



53

ARQUITECTURA,
URBANISME
I EDIFICACIÓ

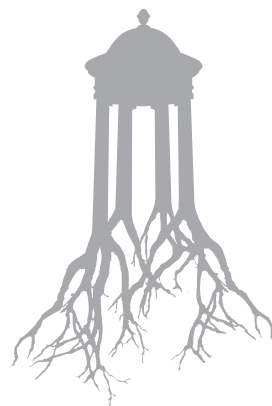


UNIVERSITAT POLITÈCNICA
DE CATALUNYA
BARCELONATECH

→ **UPCGRAU**

Física ambiental →

Eduardo Bravo



UNIVERSITAT POLITÈCNICA
DE CATALUNYA
BARCELONATECH



iniciativa
digital politècnica
Publicacions Acadèmiques de la UPC

→ **UPCGRAU**

Física ambiental →

Eduardo Bravo

Primera edició: setembre de 2019

© Fotografia de la coberta: Montserrat Sans

© Eduardo Bravo, 2019

© Iniciativa Digital Politècnica, 2019
Oficina de Publicacions Acadèmiques Digitals de la UPC
Jordi Girona 1-3,
Edifici K2M, Despatx S103, 08034 Barcelona
Tel.: 934 015 885
www.upc.edu/idp
E-mail: info.idp@upc.edu

DL: B 18511-2019

ISBN: 978-84-9880-764-6

Qualsevol forma de reproducció, distribució, comunicació pública o transformació d'aquesta obra només es pot fer amb l'autorització dels seus titulars, llevat de l'excepció prevista a la llei.



Índex

Índex	5
Pròleg	11
1. Temperatura i calor	15
1.1 Concepte de temperatura	15
1.1.1 Pressió d'un fluid	16
1.1.2 Temperatura	16
1.1.3 Escales de temperatura	17
1.1.4 Termòmetres	18
1.2 Dilatació tèrmica	20
1.2.1 Coeficients de dilatació	20
1.3 Calor sensible, calor latent i entalpia	24
1.3.1 Calor	24
1.3.2 Potència calorífica	24
1.3.3 Calor i treball	25
1.3.4 Calor i energia tèrmica	25
1.4 Calor sensible	26
1.4.1 Calor específica	26
1.4.2 Capacitat calorífica	27
1.5 Calor latent	28
1.5.1 Calor de transformació i canvi de fase	28
1.6 Inèrcia tèrmica	30
1.7 Segon principi de la termodinàmica	30
1.7.1 Màquines frigorífiques i bombes tèrmiques	31
1.7.2 Entropia	34
1.7.3 Evolució i sostenibilitat	36
Problemes resolts	39
Problemes proposats	43



2. Propagació de la calor	47
2.1 Mecanismes de propagació de la calor	47
2.2 Conducció i llei de Fourier	48
Gradient tèrmic	49
2.2.1 Conductivitat tèrmica	49
2.2.2 Difusivitat tèrmica i efusivitat tèrmica	50
2.2.3 Conducció en condicions estacionàries	52
2.2.4 La llei de Fourier en condicions estacionàries	53
2.3 Radiació	53
2.3.1 Intensitat d'una radiació	54
2.3.2 Espectre electromagnètic	54
2.3.3 Model de radiador tèrmic ideal: el cos negre	55
2.3.4 Radiació tèrmica d'un cos real	57
2.3.5 Radiació solar: intensitat	58
2.3.6 Radiació solar: espectre	60
2.3.7 Efecte hivernacle	60
2.3.8 Coeficient radiatiu	63
2.3.9 Factor de visió	65
2.3.10 Termòmetre IR	66
2.4 Convecció	67
2.4.1 La llei de Newton per a la convecció: el coeficient convectiu	68
2.5 Transferència de calor entre una superfície i el seu entorn	68
2.6 Cambres d'aire	70
Problemes resolts	72
Problemes proposats	78
 3. Balanç energètic d'un edifici	 83
3.1 Resistència tèrmica d'un mur	83
3.1.1 Associació de resistències tèrmiques en sèrie	85
3.2 Perfil tèrmic	87
3.2.1 Factor de temperatura de la superfície interior	90
3.3 Balanç energètic	90
3.4 Radiació solar	91
3.5 Coeficient global de transmissió tèrmica	92
3.5.1 Embolcall tèrmic	92
3.5.2 Ponts tèrmics	94
3.5.3 Transmissància tèrmica global	94
3.6 Ventilació	96
3.7 Coeficient global de pèrdues d'un habitatge	97
Grau·dia	98
3.8 Temperatura d'equilibri	98
Problemes resolts	100
Problemes proposats	106
 4. Humitat	 111
4.1 Aire humit: humitat absoluta i humitat específica	112
4.2 Pressió d'un gas ideal	112
4.3 Pressió de vapor	113

4.4	Pressió de saturació	114
4.5	Humitat relativa	117
4.6	Temperatura de rosada	117
4.7	Àbac psicromètric	117
4.7.1	Aplicacions de l'àbac psicromètric	119
4.8	Balanç de vapor d'un edifici.....	121
4.9	Difusió de matèria	122
4.9.1	Difusió del vapor: llei de Fick.....	122
4.9.2	Permeabilitat al vapor d'aigua.....	122
4.9.3	Gruix equivalent d'aire enfront de la difusió del vapor d'aigua.....	123
4.9.4	Gruix equivalent d'un mur	124
4.10	Condensació intersticial	124
4.10.1	Perfil de vapor.....	125
4.10.2	Risc de condensació: diagrama de Glaser	127
4.10.3	Actuacions anticondensacions.....	128
4.11	Intrusió d'aigua líquida	129
4.11.1	Capil·laritat	129
4.11.2	Higroscòpia	130
	Problemes resolts	131
	Problemes proposats	140
5.	Acústica	145
5.1	Naturalesa del so	145
5.1.1	Ones sonores	145
5.1.2	Ones sonores harmòniques.....	147
5.1.3	Espectre de les ones sonores	148
5.2	Potència i intensitat	149
5.2.1	Ones planes i esfèriques.....	149
5.2.2	Absorció durant la propagació	151
5.2.3	Absorció en reflexions: coeficients de reflexió, d'absorció i de transmissió.....	151
5.3	Nivell d'intensitat.....	153
5.3.1	Sons simultanis	155
5.3.2	Variacions en el nivell d'intensitat durant la propagació del so	157
5.4	Eficiència del sentit auditiu	159
5.5	Mesurant el so	161
5.6	Acústica arquitectònica I: aïllament acústic	162
5.6.1	Índex d'aïllament acústic	162
5.6.2	Coefficient de transmissió mitjà.....	163
5.6.3	Nivell de soroll.....	164
5.6.4	Índex d'aïllament acústic normalitzat	165
5.6.5	Millora de l'aïllament acústic.....	165
5.7	Acústica arquitectònica II: reverberació.....	166
5.7.1	Eco	167
5.7.2	Reverberació	168
5.7.3	Temps de reverberació	169
5.7.4	Fórmula de Sabine	170
5.7.5	Optimització del temps de reverberació.....	171
	Problemes resolts	174
	Problemes proposats	179



6 Fotometria	185
6.1 Naturalesa de la llum	185
6.2 Percepció de la llum: eficiència de la visió i corba de sensibilitat espectral	187
6.2.1 Eficiència de la visió	188
6.3 Flux lluminós i rendiment lluminós	190
6.3.1 Flux lluminós	190
6.3.2 Rendiment lluminós	191
6.4 Il·luminació d'una superfície	193
6.5 Intensitat lluminosa d'una radiació	193
6.5.1 Angle sòlid	194
6.5.2 Intensitat lluminosa	195
6.6 Relació entre intensitat lluminosa i il·luminació	195
6.7 Relació entre intensitat lluminosa i flux lluminós	197
6.7.1 Font isòtropa	197
6.7.2 Difusor perfecte: la llei de Lambert	198
6.7.3 Corbes polars	198
6.8 Brillantor d'una font extensa	200
6.8.1 Brillantor d'un difusor perfecte	201
6.9 Il·luminació natural	202
6.9.1 Llum solar directa	202
6.9.2 Llum diürna difusa	203
6.10 Mesurant la llum	204
6.11 Eficiència i contaminació	204
6.11.1 Valor d'eficiència energètica	204
6.11.2 Rendiment de color	205
6.11.3 Contaminació lumínica	205
Problemes resolts	208
Problemes proposats	216
7. Corrent altern	223
7.1 Corrent altern	223
7.1.1 Intensitat d'un corrent elèctric i tensió	224
7.1.2 Intensitat i tensió en CA	225
7.1.3 Tensió eficaç i intensitat eficaç	226
7.1.4 Generació de corrent altern	226
7.1.5 Transformador	227
7.2 Energia en un circuit de CA	228
7.3 Impedància, resistència i reactància	231
7.3.1 Impedància d'una resistència	232
7.3.2 Impedància d'un condensador o capacítància	232
7.3.3 Impedància d'una bobina o inductància	233
7.4 Associació d'impedàncies en sèrie i en paral·lel	233
7.4.1 Circuit RLC sèrie	233
7.4.2 Associació d'impedàncies en sèrie	234
7.4.3 Associació d'impedàncies en paral·lel	235
7.5 Potència en CA	237
7.5.1 Potència activa d'un circuit de CA	237
7.5.2 Factor de potència	237
7.5.3 Potència aparent i potència reactiva	238

7.5.4	Eficiència energètica en el transport de CA	240
7.5.5	Correcció del factor de potència.....	240
7.6	CA trifàsic	242
7.7	Parallamps	244
	Problemes resolts	245
	Problemes proposats	249
Apèndix A. Fonaments dels nombres complexos		255
Apèndix B. Fonaments d'ones		259
Apèndix C. Fonaments de l'electricitat i del magnetisme		263
	Conceptes bàsics d'electricitat	263
	Conceptes bàsics de magnetisme	267
Apèndix D. Radiació solar absorbida		269
Apèndix E. Fórmula de Sabine.....		271
Apèndix F. Flux lluminós d'un difusor perfecte		275
Apèndix G. Brillantor i ull humà		277
Apèndix H. Nocions de colorimetria		279
	Bases fisiològiques de la colorimetria.....	279
	Teoria tricromàtica	280
	Mescles de colors	281
Bibliografia		285
Índex alfabètic.....		287





Pròleg

El mot *física* prové del grec *Φυσικ*, o *Φυση*, que literalment vol dir “naturalesa”. En la seva accepció moderna, la física és la disciplina científica que s’ocupa de l’estudi de la naturalesa i les seves lleis. Com a tal, es relaciona amb qualsevol disciplina que pretengui modificar la naturalesa, com és el cas de l’arquitectura. De fet, la relació entre física i arquitectura sempre ha estat molt estreta. Així, per exemple, les inquietuds dels arquitectes del Renaixement per incorporar els nous cànons de bellesa a les seves construccions va impulsar l’estàtica. A més, a cada època, tant la física com l’arquitectura han estat una manifestació cultural dels corrents de pensament dominants. Al segle XIX, es va començar a estendre entre els físics un corrent de pensament influenciat pel Romanticisme, segons el qual els diferents fenòmens naturals, que fins llavors s’havien estudiat independentment, eren una manifestació de quelcom més fonamental que els unificava. Aquesta línia de pensament va inspirar la recerca de físics com Oersted i Faraday, i va culminar en la unificació de l’electricitat i el magnetisme. Ja al segle XX, la mateixa inquietud filosòfica va fomentar la cerca d’una teoria de la gran unificació que expliqués conjuntament totes les forces de la natura, empresa a la qual Albert Einstein va dedicar gairebé la meitat de la seva vida i que avui encara continua inconclusa.

També va ser al segle XIX quan l’arquitectura va experimentar la tensió entre una tendència més artística i una altra amb més contingut tecnològic. La influència de la física i l’enginyeria en aquest darrer vessant és òbvia. Però, encara que indirectament, també influeixen en la concepció artística de l’arquitectura, facilitant la realització efectiva de visions urbanístiques i constructives que s’aparten dels camins trillats. Per totes aquestes raons, és important que els arquitectes tinguin una formació científica sòlida.

Aquest llibre ha estat concebut com una eina que facilita l’aprenentatge dels conceptes fonamentals de la física ambiental als estudiants que comencen una carrera universitària d’arquitectura. En aquest context, el que entenem per física ambiental és el conjunt de camps de la física relacionats amb l’ambientalització dels interiors dels edificis: tèrmica, higroscòpica, acústica i d’il·luminació, i amb les instal·lacions de corrent altern. A més de relacionar-se amb el confort i la utilitat dels edificis, tots aquests camps es poden vincular amb la sostenibilitat, l’eficiència energètica i la contaminació. Aquestes qüestions, com també les implicacions que hi tenen el disseny arquitectònic i l’elecció de materials, són presents al llarg del text.



En escriure aquest llibre, hem intentat tenir en compte les característiques del que podria ser un estudiant típic de primer curs d'arquitectura, amb bones capacitats d'estructuració de l'espai tridimensional i un interès preeminent per les aplicacions pràctiques dels conceptes físics. Els estudiants poden arribar a l'arquitectura més motivats pel seu vessant tecnològic o per l'artístic, o potser buscant una fusió de tots dos. Tanmateix, no és estrany trobar-nos, als primers cursos d'arquitectura, estudiants que no han fet mai un curs de física, o que fa molts anys que van fer l'últim curs de matemàtiques. Per a ells, enfrontar l'aprenentatge de la física ambiental serà un repte extra. En aquest text, hem donat per sabuts els conceptes fonamentals de física i matemàtiques corresponents al currículum de batxillerat. Tot i així, s'hi inclouen tres apèndixs, relatius a les ones, a l'electricitat i el magnetisme, i als nombres complexos, en els quals es pot trobar un resum del més bàsic per poder afrontar amb garanties d'èxit l'estudi de la física ambiental.

L'enfocament que hem adoptat en el text està influenciat pel contingut dels estudis de grau i màster que condueixen al títol d'Arquitecte. Entre les assignatures o matèries obligatòries que componen aquesta titulació, no s'hi acostumen a trobar elements de física, més enllà del primer o el segon curs de grau. Això significa que la majoria dels conceptes i lleis que s'introdueixen en aquest text no es treballaran més al llarg de tota la carrera, almenys des del punt de vista científic. Els estudiants sí que hi treballaran aplicant-los en tots els aspectes tecnològics relacionats amb l'arquitectura, és clar, però aquestes aplicacions es fan quasi sempre utilitzant programaris estandarditzats o receptes legals les bases dels quals sovint queden ocultes. En aquesta conjuntura, hem procurat que les exposicions conceptuals siguin eficaces i, quan ho hem considerat convenient, hem apel·lat a la intuïció que el lector pugui haver guanyat amb la seva pròpia experiència.

Tant l'ordre com el contingut dels capítols es pot adaptar a les necessitats de diferents cursos universitaris de física ambiental. Els capítols 1 a 4 formen un bloc dedicat a la higròtermia, però cada un dels capítols següents es independent de tots els altres. Dintre de cada capítol, també hi ha apartats que es poden obviar sense perjudicar la comprensió de la resta d'ítems. És el cas dels apartats: 1.7, 2.3.7, 2.3.9, 2.3.10, 3.4, 3.7, 3.8, 4.11, 5.4, 5.5, 6.9, 6.10, 6.11 i 7.1.5.

