i integrar (1) terme a terme. Per al desenvolupament, fem:

- Primera derivada a $t = 0$: $f'(t) = -2at e^{-at^2}$, d'on surt: $f'(t = 0) = 0$.
- Continuant la derivació es troba: $f''(t = 0) = -2a$, $f'''(t = 0) = 0$, la segona i la tercera derivada $f''(t) = -2a e^{-at^2} (1 + 2at^2 e^{-at^2})$, d'on surt: $f''(t = 0) = -2a$



d'on tenim, per (A.53),

$$f(t) = e^{-at^2} \approx 1 - at^2 \quad (3)$$

desenvolupament aproximat fins al tercer ordre (t^3).

Ara, per (1) i (3), la funció $F(x)$ queda, aproximadament, com:

$$F(a, x) \approx \int_0^x (1 - at^2) dt = x - \frac{1}{3}ax^3 \quad (4)$$

correcte fins al quart ordre (x^4).

b) Pel que fa a la funció $\text{fer}(x)$, comparant (1) amb (2) i per (4) tenim que

$$\text{fer}(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[F(x) \right]_{a=1/2} \approx \frac{1}{2} + \frac{x - \frac{x^3}{6}}{\sqrt{2\pi}} \quad (5)$$

Per a $x = 0,100$, $x = 0,500$ i $x = 1,00$, l'aproximació (5) proporciona 0,5398, 0,6912 i 0,832, respectivament, mentre que els valors corresponents que apareixen a les taules estadístiques són 0,5398, 0,6915 i 0,8413. Veiem, doncs, que l'aproximació és molt bona a tot $0 \leq x \leq 0,5$. De qualsevol manera, encara que no coneguéssim els valors tabulats de $\text{fer}(x)$, podríem fer una estimació bastant acurada de l'error comès per (5) a partir del desenvolupament de (3) incloent-hi el terme amb t^4 .

A.2.1. Exercicis proposats sobre l'aproximació de funcions

Problema A.2. Límit de les aproximacions

Quin valor màxim de θ podem prendre si volem que les dues aproximacions:

$$\sin \theta \approx \theta \quad \cos \theta \approx 1$$

siguin vàlides amb un error absolut inferior a $0,5 \times 10^{-4}$ —tres xifres exactes?

Resp.: $|\theta| < 0,14 \text{ rad} = 8,3^\circ$

Problema A.3. Aproximació de funcions

Demostreu les aproximacions següents:

a) Si $a \gg b$: $\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 \cos^2 \theta}} \approx \frac{1}{a} \left(1 - \frac{b^2}{2a^2} \cos^2 \theta \right)$

b) Si $|x| \ll 1$, i β i k constants: en primer ordre: $e^{-\beta x} \cos kx \approx 1 - \beta x$, i, en segon ordre: $e^{-\beta x} \cos kx \approx 1 - \beta x + \frac{\beta^2 - k^2}{2} x^2$

c) Demostreu que, si $|x| \ll 1$: $e^{-x^2} \approx \cos^2 x$.



A.3. Algunes integrals freqüents

A.3.1. Algunes integrals indefinides

- Mètode de la integració per parts

Siguin $u(t)$ i $v(t)$ dues funcions de t . Aleshores, tenim que $d(u \cdot v) = u dv + v du$, i, per tant

$$\int u dv = uv - \int v du \quad (\text{A.67})$$

- Algunes integrals indefinides de funcions algebraiques

$$\int \sqrt{a^2 - t^2} dt = \frac{1}{2} t \sqrt{a^2 - t^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{t}{a} \quad (\text{A.68})$$

$$\int \frac{dt}{\sqrt{a^2 - t^2}} = \arcsin \frac{t}{a} \quad (\text{A.69})$$

$$\int \frac{t^2 dt}{\sqrt{a^2 - t^2}} = -\frac{t \sqrt{a^2 - t^2}}{2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{t}{a} \quad (\text{A.70})$$

- Integrals indefinides trigonomètriques

$$\int \sin^2 t dt = \frac{t}{2} - \frac{1}{4} \sin 2t \quad (\text{A.71})$$

$$\int \cos^2 t dt = \frac{t}{2} + \frac{1}{4} \sin 2t \quad (\text{A.72})$$

$$\int \tan at dt = -\frac{1}{a} \ln |\cos at| \quad (\text{A.73})$$

$$\int e^{at} \sin bt dt = \frac{e^{at}(a \sin bt - b \cos bt)}{a^2 + b^2} \quad (\text{A.74})$$

$$\int e^{at} \cos bt dt = \frac{e^{at}(a \cos bt + b \sin bt)}{a^2 + b^2} \quad (\text{A.75})$$

$$\int e^{at} \sin^2 bt dt = \frac{e^{at}}{a^2 + 4b^2} \left[(a \sin bt - 2b \cos bt) \sin bt + \frac{2b^2}{a} \right] \quad (\text{A.76})$$

A.3.2. Algunes integrals trigonomètriques definides

A continuació presentem una llista breu d'algunes integrals definides amb sinus i cosinus d'aparició freqüent. Aquí m i n són dos nombres enters, i ω un nombre real qualsevol.



$$\int_0^{2\pi/\omega} \sin \omega t \, dt = \int_0^{2\pi/\omega} \cos \omega t \, dt = \int_0^{2\pi/\omega} \sin \omega t \cos \omega t \, dt = 0 \quad (\text{A.77})$$

$$\int_0^{2\pi/\omega} \sin m\omega t \, dt = \int_0^{2\pi/\omega} \cos m\omega t \, dt = 0 \quad (\text{A.78})$$

$$\int_0^{2\pi/\omega} \sin^2 m\omega t \, dt = \int_0^{2\pi/\omega} \cos^2 m\omega t \, dt = \frac{\pi}{\omega} \quad (\text{A.79})$$

$$\int_0^{2\pi/\omega} \sin m\omega t \sin n\omega t \, dt = \int_0^{2\pi/\omega} \cos m\omega t \cos n\omega t \, dt = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ \pi/\omega & \text{si } m = n \end{cases} \quad (\text{A.80})$$

$$\int_0^{2\pi/\omega} \sin m\omega t \cos n\omega t \, dt = 0 \quad (\text{A.81})$$

$$\int_0^\pi \sin m\theta \sin n\theta \, d\theta = \int_0^\pi \cos m\theta \cos n\theta \, d\theta = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ \pi/2 & \text{si } m = n \end{cases} \quad (\text{A.82})$$

$$\int_0^\pi \sin m\theta \cos n\theta \, d\theta = \begin{cases} 0 & \text{si } m+n \text{ senar} \\ 2m/(m^2 - n^2) & \text{si } m+n \text{ parell} \end{cases} \quad (\text{A.83})$$

Altres integrals definides d'us freqüent són

$$\int_0^\infty e^{-at^2} \, dt = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad (\text{A.84})$$

$$\int_0^\infty e^{-at^2} \cos \omega t \, dt = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\omega^2/4a} \quad (\text{A.85})$$

A.4. Valor mitjà d'una funció

En general, donada la funció $x = x(t)$, integrable a l'interval $[t_1, t_2]$, es defineix el *valor mitjà* de la funció en aquest interval, que representarem per $\langle x \rangle$, com el quocient

$$\langle x \rangle = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} x(t) \, dt \quad (\text{A.86})$$

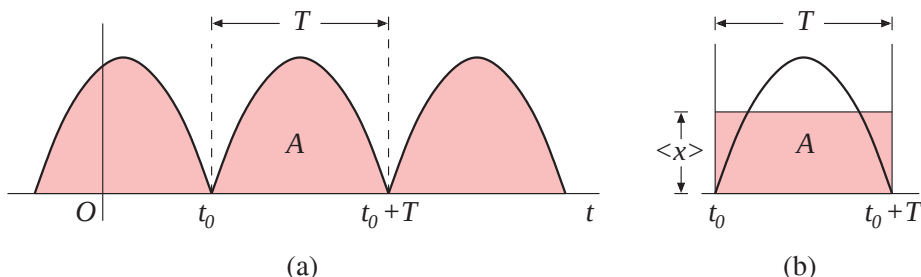
Si la funció $x(t)$ és periòdica, el valor mitjà de la funció es calcula com a (A.86), però prenent $t_1 = t_0$, i $t_2 = t_0 + T$, essent T el període de la funció $x(t)$, és a dir,

$$\langle x \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \, dt \quad (\text{A.87})$$

A la figura A.3 (a), s'ha representat una funció periòdica i, a la figura A.3 (b), el significat geomètric que té el valor mitjà $\langle x \rangle$ de la funció. Si la integral de (A.87) dona l'àrea A determinada per la funció entre t_0 i $t_0 + T$, $\langle x \rangle$ ha de ser l'altura del rectangle de longitud T tal que $\langle x \rangle \cdot T = A$.



Figura A.3



Recordem que, si una funció es fa negativa al llarg d'un interval determinat, la integral corresponent que hi ha a (A.87) també es fa negativa. Això vol dir que, si tenim una funció tal que al llarg d'un període canvia de signe de manera que la seva integral és 0, el seu valor mitjà també és 0, com és previsible. Aquest és el cas de les funcions $\sin t$, $\cos t$, etc.

Exemple A.2. Valors mitjans de $|\sin t|$ i de $\sin^2 t$

Esbrineu quins són els valors mitjans de les funcions següents al llarg d'un període:

a) $x = \sin t$, b) $x = |\sin t|$, c) $x = \sin^2 t$

Solució

a) Funció $x = \sin t$

Aquesta funció pren els mateixos valors positius i negatius i, com acabem de veure, el seu valor mitjà és 0. Efectivament, com que el seu període és $T = 2\pi$, aplicant-hi la definició (A.87) tenim:

$$\langle \sin t \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin t \, dt = \frac{1}{2\pi} (-\cos 2\pi + \cos 0) = 0 \quad (\text{A.88})$$

b) Funció $x = |\sin t|$

En prendre el valor absolut de la funció anterior, el període queda reduït a la meitat, $T = \pi$. Consegüentment, tenim

$$\langle |\sin t| \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin t \, dt = \frac{2}{\pi} \quad (\text{A.89})$$

c) Funció $x = \sin^2 t$

Igualment, en elevar al quadrat el sinus el període, també queda reduït a la meitat. Utilitzant la igualtat trigonomètrica (A.25), tindrem:

$$\langle \sin^2 t \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin^2 t \, dt = \frac{1}{\pi} \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (1 - \cos 2t) \, dt = \frac{1}{\pi} \frac{1}{2} \pi = \frac{1}{2} \quad (\text{A.90})$$

És immediat comprovar que en aquests tres casos s'obtenen els mateixos resultats posant:

- ωt en comptes de t en els sinus de les funcions anteriors, essent ω una constant;
- cosinus en comptes del sinus.