Una part fonamental de l'aprenentatge de la física és posar en pràctica els conceptes i les lleis que s'hi estudien. Per fer-ho, hi ha dues possibilitats. Una és aplicar-los en situacions reals, ja sigui dintre d'un laboratori o en un treball de camp, per exemple, prenent i analitzant les mesures preses en un edifici. L'altra és resoldre problemes en què la ment i la mà s'acostumin a seguir els passos que porten d'un conjunt de dades i hipòtesis a les solucions requerides. En un llibre de text, només podem recórrer a aquesta segona forma de practicar la física. Per aquest motiu, hem inclòs en el text nombrosos exemples, problemes resolts i problemes proposats perquè l'estudiant els solucioni, dels quals proporcionem el resultat final. Els exemples es troben en paral·lel al desenvolupament teòric, amb la intenció d'aclarir conceptes i lleis, i mostrar directament com s'apliquen. Tant els problemes resolts com els proposats són, en general, més complexos que els exemples i s'agrupen al final de cada capítol. Idealment, l'estudiant hauria de seguir la pauta d'intentar resoldre pel seu compte els exemples i comprovar-ne la solució, fer el mateix amb els problemes resolts i, finalment, abordar els problemes proposats.

No hem inclòs en aquest llibre aspectes importants de la física experimental, com són el tractament de dades o la utilització de xifres significatives. El tractament de dades experimentals té poques aplicacions en l'arquitectura, excepte, potser, en la recerca de materials, estructures, etc. Pel que fa a les xifres significatives, la seva utilització correcta és

una part important de la resolució dels problemes. Amb aquesta finalitat, creiem que n'hi ha prou a advertir l'estudiant amb dues regles, o potser tres. La regla zero és fer servir sempre un conjunt d'unitats homogeni; per exemple, no barrejar en una equació cm amb m, etc. La primera regla: que, en una suma o resta, l'última xifra significativa coneguda dels sumands és la que determina l'última xifra significativa amb la qual s'ha de donar el resultat. Per exemple: $0,45 + 1,738 = 2,19$, ja que l'última xifra significativa coneguda del primer sumand és la centèsima i, per tant, el resultat només es pot donar fins a la centèsima. La segona regla: que, en una multiplicació o divisió, el nombre mínim de xifres significatives amb què es coneix cadascun dels factors és el nombre de xifres significatives amb què s'ha de donar el resultat. Per exemple: $4,29 \times 9,0 = 39$, ja que el segon factor només es coneix amb dues xifres significatives i, per tant, el resultat només es pot donar amb dues xifres significatives. Val a dir que, en resoldre problemes, els retalls en les xifres significatives només s'han de fer en el resultat final, mai en els resultats intermedis, per tal d'evitar arrossegar errors d'arrodoniment. Les constants matemàtiques conegudes, com el nombre π , que apareix en la resolució de nombrosos problemes, s'han de prendre sempre amb un nombre de xifres significatives superior al de les dades.

Confio que aquest llibre sigui útil tant per a qui hagi de transitar per les zones comunes de la física ambiental i l'arquitectura com per als professors encarregats d'impartir les assignatures que hi estan relacionades. Com a llibre de text, pot servir per descarregar les sessions teòriques presencials de la necessitat d'exposar acuradament tot un seguit de conceptes i hipòtesis, i centrar-les més a treballar-los conjuntament amb els estudiants. És el cas, per exemple, de l'aprenentatge basat en projectes, els quals, a més, poden ser compartits amb altres assignatures de la carrera. En tot cas, aquesta és una decisió que han de prendre els cossos docents. La nostra decisió ha estat facilitar-los aquesta eina.

L'autor

→ 1



Temperatura i calor

La temperatura i la calor són conceptes que es troben sovint en l'àmbit de l'arquitectura. La temperatura es relaciona amb el confort ambiental, un dels objectius del disseny arquitectònic. Però, a més, la temperatura també determina les propietats macroscòpiques dels sistemes, com per exemple les seves dimensions, influint en la distribució d'esforços en qualsevol estructura arquitectònica. La calor que un edifici intercanvia amb l'entorn determina el seu balanç energètic i, eventualment, la necessitat d'incórrer en despeses energètiques i econòmiques per compensar-la, amb implicacions evidents per al desenvolupament sostenible. En aquest capítol, intentarem establir amb precisió i claredat els conceptes de temperatura i calor, i introduïrem els coeficients que determinen la resposta de les propietats dels materials a canvis de temperatura o a intercanvis de calor. Començarem per establir el concepte de temperatura i explicar el procediment de mesurament. A continuació, introduïrem el concepte de dilatació tèrmica i els coeficients de dilatació dels materials, que permeten predir els canvis de dimensions dels sòlids, els líquids i els gasos sotmesos a variacions de temperatura. Tot seguit, veurem quina és la relació entre la calor neta intercanviada per un sistema i el seu canvi de temperatura. De fet, els sistemes poden invertir la calor intercanviada ja sigui en una variació de la temperatura, o bé en un canvi d'estat, fet que ens portarà a definir la calor sensible i la calor latent, i a introduir els coeficients corresponents que mesuren la resposta dels diferents materials a un intercanvi de calor. El concepte d'inèrcia tèrmica, semblant al d'inèrcia mecànica i molt útil en arquitectura, expressa la capacitat d'un sistema per resistir canvis ambientals sense experimentar grans canvis de temperatura. Acabarem el capítol amb una introducció al segon principi de la termodinàmica i les seves repercussions sobre les màquines termodinàmiques i la sostenibilitat.

1.1. Concepte de temperatura

Abans de definir la temperatura, revisarem el concepte de pressió d'un fluid, especialment interessant pel comportament dels gasos ideals.¹

¹ Per definició, les partícules d'un gas ideal es mouen lliurement per l'interior del recipient que el conté, de tal manera que l'energia mecànica del gas es conserva. El model de gas ideal permet descriure amb força precisió el comportament dels gasos reals en condicions normals.



1.1.1. Pressió d'un fluid

Com a conseqüència de l'agitació tèrmica, les molècules d'un fluid es mouen contínuament de forma aleatòria, i xoquen constantment amb les parets del recipient que conté el fluid. La força que hi exerceixen està distribuïda per tota la superfície del recipient en contacte amb el fluid. *La pressió és la magnitud que caracteritza la concentració de la força exercida per un fluid sobre una superfície.* Concretament, la pressió es defineix com la força que exerceix un fluid sobre una unitat de superfície, *aplicada en direcció normal a la superfície.*

En el cas d'un gas ideal tancat en un recipient, l'impuls que cada partícula exerceix en xocar amb una paret del recipient és igual al producte de la massa de la partícula pel canvi en la seva velocitat, és a dir, és igual al canvi en la seva quantitat de moviment. La força exercida és igual a la rapidesa amb la qual s'aplica l'impuls i, com que la freqüència dels xocs és proporcional a la velocitat de les partícules del gas, la pressió acaba essent proporcional al quadrat de la velocitat. En altres paraules, la pressió d'un gas ideal és proporcional a l'energia cinètica de les seves partícules. Tornarem a aquesta relació de proporcionalitat quan parlem dels diferents tipus de termòmetres.

La *unitat de pressió* en el Sistema Internacional d'Unitats (SI) és el pascal, abreviat Pa: $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$, en què N és la unitat de força, newton. Per motius històrics, existeixen i són d'ús més o menys corrent altres unitats de pressió:

- Atmosfera (atm), que correspon a la pressió mitjana de l'atmosfera a nivell del mar, de valor estàndard: $1 \text{ atm} = 101.300 \text{ Pa}$.
- Bar, que és simplement un múltiple del pascal: $1 \text{ bar} = 100.000 \text{ Pa}$.
- Mil·libar (mbar), la mil·lèsima part d'un bar: $1 \text{ mbar} = 100 \text{ Pa}$, també conegut com hectopascal (hPa).
- Torr² o mil·límetre de mercuri (mm Hg), que val: $1 \text{ torr} = 133,3 \text{ Pa}$. És a dir, 760 torr equivalen a 1 atm.

Observeu que una pressió d'una atmosfera és lleugerament superior a un bar: $1 \text{ atm} = 1,013 \text{ bar} = 1.013 \text{ mbar}$.

1.1.2. Temperatura

La temperatura d'un sistema és la magnitud que mesura la seva energia tèrmica. Aquesta és una energia interna al sistema, energia cinètica resultant del moviment aleatori de les partícules que el formen, que podríem anomenar l'estat d'excitació de la matèria. En estat líquid o sòlid, les forces d'agregació o de cohesió també contribueixen a l'energia interna en forma d'energia potencial.

² La unitat torr pren el seu nom d'Evangelista Torricelli (1608-1647), físic i matemàtic italià, deixeble de Galileo Galilei i inventor del baròmetre de mercuri. Torricelli va suscitar una controvèrsia considerable en la seva època arran del seu experiment amb un tub de mercuri invertit. En aquest experiment, un tub llarg tancat per un extrem i obert per l'altre contenia mercuri, el qual, en invertir el tub i submergir-lo en mercuri, ocupava sempre una alçada de 76 cm i deixava buit l'extrem superior del tub. Torricelli va proposar que aquest espai estava realment buit, concepte difícil d'assumir per la filosofia dominant al segle XVII.

Per tal que la temperatura tingui un valor definit, cal que el seu valor sigui estable, és a dir, que l'estat del sistema no canviï, llevat que sigui pertorbat des de l'exterior. Quan aquesta condició es compleix, es diu que el sistema es troba en un estat d'equilibri termodinàmic. Per tant, la temperatura d'un sistema (i, de fet, també la pressió) només té un significat precís quan el sistema es troba en un estat d'equilibri termodinàmic.

La temperatura influeix en l'aparença dels materials i les seves propietats macroscòpiques, com per exemple el volum, la longitud, el color i d'altres propietats que, encara que els éssers humans no puguem captar directament pels sentits, es poden mesurar amb la instrumentació adient. Podem detectar un canvi en la temperatura d'un sistema de dues maneres: a) establint-hi contacte, de manera que el sentit del tacte ens proporciona informació de com de calent o fred està, o b) observant petits canvis en les seves propietats macroscòpiques.

Dos objectes a temperatura diferent que estiguin en contacte tèrmic intercanvien calor, de manera que l'energia tèrmica sempre passa del cos calent al fred. Si dos objectes en contacte tèrmic no experimenten variacions en les seves propietats macroscòpiques, és senyal que no s'intercanvien calor perquè els dos es troben a la mateixa temperatura; llavors, diem que han assolit l'equilibri tèrmic.

El que acabem d'exposar és el principi en què es basen els termòmetres. Un *termòmetre* és un instrument amb el qual es pot mesurar una propietat del propi termòmetre, sensible a la seva temperatura, i que, convenientment calibrat, ens dona el valor de la temperatura d'un altre sistema amb el qual es troba en equilibri tèrmic. El calibratge dels termòmetres requereix la introducció d'un conveni i d'una unitat de temperatura, que en conjunt anomenem *escala de temperatura*.

1.1.3. Escales de temperatura

En aquest text, fem ús de dues escales de temperatura. Entre les escales de temperatura que no utilitzem, cal esmentar l'escala Fahrenheit, molt estesa als països anglosaxons i que apareix en molts llibres de text que en són originaris.

*Escala Celsius.*³ És l'escala d'ús comú en les aplicacions quotidianes al nostre entorn. La unitat és el grau Celsius, escrit $^{\circ}\text{C}$, que es defineix mitjançant dos punts fixos:

- *Punt de fusió del gel.* Per definició, la seva temperatura és $T_f = 0^{\circ}\text{C}$.
- *Punt d'ebullició normal de l'aigua (a pressió atmosfèrica normal, és a dir, 1 atm).* Per definició, la seva temperatura és $T_e = 100^{\circ}\text{C}$.

Amb aquestes definicions, la temperatura mínima que es pot assolir experimentalment és de $-273,15^{\circ}\text{C}$.

L'escala Celsius és una escala centígrada, és a dir, la diferència entre les temperatures dels dos punts fixos de l'aigua és de 100 graus. La unitat, 1°C és, per tant, la centèsima part de la diferència de temperatura entre el punt de fusió del gel i el punt d'ebullició

³ Escala introduïda per primer cop l'any 1742 per l'astrònom suec Anders Celsius (1701-1744).



normal de l'aigua: $1^{\circ}\text{C} = \frac{T_e - T_f}{100}$. Noteu que aquesta expressió es refereix a una diferència de temperatures d'1 °C, no a la temperatura d'un cos que es troba un grau per sobre del punt de fusió del gel.

Escala Kelvin (temperatura absoluta). És l'escala d'ús comú en les aplicacions científiques i tècniques i és, de fet, una de les unitats bàsiques del Sistema Internacional d'Unitats.⁴ La unitat és el kelvin, escrit K (sense el símbol °), i es defineix de tal manera que la mínima temperatura possible és de 0 K i que la *unitat de variació de temperatura* coincideix amb la de l'escala Celsius: 1 K = 1 °C. Amb aquesta definició, la temperatura dels punts fixos de l'aigua queda determinada així:

- *Punt de fusió del gel.* La seva temperatura és $T_f = 273,15 \text{ K}$.
- *Punt d'ebullició normal de l'aigua.* La seva temperatura és $T_e = 373,15 \text{ K}$.

L'escala Kelvin també és una escala centígrada, en què la diferència entre les temperatures dels dos punts fixos de l'aigua és de 100 kelvin. Per obtenir el valor en l'escala Kelvin d'una temperatura coneguda en l'escala Celsius, només cal sumar 273,15: $T(\text{K}) = T(^{\circ}\text{C}) + 273,15$. La relació entre la temperatura en l'escala Celsius i l'escala Fahrenheit, $T(^{\circ}\text{F})$, és una mica més complicada:

$$T(^{\circ}\text{C}) = \frac{T(^{\circ}\text{F}) - 32}{1,8}.$$

1.1.4. Termòmetres

Com ja hem esmentat, cada termòmetre es basa en una propietat sensible a les variacions de temperatura, que d'ara endavant anomenarem *propietat termomètrica*. Existeix un gran nombre de termòmetres diferents, que fan servir propietats termomètriques diferents, cadascun d'ells amb un rang d'ús limitat, per raons pràctiques (per exemple, no es podria aplicar un termòmetre de mercuri per mesurar temperatures per sota de la de congelació del mercuri).

Històricament, el primer instrument conegut dedicat a indicar canvis tèrmics és el termoscopi d'aigua de Galileo Galilei, que data de final del segle XVI. El termoscopi d'aigua consisteix en un recipient amb aigua en el qual hi ha objectes de diferents densitats. Els objectes més densos que l'aigua es queden al fons, mentre que els més lleugers floten. Com que la densitat de l'aigua varia sensiblement amb la temperatura (com veurem més endavant en aquest mateix capítol), la flotabilitat dels objectes depèn de la temperatura de l'aigua. El termoscopi no permet fer mesuraments precisos de la temperatura, només detectar-ne les variacions.

⁴ A partir de maig de 2019, es redefeix el Sistema Internacional d'Unitats. La nova definició de la unitat kelvin és: "El canvi de temperatura que resulta en un canvi d'energia tèrmica mitjana per partícula d'un gas ideal monoatòmic igual a $2,070973 \cdot 10^{-23} \text{ J}$." Tanmateix, malgrat aquest canvi, continuarà tenint pràcticament el mateix valor que amb la definició anterior.

Poc més d'un segle més tard, Fahrenheit⁵ va introduir el termòmetre d'expansió de líquids, que bàsicament coincideix amb el disseny dels termòmetres de mercuri que coneixem avui. Inicialment, es va fer servir tant mercuri com alcohol com a líquid d'expansió.

Els termòmetres més notables són:

- *Termòmetre de mercuri.* La propietat termomètrica és la longitud d'una columna de mercuri tancada dins un capil·lar de vidre.
- *Termòmetre de resistència metàl·lica.* La propietat termomètrica és la resistència elèctrica d'un metall conductor, la qual augmenta amb la temperatura.
- *Termistor.* Consisteix en un material semiconductor de l'electricitat, la resistència elèctrica del qual depèn fortament de la temperatura. En general, aquesta resistència elèctrica disminueix en augmentar la temperatura. Els termistors es caracteritzen per les seves petites dimensions, de l'ordre de mm, que els fan adients per a sondes tèrmiques.
- *Termòmetre d'infraroigs.* És un instrument que mesura la radiació tèrmica d'un objecte, en la banda dels infraroigs (IR). La intensitat d'aquesta radiació IR varia fortament amb la temperatura i, per tant, és la propietat termomètrica d'aquest tipus de termòmetres. L'avantatge dels termòmetres d'IR és que no cal un contacte directe amb l'objecte del qual es vol mesurar la temperatura. Això els fa adients per a aplicacions en situacions de temperatures extremament altes, per exemple, en forns, per mesurar la temperatura de la flama en un incendi, etc. El funcionament del termòmetre d'infrarojos s'explica amb més detall al capítol 2, després d'introduir les propietats de la radiació tèrmica.
- *Termòmetre de gas a volum constant.* La propietat termomètrica és la pressió d'un gas tancat en un recipient de volum constant, i la temperatura mesurada és directament proporcional a aquesta pressió. Aquest termòmetre és important en metrologia (és la part de la física que s'ocupa de la definició del sistema d'unitats), però no s'utilitza en arquitectura. Com ja s'ha explicat anteriorment, la pressió d'un gas ideal a volum constant és proporcional a l'energia del moviment de les partícules del gas. Per tant, la temperatura proporcionada pel termòmetre de gas a volum constant és una mesura de l'energia tèrmica del gas.



Fig. 1.1
Diferents tipus de termòmetres: de mercuri (esquerra), clínic digital amb un termistor a la punta (centre) i d'infraroigs (dreta)

⁵ Daniel Gabriel Fahrenheit (1686-1736), físic holandès interessat en la fabricació d'instruments de precisió. Fahrenheit va definir l'escala de temperatures que porta el seu nom utilitzant els punts fixos d'una barreja d'aigua i sal i la temperatura del cos humà.



1.2. Dilatació tèrmica

La dilatació tèrmica és un fenomen consistent en un canvi en les dimensions dels sistemes com a conseqüència d'un canvi en la seva temperatura. De fet, hi ha una altra manera de deformar un sistema mecànic: mitjançant l'aplicació d'esforços. Per tant, a partir d'ara farem la hipòtesi que el sistema que estudiem no pateix cap modificació en els esforços aplicats, per tal de garantir que qualsevol canvi de dimensions sigui atribuïble exclusivament a un canvi de la seva temperatura.

Els sistemes homogenis (formats per un únic material) *experimenten* la dilatació tèrmica com un *canvi d'escala* pur. És a dir, les proporcions relatives de les seves parts no canvien. Per exemple, la mida del forat d'un anell augmenta amb la mateixa proporció que la mida del propi anell quan la seva temperatura augmenta. També, la capacitat d'un recipient augmenta amb la mateixa proporció que ho fa el gruix del material de què està fet.

En canvi, un *sistema heterogeni* (format per diferents materials) pot experimentar una deformació com a conseqüència de la dilatació tèrmica. N'és un exemple una *làmina bimetal·lica* com les que es fan servir com a *termòstat* (v. problema 1.3).

1.2.1. Coeficients de dilatació

La magnitud del canvi d'escala que experimenta cada tipus de material quan la seva temperatura varia és una informació essencial per poder predir la resposta d'una estructura sotmesa a estrès tèrmic. *Els coeficients de dilatació expressen, per a cada material, la relació que hi ha entre la variació relativa de les seves dimensions i la variació de temperatura.*

Per a materials sòlids, podem associar el coeficient de dilatació a la seva longitud (*coeficient de dilatació lineal*), a la superfície (*coeficient de dilatació superficial*) i al volum (*coeficient de dilatació volumètric o cúbic*).

Per a fluids (líquids i gasos), només podem parlar de *coeficient de dilatació volumètric o cúbic*, ja que les longituds, altures i superfícies d'un fluid depenen de les propietats del seu recipient.

Coeficient de dilatació lineal d'un sòlid

La definició del coeficient de dilatació lineal d'un sòlid, representat per una α , es basa en la relació entre la variació de longitud i el canvi de temperatura:

$$\frac{dL}{L} = \alpha \cdot dT \quad (1.1)$$

on T és la temperatura del sòlid i dT és un petit canvi (estrictament, hauria de ser infinitesimal) en aquesta temperatura, L és la longitud i dL , la seva variació (infinitesimal). Les unitats de α són les inverses de les unitats de temperatura: K^{-1} o $^{\circ}C^{-1}$, i el seu valor numèric és el mateix en aquestes dues unitats (ja que una diferència de temperatures té el mateix valor expressat en K o en $^{\circ}C$).

Per trobar el resultat del canvi de dimensions, hi podem aplicar una *aproximació lineal*. Aquesta aproximació és vàlida en aplicacions que no necessitin una gran precisió, com acostuma a passar en arquitectura. Substituint les variacions infinitesimals de longitud i temperatura per canvis finits, ΔL i ΔT , i aplicant el valor inicial de la longitud, L_0 , al denominador del membre esquerre de l'equació 1.1, obtenim les expressions següents per a la *longitud final*, $L = L_0 + \Delta L$, i la *variació de longitud*:

$$L = L_0 \cdot (1 + \alpha \cdot \Delta T) \quad (1.2)$$

$$\Delta L = L_0 \cdot \alpha \cdot \Delta T \quad (1.3)$$

L'expressió exacta, sense fer ús de l'aproximació lineal, s'obté integrant l'equació 1.1, i en resulta:

$$L = L_0 \cdot e^{(\alpha \cdot \Delta T)}; \quad \Delta L = L_0 \cdot [e^{(\alpha \cdot \Delta T)} - 1]$$

El coeficient de dilatació lineal té un valor característic per a cada material a les temperatures normals del nostre entorn. A continuació, s'indiquen els coeficients de dilatació lineal d'alguns sòlids:

- Invar (aliatge de níquel i ferro): $\alpha = 9,0 \cdot 10^{-7} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$
- Vidre Pyrex: $\alpha = 3,2 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$
- Acer: $\alpha = 1,1 \cdot 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$
- Alumini: $\alpha = 2,4 \cdot 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$
- Plom: $\alpha = 2,9 \cdot 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$

Exemple 1.1

Calculeu la variació màxima diürna de longitud d'un pont d'acer de 100 m, si la màxima diferència de temperatura en un dia és de $20 \text{ } ^\circ\text{C}$. Estimeu l'error comès en fer servir l'aproximació lineal.

Solució. Apliquem l'equació 1.3, amb la dada del coeficient de dilatació lineal de l'acer tabulat anteriorment, $\alpha = 1,1 \cdot 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$:

$$\Delta L = L_0 \cdot \alpha \cdot \Delta t = 100 \text{ m} \cdot 1,1 \cdot 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1} \cdot 20 \text{ } ^\circ\text{C} = 2,2 \text{ cm.}$$

L'expressió exacta hauria donat un increment de longitud de:

$$\Delta L = L_0 \cdot [e^{(\alpha \cdot \Delta T)} - 1] = 0,022002 \text{ m,}$$

és a dir, un increment de 2,2002 cm, o $2 \text{ } \mu\text{m}$ de diferència respecte a la resposta obtinguda amb l'aproximació lineal.

Per tant, la resposta és: $\Delta L = 2,2 \text{ cm.}$



Coeficients de dilatació superficial i volumètric d'un sòlid

De forma similar al coeficient de dilatació lineal, *el coeficient de dilatació superficial d'un sòlid*, β , es defineix mitjançant l'expressió:

$$\frac{dA}{A} = \beta \cdot dT \quad (1.4)$$

on A és l'àrea i dA , la seva variació (infinitesimal). Les unitats de β són les inverses de les unitats de temperatura: K^{-1} o $^{\circ}C^{-1}$, i *el seu valor numèric és el mateix en aquestes dues unitats*.

L'aproximació lineal proporciona les expressions següents per a l'àrea final i la variació de l'àrea:

$$A = A_0 (1 + \beta \cdot \Delta T) \quad (1.5)$$

$$\Delta A = A_0 \cdot \beta \cdot \Delta T \quad (1.6)$$

El coeficient de dilatació volumètric o cúbic d'un sòlid, γ , es defineix mitjançant l'expressió següent:

$$\frac{dV}{V} = \gamma \cdot dT \quad (1.7)$$

on V és el seu volum i dV la seva variació (infinitesimal). Les unitats de γ són les inverses de les unitats de temperatura, K^{-1} o $^{\circ}C^{-1}$, i el seu valor numèric és el mateix en aquestes dues unitats.

L'aproximació lineal proporciona les expressions següents per al volum final i la variació del volum:

$$V = V_0 (1 + \gamma \cdot \Delta T) \quad (1.8)$$

$$\Delta V = V_0 \cdot \gamma \cdot \Delta T \quad (1.9)$$

Els tres coeficients de dilatació que acabem de definir no són independents, sinó que estan relacionats per: $\gamma = 3\alpha$; $\beta = 2\alpha$. Recordem que aquestes dues relacions només tenen sentit per als sòlids.

Coeficient de dilatació volumètric d'un fluid

En un fluid, l'únic coeficient de dilatació que es pot definir és el volumètric o cúbic. La definició i les unitats són idèntiques a les del coeficient de dilatació volumètric d'un sòlid. L'aproximació lineal proporciona les mateixes equacions que per a un sòlid (equacions 1.8 i 1.9).

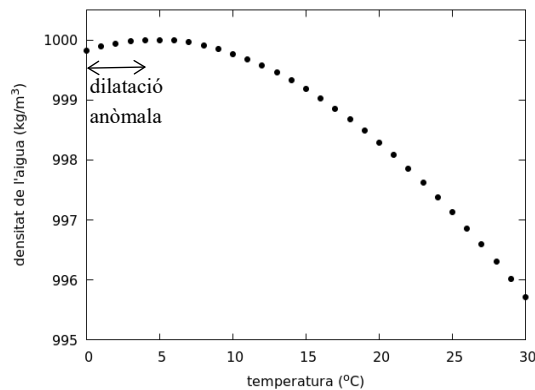


Fig. 1.2
Dilatació anòmala de l'aigua entre 0°C i 4°C. En aquest interval, en augmentar la temperatura, augmenta la densitat de l'aigua; per tant, el seu volum disminueix

Un cas important és el de l'*aigua*, que pateix l'anomenada *dilatació anòmala* quan la seva temperatura varia entre 0 °C i 4 °C . En aquest interval de temperatures, l'aigua té un coeficient de dilatació $\gamma < 0$, és a dir, es contreu quan augmenta la temperatura (Fig. 1.2). A més, el coeficient de dilatació de l'aigua varia contínuament amb la temperatura entre 0 °C i 100 °C . En aquestes circumstàncies, en aplicar les equacions 1.8 o 1.9 per calcular el canvi de volum d'aigua degut a un canvi finit de temperatura, cal treballar amb el coeficient mitjà de dilatació volumètrica de l'aigua, corresponent a les temperatures inicial i final, tal com es fa a l'exemple 1.2.

Exemple 1.2

Un recipient de ferro de 3 litres està ple d'aigua, i tant el recipient com l'aigua estan a 21°C. Determineu si vessarà aigua en escalfar el conjunt fins a una temperatura de 45°C.

Dades. Coeficient mitjà de dilatació volumètrica de l'aigua entre 21°C i 45°C, $\gamma_{\text{H}_2\text{O}} = 3,3 \cdot 10^{-4} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$; coeficient de dilatació lineal del ferro, $\alpha_{\text{Fe}} = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$.

Solució. La dilatació tèrmica consisteix en un canvi d'escala de tot l'objecte, és a dir, totes les dimensions lineals canvien en el mateix percentatge. En el cas d'un recipient homogeni, en aquest cas de ferro, el gruix de les parets i de la base augmenta en augmentar la temperatura però, al mateix temps, el volum interior (la capacitat del recipient) també augmenta al mateix ritme que el ferro.

A 45°C, la capacitat del recipient de ferro és (v. equació 1.8):

$$V_{\text{Fe}} = V_0 (1 + \gamma_{\text{Fe}} \cdot \Delta T) = 3 (1 + 3,6 \cdot 10^{-5} \cdot 24) = 3,0026 \text{ litres.}$$

En aplicar l'equació 1.8, s'han pres els valors següents: $V_0 = 3$ litres, $\gamma_{\text{Fe}} = 3\alpha_{\text{Fe}}$, $\Delta T = 24^\circ\text{C}$. Fixeu-vos que el valor numèric de l'increment de temperatura és el mateix en les escales Celsius i Kelvin.

A la mateixa temperatura de 45°C, el volum d'aigua (inicialment V_0) és:

$$V_{\text{H}_2\text{O}} = V_0 (1 + \gamma_{\text{H}_2\text{O}} \cdot \Delta T) = 3,0238 \text{ litres.}$$

Com que el volum final d'aigua supera la capacitat del recipient, vessarà un volum d'aigua igual a la diferència entre ambdós: $V_{\text{ves}} = 3,0238 - 3,0026 = 0,0212$ litres, que representa una fracció $0,0212/3,0238=0,00701$.

Per tant, la resposta és: Vessarà un 0,70 % del volum final d'aigua.



1.3. Calor sensible, calor latent i entalpia

El contingut energètic d'un sistema, la seva energia interna, pot canviar com a conseqüència de les interaccions amb el seu entorn. La naturalesa d'aquestes interaccions es pot classificar en calor i treball.

1.3.1. Calor

La calor és un flux d'energia tèrmica entre dos sistemes, causat per la seva diferència de temperatures.