A.4.1. Exercicis proposats sobre valor mitjàs de funcions

Problema A.4. Valor mitjà d'una funció

Trobeu el valor mitjà de la funció periòdica definida a la figura A.4:

$$x(t) = |t| = \begin{cases} t, & \text{si } 0 < t < \pi \\ -t, & \text{si } -\pi < t < 0 \end{cases} \quad (\text{A.91})$$

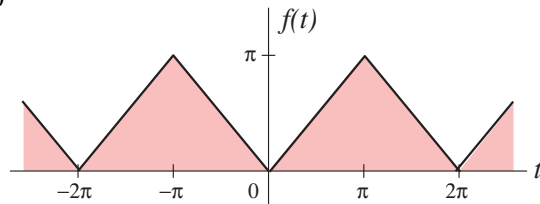


Figura A.4

Resp.: $\langle x \rangle = \frac{\pi}{2}$

Problema A.5. Valor mitjà quadràtic

El *valor mitjà quadràtic* d'una funció $x = x(t)$ a l'interval $[t_1, t_2]$, que representem per $\sqrt{\langle x^2 \rangle}$, es defineix com l'arrel quadrada del valor mitjà de la funció al quadrat, és a dir,

$$\sqrt{\langle x^2 \rangle} = \sqrt{\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} x^2(t) dt}$$

Trobeu el valor mitjà quadràtic de les dues funcions: a) $x(t) = \sin t$, i b) la funció $f(t)$ periòdica definida per la figura A.5:

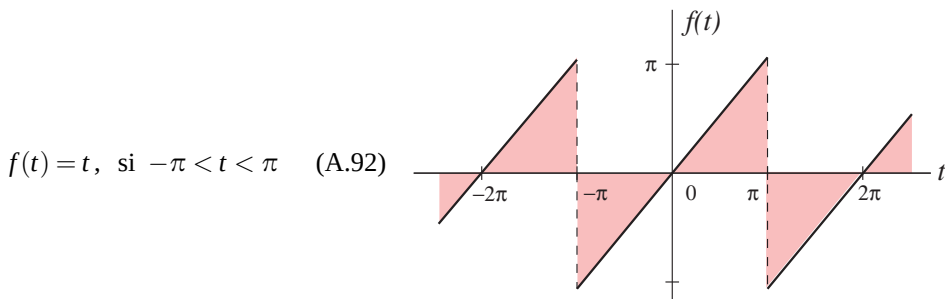


Figura A.5

Resp.: a) $\sqrt{\langle x^2 \rangle} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, b) $\sqrt{\langle f^2 \rangle} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$

A.5. Integrals el·líptiques

Com que en bastants problemes d'oscil·lacions apareixen *integrals el·líptiques*, n'incloem aquest resum breu.

Les integrals el·líptiques són aquelles de la forma:

$$\int \mathcal{R}(x, r) dx, \quad \text{amb} \quad r = \sqrt{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4} \quad (\text{A.93})$$



on $\mathcal{R}$ representa una funció racional de x i r . Aquestes integrals no es poden calcular en termes d'expressions finites de funcions elementals. Es pot demostrar que qualsevol integral com l'anterior pot reduir-se a una dels tres tipus següents:

si $0 < k < 1$ i $u = \sin \varphi$,

- Integral el·líptica de primera espècie

$$F(k, \phi) = \int_0^\phi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = \int_0^u \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}} = F(k, u) \quad (\text{A.94})$$

- Integral el·líptica de segona espècie

$$E(k, \phi) = \int_0^\phi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi = \int_0^u \sqrt{\frac{1 - k^2 z^2}{1 - z^2}} dz = E(k, u) \quad (\text{A.95})$$

- Integral el·líptica de tercera espècie

$$\begin{aligned} \Pi(k, n, \phi) &= \int_0^\phi \frac{d\varphi}{(1 + n \sin^2 \varphi) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = \int_0^u \frac{dz}{(1 + n z^2) \sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}} = \\ &= \Pi(k, n, u) \end{aligned} \quad (\text{A.96})$$

Si a les integrals anteriors fem $\phi = \pi/2$ i, per tant, $u = 1$, s'anomenen *integrals el·líptiques completes* de primera, etc. espècie. Fent desenvolupaments en sèrie, es troba, per a les dues primeres:

$$F(k, \phi = \pi/2, u = 1) = \frac{\pi}{2} \left\{ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 k^4 + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 k^6 + \dots \right\} \quad (\text{A.97})$$

$$E(k, \phi = \pi/2, u = 1) = \frac{\pi}{2} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 - \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \frac{k^4}{3} - \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \frac{k^6}{5} - \dots \right\} \quad (\text{A.98})$$

Com es mostra a la secció §7.2.1, el període exacte del pèndol simple per a oscil·lacions no petites depèn de l'amplitud d'aquestes segons una integral el·líptica de primera espècie com la (A.97).



Equacions diferencials ordinàries (EDO)

Una equació diferencial és una igualtat que conté funcions desconegudes i les seves derivades. Malgrat que a la física apareguin moltes menes d'equacions diferencials, en aquesta explicació breu ens limitem al cas de les *equacions diferencials ordinàries (EDO) lineals a coeficients constants*, que essent de les més senzilles són de gran interès en camps com el de les oscil·lacions, els circuits elèctrics, etc.

B.1. EDO lineals a coeficients constants

L'aplicació matemàtica de moltes lleis bàsiques de la física acaba sovint en una equació diferencial. La segona llei de Newton n'és un bon exemple. Vegem un parell de casos com a introducció a les equacions diferencials.

Exemple B.1. EDO de variables separables

Estudieu el moviment d'un cos que cau des d'una altura determinada en el si de l'aire. El cos comença a caure sense velocitat inicial i es pren com a punt de partida l'origen d'un sistema de coordenades en què l'eix x és vertical dirigit cap avall.

Solució

Sigui m la massa del cos. Aquest és sotmès a dues forces: el seu pes, mg , constant, i la força de fricció viscosa amb l'aire, que és de sentit contrari a la velocitat v i que suposem proporcional a aquesta, és a dir, $-bv$, essent b una constant positiva. La suma d'aquestes dues forces és igual a la massa per l'acceleració del cos

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = mg - b \frac{dx}{dt} \quad (1)$$

on $\frac{dx}{dt}$ és la velocitat v i $\frac{d^2x}{dt^2}$ és l'acceleració com a derivada segona del desplaçament x respecte del temps t . Aquesta equació és una equació diferencial —si bé bastant senzilla, com veurem.



Resoldre una equació diferencial és trobar la funció $x(t)$ més general que la satisfà, i aquesta funció $x(t)$ s'anomena *solució general* de l'equació.

L'equació (1) anterior és bastant fàcil de resoldre perquè podem integrar-la directament només posant la velocitat com la derivada del desplaçament, $v = \frac{dx}{dt}$, i l'acceleració com la derivada de la velocitat: $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt}$. Així, podem tornar a escriure (1) com

$$m \frac{dv}{dt} = mg - bv$$

i, en conseqüència,

$$\int \frac{dv}{g - \frac{b}{m}v} = \int dt, \quad \text{és a dir,} \quad \int \frac{dv}{v - \frac{mg}{b}} = -\frac{b}{m} \int dt$$

d'on resulta, integrant

$$\ln\left(v - \frac{mg}{b}\right) = -\frac{b}{m}t + C, \quad \text{o, també,} \quad \ln \frac{v - \frac{mg}{b}}{C_1} = -\frac{b}{m}t$$

i traient l'exponencial

$$v(t) = \frac{mg}{b} + C_1 e^{-bt/m} \quad (2)$$

on C és la *constant arbitrària* que apareix després de la integració i $C_1 = \ln C$.

Si volem trobar la posició x en funció del temps, $x(t)$, només cal tornar a integrar (2), ja que $v = \frac{dx}{dt}$. Per tant,

$$x(t) = \int v(t) dt = \int \left(\frac{mg}{b} + C_1 e^{-bt/m} \right) dt = \frac{mg}{b}t - \frac{m}{b}C_1 e^{-bt/m} + C_2 \quad (3)$$

on ara C_2 és la segona constant arbitrària apareguda en fer una nova integral.

La $x(t)$ (3) representa la *família* de funcions que satisfan l'equació diferencial (1); cada funció concreta dependrà dels valors de C_1 i C_2 . Per determinar aquestes dues constants, necessitem saber dos detalls concrets de la funció. En problemes de mecànica —com aquest— aquests detalls són molt sovint les *condicions inicials* de la partícula o el cos: on era i amb quina velocitat a l'instant inicial. En aquest cas, l'enunciat diu que, a $t = 0$, la partícula era a l'origen de l'eix x i tenia una velocitat inicial nul·la. Aleshores, substituint aquestes condicions a (3) i a la seva derivada, la velocitat (2), tenim:

$$\left. \begin{aligned} x(0) &= 0 = -\frac{m}{b}C_1 + C_2 \\ v(0) &= 0 = +\frac{mg}{b} + C_1 \end{aligned} \right\}$$



d'on resulta $C_1 = -\frac{mg}{b}$ i $C_2 = -\frac{m^2g}{b^2}$. Finalment, (2) i (3) queden com

$$v(t) = \frac{mg}{b} \left(1 - e^{-bt/mt}\right)$$

$$x(t) = \frac{m}{b} \left(gt + \frac{mg}{b}(e^{-bt/m} - 1)\right)$$

A diferència d'aquest exemple, en general, les equacions diferencials no poden ser integrades directament. Vegem-ne un altre exemple. Considerem el cas d'una partícula de massa m , unida per una molla de constant de força k i que, per tant, li fa una força $-kx$. L'aplicació de nou de la segona llei de Newton ens porta a la igualtat

$$m \frac{dv}{dt} = -kx \quad (\text{B.1})$$

equació que ja no és integrable directament i en la qual apareixen dues funcions, la v i la x . Bé, això últim és fàcil d'arreglar, ja que la velocitat v és la derivada de la posició x i, per tant, (B.1) queda com

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx \quad (\text{B.2})$$

que segueix sense ser integrable directament com tampoc ho era la (B.1).