La calor no és un atribut o propietat dels sistemes. La calor no es posseeix; és una energia en trànsit entre dos sistemes; per tant, no és correcte parlar del contingut de calor de cap objecte. Les *unitats de calor* són les mateixes unitats de l'energia: *joule* (J). En el cas de la calor, hi ha una unitat històrica que es fa servir usualment: la *caloria* (cal), que definirem més endavant. La relació entre el joule i la caloria és: $1 \text{ cal} = 4,186 \text{ J}$.

La calor obeeix a les lleis següents:

- Per definició, no hi ha flux de calor entre dos sistemes en equilibri tèrmic (que tinguin igual temperatura).
- El flux de calor entre dos sistemes en contacte tèrmic és més intens com més gran és la diferència de temperatures entre els dos sistemes, ΔT . Aquesta llei també es coneix amb el nom de llei del refredament de Newton.
- En un contacte tèrmic, la calor sempre es transfereix de forma espontània del cos calent al cos fred, és a dir, el cos calent és el que perd energia tèrmica i el cos fred és el que la guanya.

Per conveni, diem que una pèrdua d'energia tèrmica correspon a un flux de calor negatiu, i que un guany d'energia tèrmica equival a un flux de calor positiu. Com que l'energia sempre es conserva, la calor perduda pel sistema calent ($Q_1 < 0$) és igual en valor absolut a la calor guanyada pel sistema fred ($Q_2 > 0$): $Q_2 = |Q_1|$.

1.3.2. Potència calorífica

Un concepte utilitzat sovint és el de *potència*, que mesura la *rapidesa* (podríem dir la ràtio temporal) *amb què es transfereix energia entre dos sistemes*. En el cas de la transferència de calor, parlarem de potència calorífica.

Podem distingir dues maneres de definir la potència:

- *Potència calorífica mitjana en un interval de temps*, Δt . És la relació entre la calor total intercanviada, Q , i la durada de l'interval de temps: $\overline{Pot} = Q / \Delta t$.
- *Potència calorífica instantània en un moment determinat*. És la potència mitjana en un interval de temps infinitesimal, dt : $Pot = dQ / dt$. Utilitzem la notació simplificada següent per representar la potència calorífica instantània: $\dot{Q}$ o $\dot{q}$.

La diferència principal és que, per calcular una potència mitjana, podem agafar un interval de temps tan gran com convingui –poden ser hores, dies, mesos, anys, etc.–, mentre que la potència instantània sempre es refereix a un moment concret.

Les principals *unitats de potència* són: watt (W), que és la unitat del SI; cal/s, i cavall de vapor (hp). Les relacions entre aquestes unitats són les següents: $1 \text{ cal/s} = 4,186 \text{ W}$; $1 \text{ hp} = 735,5 \text{ W}$. Per exemple, sabent que la calor generada pel metabolisme humà en repòs en un dia és d'uns 10 MJ, podem calcular la potència mitjana desenvolupada pel metabolisme, que és: $10 \text{ MJ}/86.400 \text{ s} = 116 \text{ W}$.

1.3.3. Calor i treball

Un treball és un intercanvi d'energia entre dos sistemes, independentment de les seves temperatures. El fet que dos sistemes intercanviïn energia en forma de calor o de treball ve determinat per les característiques de les fronteres que els separen. Una frontera mòbil permet intercanviar energia en forma de treball mecànic, una frontera permeable permet intercanviar partícules que transporten la seva pròpia energia. Una frontera que permet l'intercanvi de calor s'anomena *diatèrmana*, mentre que una frontera que impossibilita el pas de la calor s'anomena *adiabàtica*. Un material aïllant tèrmic és una aproximació a una paret adiabàtica, tot i que, a la pràctica, els aïllants tèrmics comuns només dificulten o alenteixen la transferència de calor, no la impedeixen totalment. Al capítol següent, estudiarem les diferents maneres d'intercanviar calor entre dos sistemes a diferent temperatura.

1.3.4. Calor i energia tèrmica

El *primer principi de la termodinàmica* estableix la conservació de l'energia en un sistema: “*La suma i resta de les energies intercanviades per un sistema amb el seu entorn és igual al canvi en l'energia emmagatzemada al sistema.*” Si ens centrem en els intercanvis de calor, el primer principi implica que les energies intercanviades en forma de calor se sumen o es resten en funció que el sistema rebi calor o en cedeixi, respectivament; en conseqüència, l'energia emmagatzemada pot augmentar (canvi net > 0) o disminuir (canvi net < 0).

Imaginem que un sistema experimenta un increment d'energia tèrmica perquè rep calor. Aquesta energia es pot invertir en augmentar la temperatura (energia cinètica), o en canviar el seu estat d'agregació (energia potencial). Pensem en un recipient que contingui una petita quantitat d'aigua, que es deixa a l'exterior a ple sol al migdia d'un dia d'estiu. Al cap d'una estona, podrem comprovar que l'aigua s'ha escalfat, però si esperem prou temps també podrem constatar que l'aigua ha desaparegut, s'ha evaporat. La mateixa energia, transferida en forma de calor, es pot fer servir per una cosa o per l'altra:

- Anomenem *calor sensible*, Q_s , la calor invertida en un increment o decrement de la temperatura del sistema.
- Anomenem *calor latent*, Q_l , la calor invertida en canviar l'estat d'agregació del sistema.



La suma d'ambdues és la *calor total* intercanviada: $Q_t = Q_s + Q_l$.

En les condicions habituals en arquitectura (i en molts altres camps de la ciència i de la tècnica), la pressió ambiental ve determinada per l'atmosfera i es pot considerar pràcticament constant (o que varia poc i lentament). En aquestes circumstàncies, la calor total es relaciona amb una propietat dels sistemes anomenada entalpia, representada per una H : *la variació d'entalpia d'un sistema que evoluciona a pressió constant és igual a la calor total intercanviada pel sistema*:

$$\Delta H = Q_t \quad (1.10)$$

L'entalpia és una propietat dels sistemes termodinàmics que s'utilitza sovint en àmbits diversos, com la psicrometria, la química, etc. A pressió constant, la variació d'entalpia d'un sistema és igual a la suma de la variació de la seva energia interna més el treball que ha de fer per canviar de volum (expandir-se o contreure's contra la pressió externa, per exemple la pressió atmosfèrica).

Com s'acaba d'enunciar, la magnitud rellevant és la variació d'entalpia associada a una transformació d'un sistema, és a dir, el valor total de l'entalpia en un moment determinat no és important, sinó només el seu canvi. Tot i així, en alguns casos, pot ser convenient definir un valor de referència de l'entalpia total, assignant una entalpia nul·la a un estat arbitrari. En veurem un exemple a la secció 4.7.

1.4. Calor sensible

El canvi de temperatura, ΔT , experimentat per un sistema com a conseqüència d'un intercanvi de calor sensible, Q_s , depèn de dos factors: el material de que està fet el sistema i la quantitat de material, és a dir, la massa, m .

1.4.1. Calor específica

La *calor específica* d'un material, c_e , es defineix mitjançant l'expressió:

$$Q_s = m \cdot c_e \cdot \Delta T \quad (1.11)$$

Per tant, com més gran és la calor específica d'un material, més calor es necessita per produir un determinat canvi de temperatura de la mateixa massa. En la relació anterior, els signes de Q_s i ΔT són sempre iguals, és a dir, *la calor específica* d'una substància *sempre és una quantitat positiva* (igual que la seva massa).

Les *unitats de la calor específica* són: J/kg·K (combinant unitats del SI), cal/g·°C, o qualsevol altra combinació adient d'unitats d'energia, massa i temperatura. Les dues primeres combinacions són les més utilitzades i la relació entre elles és la següent: 1 J/kg·K = $2,4 \cdot 10^{-4}$ cal/g·°C.

A continuació, se'n proporcionen alguns exemples:

- Acer: $c_e = 0,12 \text{ cal / g}^\circ\text{C}$
- Vidre ordinari: $c_e = 0,21 \text{ cal / g}^\circ\text{C}$
- Alumini: $c_e = 0,22 \text{ cal / g}^\circ\text{C}$
- Aigua: $c_e = 1,00 \text{ cal / g}^\circ\text{C}$

Precisament, el comportament de l'aigua va servir de base per definir la calor, que és la quantitat de calor necessària per elevar la temperatura d'1 g d'aigua de $14,5^\circ\text{C}$ a $15,5^\circ\text{C}$.

Exemple 1.3

Un edifici conté 100.000 kg de formigó, de calor específica $1,0 \text{ kJ/kg}\cdot\text{K}$. Quina quantitat de calor allibera aquest formigó quan es refreda de $30,0^\circ\text{C}$ a $25,0^\circ\text{C}$?

Solució. Tenint en compte que la diferència de temperatures és $\Delta T = -5,0^\circ\text{C} = -5,0 \text{ K}$, hi podem aplicar directament l'equació 1.11:

$$Q_s = m \cdot c_e \cdot \Delta T = 100.000 \text{ kg} \cdot 1.000 \frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\text{K}} \cdot (-5,0 \text{ K}) = -5,0 \cdot 10^8 \text{ J} = -1,2 \cdot 10^8 \text{ cal}$$

Per tant, la resposta és: 120 Mcal.

1.4.2. Capacitat calorífica

Es defineix la *capacitat calorífica d'un sistema* (per exemple, d'un objecte) com el producte de la seva massa per la seva calor específica:

$$C = m \cdot c_e \quad (1.12)$$

Noteu que, a diferència de la calor específica, que és una propietat del material, *la capacitat calorífica fa referència a un sistema amb una massa i una composició concretes*. Les unitats de *capacitat calorífica* d'ús comú són J/K (SI) o $\text{cal/}^\circ\text{C}$.

La capacitat calorífica és el factor de proporcionalitat entre la calor sensible intercanviada i la variació de temperatura:

$$Q_s = C \cdot \Delta T \quad (1.13)$$

Si un sistema està format per diferents materials (és a dir, és heterogeni) i tots ells experimenten la mateixa variació de temperatura, s'ha de sumar la capacitat calorífica de cada material per obtenir la de tot el sistema: $C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4 + \dots$. No obstant això, si diferents parts del sistema experimenten canvis de temperatura diferents, s'ha de calcular la calor sensible associada a cada part per separat i sumar-ne els resultats (com es fa, per exemple, al problema 1.18).

**Exemple 1.4**

Compareu la capacitat calorífica d'un got de vidre de 200 g que conté 100 g d'aigua (aproximadament, mig got de 200 ml), la d'una peça de 100 g de ferro i la d'un tros de paper d'alumini de 100 cm² d'àrea i 0,050 g/cm² de densitat superficial.

Solució. Calculem les capacitats calorífiques amb la definició de capacitat calorífica (equació 1.12).

En el primer cas, got de vidre més aigua, hem de sumar les capacitats calorífiques d'ambdues substàncies: $C_{\text{got}} = C_{\text{vidre}} + C_{\text{H}_2\text{O}} = 142 \text{ cal/}^\circ\text{C}$, on $C_{\text{vidre}} = 200 \text{ g} \cdot 0,21 \frac{\text{cal}}{\text{g} \cdot ^\circ\text{C}} = 42 \text{ cal/}^\circ\text{C}$ i

$$C_{\text{H}_2\text{O}} = 100 \text{ g} \cdot 1,00 \frac{\text{cal}}{\text{g} \cdot ^\circ\text{C}} = 100 \text{ cal/}^\circ\text{C}.$$

La capacitat calorífica de la peça de ferro és: $C_{\text{Fe}} = 100 \text{ g} \cdot 0,12 \frac{\text{cal}}{\text{g} \cdot ^\circ\text{C}} = 12 \text{ cal/}^\circ\text{C}$.

La massa d'alumini és el producte de la superfície per la densitat superficial i, en aquest exemple, és de 5,0 g. La capacitat calorífica és: $C_{\text{Al}} = 5,0 \text{ g} \cdot 0,22 \frac{\text{cal}}{\text{g} \cdot ^\circ\text{C}} = 1,1 \text{ cal/}^\circ\text{C}$.

Per tant, la resposta és: El got amb aigua, 142 cal/°C; el ferro, 12 cal/°C, i el paper d'alumini, 1,1 cal/°C.

1.5. Calor latent

Així com en el cas de la calor sensible la quantitat de calor intercanviada determina la variació de temperatura d'una massa i d'un material determinats, en el cas de la *calor latent*, Q_l , el que varia en funció de la quantitat de calor intercanviada és la *massa que experimenta el canvi de fase*, Δm .

1.5.1. Calor de transformació i canvi de fase

Definim la *calor de transformació*, ℓ , associada a un determinat canvi de fase d'una substància determinada mitjançant la relació:

$$Q_l = \ell \cdot \Delta m \quad (1.14)$$

El canvi de fase, o canvi d'estat, fa referència a un canvi entre els estats d'agregació inicial i final. El canvi de fase pot afectar només parcialment un sistema determinat; no és necessari que tot el sistema canviï de fase simultàniament. Les *unitats de calor de transformació* són J/kg (SI) o cal/g.

Els *canvis d'estat* que es poden donar són:

- sòlid $\rightleftharpoons$ líquid, anomenats *fusió* i *solidificació*.
- líquid $\rightleftharpoons$ vapor, anomenats *vaporització* i *condensació*.
- sòlid $\rightleftharpoons$ vapor, anomenats *sublimació* i *deposició*.

Les calors de transformació de cada parella de canvis d'estat són iguals en valor absolut, per a un mateix material i només en varia el signe. Les calors de transformació de les transicions en el sentit “ $\rightarrow$ ” són positives, mentre que les de les transicions en el sentit “ $\leftarrow$ ” són negatives. És a dir, per passar de sòlid a líquid, el sistema ha de rebre calor ($Q_1 > 0$), mentre que per passar de líquid a sòlid o de vapor a líquid ha de perdre calor ($Q_1 < 0$). Per exemple, la calor de fusió de l'aigua val $\ell_f = 80 \text{ cal/g}$, mentre que la seva calor de solidificació val -80 cal/g . La calor de vaporització de l'aigua val $\ell_v = 540 \text{ cal/g}$ a una temperatura de 100°C , i varia lleugerament amb la temperatura.

Exemple 1.5

En un radiador de calefacció, hi penetren 800 g de vapor d'aigua a 102°C i aquest vapor surt del radiador com a aigua líquida a 80°C . Calculeu la calor despesa en el procés, tot suposant que la pressió a l'interior del radiador es manté constant a 1 atm .

Dades: calor de vaporització de l'aigua = 540 cal/g ; calor específica del vapor d'aigua = $0,46 \text{ cal/g}^\circ\text{C}$.

Solució. Considerem per separat els tres processos pels quals passa l'aigua des del seu estat inicial fins a l'estat final. Seqüencialment: 1) refredament del vapor d'aigua des de 102°C fins a 100°C (calor sensible); 2) condensació dels 800 g de vapor a temperatura constant de 100°C (calor latent), i 3) refredament de l'aigua líquida des de 100°C fins a la temperatura final de 80°C (calor sensible). La calor necessària per a cada procés és:

$$Q_1 = m \cdot c_{\text{e,vapor}} \cdot \Delta T_1 = 800 \text{ g} \cdot 0,46 \frac{\text{cal}}{\text{g} \cdot ^\circ\text{C}} \cdot (-2^\circ\text{C}) = -736 \text{ cal}$$

$$Q_2 = -\ell_v \cdot \Delta m = -540 \frac{\text{cal}}{\text{g}} \cdot 800 \text{ g} = -432.000 \text{ cal}$$

$$Q_3 = m \cdot c_{\text{e,aigua}} \cdot \Delta T_3 = 800 \text{ g} \cdot 1,0 \frac{\text{cal}}{\text{g} \cdot ^\circ\text{C}} \cdot (-20^\circ\text{C}) = -16.000 \text{ cal}$$

A l'expressió de la calor latent, Q_2 , hem utilitzat la calor de transformació de vaporització canviada de signe, atès que el procés de condensació és el contrari al de vaporització, i $\Delta m = m$, perquè condensa tot el vapor.

Per tant, la resposta és: 449 kcal .

No s'ha de confondre la vaporització amb l'ebullició. Per a l'aigua, a pressió atmosfèrica, la vaporització es pot produir a qualsevol temperatura entre 0°C i 100°C ; en canvi, l'ebullició només es dona a 100°C . La diferència fonamental entre els dos processos és que, en la vaporització, es pot arribar eventualment a un equilibri entre el vapor i l'aigua líquida, de manera que les quantitats d'aigua en ambdues fases s'estabilitzin. En canvi, l'ebullició és un procés en què aquest equilibri és impossible i tota l'aigua líquida s'acaba convertint en vapor si deixem passar prou temps.

1.6. Inèrcia tèrmica

El concepte d'inèrcia tèrmica té similituds amb el concepte d'inèrcia propi de la mecànica. Entenem com a *inèrcia tèrmica* d'un sistema la *dificultat que presenta a canviar la seva temperatura quan canvia la temperatura del seu entorn*. Aquest canvi de temperatura de l'entorn origina un intercanvi de calor amb el sistema. Per tant, *podem relacionar la inèrcia tèrmica amb la relació entre l'intercanvi de calor i el canvi de temperatura induït en el sistema, quantitat que abans hem definit com la capacitat calorífica del sistema, C* .

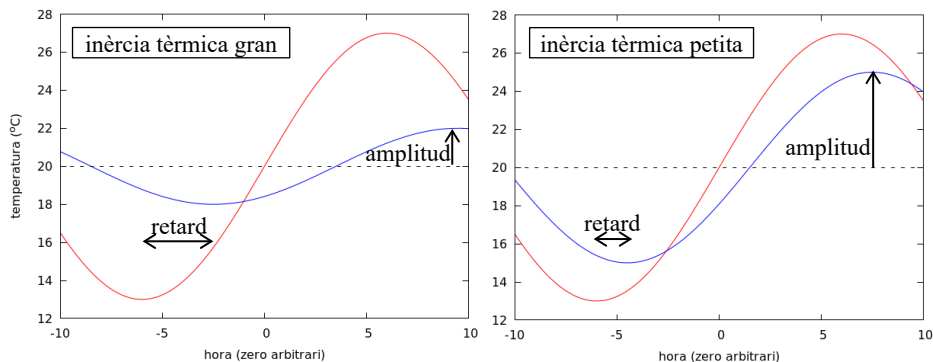
Tanmateix, *poden contribuir a la inèrcia tèrmica d'altres aspectes, com ara la presència d'un material que pugui experimentar un canvi de fase i, per tant, pugui "absorbir" una certa quantitat de calor latent, evitant que s'inverteixi en canviar la temperatura del sistema*. Tanmateix, també hi influeix la rapidesa en què el canvi de la temperatura de l'entorn es tradueix en un intercanvi de calor amb el sistema, com es veurà al capítol següent.

Si l'entorn està sotmès a variacions periòdiques de temperatura, que en podríem anomenar *oscil·lacions tèrmiques*, una gran inèrcia tèrmica del sistema *afavoreix l'estabilitat de la seva temperatura*. En canvi, un sistema amb poca inèrcia tèrmica experimentaria canvis de temperatura que seguirien fidelment els canvis climàtics externs. En una situació d'oscil·lacions tèrmiques de l'entorn, podem distingir *dos efectes de la inèrcia tèrmica* del sistema (Fig. 1.3):

1. *Retard* en la propagació de les oscil·lacions tèrmiques externes, gràcies al qual el màxim (o el mínim) de la temperatura del sistema s'assoleix un temps després del corresponent màxim (o mínim) de la temperatura de l'entorn.
2. *Esmorteïment de les variacions de temperatura*, quan l'amplitud de les oscil·lacions de la temperatura del sistema és inferior a l'amplitud tèrmica del seu entorn.

Fig. 1.3

Efecte de la inèrcia tèrmica sobre les fluctuacions de temperatura a l'interior. Per a unes oscil·lacions de la temperatura exterior determinades (en vermell), un tancament amb gran inèrcia tèrmica (esquerra) origina un esmorteïment de l'amplitud i un retard més gran que un tancament amb poca inèrcia tèrmica (dreta). La temperatura mitjana (20°C) s'ha representat amb una línia discontinua contínua



1.7. Segon principi de la termodinàmica

El *segon principi de la termodinàmica* és un principi d'evolució, que indica en quin sentit es poden produir els processos termodinàmics a la natura: *"Existeix una propietat dels sistemes termodinàmics anomenada entropia, S , tal que, en qualsevol procés real, la*

variació d'entropia de l'univers és sempre positiva, $\Delta S_u > 0$ ⁶. Aquest principi permet identificar quins processos teòrics, que puguem imaginar o dissenyar, poden ser portats a la pràctica i quins són impossibles.

Una altra aplicació del segon principi és que *la variació d'entropia de l'univers es pot considerar una mesura de la degradació de l'energia*, que aporta una idea del grau de sostenibilitat d'un procés. Fixem-nos que, si un procés real s'executa en un sentit determinat, la variació d'entropia de l'univers serà positiva, i el segon principi ens diu que invertir el procés és impossible, perquè la variació corresponent d'entropia de l'univers esdevindria negativa. Però, si la variació d'entropia de l'univers és molt petita, gairebé nul·la, llavors es podria “gairebé invertir” o, per ser més precisos, es podria invertir amb un petit “cost” addicional en termes energètics. És en aquest sentit que la variació d'entropia de l'univers mesura el grau de sostenibilitat. No obstant això, ha de quedar clar que qualsevol procés real és estrictament irreversible.

Una interpretació més intuïtiva del segon principi es deu a Ludwig Boltzmann,⁷ que l'any 1872 va relacionar l'entropia amb el grau de desordre d'un sistema: “Si un estat es pot assolir de moltes maneres diferents, llavors la probabilitat que s'hi arribi és més gran que la d'un altre estat que només es pot assolir d'una manera o de poques maneres.” En aquest sentit, podríem dir que, *en qualsevol procés real, el grau de desordre de l'univers sempre augmenta*.

1.7.1. Màquines frigorífiques i bombes tèrmiques

Les propietats de calor i treball no són simètriques: mentre que és possible que un sistema absorbeixi treball i el transformi totalment en calor (penseu, per exemple, en un calefactor que converteix el treball elèctric en calor), és impossible una transformació en sentit contrari: no és factible que un sistema absorbeixi calor i el transformi completament en treball. Aquesta impossibilitat és una altra manera d'enunciar el segon principi de la termodinàmica.

Les màquines termodinàmiques són aparells destinats a produir una transformació entre la calor i el treball que no es dona espontàniament a la natura. N'hi ha de tres tipus: màquines tèrmiques, màquines frigorífiques i bombes tèrmiques.

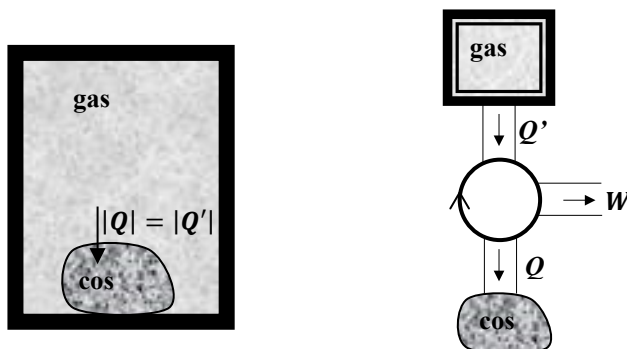
Una màquina tèrmica permet transformar *part* de la calor que absorbeix en treball. La resta de la calor absorbida és entregada a un altre sistema a una temperatura inferior. Les màquines tèrmiques no tenen una aplicació immediata en el funcionament quotidià dels habitatges, però són importants en la construcció. A la figura 1.4, es pot veure una comparació entre dues maneres de transferir calor des d'un sistema calent (a la figura, el gas) fins a un sistema fred (el cos). Si la calor es transfereix directament (v. figura de l'esquerra), s'igualen els valors absoluts de la calor cedida per un sistema i de la calor absorbida per l'altre, i no es fa treball. Si es fa servir una màquina tèrmica (v. figura de la

⁶ La variació d'entropia de l'univers en un procés termodinàmic és la suma de les variacions d'entropia de tots els sistemes que hi intervenen.

⁷ Ludwig Boltzmann (1844-1906), físic teòric austríac que va fer contribucions fonamentals al desenvolupament de la termodinàmica. Entre d'altres aportacions, va defensar l'existència dels àtoms, en aquella època encara en debat, i fou precursor de la revolució de la mecànica quàntica. A la seva tomba, a Viena, està gravada la fórmula que descriu l'entropia.

dreta), part de la calor extreta de la font calenta es desvia i es transforma en un treball W . En aquest procés, la màquina tèrmica ni guanya ni perd energia.

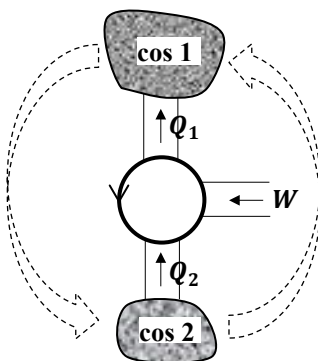
Fig. 1.4
Dues maneres de transferir calor d'un sistema calent (gas, a temperatura T') a un sistema fred (cos, a temperatura $T < T'$). A l'esquerra, transferència directa de calor per contacte, sense treball. A la dreta, transferència mitjançant una màquina tèrmica, que produeix un treball W



Les màquines frigorífiques i les bombes tèrmiques són altres tipus de màquines que tenen una aplicació més directa en els habitatges. Ambdues es basen en el mateix principi: consumir un treball W i provocar un flux “antinatural” de calor des del cos fred (cos 2, calor Q_2) cap al cos calent (cos 1, calor Q_1). Si l'objectiu és refredar el cos fred, estem parlant d'una màquina frigorífica; si és escalfar el cos calent, estem parlant d'una bomba tèrmica.

A la figura 1.5, podeu veure un esquema del que podria ser una bomba tèrmica invertible. En un dia típic d'hivern (en endavant, aquest dia típic d'hivern fa referència a una localització a l'hemisferi nord, amb clima continental), connectant la sortida “1” amb l'interior d'un edifici, la màquina funcionaria com una bomba tèrmica, extraient una calor Q_2 del medi ambient, suposadament fred, i entregant una calor $Q_1 = |Q_2| + W$ a l'edifici, suposadament més calent. Si a l'estiu s'intercanvien les connexions (fletxes discontinues a la figura), de manera que l'interior de l'edifici quedi connectat a “2”, funcionaria com una màquina frigorífica que extrauria una calor Q_2 de l'interior fred i entregaria una calor $Q_1 = |Q_2| + W$ a l'exterior calent.

Fig. 1.5
Una màquina frigorífica extreu calor d'un sistema fred (per exemple, l'interior d'un edifici) i entrega calor a un sistema calent (per exemple, l'aire exterior a l'estiu), consumint un treball W . Si, en canviar d'estació, s'intercanvien les connexions de la màquina amb l'interior i l'exterior (fletxes amb línies discontinues), la màquina es converteix en una bomba tèrmica



L'eficiència de les màquines termodinàmiques es defineix com la relació entre la magnitud útil i el cost. Concretament, per a una màquina frigorífica la quantitat útil és la calor extreta de la font freda, Q_2 , i el cost és el treball que cal invertir, W , de manera que l'eficiència d'una màquina frigorífica, ε_{MF} , es defineix com:

$$\varepsilon_{MF} = -Q_2 / W \quad (1.15)$$

El signe negatiu s'introdueix per compensar el signe de la calor Q_2 , que és negativa en tractar-se d'una calor perduda pel cos 2, d'acord amb el conveni de signes introduït a la secció 1.3.1.

L'eficiència és una magnitud adimensional i acotada inferiorment: $\varepsilon_{MF} \geq 0$. La cota superior de l'eficiència ve condicionada pel segon principi de la termodinàmica. Es pot demostrar que l'eficiència de qualsevol màquina frigorífica ideal que intercanviï calor amb dos sistemes a temperatures constants T_1 i T_2 (suposem $T_1 > T_2$) és:

$$\varepsilon_{MF}^{id} = \frac{T_2}{T_1 - T_2} \quad (1.16)$$

en què les temperatures s'han d'expressar a l'escala Kelvin.

Cap màquina frigorífica real no pot superar, ni tant sols igualar, l'eficiència d'una màquina frigorífica ideal que operi entre les mateixes temperatures:

$$\varepsilon_{MF} < \varepsilon_{MF}^{id} \quad (1.17)$$

Exemple 1.6

Quina potència ha de tenir una màquina frigorífica ideal per mantenir a 17 °C una nau industrial, si aquesta rep calor des de l'exterior, a través de les parets, a raó de 400 cal/s? Supposeu que l'aire exterior es manté a una temperatura constant de 37 °C.

Solució. La relació entre les calors que la màquina ha intercanviat amb les dues fonts tèrmiques (l'exterior i la nau industrial) i el treball que s'ha utilitzat és la mateixa que la relació entre les potències respectives. Igualant la definició d'eficiència d'una màquina frigorífica (equació 1.15) i la seva expressió per a una màquina ideal (equació 1.16), i recordant que les temperatures s'han d'expressar en kelvin, tenim:

$$\varepsilon_{MF}^{id} = -\frac{\dot{Q}_2}{\dot{W}} = \frac{T_2}{T_1 - T_2} \Rightarrow \dot{W} = -\dot{Q}_2 \frac{T_1 - T_2}{T_2} = -400 \frac{\text{cal}}{\text{s}} \cdot \frac{20 \text{ K}}{290,15 \text{ K}} = -27,6 \frac{\text{cal}}{\text{s}} = -115 \text{ W}.$$

Per tant, la resposta, després d'arrodonir a dues xifres significatives, és: 110 W (el signe negatiu només indica que és un treball consumit per la màquina frigorífica).