L'equació (B.2) encara es pot complicar una mica més. Si la partícula, a més de rebre la força que li fa la molla, és sotmesa, com és bastant freqüent, a una força de fricció proporcional a la velocitat, aleshores l'aplicació de la segona llei de Newton dóna l'equació

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx - k' \frac{dx}{dt} \quad (\text{B.3})$$

on k' és la constant de proporcionalitat de la força de fricció.

B.2. Equacions homogènies

Aquesta equació (B.3) pot reordenar-se i escriure's en general

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a \frac{dx}{dt} + bx = 0 \quad (\text{B.4})$$

on a i b són constants (les k'/m i k/m , respectivament, en el nostre exemple).

Des del punt de vista matemàtic, aquesta igualtat s'anomena *equació diferencial ordinària (EDO), lineal, a coeficients constants i homogènia*

- *equació diferencial*, ja que hi apareixen derivades de la funció $x(t)$;
- *ordinària*, perquè la funció x només depèn d'una variable, la t .
- *lineal*, perquè la funció $x(t)$ i les seves derivades apareixen elevades a la potència 1.
- *de segon ordre*, ja que la derivada més alta que apareix és una derivada segona.



- *a* *coeficients constants*, ja que la *a* i la *b* que hi apareixen són constants i no funcions de *t*.
- *homogènia*, perquè a la dreta del signe igual tenim un 0; en cas que aquesta suma no fos 0 sinó una funció *f(t)*, l'equació diferencial seria *no homogènia*. De moment, només ens preocuparem de les equacions homogènies.

Les equacions diferencials com la (B.4) tenen les propietats següents:

- Sigui *c* una constant qualsevol. Si $x_1(t)$ és una solució de (B.4), la funció $c x_1(t)$ també ho és.
- Si $x_1(t)$ i $x_2(t)$ són dues solucions de (B.4), la suma de les dues, $x_1(t) + x_2(t)$, també ho és. Aquesta propietat es coneix com el *principi de la superposició* i, igual com l'anterior, es demostra per substitució a l'equació (B.4). La propietat següent es demostra en els textos de matemàtiques i diu:

La solució general de l'equació homogènia (B.4) és una combinació lineal de dues solucions, $x_1(t)$ i $x_2(t)$, que siguin linealment independents, és a dir, com veurem a continuació, que la $x_2(t)$ no sigui proporcional a la $x_1(t)$.

B.2.1. *N* funcions linealment independents

En general, si l'EDO homogènia és d'ordre *N*, la solució general és la combinació lineal de *N* funcions $x_1(t)$, ..., $x_N(t)$ linealment independents solucions de l'EDO. Linealment independents vol dir que, si $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ són constants, si per a qualsevol *t*

$$\lambda_1 x_1(t) + \lambda_2 x_2(t) + \dots + \lambda_N x_N(t) = 0, \text{ aleshores } \lambda_1 = \dots = \lambda_N = 0$$

Com es demostra en els textos de matemàtiques, *N* funcions són linealment dependents si i només si el determinant següent de les funcions i les seves derivades —anomenat *wronskià*— és 0, és a dir, si

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_N \\ \frac{dx_1}{dt} & \frac{dx_2}{dt} & \cdots & \frac{dx_N}{dt} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{d^N x_1}{dt^N} & \frac{d^N x_2}{dt^N} & \cdots & \frac{d^N x_N}{dt^N} \end{vmatrix} = 0$$

És molt fàcil comprovar que, per a *N* = 2, aquesta condició es redueix al fet que x_2 sigui proporcional a x_1 .

Amb tot això que ja sabem vegem com podem trobar la solució general de l'equació diferencial (B.4). Com es fa molt sovint quan es tracta amb equacions diferencials, agafem una funció $x(t)$ i la substituïm a l'equació (B.4): si la verifica és una solució; si no, no ho és i hem d'assajar una altra funció.

L'experiència —més de 250 anys d'història— amb aquesta mena d'equacions fa que ens decidim per provar una funció exponencial com ara



$$x(t) = e^{rt} \quad (\text{B.5})$$

essent r un paràmetre que determinarem després. Com que

$$\frac{dx}{dt} = r e^{rt} \quad \text{i} \quad \frac{d^2x}{dt^2} = r^2 e^{rt} \quad (\text{B.6})$$

substituint (B.5) i (B.6) a (B.4) trobem

$$r^2 + ar + b = 0 \quad (\text{B.7})$$

És a dir, la funció (B.5) és una solució de la (B.4) de manera que r compleixi l'equació de segon grau (B.7), anomenada *equació característica*. Però aquesta equació té, en general, aquestes dues solucions

$$r_1 = -\frac{a}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4b} \quad \text{i} \quad r_2 = -\frac{a}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4b} \quad (\text{B.8})$$

Si $r_1 \neq r_2$, llavors les funcions:

$$x_1(t) = e^{r_1 t} \quad \text{i} \quad x_2(t) = e^{r_2 t}$$

són linealment independents i, en conseqüència, una combinació lineal d'aquestes dues és la solució general de l'equació diferencial (B.4):

$$x(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} \quad (r_1 \neq r_2) \quad (\text{B.9})$$

Fixem-nos que, segons siguin a i b , les dues arrels r_1 i r_2 , $r_1 \neq r_2$ (B.8), de l'equació característica poden ser reals o complexes. Si són reals, la funció solució (B.9) ja està bé com està. Si són complexes, la combinació (B.9) continua essent vàlida com a solució de (B.4), però hi ha una manera alternativa d'escriure la solució (B.9). En efecte, siguin $-\beta$ i ω les parts real i imaginària, respectivament, del nombre complex r_1 ; per (B.8) tenim

$$r_1 = -\beta + i\omega \quad r_2 = -\beta - i\omega \quad (\text{B.10})$$

Per la identitat d'Euler (C.12), podem posar les exponencials de (B.9) de la forma

$$x(t) = C_1 e^{-\beta t} e^{+i\omega t} + C_2 e^{-\beta t} e^{-i\omega t} = \quad (\text{B.11})$$

$$= e^{-\beta t} \{(C_1 + C_2) \cos \omega t + i(C_1 - C_2) \sin \omega t\} \quad (\text{B.12})$$

Com hem vist a l'exemple B.2.1, la solució general de l'equació de segon ordre (B.4) ha de contenir dues —i només dues— constants arbitràries, ja que en resoldre-la és com si féssim dues integracions. D'acord amb això, transformem aquesta expressió (B.12) fent el següent. Prenguem —podem fer-ho— les constants C_1 i C_2 com a complexes —serien quatre constants reals arbitràries!—, però una complexa conjugada de l'altra —tornem a dues constants reals—, de manera que $C_1 + C_2 = A_1$, i $C_1 - C_2 = -iA_2$ i, per tant, la solució general, continuï contenint dues constants reals, ara la A_1 i la A_2 . Amb aquest canvi de notació, la funció $x(t)$ (B.12) queda com

$$x(t) = e^{-\beta t} (A_1 \cos \omega t + A_2 \sin \omega t)$$



o, introduint les dues noves constants A_0 i ϕ_0 , donades per $A_1 = A \cos \phi_0$ i $A_2 = A \sin \phi_0$, podem posar finalment, com a solució general de l'equació diferencial (B.4), quan les arrels de l'equació característica són complexes,

$$x(t) = Ae^{-\beta t} \cos(\omega t + \phi_0) \quad (\text{B.13})$$

Pel que fa al cas en què les arrels són iguals, $r_1 = r_2 = r$, podem comprovar que la funció $x(t) = t e^{rt}$ també satisfà l'equació diferencial (B.4). I, com que aquesta funció i la (B.5) són linealment independents, la solució general de (B.4) per a aquest cas serà, doncs, la combinació lineal

$$x(t) = C_1 e^{rt} + C_2 t e^{rt} \quad (r_1 = r_2 = r) \quad (\text{B.14})$$

Exemple B.2. Equacions homogènies

Esbrineu la solució general de les dues equacions diferencials següents:

$$\text{a) } \frac{d^2x}{dt^2} + 5\frac{dx}{dt} + 4x = 0, \quad \text{b) } \frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 5x = 0$$

Solució

Pel que acabem de veure, hem de trobar les arrels de les equacions característiques. Tenim, doncs,

$$\text{a) } r^2 + 5r + 4 = 0, \text{ d'on resultan:}$$

$$r = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = \begin{cases} -1 \\ -4 \end{cases}$$

essent, per tant, la solució general de l'equació

$$x(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-4t}$$

$$\text{b) } r^2 + 2r + 5 = 0, \text{ d'on ara resulten}$$

$$r = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 20}}{2} = \begin{cases} 1 + 2i \\ 1 - 2i \end{cases}$$

La solució general de l'equació és, doncs,

$$x(t) = e^{-t} (C_1 e^{i2t} + C_2 e^{-i2t}) = Ae^{-t} \cos(2t + \phi_0)$$

En ambdós casos, les constants C_1 , C_2 , i/o A i ϕ_0 es trobarien a partir de dues dades sobre les funcions, per exemple, les condicions inicials.

B.3. Equacions no homogènies

Una equació diferencial lineal, de segon ordre, a coeficients constants, però *no homogènia* és una equació com la següent



$$\frac{d^2x}{dt^2} + a \frac{dx}{dt} + bx = f(t) \quad (\text{B.15})$$

és a dir, és com l'equació homogènia (B.4) però amb la funció $f(t)$ en comptes del 0. Vegem quina és la solució general de l'equació (B.15).

Sigui $x_h(t)$ la solució general de la versió homogènia de l'equació (B.15), és a dir, l'equació (B.4). Recordem que aquesta funció $x_h(t)$ conté dues constants arbitràries. I sigui ara $x_p(t)$ una funció —que anomenarem *solució particular*— que, sense contenir constants arbitràries, satisfà l'equació no homogènia (B.15). Vegem com la suma de les dues

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) \quad (\text{B.16})$$

satisfà l'equació no homogènia (B.15):

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a \frac{dx}{dt} + bx = \underbrace{\left(\frac{d^2x_h}{dt^2} + a \frac{dx_h}{dt} + bx_h \right)}_{=0} + \underbrace{\left(\frac{d^2x_p}{dt^2} + a \frac{dx_p}{dt} + bx_p \right)}_{=f(t)} = f(t)$$

Per tant, la funció suma (B.16) és la solució general de l'equació no homogènia (B.15), ja que satisfà l'equació i conté dues constants arbitràries.