L'eficiència d'una bomba tèrmica es defineix com el quocient entre la calor entregada al sistema calent i el treball esmerçat:

$$\varepsilon_{BT} = Q_1 / W \quad (1.18)$$

Aquesta eficiència també és adimensional i està acotada inferiorment: $\varepsilon_{\text{BT}} \geq 1$. Anàlogament a les màquines frigorífiques, l'eficiència d'una bomba tèrmica real també està acotada superiorment per l'eficiència de qualsevol bomba tèrmica ideal que operi entre les mateixes temperatures:

$$\varepsilon_{\text{BT}} < \varepsilon_{\text{BT}}^{\text{id}} = \frac{T_1}{T_1 - T_2} \quad (1.19)$$

El fet que les eficiències siguin superiors a la unitat no s'ha d'interpretar com un rendiment extraordinari, ni tan sols òptim, de les màquines. De fet, una bomba tèrmica amb una eficiència igual a la unitat seria la pitjor de les bombes tèrmiques, equivalent a un calefactor que transforma directament el treball consumit en calor. Fixeu-vos que les bombes tèrmiques aconseguixen que el sistema calent rebi la calor extreta del sistema fred, a més de la corresponent al treball consumit. Per tant, sempre són més eficients, des del punt de vista energètic, que un calefactor.

L'eficiència d'una màquina frigorífica o d'una bomba tèrmica es pot valorar amb diferents criteris. Des del punt de vista econòmic, el treball consumit per aconseguir un objectiu determinat (de refrigeració o de calefacció, en funció del tipus de màquina) és la quantitat més important i ve determinat per l'eficiència: com més gran és l'eficiència, menys treball cal consumir per assolir el mateix objectiu (Q_1 o Q_2). Des del punt de vista de la sostenibilitat, la magnitud més rellevant és la degradació de l'energia que es produeix en fer servir una màquina irreversible i, per tant, la diferència entre l'eficiència de la màquina real i la d'una màquina ideal que operi amb les mateixes temperatures. A la secció 1.7.3, es desenvolupa més aquesta darrera qüestió.

1.7.2. Entropia

La variació d'entropia d'un sistema, ΔS , en un procés termodinàmic es defineix com el quocient entre la calor intercanviada, Q , i la temperatura del sistema, T . En distingirem dues situacions:

- Si el sistema evoluciona a temperatura constant, $\Delta S = Q / T$.
- Si la temperatura del sistema varia durant el procés, $\Delta S = \int \frac{dQ}{T}$. En aquest cas, dQ és una quantitat de calor infinitesimal intercanviada durant un temps infinitesimal, en el qual la temperatura del sistema era T i la integral és una integral definida que segueix un procés reversible que connecta els mateixos estats inicial i final⁸.

En les expressions anteriors, *la temperatura sempre ha d'estar expressada en l'escala Kelvin*. Les unitats d'entropia són, doncs: J/K o cal/K (mai J/°C o cal/°C).

⁸ L'entropia és una funció d'estat, el que significa que la seva variació entre dos estats determinats no depèn de com es passa de l'un a l'altre. Per aquest motiu, el procés reversible pel qual es calcula la integral és arbitrari, sempre i quan connecti els mateixos estats inicial i final que el procés real que ens interessa.

El signe de la calor intercanviada determina el signe del canvi d'entropia: un sistema que rep calor a temperatura constant ($Q > 0$) augmenta d'entropia, mentre que un sistema que perd calor disminueix d'entropia. A continuació, s'ofereixen un parell d'exemples de càlcul de la variació d'entropia.

- Metabolisme humà. Un valor mitjà de la calor generada al llarg d'un dia pel metabolisme humà en repòs és de $Q = 10$ MJ. Prenent la temperatura del cos humà com a $T = 37^\circ\text{C} = 310$ K, l'entropia generada resulta ser:

$$\Delta S = \frac{Q}{T} = 7,7 \text{ kcal/K.}$$

- Pèrdua de calor d'una casa unifamiliar. Un valor raonable de la calor perduda per una casa unifamiliar cap al seu entorn al llarg d'un dia és d'uns $Q = 500$ MJ. Suposant una temperatura interior de $T_{\text{int}} = 20^\circ\text{C} = 293$ K i exterior de $T_{\text{ext}} = 5^\circ\text{C} = 278$ K, i que cap més sistema no intervé en l'intercanvi de calor, la variació d'entropia de l'univers és: $\Delta S_u = \frac{Q}{T_{\text{ext}}} - \frac{Q}{T_{\text{int}}} = 92 \text{ kcal/K.}$

En aquest últim càlcul s'ha tingut en compte que, per a la casa unifamiliar, la calor és perduda i, en conseqüència, s'hi ha inserit un signe negatiu. En canvi, per al medi ambient exterior, la calor és guanyada i, per tant, positiva.

Exemple 1.7

Compareu la variació d'entropia de l'univers quan es congela un got de plàstic amb 250 g d'aigua, inicialment a 30°C , seguint els dos procediments alternatius següents:

- Es deixa directament al congelador a -18°C .
- Primer es posa al frigorífic, a 4°C de temperatura, fins que l'aigua arriba a la mateixa temperatura i, a continuació, es deixa al congelador a -18°C .

Dades: calor específica del gel = $0,50 \text{ cal/g}\cdot^\circ\text{C}$; calor de fusió del gel = 80 cal/g ; variació d'entropia de l'aigua en el procés descrit = $-107,8 \text{ cal/K}$ (igual pels dos procediments).

Solució. Per simplificar, negligirem la variació d'entropia del plàstic que, en tot cas, és molt inferior a la de l'aigua. També suposarem que treballem amb màquines frigorífiques ideals.

- La calor que s'ha d'extreure de l'aigua per portar-la de 30°C a -18°C , passant per la congelació a 0°C , és:

$$Q_{\text{aigua}} = m \cdot c_{\text{e,aigua}} \cdot \Delta T_1 - \ell_f \cdot m + m \cdot c_{\text{e,gel}} \cdot \Delta T_2 = -29.750 \text{ cal,}$$

on $\Delta T_1 = -30^\circ\text{C}$ i $\Delta T_2 = -18^\circ\text{C}$.

La mateixa calor (amb signe positiu, $Q_{\text{cong}} = -Q_{\text{aigua}}$) és absorbida pel congelador, a temperatura $T_{\text{cong}} = -18^\circ\text{C} = 255,15$ K, de manera que la seva variació d'entropia és:

$$\Delta S_{\text{cong}} = \frac{Q_{\text{cong}}}{T_{\text{cong}}} = \frac{29.750 \text{ cal}}{255,15 \text{ K}} = 116,6 \text{ cal/K.}$$

La variació d'entropia de l'univers és la suma de la del congelador i la de l'aigua:



$$\Delta S_u = \Delta S_{\text{cong}} + \Delta S_{\text{aigua}} = 116,6 - 107,8 = 8,8 \text{ cal/K.}$$

- b) En refredar l'aigua en dos passos, part de la calor, Q , que desprèn s'entrega al refrigerador a 4°C i la resta, $Q' = Q_{\text{cong}} - Q$, al congelador, a -18°C . La calor entregada al refrigerador correspon a la calor sensible necessària per refredar l'aigua de 30°C a 4°C , $Q = m \cdot c_{\text{e,aigua}} \cdot (30^\circ\text{C} - 4^\circ\text{C}) = 6.500 \text{ cal}$. Per tant, la calor entregada al congelador és: $Q' = 23.250 \text{ cal}$.

Les variacions respectives d'entropia són:

$$\Delta S = \frac{Q}{T_{\text{refr}}} = \frac{6.500 \text{ cal}}{277,15 \text{ K}} = 23,5 \text{ cal / K ,}$$

$$\Delta S' = \frac{Q'}{T_{\text{cong}}} = \frac{23.250 \text{ cal}}{255,15 \text{ K}} = 91,1 \text{ cal / K .}$$

La variació d'entropia de l'univers és la suma d'aquestes dues més la de l'aigua:

$$\Delta S'_u = \Delta S + \Delta S' + \Delta S_{\text{aigua}} = 6,8 \text{ cal / K.}$$

Per tant, la resposta és: a) $8,8 \text{ cal/K}$; b) $6,8 \text{ cal/K}$.

A l'exemple 1.7, hem simplificat el càlcul limitant-nos a calcular la variació d'entropia de la màquina frigorífica, l'aigua i l'entorn de la màquina (l'habitació en què es troba, amb la qual intercanvia calor), i suposant que la màquina es comporta idealment. En la realitat, s'haurien de tenir en compte tota una sèrie de factors i sistemes addicionals que intervenen en el procés:

- màquines frigorífiques reals,
- transformadors elèctrics,
- transport de corrent altern,
- centrals generadores i distribuïdores d'electricitat,

tots els quals contribueixen a augmentar l'entropia de l'univers i a degradar l'energia.

L'exemple anterior serveix per posar de manifest una propietat general de l'entropia: sempre que sigui possible fer una transformació gradualment, la variació d'entropia de l'univers és menor que si es fa bruscament. La transformació gradual es caracteritza perquè la diferència de temperatures entre els sistemes que intercanvien calor en cada pas és relativament petita.

1.7.3. Evolució i sostenibilitat

La termodinàmica mostra que, en qualsevol procés irreversible (que és com dir en qualsevol procés real), es produeix una degradació de l'energia. És a dir, l'energia total de l'univers es conserva, però perd "qualitat": no tota es pot utilitzar per extreure treball útil i la quantitat que se'n pot utilitzar disminueix en cada procés irreversible. La quantitat d'energia "útil" que es perd en una transformació s'anomena *energia no utilitzable* o, simplement, *irreversibilitat*, i la representem com $E_{n.u.}$. Es pot demostrar que l'energia

no utilitzable que resulta d'un procés és igual al producte de la variació d'entropia de l'univers per la temperatura més baixa assolida durant el procés: $E_{n.u.} = T_{\min} \cdot \Delta S_u$.

El funcionament d'una màquina frigorífica ideal, d'eficiència ε_{MF}^{id} , no canvia l'entropia de l'univers i, per tant, no degrada l'energia. Quan s'utilitza una màquina frigorífica real, d'eficiència ε_{MF} , que treballa entre les mateixes temperatures T_1 i T_2 (suposem $T_1 > T_2 = T_{\min}$) que la màquina ideal, l'energia no utilitzable ve donada per l'expressió:⁹

$$E_{n.u.} = |Q_2| \frac{T_2}{T_1} \left(\frac{1}{\varepsilon_{MF}} - \frac{1}{\varepsilon_{MF}^{id}} \right) \quad (1.20)$$

on Q_2 és la calor extreta de la font freda, i les temperatures s'expressen en kelvin. Com es pot apreciar, l'energia no utilitzable és directament proporcional a la calor extreta del sistema fred. La dependència en les temperatures és poc important, perquè el quocient T_2 / T_1 sempre és pròxim a 1. Finalment, l'energia no utilitzable també és proporcional a la diferència entre les inverses de les eficiències de la màquina ideal i la real.

Si considerem bombes tèrmiques en comptes de màquines frigorífiques, l'energia no utilitzable associada al funcionament d'una bomba tèrmica real és:

$$E_{n.u.} = Q_1 \left(\frac{1}{\varepsilon_{BT}} - \frac{1}{\varepsilon_{BT}^{id}} \right) \quad (1.21)$$

on Q_1 és la calor entregada a la font calenta.

El segon principi estableix que l'entropia de l'univers sempre augmenta, però no posa límits a la variació d'entropia de les seves parts. És a dir, un sistema particular que no estigui aïllat del seu entorn (per exemple, un edifici o una ciutat) pot experimentar una disminució d'entropia. La condició perquè això sigui possible és que l'entorn experimenti, necessàriament, un augment d'entropia que, a més, ha de ser superior, en valor absolut, a la variació de l'entropia del sistema. Expressat en termes d'ordre/desordre: podem ordenar un sistema sempre a base de desordenar (més) el seu entorn.

La construcció d'edificis, la urbanització del terreny i, en general, qualsevol activitat humana impliquen, necessàriament, una degradació (desordre) de l'entorn. Reconèixer aquesta degradació en tots els seus vessants i controlar-la són els primers passos per planificar un futur sostenible.

⁹ Es pot arribar a aquesta expressió combinant les equacions 1.15 i 1.16 amb el primer principi de la termodinàmica, aplicat a la màquina frigorífica, que es formularia com: $Q_1 + Q_2 = W$.

**Exemple 1.8**

Imagineu que es fa servir una màquina frigorífica no ideal, d'eficiència $\varepsilon_{\text{MF}} = 3,0$, per condicionar la nau de l'exemple 1.6, en les mateixes condicions ambientals. A quin ritme es degradarà l'energia?

Solució. A l'exemple 1.6, hem vist que l'eficiència de la màquina frigorífica ideal és:

$\varepsilon_{\text{MF}}^{\text{id}} = \frac{T_2}{T_1 - T_2} = 14,5$, i la potència d'extracció de calor de la nau: $|\dot{Q}_2| = 400 \text{ cal/s}$. Aplicant la

fórmula que proporciona l'energia no utilitzable per una màquina frigorífica real (equació 1.20), tenim:

$$\dot{E}_{\text{n.u.}} = |\dot{Q}_2| \frac{T_2}{T_1} \left(\frac{1}{\varepsilon_{\text{MF}}} - \frac{1}{\varepsilon_{\text{MF}}^{\text{id}}} \right) = 400 \frac{\text{cal}}{\text{s}} \cdot \frac{290,15 \text{ K}}{310,15 \text{ K}} \left(\frac{1}{3,0} - \frac{1}{14,5} \right) = 98,9 \text{ cal/s.}$$

Per tant, la resposta, arrodonida a dues xifres significatives, és 410 W.

1.8. Problemes resolts¹⁰

P1.1 Un gran recipient de ferro a 21,0°C conté aigua fins a una altura de 57,3 cm. Quina altura assolirà l'aigua en el recipient quan el conjunt s'escalfi fins a 45,0°C?

Dades: coeficient mitjà de dilatació *volumètrica* de l'aigua entre 21,0°C i 45,0°C, $\gamma_{\text{H}_2\text{O}} = 3,3010^{-4} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$; coeficient de dilatació *lineal* del ferro = $1,20 \cdot 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$.

Solució:

Suposem que el recipient és prou gran perquè l'aigua no vessi. El volum d'aigua dins el recipient és igual al producte de la superfície de la base del recipient per l'altura de l'aigua: $V_{\text{H}_2\text{O}} = A_{\text{base}} \cdot h$.