Com és ben fàcil de demostrar, la solució particular $x_p(t)$ és única, la qual cosa vol dir que podem anar provant funcions fins que en trobem una que satisfaci l'equació (B.15): aquesta és la solució particular.

Hi ha alguns mètodes per trobar les solucions particulars de les equacions no homogènies, si bé el tipus de funció $f(t)$ que és —i l'experiència— suggereixen bastant ràpidament quines funcions provar. Vegem-ho en aquests dos exemples.

Exemple B.3. Equació no homogènia, 1

Trobeu la solució general de l'equació diferencial següent:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2 \frac{dx}{dt} + x = 3t^2 + 1 \quad (1)$$

Solució

Com acabem de veure, la solució general $x(t)$ d'aquesta equació no homogènia és la suma de la solució general $x_g(t)$ de la mateixa equació, però homogeneïtzada

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2 \frac{dx}{dt} + x = 0$$

més la solució particular $x_p(t)$ de l'equació $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$.

Trobat les arrels de l'equació característica, ja tindrem la $x_g(t)$. En aquest cas, les arrels són iguals i valen $r = -1$. Per (B.14), tenim doncs, que la solució general és

$$x_g(t) = C_1 e^{-t} + C_2 t e^{-t} \quad (2)$$



D'altra banda, com que $f(t) = 3t^2 + 1$, provarem, com a solució particular, la funció

$$x_p(t) = a + bt + ct^2 \quad (3)$$

en què els coeficients a , b i c els determinarem després d'imposar que aquesta funció satisfaci l'equació (1). Així, doncs, derivant una, i una altra vegada, la funció (3), tindrem, per (1)

$$2c + 2(b + 2ct) + (a + bt + ct^2) = 3t^2 + 1 \quad (4)$$

Aquesta igualtat només es pot verificar per a tot t si

$$c = 3 \qquad b = -12 \qquad a = 19 \quad (5)$$

de manera que la solució general de l'equació no homogènia (1) és, per (2), (3) i (5)

$$x(t) = C_1 e^{-t} + C_2 t e^{-t} + 19 - 12t + 3t^2 \quad (6)$$

No s'han de confondre el significat de les dues constants arbitràries, la C_1 i la C_2 , amb el dels coeficients a , b i c de la solució particular, el valor dels quals hem determinat a (4) per substitució de $x_p(t)$ a l'equació diferencial.

Els valors de les dues constants C_1 i C_2 depenen de cada problema concret i es troben a partir de les *condicions inicials* —o altres d'equivalents. Per exemple, si ens diuen que

$$x(t=0) = 0 \qquad \text{i} \qquad \left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=0} = 0$$

aleshores, imposant aquestes condicions a (6) i a la seva derivada, tenim

$$C_1 = -19 \qquad C_2 = -7$$

i la funció (6) ara quedaria concretada com

$$x(t) = 19(1 - e^{-t}) - (12 + 7e^{-t})t + 3t^2$$

Exemple B.4. Equació no homogènia, 2

Trobeu la solució general de l'equació diferencial següent:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 6x = 2\sin 3t \quad (1)$$

Solució

L'equació característica és $r^2 + 2r + 6 = 0$, que té les dues arrels $-1 \pm i2\sqrt{2}$. Per tant, la solució general de la versió homogènia de (1) és

$$x_h(t) = A_0 e^{-t} \cos(2\sqrt{2}t + \phi_0) \quad (2)$$

essent A_0 i ϕ_0 les dues constants arbitràries.



Pel que fa a la solució particular de (1), veient que $f(t) = 2 \sin 3t$ provarem la funció

$$x_p(t) = A \sin 3t + B \cos 3t$$

Derivant i substituint $x_p(t)$ a (1) trobem

$$-9A \sin 3t - 9B \cos 3t + 6A \cos 3t - 6B \sin 3t + 6A \sin 3t + 6B \cos 3t = 2 \sin 3t$$

és a dir,

$$\sin 3t \cdot (-3A - 6B) + \cos 3t \cdot (6A - 3B) = 2 \sin 3t$$

Per tal que la igualtat sigui vàlida per a tot t , A i B han de satisfer

$$\left. \begin{array}{l} -3A - 6B = 2 \\ +6A - 3B = 0 \end{array} \right\}$$

d'on resulten $B = \frac{-4}{15}$ i $A = \frac{-2}{15}$, i, per tant,

$$x_p(t) = \frac{-2}{15}(\sin 3t + 2 \cos 3t) \quad (3)$$

La solució general de (1) serà, doncs, la suma de (2) més (3)

$$x(t) = A_0 e^{-t} \cos(2\sqrt{2}t + \phi_0) + \frac{-2}{15}(\sin 3t + 2 \cos 3t)$$

B.4. Equacions lineals a coeficients variables

Per a aquestes equacions, només comentarem que no hi ha cap mètode o sistema general per resoldre-les. Algunes molt importants en física, com ara les de Bessel, Legendre, etc., han estat molt ben estudiades i donen lloc a funcions especials que es troben tabulades en els llibres especialitzats. Altres es poden resoldre fent desenvolupaments en sèrie de potències. En algunes ocasions el canvi de variable adient pot simplificar bastant l'equació i quedar transformada en una equació diferencial a coeficients constants molt més simple. Com exemple, podeu demostrar que l'equació diferencial següent, que és lineal però no a coeficients constants, —anomenada d'Euler o Cauchy—

$$t^2 \frac{d^2x}{dt^2} + at \frac{dx}{dt} + bx = f(t)$$

en la qual a i b són constants i $f(t)$ una funció de t , es converteix en la més senzilla a coeficients constants

$$\frac{d^2x}{du^2} + (a-1) \frac{dx}{du} + bx = f(e^u)$$

fent el canvi de variable: $t = e^u$.

**B.5. Exercicis proposats sobre EDO****Problema B.1. Equació no homogènia**

Esbrineu les solucions generals de les EDO següents:

a) $\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} = 5,$

b) $\frac{d^2x}{dt^2} - 6\frac{dx}{dt} + 9x = e^{2t}$

c)) Trobeu la funció $x(t)$ que satisfà l'EDO següent:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 3x = 2, \quad \text{amb les condicions inicials: } x(0) = 1, \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = 0$$

Resp.: a) $x(t) = C_1 + C_2 e^{-4t} + \frac{5}{4}t$, b) $x(t) = C_1 e^{3t} + C_2 t e^{3t} + e^{2t}$,

c) $x(t) = \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{6}e^{-3t} + \frac{2}{3}$

Problema B.2. Equació no homogènia

Trobeu la solució de l'equació diferencial següent:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = \frac{3}{4}A \cos \omega_0 t + \frac{1}{4}A \cos 3\omega_0 t,$$

amb les condicions inicials: $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$. Quina és la contribució del terme amb $3/4A \cos \omega_0 t$ en la solució?

Resp.: $x(t) = \frac{F_0}{32\omega_0^2} (12\omega_0 t \sin \omega_0 t - \cos 3\omega_0 t).$

Fer aparèixer el terme secular amb $t \sin \omega_0 t$



Representació complexa d'oscil·lacions

C.1. Nombres complexos

Forma binòmica. Sigui $i = \sqrt{-1}$ la *unitat imaginària*, és a dir, i és tal que $i^2 = -1$, i siguin x i y nombres reals. Un nombre complex z representat en *forma binòmica* s'expressa com $z = x + yi$, on x és la *part real* del nombre complex i y , la *part imaginària*. Dos nombres complexos són iguals si i només si tenen iguals les parts real i imaginària. Els nombres $z = x + yi$ i $\bar{z} = x - yi$ són els *complexos conjugats* un de l'altre.

Els nombres complexos z_1 i z_2 es podem sumar, restar, multiplicar per un nombre real, multiplicar entre ells i dividir. Si x_1, y_1, x_2, y_2 i p són nombres reals, tenim

$$z_1 + z_2 = (x_1 + y_1i) + (x_2 + y_2i) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i \quad (C.1)$$

$$z_1 - z_2 = (x_1 + y_1i) - (x_2 + y_2i) = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i \quad (C.2)$$

$$p \cdot z = p(x + yi) = px + pyi \quad (C.3)$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + y_1i) \cdot (x_2 + y_2i) = (x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + y_1x_2)i \quad (C.4)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + y_1i}{x_2 + y_2i} = \frac{x_1 + y_1i}{x_2 + y_2i} \cdot \frac{x_2 - y_2i}{x_2 - y_2i} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \left(\frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} \right) i \quad (C.5)$$

Forma trigonomètrica i polar. El conjunt dels nombres complexos formen un *espai vectorial* de dimensió 2; són, en conseqüència, vectors amb dues components que es poden representar gràficament en el pla xy , com mostrem a la figura C.1 (a).

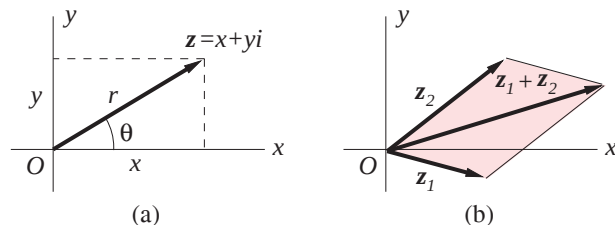


Figura C.1



Com a vectors, per exemple, la seva suma compleix la regla del paral·lelogram —v. figura C.1 (b)— i, igual com podem expressar-los de forma binòmica —les dues components, x i y —, també podem descriure'ls en *forma polar*, donant el seu *mòdul*, $r = |z|$, i l'angle, θ , que forma el vector amb l'eix real, anomenat sovint, *argument* —v. figura C.1 (a). La relació entre la part real i la imaginària, i el mòdul i l'argument és, doncs

$$\left. \begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan \theta &= \frac{y}{x} \end{aligned} \right\} \iff \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad (\text{C.6})$$

Així doncs, podem posar z en *forma trigonomètrica* com

$$z = x + iy = r(\cos \theta + i \sin \theta) \quad (\text{C.7})$$

o, en forma *polar*, simplement com (r, θ) . La forma trigonomètrica o la polar dels nombres complexos és molt útil en les multiplicacions i les divisions, ja que

$$r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \cdot r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)] \quad (\text{C.8})$$

$$\frac{r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)}{r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)] \quad (\text{C.9})$$

Teorema de De Moivre. Si p és un nombre real qualsevol, es té que

$$z^p = [r(\cos \theta + i \sin \theta)]^p = r^p (\cos p\theta + i \sin p\theta) \quad (\text{C.10})$$

D'aquesta igualtat s'obtenen les n arrels n -èsimes d'un nombre complex: si n és un nombre enter positiu

$$z^{1/n} = r^{1/n} \left(\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right), \quad \text{amb } k = 0, 1, 2, \dots, n-1 \quad (\text{C.11})$$

Forma exponencial. Desenvolupant en sèrie de Maclaurin les funcions $e^{i\theta}$, $\cos \theta$ i $\sin \theta$ —v. secció A.2— i comparant, trobem la coneguda *igualtat d'Euler*

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad (\text{C.12})$$

que relaciona la funció exponencial amb els nombres complexos. D'aquesta identitat i la corresponent a $e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta$, resulten

$$\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \quad \cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad (\text{C.13})$$

Observem que aquesta exponencial, igual com les funcions trigonomètriques, és una funció periòdica $e^{i\theta} = e^{i(\theta + 2\pi n)}$, amb $n = 0, 1, 2, \dots$

Així doncs, el mateix nombre complex z es pot escriure de les tres formes

$$z = x + yi = r(\cos \theta + i \sin \theta) = r e^{i\theta} \quad (\text{C.14})$$



Amb la forma exponencial, les multiplicacions, divisions, etc. amb nombres complexos queden així de simples

$$\mathbf{z}_1 \cdot \mathbf{z}_2 = (r_1 e^{i\theta_1}) \cdot (r_2 e^{i\theta_2}) = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)} \quad (\text{C.15})$$

$$\frac{\mathbf{z}_1}{\mathbf{z}_2} = \frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)} \quad (\text{C.16})$$

$$\mathbf{z}^p = (r e^{i\theta})^p = r^p e^{ip\theta} \quad (\text{C.17})$$

Fixem-nos, finalment, que $i = e^{i\pi/2}$ i que, per tant, multiplicar un nombre real o complex per la unitat imaginària i és afegir $\pi/2$ al seu argument. Per exemple:

$$i \cdot (1 + i\sqrt{3}) = e^{i\pi/2} \cdot 2e^{i\pi/3} = 2e^{i5\pi/6} = -\sqrt{3} + i$$

Exemple C.1. Operacions amb dos nombres complexos

Siguin els nombres complexos $\mathbf{z}_1 = 3 + 4i$ i $\mathbf{z}_2 = -2 + 3i$. Sumeu-los, resteu-los, multipliqueu-los i dividiu-los.

Solució

Tindrem

$$r_1 = |\mathbf{z}_1| = \sqrt{\mathbf{z}_1 \cdot \overline{\mathbf{z}_1}} = \sqrt{(3 + 4i) \cdot (3 - 4i)} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

$$\theta_1 = \arctan \frac{4}{3} = 0,9273 \text{ rad}$$

Per tant,

$$\mathbf{z}_1 = 3 + 4i = 5(\cos 0,9273 + i \sin 0,9273) = 5e^{i0,9273}$$

Anàlogament,

$$r_2 = |\mathbf{z}_2| = \sqrt{(-2 + 3i) \cdot (-2 - 3i)} = 3,6056$$

$$\theta_2 = \arctan \left(\frac{+3}{-2} \right) = -0,9828 + \pi = 2,1588 \text{ rad}$$

—molta atenció a l'argument θ_2 : no és el que dona directament la calculadora, $-0,9828$ rad, sinó aquest més π . I ara

$$\mathbf{z}_2 = -2 + 3i = 3,6056(\cos 2,1588 + i \sin 2,1588) = 3,6056e^{i2,1588}$$

Així doncs, tindrem:

- Suma: $\mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2 = (3 + 4i) + (-2 + 3i) = 1 + 7i$
- Resta: $\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2 = (3 + 4i) - (-2 + 3i) = 5 + i$



- Multiplicació: $z_1 \cdot z_2 = (3 + 4i) \cdot (-2 + 3i) = -6 + 9i - 8i - 12 = -18 + i$

$$z_1 \cdot z_2 = 5e^{i0,9273} \cdot 3,6056e^{i2,1588} = 18,028e^{i3,0861}$$

Podem comprovar aquesta última multiplicació trobant la forma polar de $z = -18 + i$:

$$|z| = \sqrt{325} = 18,028 \quad \arctan\left(\frac{1}{-18}\right) = -0,05550 + \pi = 3,0861$$

- Divisió: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{5e^{i0,9273}}{3,6056e^{i2,1588}} = 1,3867e^{-i1,2315}$

En forma binòmica, seria

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3 + 4i}{-2 + 3i} \cdot \frac{-2 - 3i}{-2 - 3i} = \frac{6 - 17i}{13}$$

Comprovem que els dos resultats són equivalents:

$$\left| \frac{6 - 17i}{13} \right| = \frac{1}{13} \sqrt{325} = 1,3867 \quad \arctan\left(\frac{-17}{6}\right) = -1,2315$$

C.2. Funcions complexes de variable real

Dues funcions reals de variable real, per exemple, $f(t)$ i $g(t)$, unides de la forma

$$Z(t) = f(t) + ig(t)$$

constitueixen una funció complexa —ja que té part real i part imaginària— de la variable real t . Aquestes funcions tenen un tractament analític molt semblant al de les funcions reals de variable real, només cal anar amb compte a treballar per separat la part real de la imaginària. Vegem-ho amb un exemple.

Exemple C.2. MHS en format complex

Sigui la funció complexa de variable real

$$Z(t) = A e^{i\omega t} \quad (\text{C.18})$$

on t és una variable real, ω és una constant real, però A és una constant complexa. Estudieu la funció i trobeu-ne les derivades i integrals.

Solució

Si $A = A_0 e^{i\phi_0}$, és a dir, si A_0 i ϕ_0 són el mòdul i l'argument, respectivament, de la constant complexa A , llavors la funció (C.18) també es pot escriure com

$$Z(t) = A_0 e^{i(\omega t + \phi_0)} \quad (\text{C.19})$$



Així doncs, per (C.12) les parts real i imaginària de la funció (C.18) i/o (C.19) són

$$X(t) = \operatorname{Re} \mathbf{Z}(t) = A_0 \cos(\omega t + \phi_0), \quad Y(t) = \operatorname{Im} \mathbf{Z}(t) = A_0 \sin(\omega t + \phi_0) \quad (\text{C.20})$$

essent

$$\mathbf{Z}(t) = X(t) + iY(t)$$

I ara, per (C.20) la derivada de $\mathbf{Z}(t)$ respecte de t val

$$\frac{d\mathbf{Z}(t)}{dt} = \frac{dX(t)}{dt} + i \frac{dY(t)}{dt} = -\omega A_0 \sin(\omega t + \phi_0) + i \omega A_0 \cos(\omega t + \phi_0)$$

que, per (C.19) i per (C.18) veiem que és igual a posar

$$\frac{d\mathbf{Z}(t)}{dt} = i\omega A_0 e^{i(\omega t + \phi_0)} = i\omega \mathbf{Z}(t) \quad (\text{C.21})$$

I la derivada segona, igualment

$$\frac{d^2\mathbf{Z}(t)}{dt^2} = i\omega \cdot i\omega \mathbf{Z}(t) = -\omega^2 \mathbf{Z}(t) \quad (\text{C.22})$$

És a dir, la funció $\mathbf{Z}(t)$, (C.18), satisfà l'equació diferencial de segon ordre

$$\frac{d^2\mathbf{Z}(t)}{dt^2} + \omega^2 \mathbf{Z}(t) = 0 \quad (\text{C.23})$$

i, per tant, tant la part real com la imaginària, $X(t)$ i $Y(t)$, també són solucions d'aquesta equació diferencial.

Pel que fa a la integral de $\mathbf{Z}(t)$, anàlogament a la derivada, s'arriba a

$$\int \mathbf{Z}(t) dt = \int X(t) dt + i \int Y(t) dt = \dots = \frac{1}{i\omega} \mathbf{Z}(t) + \mathbf{C} \quad (\text{C.24})$$

essent $\mathbf{C}$ una constant complexa arbitrària.

En resum, derivar la funció $\mathbf{Z}(t)$ és multiplicar-la per $i\omega$ i integrar-la, dividir-la per $i\omega$, com en la funció exponencial real.

Anàlogament, per a una *ona harmònica* en forma complexa expressada com

$$\mathbf{Z}(x, t) = \mathbf{A} e^{i(kx - \omega t)}$$

derivar-la parcialment respecte de x o t també és equivalent a multiplicar la funció per $-ik$ o $-i\omega$, respectivament. Així, per exemple, $\frac{\partial^2 \mathbf{Z}}{\partial t^2} = -\omega^2 \mathbf{Z}$.

C.3. Representació complexa de les oscil·lacions

La utilització dels nombres complexos simplifica bastant les expressions en les quals apareixen funcions harmòniques sinusoidals i les seves derivades.



Amb la notació complexa, la força impulsora (3.1) es pot escriure com

$$F_0 \cos \omega t = \operatorname{Re}\{F_0 e^{i\omega t}\} \quad (\text{C.25})$$

I podem escriure una equació diferencial equivalent a la (3.4) de les oscil·lacions forçades per a la funció complexa $\mathbf{z}(t)$ de la forma

$$\frac{d^2 \mathbf{z}}{dt^2} + 2\beta \frac{d\mathbf{z}}{dt} + \omega_0^2 \mathbf{z} = \frac{F_0}{m} e^{i\omega t} \quad (\text{C.26})$$

Aquesta equació és una igualtat entre funcions complexes. Com que dos nombres complexos són iguals si i només si són iguals les respectives parts reals i parts imaginàries, l'equació (C.26) representa un sistema de dues equacions diferencials simultànies de funcions reals: una per a la part real i una altra per a la part imaginària. Per raó de la *linealitat*, l'equació per a la part real és la mateixa que l'equació diferencial (3.4): en comptes de $\mathbf{z}(t)$ hi haurà $x(t)$ i en comptes de $e^{i\omega t}$ hi haurà $\cos \omega t$. L'equació per a la part imaginària no té cap interès especial ja que és equivalent a la real però amb $\sin \omega t$.