El volum d'aigua varia amb la temperatura d'acord amb l'equació 1.8:

$$V'_{\text{H}_2\text{O}} = V_{\text{H}_2\text{O}} \cdot (1 + \gamma_{\text{H}_2\text{O}} \cdot \Delta T),$$

i la superfície de la base varia seguint l'equació 1.5:

$$A'_{\text{base}} = A_{\text{base}} \cdot (1 + \beta_{\text{Fe}} \cdot \Delta T),$$

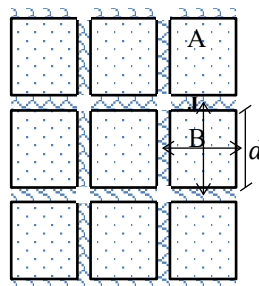
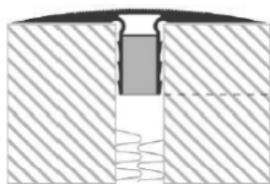
en què el coeficient de dilatació superficial del ferro és:

$$\beta_{\text{Fe}} = 2\alpha_{\text{Fe}} = 2,410^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}.$$

A la temperatura final, és a dir, amb $\Delta T = 24^\circ\text{C}$, l'altura de l'aigua és:

$$h' = \frac{V'_{\text{H}_2\text{O}}}{A'_{\text{base}}} = \frac{V_{\text{H}_2\text{O}} \cdot (1 + \gamma_{\text{H}_2\text{O}} \cdot \Delta T)}{A_{\text{base}} \cdot (1 + \beta_{\text{Fe}} \cdot \Delta T)} = h \cdot \frac{(1 + \gamma_{\text{H}_2\text{O}} \cdot \Delta T)}{(1 + \beta_{\text{Fe}} \cdot \Delta T)} = 57,7 \text{ cm}$$

P1.2 El perfil de la figura es fa servir per a juntes de dilatació en ceràmica, de coeficient de dilatació lineal $7,0 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$. Determineu la mida màxima de les rajoles que s'hi ha de col·locar, sabent que el màxim moviment que pot absorbir el perfil és d'1,7 mm i que la variació tèrmica màxima és de 40°C respecte a les condicions inicials.



¹⁰ En donar els resultats finals dels problemes resolts i proposats a tots els capítols del llibre, com també els dels exemples que acompanyen les explicacions teòriques, s'ha tingut en compte el nombre de xifres significatives de les dades, tal com s'explica al pròleg. En alguns casos, això s'esmenta explícitament al resultat, amb la intenció que el lector hi faci atenció.

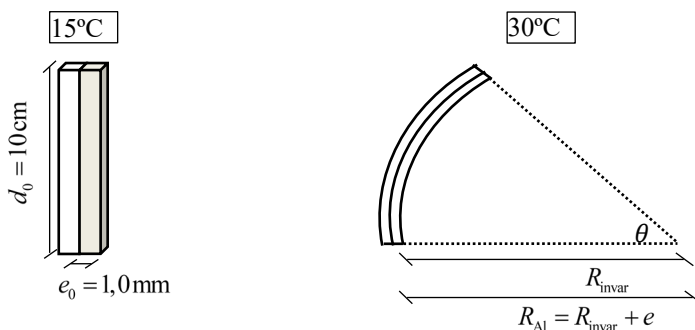
Solució:

Cada rajola es dilata en totes direccions. Com es pot veure al dibuix, hem suposat que la dimensió vertical és més gran que l'horitzontal; per tant, la dilatació també serà més gran en direcció vertical, i la condició límit s'assolirà abans a les juntes que separen verticalment les rajoles, com és el cas de la junta **J**. Només cal que ens ocupem de la dilatació lineal de les rajoles en direcció vertical. El canvi de longitud vertical de cada rajola és (equació 1.3): $\Delta d = d \cdot \alpha \cdot \Delta T$. La meitat d'aquesta dilatació és cap amunt i l'altra meitat, cap avall.

Si considerem una junta de dilatació, per exemple la **J**, el seu espai és envaït, en part, per la rajola que té al damunt (A) i, en part, per la que té a sota (B), de manera que el resultat de la constricció de la junta de dilatació és, en total, igual a la dilatació d'una única rajola, Δd . Igualant l'expressió de Δd al valor màxim que pot absorbir el perfil, i substituint $\Delta T = 40^\circ\text{C}$, n'obtenim el resultat volgut:

$$d = \frac{\Delta d}{\alpha \cdot \Delta T} = \frac{0,0017\text{ m}}{710^{-6}\text{ }^\circ\text{C}^{-1} \cdot 40^\circ\text{C}} = 6,1\text{ m}$$

- P1.3** Un termòstat es basa en una làmina bimetal·lica, formada per dues làmines metàl·liques de 10 cm de longitud i 1,0 mm de gruix, mesurats a 15°C , soldades en tota la seva longitud i amplada. A la temperatura de referència, el conjunt té forma prismàtica recta. Una de les làmines és d'alumini ($\alpha_{\text{Al}} = 2,510^{-5}\text{ }^\circ\text{C}^{-1}$) i l'altra (de color gris a la figura) és d'invar ($\alpha_{\text{invar}} = 9,010^{-7}\text{ }^\circ\text{C}^{-1}$). Calculeu l'angle de curvatura de la làmina bimetal·lica a 30°C .



Solució:

A 30°C , la longitud d'invar és $d_{\text{invar}} = d_0 \cdot (1 + \alpha_{\text{invar}} \cdot \Delta T) = 10,000135\text{ cm}$ i la d'alumini, $d_{\text{Al}} = d_0 \cdot (1 + \alpha_{\text{Al}} \cdot \Delta T) = 10,00375\text{ cm}$. Com que ambdues làmines estan soldades, no es poden dilatar longitudinalment i adopten la forma d'un sector circular, amb angle θ i radis de curvatura R_{invar} i $R_{\text{Al}} = R_{\text{invar}} + e$.

En aquesta darrera configuració (figura de la dreta), l'invar, que es dilata menys, queda a la part interior de la curvatura, i l'alumini queda a l'exterior. La longitud

dels materials, amb forma de sector circular, es pot relacionar amb l'angle θ , expressat en radians: $d = \theta \cdot R$.

Plantegem el sistema d'equacions següent:

$$d_{Al} \rightarrow d_0 \cdot (1 + \alpha_{Al} \cdot \Delta T) = \theta \cdot R_{Al}$$

$$d_{invar} \rightarrow d_0 \cdot (1 + \alpha_{invar} \cdot \Delta T) = \theta \cdot R_{invar}$$

$$R_{Al} = R_{invar} + 1,0 \text{ mm}$$

en què hi ha tres incògnites: θ , R_{Al} , i R_{invar} .

Resolent el sistema, l'angle de curvatura és: $\theta = 0,036 \text{ rad} = 2,1^\circ$.

- P1.4** Un bloc de gel d'1,0 kg, a 0°C de temperatura, es deixa caure des d'una altura de 80 m. En el moment del xoc, un 20 % de l'energia cinètica del bloc es transforma en calor i és absorbit pel gel. Quina massa de gel es fon?

Dades: calor de fusió del gel = 80 cal/g; acceleració de la gravetat = $9,81 \text{ m/s}^2$

Solució:

L'energia cinètica del bloc en arribar al terra és igual a l'energia potencial a 80 m d'altura: $E_p = mgh = 1 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 80 \text{ m} = 784,8 \text{ J}$. La calor absorbida pel gel és el 20% d'aquesta quantitat: $Q_l = 157,0 \text{ J}$. La massa de gel que es fon està relacionada amb la calor latent per l'equació 1.14:

$$\Delta m = \frac{Q_l}{\ell_f} = \frac{157,0 \text{ J}}{80 \frac{\text{cal}}{\text{g}} \cdot 4,18 \frac{\text{J}}{\text{cal}}} = 0,47 \text{ g}$$

- P1.5** Per un col·lector solar de $2,0 \text{ m}^2$ circula un flux d'aigua de 25 litres cada minut, mentre que rep 800 W/m^2 de radiació solar. Només el 20 % d'aquesta energia solar és captada pel col·lector i escalfa l'aigua que el travessa. Calculeu l'increment de temperatura de l'aigua al llarg del seu recorregut pel col·lector.

Solució:

Comencem per calcular l'energia captada pel col·lector i que s'empra en escalfar l'aigua. L'energia radiant que incideix sobre el col·lector és el producte de la intensitat incident, 800 W/m^2 , i l'àrea receptora, $2,0 \text{ m}^2$, mentre que la calor absorbida per l'aigua és el 20 % d'aquest producte: $\dot{Q}_s = 320 \text{ W}$ o, el que és el mateix, $Q_s = 19.200 \text{ J}$ cada minut.

L'aigua circula pel col·lector a raó de 25 litres cada minut, és a dir, 25 kg cada minut. Per la calor específica de l'aigua, adoptem el valor d'1,0 cal/g·°C, que equival a $4,186 \text{ J/g} \cdot ^\circ\text{C}$.



Per obtenir l'increment de temperatura, podem escriure l'equació 1.11 amb totes les quantitats referides a un minut: $\Delta T = \frac{Q_s}{(m \cdot c_e)} = \frac{19,2 \text{ kJ}}{25 \text{ kg} \cdot 4,18 \frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot ^\circ\text{C}}} = 0,18 ^\circ\text{C}$

P1.6 Es volen obtenir 52 g d'aigua a 20°C i, amb aquesta finalitat, es barreja una massa m_1 d'aigua a 15°C amb una massa m_2 d'aigua a 80°C. Determineu m_1 i m_2 .

Solució:

Representem la massa final per m i les variacions de temperatura de les dues masses d'aigua, per $\Delta T_1 = 5 ^\circ\text{C}$ i $\Delta T_2 = -60 ^\circ\text{C}$. Si la barreja es fa dintre d'un recipient tèrmicament aïllant, podem resoldre aquest problema aplicant les conservacions de la massa i de l'energia (suma zero de calors):

$$m = m_1 + m_2$$

$$m_1 \cdot c_e \cdot \Delta T_1 + m_2 \cdot c_e \cdot \Delta T_2 = 0$$

En aquestes dues equacions, les úniques incògnites són les dues masses per determinar. Resolent el sistema, n'obtenim: $m_1 = 48 \text{ g}$ i $m_2 = 4 \text{ g}$

P1.7 Una cabana aïllada al camp, de tipologia rectangular ($6,0 \times 5,0 \times 3,0 \text{ m}$), està formada pels dos materials que es mostren a la taula, llevat del terra, que no hi contribueix a efectes tèrmics. Els gruixos, les densitats i les calors específiques són:

	$e \text{ (m)}$	$\rho \text{ (kg/m}^3\text{)}$	$c_e \text{ (J/g} \cdot ^\circ\text{C)}$
Material A	0,050	150	0,60
Material B	0,150	2.700	0,85

Calculeu la capacitat calorífica de la cabana.

Solució:

La massa de cada material és el producte de la seva densitat pel volum que ocupa, el qual ve donat pel producte del gruix i la superfície total dels tancaments: $A = 2(6,0 \cdot 5,0 + 6,0 \cdot 3,0 + 5,0 \cdot 3,0) = 126 \text{ m}^2$. Els volums totals i les masses dels dos materials són:

$$V_A = 126 \text{ m}^2 \cdot 0,050 \text{ m} = 6,30 \text{ m}^3; m_A = 6,30 \text{ m}^3 \cdot 150 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 945 \text{ kg}$$

$$V_B = 18,90 \text{ m}^3; m_B = 51.030 \text{ kg}$$

La capacitat calorífica de la cabana és la suma de les dels dos materials:

$$C = C_A + C_B = m_A \cdot c_{e,A} + m_B \cdot c_{e,B} = 44 \text{ MJ/}^\circ\text{C}$$

P1.8 Calculeu el treball necessari per congelar 5,00 g d'aigua, inicialment a 0,0 °C, mitjançant una màquina frigorífica, l'eficiència de la qual és la meitat de la d'una màquina frigorífica ideal. Suposeu que la font tèrmica calenta amb què treballa la màquina frigorífica és una habitació a temperatura constant i igual a 25,0 °C.

Solució:

L'eficiència d'una màquina frigorífica ideal que treballa entre les temperatures $T_1 = 25,0\text{ °C} = 298,15\text{ K}$ i $T_2 = 0,0\text{ °C} = 273,15\text{ K}$ és:

$$\varepsilon_{\text{MF}} = \frac{T_2}{T_1 - T_2} = \frac{273,15}{25,0} = 10,93$$

La màquina a què fa referència l'enunciat és la meitat d'eficient; per tant:

$$\varepsilon'_{\text{MF}} = 5,46.$$

A partir de la definició d'eficiència d'una màquina frigorífica, vàlida per a qualsevol tipus de màquina, ideal o real, tenim: $\varepsilon'_{\text{MF}} = -\frac{Q_2}{W} \Rightarrow W = -\frac{Q_2}{\varepsilon'_{\text{MF}}}$. La calor per absorbir de l'aigua per tal de congelar-la és: $Q_2 = -\ell_f \cdot \Delta m = -400\text{ cal}$, en què la calor de transformació apropiada per la congelació de l'aigua és: $-\ell_f = -80$

cal/g. Finalment, $W = -\frac{Q_2}{\varepsilon'_{\text{MF}}} = \frac{400\text{ cal}}{5,46} = 73,2\text{ cal} = 306\text{ J}$.

1.9. Problemes proposats

P1.9 La torre de telecomunicacions de Montjuïc té una altura de 136 m i està feta d'acer. Sabent que el coeficient de dilatació lineal de l'acer és $1,2 \cdot 10^{-5}\text{ °C}^{-1}$, determineu-ne la diferència d'altura entre un dia càlid a 40°C i un dia fred en què la temperatura baixa fins a -10°C.

R: 8,2 cm

P1.10 Una canonada de coure té un diàmetre de 38,20 mm a 15°C. Determineu el seu diàmetre quan transporta aigua calenta a 80°C (suposeu que el coure assoleix la mateixa temperatura).

Dades: $\alpha_{\text{Cu}} = 1,7 \cdot 10^{-5}\text{ °C}^{-1}$

R: 38,24 mm

P1.11 Un recipient de ferro de 2,5 litres està ple d'aigua a 21°C. Vessarà aigua si el conjunt es refreda fins a 13°C? En cas afirmatiu, quin volum d'aigua es perdrà?

Dades: coeficient mitjà de dilatació *volumètrica* de l'aigua entre 13°C i 21°C: $\gamma_{\text{H}_2\text{O}} = 1,7 \cdot 10^{-4}\text{ °C}^{-1}$; coeficient de dilatació *lineal* del ferro: $1,2 \cdot 10^{-5}\text{ °C}^{-1}$.

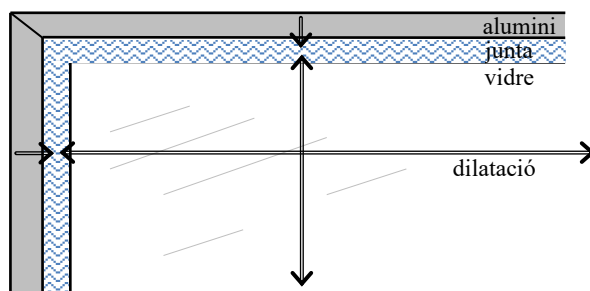
R: 0

P1.12 Una esfera de metall, de coeficient de dilatació lineal $\alpha_1 = 1,19 \cdot 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ i diàmetre $d_1 = 12,0500 \text{ cm}$, reposa sobre un anell de llautó, de coeficient $\alpha_2 = 1,89 \cdot 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ i de diàmetre interior $d_2 = 12,0450 \text{ cm}$, ambdós mesurats a la temperatura ambient de 15°C . Determineu a quina temperatura s'ha d'escalfar el conjunt per tal que l'esfera passi a través de l'anell.