En definitiva, si ens trobem amb l'equació per a les oscil·lacions forçades (3.4) —o una altra de semblant— la “tècnica” consisteix a substituir-la, matemàticament, per l'equació equivalent complexa (C.26) —o la que li correspongui— i resoldre aquesta última, això sí, tenint ben clar que del resultat que n'obtinguem només tindrà “sentit físic” la part real de la funció solució $\mathbf{z}(t)$.

Quins avantatges té aquest mètode davant del que hem utilitzat al capítol §3? Fonamentalment, que totes les expressions resulten més manejables, com ara veurem. En efecte, amb la fórmula (C.12) com a referència, fixem-nos que, si derivem respecte de t l'exponencial $e^{i\omega t}$, tenim

$$\frac{d e^{i\omega t}}{dt} = -\omega \sin \omega t + i\omega \cos \omega t = i\omega e^{i\omega t}$$

és a dir, derivar l'exponencial $e^{i\omega t}$ és igual a multiplicar la funció per $i\omega$. I derivar-la dues vegades és multiplicar-la per $(i\omega)^2 = -\omega^2$. Consegüentment, si de cara a resoldre l'equació diferencial (C.26) provem una funció $\mathbf{z}(t)$ que sigui de la mena

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{A}_0 e^{i\omega t} \quad (\text{C.27})$$

en què, com veiem per la notació, $\mathbf{A}_0$ és una constant complexa, ens quedarà, un cop substituïda $\mathbf{z}(t)$ a (C.26) i simplificada l'exponencial comuna

$$(-\omega^2 + 2\beta\omega i + \omega_0^2) \mathbf{A}_0 = \frac{F_0}{m}$$

d'on surt directament que la funció (C.27) és la solució particular de (C.26) sempre que $\mathbf{A}_0$ sigui

$$\mathbf{A}_0 = \frac{F_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2 + i2\beta\omega} \quad (\text{C.28})$$



Si ara introduïm el nou paràmetre complex *impedància*, $\mathbf{Z}$, com

$$\mathbf{Z} = m \left(\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega} + i 2\beta \right) = \left(\frac{k}{\omega} - m\omega \right) + i b \quad (\text{C.29})$$

llavors la $\mathbf{A}_0$ de (C.28) pot posar-se com

$$\mathbf{A}_0 = \frac{F_0}{\omega \mathbf{Z}} \quad (\text{C.30})$$

Aquesta constant complexa $\mathbf{Z}$ la podem reescriure de forma exponencial com el seu mòdul $|\mathbf{Z}| = Z$ per l'exponencial del seu argument, γ , on

$$Z = |\mathbf{Z}| = m \sqrt{\frac{(\omega_0^2 - \omega^2)^2}{\omega^2} + 4\beta^2} \quad (\text{C.31})$$

$$\tan \gamma = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (\text{C.32})$$

I la solució $\mathbf{z}(t)$, per (C.27) queda com

$$\mathbf{z}(t) = \frac{F_0}{\omega} \frac{e^{i\omega t}}{\mathbf{Z}} = \frac{F_0}{\omega Z} e^{i(\omega t - \gamma)} \quad (\text{C.33})$$

I, finalment, d'aquí veiem que la part real de la solució $\mathbf{z}(t)$ queda, doncs, com

$$x(t) = \text{Re}\{\mathbf{z}(t)\} = \frac{F_0}{\omega Z} \cos(\omega t - \gamma) \quad (\text{C.34})$$

I la velocitat, la derivada de la posició $x(t)$ respecte de t , val ara

$$v(t) = -\frac{F_0}{Z} \sin(\omega t - \gamma) = \frac{F_0}{Z} \cos\left(\omega t - \gamma + \frac{\pi}{2}\right) \quad (\text{C.35})$$



Oscil·lacions elèctriques

En aquesta secció, veurem l'analogia que hi ha entre les oscil·lacions mecàniques que hem estudiat als quatre primers capítols i les oscil·lacions elèctriques que es produeixen en circuits elèctrics amb resistència R , autoinducció L i capacitat C , els més senzills de tots, que es representen en les tres figures D.1.

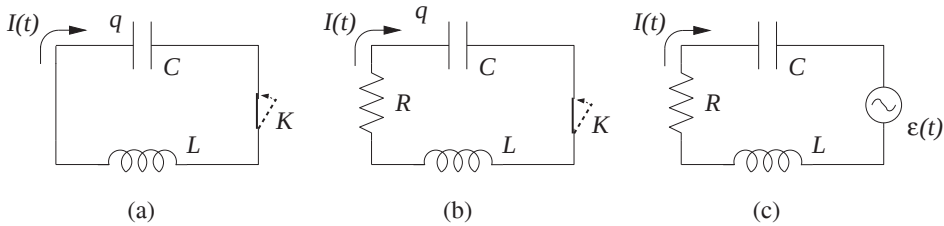


Figura D.1

D.1. Oscil·lacions elèctriques harmòniques

A la figura D.1 (a), hi ha l'esquema d'un circuit elèctric format per una autoinducció de valor L —en el SI mesurada en H, henrys— i un condensador de capacitat C —en el SI mesurada en F, farads.

Amb l'interruptor K tancat per tal que hi pugui circular el corrent d'intensitat I a través de l'autoinducció i vagi carregant el condensador de la forma

$$q(t) = \int_{t_0}^t I dt \quad \text{és a dir,} \quad I = \frac{dq}{dt} \quad (1)$$

La diferència de potencial en borns del condensador i de l'autoinducció val, com sabem per la definició de capacitat i la llei de Faraday,

$$\Delta V_c = \frac{q}{C} = \frac{1}{C} \int_0^t I dt \quad \Delta V_L = L \frac{dI}{dt} \quad (2)$$

En aquest circuit, no hi ha cap tipus de força electromotriu (FEM) externa aplicada; per tant, la llei d'Ohm generalitzada —la suma algebraica de diferències de potencial al llarg de la malla igual a la suma algebraica de FEM— queda reduïda a



$$L \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t I dt = 0 \quad (3)$$

Derivant l'equació, eliminem la integral i trobem

$$\frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{1}{LC} I = 0 \quad (4a)$$

que és l'equació diferencial per a la intensitat I , equació d'una dependència en el temps del tipus MHS de $\omega_0^2 = 1/LC$. Si considerem (1) i (3), també n'obtenim el mateix tipus d'equació per a la càrrega q del condensador

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{1}{LC} q = 0 \quad (4b)$$

Per tant, la càrrega $q(t)$ ve donada per

$$q(t) = q_{\max} \cos(\omega_0 t + \phi), \quad \text{amb } \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} \quad (5)$$

en la qual $q_{\max}$ i ϕ depenen de les condicions inicials. En un circuit LC com aquest, és molt freqüent partir d'un condensador carregat inicialment amb una q_0 . A $t = 0$, es tanca l'interruptor K i el corrent I va descarregant el condensador... Com que en aquest cas tenim: si $t = 0$, $q(0) = q_0$, de (5) tenim que $q_{\max} = q_0$, $\phi = 0$. Per tant, de (5) tenim que $q(t) = q_0 \cos \omega_0 t$, i per (1)

$$I(t) = -\omega_0 q_0 \sin \omega_0 t \quad (6)$$

on el signe menys simplement ens indica que durant el primer semiperíode el corrent elèctric descarregarà el condensador en comptes de carregar-lo.

Un circuit CL com aquest s'anomena *oscil·lador* i és un element bàsic en molts circuits electrònics com els sintonitzadors —ràdio o televisió—, etc. Si, com és bastant habitual, el condensador és de capacitat C variable, llavors la freqüència pròpia ω_0 de l'oscil·lador LC es pot modificar com es vulgui, és a dir, es pot *sintonitzar*.

D.2. Oscil·lacions elèctriques amortides

En els circuits oscil·ladors LC reals, no es pot evitar que sempre hi hagi una certa resistència elèctrica R —en el SI mesurada en Ω , ohms. En aquest cas, el circuit anterior passaria a ser com el que s'ha representat a la figura D.1 (b). Com que la caiguda de tensió en borns de la resistència R és proporcional a la intensitat I que circula de la forma

$$\Delta V_R = RI \quad (8)$$

—lei d'Ohm— llavors l'equivalent a l'equació (4a) per a la I és

$$\frac{dI^2}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dI}{dt} + \frac{1}{CL} I = 0 \quad (9)$$



i, anàlogament, per a la càrrega q . Comparant aquestes equacions amb la (2.2) d'un moviment mecànic amortit, veiem que L fa el paper de la massa m ; R , el de la constant de fricció b , i $1/C$, el de la constant elàstica k . Així, com hem vist a la secció §2.2, la intensitat I —i/o la càrrega q — de (9) serà oscil·lant si

$$\frac{R}{2L} < \sqrt{\frac{1}{LC}} \quad \text{és a dir, si} \quad R^2 < \frac{4L}{C} \quad (10)$$

Així, tornant al cas de la descàrrega del condensador a través de l'autoinducció i la resistència, pel que hem vist a la secció 2.2 i per analogia amb (6), tenim

$$q(t) = q_0 e^{-\beta t} \cos \omega_1 t, \quad \text{essent} \quad \beta = \frac{R}{2L}, \quad \omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \quad (11)$$

i $I = \frac{dq}{dt}$. Es tracta, doncs, d'una oscil·lació elèctrica amortida.

D.3. Oscil·lacions elèctriques forçades: corrent altern

Considerem ara el circuit de la figura D.1 (c) anterior, en què hi ha una resistència R , un condensador C i una autoinducció *en sèrie* amb una FEM $\mathcal{E}$. Pel que hem vist fins ara, la llei d'Ohm generalitzada esmentada abans, aplicada a aquest circuit dóna

$$\mathcal{E} = RI + L \frac{dI(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int I(t) dt$$

o, per a la càrrega q del condensador,

$$\mathcal{E}(t) = R \frac{dq}{dt} + L \frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{1}{C} q$$

Si la FEM $\mathcal{E}$ depèn del temps d'una forma harmònica com la força impulsora (3.1) que vèiem al capítol §3,

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \cos \omega t \quad (12)$$

tindrem l'equació diferencial

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{CL} q = \frac{1}{C} \mathcal{E}_0 \cos \omega t \quad (13)$$

que és matemàticament idèntica a l'equació (3.2) d'una oscil·lació mecànica forçada sinusoïdalment. Això vol dir que tots els resultats i els conceptes que hem vist al capítol §3 sobre els estats transitori i estacionari, la ressonància, la impedància, el desfasament entre la força i la velocitat —ara entre la FEM i la intensitat— etc., són totalment vàlids per a aquest circuit elèctric. Veiem doncs, que amb un simple canvi de nom de les magnituds pot utilitzar-se l'estudi del comportament d'un sistema oscil·lant mecànic per preveure el comportament d'un sistema elèctric equivalent o, encara millor, a l'inrevés. Naturalment, aquesta analogia no es limita als circuits de la figura D.1, sinó que es pot estendre a casos més complexos. L'estat estacionari de les oscil·lacions elèctriques harmòniques forçades



per una FEM sinusoidal en un circuit amb *RCL* s'anomena *corrent altern*. Per tot això, va molt bé establir les equivalències que mostrem a la taula següent.¹

Equivalències entre
oscil·lacions mecàniques
i elèctriques (analogia
força-tensió)

Mecànica			Electricitat		
Magnitud	Símbol	Unitat	Magnitud	Símbol	Unitat
elongació	x	m	càrrega	q	C
velocitat	v	m s^{-1}	intensitat	I	A
massa	m	kg	autoinducció	L	H
constant	k	N m^{-1}	(capacitat) ⁻¹	C^{-1}	F^{-1}
amortiment	b	kg s^{-1}	resistència	R	Ω
força impulsora	F	N	tensió, f.e.m.	$\mathcal{E}$	V
Exemples					
impedància	Z_{mec}	kg s^{-1}	impedància	Z_{elec}	Ω
freq. ressonància	$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$	rad s^{-1}	freq. ressonància	$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$	rad s^{-1}
factor Q	$Q = \frac{\omega_0}{2\beta}$	—	factor Q	$Q = \frac{\omega_0 L}{R}$	—
... ..	...	...		...	...

Així, per exemple, la impedància mecànica ve donada, de forma complexa, per (C.29). Per tant, la impedància elèctrica d'un circuit *RCL* sèrie serà, per la taula anterior,

$$Z_{mec} = \left(\frac{k}{\omega} - m\omega \right) + ib \quad \Longleftrightarrow \quad Z_{elec} = \left(\frac{1}{C\omega} - L\omega \right) + iR$$

Consegüentment, la impedància elèctrica d'un circuit *RCL* en sèrie serà, per la taula anterior,

$$Z_{elec} = \left(\frac{1}{C\omega} - L\omega \right) + iR$$

I en un circuit elèctric hi haurà ressonància en l'energia, és a dir, serà màxima la intensitat del corrent elèctric, quan en el sistema mecànic equivalent sigui màxima l'amplitud de la velocitat: $\omega = \omega_0 = \sqrt{k/m}$, i, en conseqüència, en l'elèctric, $\omega = \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$.

Per acabar vegem-ne un parell d'exemples més. A la figura D.2 (a), s'esquematitza un oscil·lador mecànic format per una massa m lligada a una paret per mitjà de dues molles i un amortidor. Com es pot demostrar, els circuits que es mostren a les figures D.2 (b) i (c) són equivalents a aquest oscil·lador mecànic.

¹ De fet, en l'estudi de les analogies entre els sistemes mecànics i els circuits elèctrics s'utilitzen dos casos: l'analogia força-tensió —que és la que es mostra en aquesta taula— i l'analogia força-intensitat. En aquesta segona, la magnitud equivalent a la força F és, naturalment, la intensitat de corrent I , i l'equivalent a la massa m , per exemple, no és l'autoinducció L sinó la capacitat C .

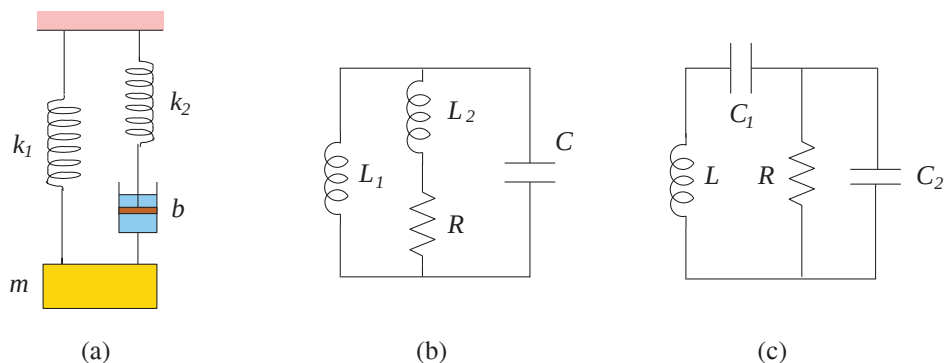


Figura D.2

A la figura D.3 (a), es mostra un altre oscil·lador mecànic, però aquest forçat per la força F . A la figura D.3 (b), hi ha la versió elèctrica de l'oscil·lador. Fixeu-vos que el paper de la força F el fa la FEM $\mathcal{E}$. Si F és constant —per exemple, el pes mg —, llavors $\mathcal{E}$ també serà constant, per exemple, la FEM d'una bateria o pila. Si F és una força harmònica, $\mathcal{E}$ serà una FEM alterna, etc.

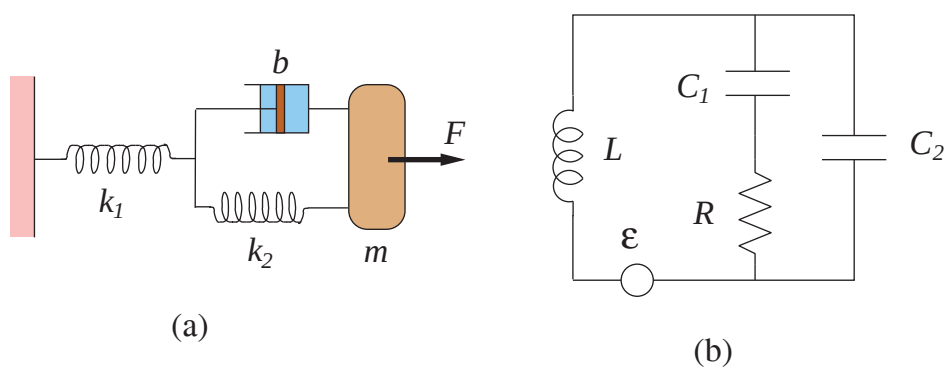


Figura D.3



Bibliografia

A continuació, es presenta una selecció breu de textos que tracten sobre oscil·lacions i que poden ser útils com a referències per tal de consolidar o ampliar coneixements. Se n'han fet dues llistes. En aquesta primera s'inclouen els manuals de mecànica general que tenen un nivell similar o només lleugerament més alt que el d'aquest llibre. Estan ordenats de menys a més dificultat.

- Tipler, P.A.; Mosca, G.: *Física per a la ciència i la tecnologia, Vol. 1 i 2*.
Traducció al català de la 6a edició original. Editorial Reverté, Barcelona, 2011.
- Jaén, X.; Bohigas, X.; Calaf, J.; Font, J.; Muntasell, J.: *Mecànica per a l'Enginyeria*.
Edicions UPC, Barcelona, 2007.
- Roller, D.E.; Blum, R.: *Física. Mecánica, ondas y termodinámica*.
Editorial Reverté, Barcelona, 1983.
- French, A.P.: *Vibraciones y ondas*.
Editorial Reverté, Barcelona, 2006.
- Ortega, M.R.: *Lecciones de Física (Mecánica 2)*. Editat per l'autor, 2009.
http://www.uco.es/~fa1orgim/fisica/monytex/cat_1f.htm
- Marion, J.B.: *Dinámica clásica de las partículas y los sistemas*.
Editorial Reverté, Barcelona, 1995.
- Meriam, J.L.; Kraige, L.G.: *Mecánica para ingenieros. Dinámica*.
3a edición. Editorial Reverté, Barcelona, 2000.
- Fernández-Rañada, A.: *Dinámica clásica*.
Fondo de Cultura Económica, México, 2004.

En aquesta segona llista, hi ha relació breu, ordenada alfabèticament, de textos més tècnics centrats en l'estudi pràctic de les vibracions mecàniques en enginyeria.

- Kelly, S.G.: *Theory and Problems of Mechanical Vibrations*.
Schaum's Outline, McGraw-Hill, 1996.
- Meirovitch, L.: *Analytical Methods in Vibrations*.
Prentice Hall, 1967.
- Meirovitch, L.: *Fundamentals of Vibrations*.
Waveland Pr. Inc., 2010.



Minorsky, N.: *Nonlinear Oscillations*.

R.E. Krieger, Malabar, 1983.

Rao, S.: *Mechanical Vibrations*.

4th edition, Pearson/Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, USA, 2004.

Seto, W.W.: *Vibraciones mecánicas*.

McGraw-Hill Interamericana Editores, serie Schaum, 1970.

Steidel, R.F.: *Introducción al estudio de las vibraciones mecánicas*.

Editorial Continental, México, 1991.

I, com a formulari matemàtic general i per a qüestions sobre equacions diferencials, es poden recomanar aquests dos:

Spiegel, M.; Abellanas, L.; Liu, J.: *Manual de fórmulas y tablas de matemática aplicada*. McGraw-Hill Interamericana Editores, serie Schaum, 2005.

Simmons, G.F.; Krantz, S.G.: *Ecuaciones diferenciales*.

McGraw-Hill, 2007.

Índex alfabètic

- absorbidor de vibracions, 288, 307
- amortidor, 95, 104, 105, 108, 111, 114, 121, 122, 140, 144, 146, 159, 160, 212, 301
- amortiment crític, 103–105, 114, 115, 121
- amplada de banda, 208
- amplada del pic de freqüències, 205
- amplitud
 - de l'oscil·lació forçada, 128, 130, 145, 154–157, 159
 - de la força impulsora, 136, 144, 160
 - del MHS, 14, 16, 19
 - efectiva de les pulsacions, 168, 281
 - efectiva, amb amortiment, 99
 - en oscil·lacions acoblades, 284–287, 289, 292, 293, 299, 300, 308, 310, 314
- aproximació de funcions, 251, 324
- arccosinus, arcsinus, etc., 17, 321
- Arquimedes, principi d', 49, 316
- associació de molles, 21, 50
- autovalors, 284, 286, 287, 291
- centre de masses, 24, 64
 - teorema de Pappus-Guldin, 64
- centre instantani de rotació, 64
- circuit *RCL*, 356, 357
- conservació
 - de l'energia, 22, 35, 37, 56, 68, 252, 263, 265
 - de la quant. de moviment, 32, 52, 54, 56, 105
 - del moment angular, 178
- constant de força *k*, 18, 19
- constant de temps, 96, 102, 128
- coordenades normals, 278, 280
- corda contínua, 295
- corda discreta, 277, 289–297, 309, 316
 - oscil·lacions forçades, 309
- corrent altern, 357
- Coulomb, llei de, 91
- Cramer, regla de, 287, 289, 306, 310
- de l'oscil·lació forçada
 - amplitud, 159
- decreixement exponencial, 96, 97, 99, 102, 104, 336
- dilatació lineal per temperatura, 82
- Dirac, funció delta de, 224, 235, 238
- energia potencial, 30, 32, 34, 36, 37, 39, 41, 68, 70, 72, 75, 77, 90, 91, 112, 249, 252, 254, 263, 265, 267, 273, 280
- equació d'ona, 295, 297
- equació diferencial, 18, 97, 113, 159, 237, 242, 256, 324, 335–351
 - no homogènia, 126, 149, 150, 287, 337, 340
 - sistema de dues o més ED, 278, 284, 286, 287, 291, 304–306, 310
- equació en derivades parcials, 295, 297



- equació transcendent, 76, 117
- espectre de freqüències, 190, 201–203
- estat estacionari, 128, 140, 160, 234, 287, 288, 302, 357
- estat transitori, 128, 140, 160, 217, 225, 226, 233, 239, 302, 357
- estructura, 13
- factor de qualitat Q , 102, 103, 108, 119–121, 138, 139, 141, 142, 155–157
- fase inicial, 14, 17, 32, 79, 80, 109, 118
- fasor, 15, 165–167, 173, 176, 185
- força central, 176
- Fourier
 - anàlisi de, 190, 204
 - coeficients de, 189, 194, 206, 208
 - condicions de Dirichlet, 190, 201
 - espectre de freqüències, 190, 201–203
 - igualtat de Parseval, 190, 207
 - integral de, 200, 202
 - sèrie de, 126, 189–215, 296
 - transformada de, 206, 215
- freqüència, 14
 - de les pulsacions, 168, 281
 - espectre de freqüències, 190, 201
 - fonamental, 190
 - harmònics superiors, 190
- freqüència pròpia, 98, 289
- freqüències pròpies o normals, 279, 280, 283, 288, 291, 292, 298–316
- fricció seca, 47, 88, 264
- fricció viscosa, 95, 117, 335
- funció $f(t) =$
 - delta de Dirac, 224, 235, 238
 - dent de serra, 193
 - dent de serra positiva, 210, 212, 213, 215, 224, 239
 - escala, 236
 - gaussiana, 207
 - ona quadrada, 192, 195, 231, 233
 - ona quadrada positiva, 191
 - ona triangular, 236
 - ona triangular positiva, 193
 - paràboles, 209
 - parella, senar, 190, 193, 215
 - periòdica, 189, 221
 - pinta de Dirac, 238
 - pols finit $\cos^2$, 214
 - pols harmònic finit, 204
 - pols rectangular, 202, 211, 215, 223
 - pols triangular, 229
 - salt unitari de Heaviside, 218, 223, 224, 229, 231, 233, 236, 239, 240, 243
 - sinus de qt , 215
 - sinus rectificat, 197, 209, 215, 242
 - sinus semirectificat, 209, 242
- funcions hiperbòliques, 323
- funcions linealment independents, 127, 251, 338
- graus de llibertat, 277
 - cas amb N , 286, 289, 292
 - cas amb tres, 283, 312–314
- Green-Borel, mètode de, 234, 236, 241, 244
- Heaviside
 - funció salt unitari de, 218, 223, 224, 229, 231, 233, 236, 239, 240, 243
- Heisenberg, principi d'incertesa de, 206
- Hooke, llei de, 19, 25
- impedància, 130, 132, 142, 157, 159, 357, 358
 - representació complexa, 353
 - triangle de la, 132
- impedància elèctrica, 358
- integral el·líptica, 250, 269, 331
- integral trigonomètrica, 200, 328
- Krylov i Bogoliubov, mètode de, 260, 262, 274, 275
- Laplace, transformació de, 217–246
 - funció de transferència, 234
 - producte de convolució, 221, 235, 244
 - propietats, 219
 - taula de transformades, 222
 - transformació inversa, 218, 226, 227, 242
- Lissajous, figures de, 171–173, 181, 184–186
- massa reduïda, 53, 56, 88, 91, 153
- mètode de conservació de l'energia, 37, 41, 69, 70, 72, 75, 78, 89, 90, 249, 267, 282
- mètode de Rayleigh, 37–39
- mesura de g , 25, 59, 87
- modes normals d'oscil·lació, 279, 280, 291–293
- molla de massa no negligible, 72, 87



- moment d'inèrcia, 24, 60
 - d'un cercol resp. diàmetre, 57
 - d'un cilindre, 29, 69
 - d'una barra, 27
 - d'una esfera, 71
 - d'una partícula, 40
 - d'una placa rectangular, 85
 - radi de gir, 304
 - teorema de Steiner, 58–60, 64
- moviment circular uniforme, 15
- moviment harmònic simple, 13–92, 128, 163–188
- Newton, segona llei de, 18, 23, 28, 96, 97, 126, 149, 150, 183, 212, 278, 287, 291, 304, 306, 310, 337
- Newton, segona llei per a la rotació, 24, 27, 40, 61, 75, 283, 304, 306
- nombres complexos, 347, 349
- Ohm, llei d', 355–357
- ona, 294, 295
 - longitudinal, 296, 297
 - transversal, 294, 296
- oscil·lació
 - adiabàtica d'un gas, 91
 - d'un electró, 91, 273
 - d'un flotador, 49, 316
 - d'un líquid en un tub, 71
 - no harmònica simple, 35, 43, 44, 247–276
 - quasiharmònica simple, 33
- oscil·lació amortida, 97–356
 - d'un oscil·lador no lineal, 264, 274
 - molt amortida, 100, 118, 121
 - molt poc amortida, 100, 111, 118–120
- oscil·lació elèctrica, 19, 359
- oscil·lació en representació complexa, 350–353
- oscil·lació forçada, 125–160, 189, 194, 199, 213, 225, 248
 - amplitud, 128, 130, 145, 154–157, 159, 315
 - amplitud de la velocitat, 132
 - desfasament, 127, 131, 156, 357
 - elèctrica, 357
 - en una corda discreta, 309
 - factor de qualitat Q , 141, 142
 - oscil·lacions acoblades, 305
 - oscil·ladors acoblats, 287, 315
 - potència mitjana, 137
- potència mitjana, 138, 141, 155–158
- representació complexa, 351
- ressonància, 130, 132–136, 138–142, 145, 147, 148, 154, 155, 157–160
- oscil·lació harmònica simple, 13–92, 128
- oscil·lacions acoblades, 277–316
 - amplituds, 284–287, 289, 292, 293, 299, 300, 308, 310, 314
 - concordants, 279, 283, 285
 - contraposades, 280, 283, 285
 - energia de l'acoblament, 281
 - polsants, 281, 283
- oscil·lador elèctric, 356
- oscil·lador forçat
 - factor de qualitat Q , 103
 - factor de qualitat Q , 102, 138, 139, 155–157
- oscil·lador no lineal, 43, 247–276
 - dur o tou, 248, 263
 - forçat, 262
 - efecte salt, 263
 - oscil·lació subharmònica, 263
- mètode de Krylov i Bogoliubov, 260, 262, 274, 275
- mètode de les sèries de pertorbacions, 255, 269, 273–275
 - terme secular, 257, 259, 270
- oscil·ladors acoblats
 - forçats, 287
 - oscil·lació forçada, 315
- pèndol
 - angles no petits, 248
 - cònic el·líptic, 170
 - cicloïdal, 77
 - de torsió, 25
 - de torsió bifilar, 65
 - horitzontal, 87
 - pèndols acoblats, 282, 312
 - rellotge de, 25, 82, 119, 250, 273
- pèndol físic, 24, 25, 38, 58, 59, 82–84, 282, 305
 - amb molla, 26
 - període mínim, 58, 83
 - reversible o de Kater, 59
 - segon centre d'oscil·lació, 83
- pèndol simple, 22, 23, 57, 71, 82, 134, 169, 173, 249, 250, 263, 268, 272, 273, 311, 312



- paràmetre d'amortiment, 98, 142
- percussió, 224, 235, 243
- període, 14, 19, 34, 189, 253
- principi de superposició, 24, 126, 164, 178, 189, 248, 262, 271, 280, 338
- problema dels dos cossos, 52, 55, 82, 88, 151
- pulsacions, 167, 168, 281
- punt d'equilibri, 18, 33
 - estable, 18, 33, 36, 74, 86, 89–91
 - inestable, 33, 36, 62, 90, 91
- Rayleigh, mètode de, 37–39
- regla de Cramer, 287, 289, 306, 310
- ressonància, 130, 132–136, 138, 140–142, 144, 145, 147, 148, 154–159, 248, 257, 259, 262, 288, 289, 306, 307, 309, 357, 358
 - amplada de la, 139, 145, 157, 158, 160
 - paramètrica, 135, 144, 145, 160
- sintonitzar, 140, 356
- sistema, 13
- sistemes d'oscil·ladors acoblats, 277–316
- sobreamortiment, 104, 114, 122
- Steiner, teorema de, 58–60, 64
- superposició d'oscil·lacions, 128, 141, 150, 151, 154, 163–189, 278–280, 284–286, 292, 301, 302
- Taylor, sèrie de, 23, 34, 114, 324
- temps de relaxació, 96
- trajectòria
 - cònica, 169
 - el·líptica, 169, 171, 176, 178, 180, 184, 186
 - fig. de Lissajous, 171–173, 181, 184–186
- trajectòria en l'espai fàsic, 252, 253, 255, 273
- trigonometria, 319–323
- valor mitjà d'una funció, 120, 137, 329
- valor mitjà quadràtic d'una funció, 331
- vibració, 13
- vibracions d'un motor, 135, 136, 145, 146, 154, 158, 160, 288, 307
 - absorbidor, 288, 307
 - transmissibilitat, 147
- xoc, 31, 51, 56, 88, 272