R: 74°C

P1.13 El marc de la finestra de la figura és d'alumini i té una amplada de $4,0 \text{ cm}$ (la figura no està a escala). El vidre de la finestra fa $60 \times 120 \text{ cm}$. Calculeu la màxima variació de temperatura admissible sabent que la junta entre el marc i el vidre admet una compressió màxima de $0,80 \text{ mm}$.

Dades: $\alpha_{\text{Al}} = 2,5 \cdot 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$; $\alpha_{\text{vidre}} = 9,0 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$.



R: 120°C (arrodonit a dues xifres significatives)

P1.14 Un acumulador de calor té forma cilíndrica d' $1,5 \text{ m}$ d'altura i 50 cm de radi, i conté 500 litres d'aigua a 40°C . El cilindre està completament cobert amb un aïllant tèrmic però, tot i així, es perden 23 kcal per m^2 de superfície cada hora. Quant de temps trigarà a baixar 10°C la temperatura de l'aigua?

Dades: densitat de l'aigua = 1.000 kg/m^3 ; $1 \text{ m}^3 = 1.000$ litres

Nota: Negligiu la capacitat calorífica de l'aïllant tèrmic i del material de l'acumulador.

R: 35 hores

P1.15 Un objecte de ferro de $2,0 \text{ kg}$, inicialment a temperatura desconeguda, es submergeix en $2,0 \text{ kg}$ d'aigua a $20,0^\circ\text{C}$, tot en un recipient aïllat tèrmicament. La temperatura final de la barreja és $21,0^\circ\text{C}$. Calculeu la temperatura inicial del ferro.

Dades: $c_{\text{e,Fe}} = 0,12 \text{ cal/g}\cdot^\circ\text{C}$

R: $29,3^\circ\text{C}$

P1.16 Calculeu la massa de gel fonent, a 0°C , que s'ha de mesclar amb 6 kg d'aigua a 70°C , dins d'un recipient aïllat tèrmicament, per tal que la temperatura final de la barreja sigui de 10°C .

Dades: calor de fusió del gel = 80 cal/g

R: 4 kg

P1.17 Un mur de maons, de 30 m² de superfície i 102 mm de gruix, està aïllat interiorment per una capa de 40 mm de llana mineral, seguida de 10 mm de guix. Amb les dades de la taula, calculeu la capacitat calorífica del mur.

	ρ (kg/m ³)	c_e (J/kg·°C)
maons	1.800	920
llana mineral	150	840
placa de guix	900	1.000

R: 5,5 MJ/°C

P1.18 Les temperatures mitjanes de les diferents capes del mur del problema anterior són: $T_{\text{maons}} = 3,2^\circ\text{C}$, $T_{\text{llana}} = 10,1^\circ\text{C}$ i $T_{\text{guix}} = 16,1^\circ\text{C}$. Determineu la calor que desprèn el mur si es refreda tot ell fins assolir una temperatura uniforme de $-3,0^\circ\text{C}$

R: 39 MJ

P1.19 Un tancament està format per les capes següents: 1,5 cm de guix, maó foradat de 5,3 cm, capa de 50 mm de llana de vidre i maó de cara vista d'11,5 cm. Calculeu la capacitat calorífica de 100 m² d'aquest tancament.

	ρ (kg/m ³)	c_e (J/kg·°C)
Guix	1.440	840
maó foradat	1.000	1.000
llana de vidre	200	650
maó cara vista	2.150	1.000

R: 33 MJ/°C

P1.20 Calculeu la calor cedida a l'habitació per la màquina frigorífica real del problema 1.8.

R: 473 cal

P1.21 Invertint la màquina de l'exemple 1.6 i consumint la mateixa potència $\dot{W}$ calculada a l'exemple esmentat, es vol escalfar la mateixa nau a l'hivern mantenint la temperatura de la nau a 17 °C quan la temperatura exterior és de 2 °C (suposada constant). Calculeu la potència calorífica subministrada per la bomba tèrmica a la nau.

R: 2,2 kW

→2



Propagació de la calor

Com hem vist al capítol anterior, dos sistemes a temperatura diferent poden intercanviar calor. És el cas, per exemple, d'un edifici i el seu entorn. Normalment, intentem mantenir estable la temperatura interior, dintre dels marges del confort tèrmic, tot i que la temperatura exterior assoleixi valors molt diferents. Per aconseguir l'estabilitat tèrmica de l'interior, hem d'aconseguir compensar la calor intercanviada amb l'exterior, mitjançant un sistema de calefacció o de refrigeració. Aquesta compensació ha de ser quasi instantània, de manera que la magnitud que s'ha de considerar és la potència calorífica (que també podem anomenar *flux de calor*). L'objectiu, ara, és conèixer els diferents mecanismes pels quals es pot intercanviar calor entre dos sistemes a temperatures diferents, i les particularitats de cada mecanisme: de què depèn que el flux de calor sigui més o menys intens, en quins materials pot actuar, etc. Començarem descrivint breument els tres mecanismes de transferència de calor i, a continuació, analitzarem amb detall les lleis que els regeixen.

2.1 Mecanismes de propagació de la calor

Hi ha tres maneres diferents de transferir calor entre dos sistemes a temperatures diferents: la conducció, la radiació i la convecció. En totes elles, la calor penetra a l'interior dels sistemes a través de la seva superfície externa, que en podríem anomenar la "pell". Per aquest motiu, l'àrea de contacte tèrmic, A , és un dels factors que apareixen a les expressions del flux de calor intercanviat per qualsevol mecanisme: *com més gran és l'àrea de contacte tèrmic, més gran és el flux de calor*.

Les característiques bàsiques dels tres mecanismes de transmissió de la calor són les següents:

- **Conducció.** Es pot intercanviar calor per conducció entre dos sistemes a temperatura diferent si hi ha contacte físic directe entre ells, o indirecte a través d'un conductor (un tercer sistema que es posa en contacte directe amb els altres dos i que pot conduir la calor). Per exemple, quan s'agafa amb la mà un objecte calent, hi ha conducció tèrmica directa entre l'objecte i la mà. En canvi, una paret es pot considerar un conductor de calor que permet l'intercanvi indirecte entre les masses d'aire que es troben a cada costat de la paret. La conducció de la calor es fa a escala microscòpica, i hi intervenen des de molècules fins a partícules subatòmiques, que comparteixen la seva agitació tèrmica amb les seves veïnes, començant amb el sistema calent i acabant

amb el sistema fred. La conducció tèrmica necessita un medi material: no es pot donar en el buit (però sí a l'aire, tot i que és poc eficient, en comparació amb els altres mecanismes de transferència).

- *Radiació.* Tot sistema material que es trobi a una temperatura superior a 0 K (circumstància que sempre es dona) emet ones electromagnètiques. L'emissió d'aquesta radiació constitueix una pèrdua energètica en forma de calor. Al mateix temps, els sistemes poden absorbir totalment o parcialment la radiació d'ones electromagnètiques emesa per altres cossos del seu entorn, i guanyar calor. L'intercanvi de calor per radiació entre dos sistemes es pot fer a distància; l'únic requisit és la transparència del medi que els separa.
- *Convecció.* Consisteix en un moviment cíclic de determinades regions d'un fluid que tenen contacte tèrmic successivament amb un sistema calent i amb un sistema fred, i absorbeixen calor del primer i la cedeixen al segon. L'efecte net és un intercanvi de calor indirecte entre aquests dos sistemes. La convecció implica una deformació eficient del medi, la qual cosa descarta la seva actuació en cossos sòlids.

Si hi ha més d'un mecanisme que actui simultàniament i transfereixi calor entre dos sistemes a temperatures diferents, *el flux de calor total entre ambdós sistemes és la suma del flux de calor degut a cada mecanisme.* Per exemple, si hi ha una potència conductiva, $\dot{q}_{\text{cond}}$, una potència radiativa, $\dot{q}_{\text{rad}}$, i una potència convectiva, $\dot{q}_{\text{conv}}$, la potència calorífica total intercanviada és: $\dot{q}_{\text{total}} = \dot{q}_{\text{cond}} + \dot{q}_{\text{rad}} + \dot{q}_{\text{conv}}$.

2. 2. Conducció i llei de Fourier

Considerem el cas d'un *conductor de calor que connecta dos sistemes a temperatura diferent* (per exemple, una paret que separa l'aire interior calent d'un edifici de l'aire exterior fred). La temperatura a l'interior del conductor variarà d'un punt a un altre. Podem esperar que la superfície del conductor que estigui en contacte directe amb el sistema calent estigui a una temperatura superior, T_1 , a la de la superfície que estigui en contacte directe amb el sistema fred, que estarà a una temperatura $T_2 < T_1$. *La temperatura variarà gradualment a l'interior del conductor, entre els dos extrems.*

El flux de calor, o potència calorífica, degut a la conducció tèrmica depèn de tres factors: l'àrea del conductor, A ; el material de què està fet el conductor, i la “rapidesa de variació” de la temperatura amb la posició a l'interior del conductor, que anomenem *gradient tèrmic*, dT/dx , i que té per unitats K/m o °C/m. La *llei de Fourier*¹ de la conducció tèrmica relaciona totes aquestes magnituds:

$$\dot{q}_{\text{cond}} = A \cdot k \cdot \frac{dT}{dx} \quad (2.1)$$

¹ Jean-Baptiste Fourier (1768-1830), matemàtic i físic francès que va fer nombroses aportacions a la ciència. Entre d'altres, va estudiar la propagació de la calor per conducció, l'efecte hivernacle i la descomposició de funcions matemàtiques periòdiques arbitràries en funcions trigonomètriques (amb implicacions, per exemple, en acústica).

on k és la *conductivitat tèrmica del material del conductor*, que té per unitats $\text{W/m}\cdot\text{K}$ o $\text{W/m}\cdot^\circ\text{C}$. El valor numèric de la conductivitat tèrmica és el mateix en ambdues unitats.

Gradient tèrmic

El gradient tèrmic mesura el grau de variació de la temperatura en un conductor, en funció de la posició al seu interior. Si designem amb x la distància de qualsevol punt del conductor a un dels seus extrems, triat arbitràriament, podríem considerar la temperatura T una funció de la variable o coordenada x , i la derivada seria el que anomenem *gradient tèrmic*. Representant gràficament aquesta funció, T vs. x , la derivada correspondria al pendent de la corba a cada punt.

A la figura 2.1, podeu veure alguns exemples de distribucions de temperatura a l'interior d'un conductor tèrmic. En el cas de la corba convexa, el gradient tèrmic varia amb la coordenada x ; per tant, és diferent d'un punt a un altre del conductor, i a cada punt correspon al pendent de la recta tangent a la corba, $\frac{dT}{dx} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$, amb els valors de Δx i de Δy expressats en les unitats del gràfic.

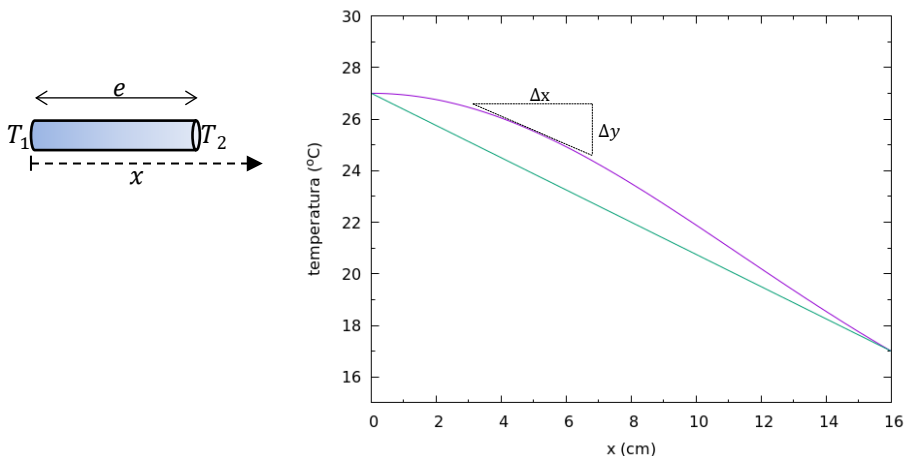


Fig. 2.1
Esquema d'un conductor tèrmic que separa dues superfícies amb temperatures diferents, $T_1 = 27^\circ\text{C}$ i $T_2 = 17^\circ\text{C}$. El gràfic mostra dos exemples de possibles distribucions de temperatura a l'interior d'un conductor de gruix $e = 16$ cm. El gradient tèrmic és el pendent de la corba de la funció $T(x)$. Per la corba verda, el gradient és constant i igual a:
 $\frac{dT}{dx} = \frac{\Delta T}{e} = 62,5^\circ\text{C/m}$.

En el cas particular que la gràfica de T vs. x sigui una recta, el pendent és el mateix a tots els punts del conductor, i es pot calcular com el quocient entre la variació de temperatura entre els extrems del conductor, $\Delta T = T_1 - T_2$, i la distància entre aquests extrems, és a dir, el gruix del conductor, e :

$$\frac{dT}{dx} = \frac{\Delta T}{\Delta x} = \frac{\Delta T}{e}$$

2.2.1. Conductivitat tèrmica

La *conductivitat tèrmica és una propietat de cada material*. En general, els bons conductors de l'electricitat acostumen a ser també conductors eficients de la calor. En canvi,



els gasos i els materials porosos condueixen malament la calor (són bons aïllants). A continuació en teniu alguns exemples:

- Acer: $k = 46 \text{ W / m}^\circ\text{C}$
- Formigó: $k = 0,2 - 1,3 \text{ W / m}^\circ\text{C}$
- Vidre: $k = 0,7 - 0,9 \text{ W / m}^\circ\text{C}$
- Suro: $k = 0,04 \text{ W / m}^\circ\text{C}$

La conductivitat del formigó i la del vidre depenen de la composició precisa d'aquests materials. El suro és un bon aïllant tèrmic i l'acer és un bon conductor de la calor.

Altres propietats tèrmiques

Eventualment, farem servir altres propietats relacionades amb la conductivitat tèrmica:

- *Resistivitat tèrmica*, r . És una propietat de cada tipus de material definida com la inversa de la seva conductivitat: $r = 1 / k$. Les seves unitats són: $\text{m} \cdot \text{K} / \text{W}$.
- *Resistència tèrmica*, R . És una propietat del conductor que depèn de la seva mida, concretament del seu gruix, e , a més de la conductivitat:

$$R = e / k \quad (2.2)$$

Les unitats de R són: $\text{m}^2 \cdot \text{K} / \text{W}$ o $\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C} / \text{W}$, que són equivalents.

- *Transmitància tèrmica*, U . És la inversa de la resistència tèrmica d'un conductor. Per tant, també depèn del gruix del conductor: $U = 1 / R$, i les seves unitats són $\text{W} / \text{m}^2 \cdot \text{K}$ o $\text{W} / \text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C}$, també equivalents.

Exemple 2.1

Calculeu quin gruix de formigó de conductivitat tèrmica $k_{\text{formigó}} = 1,3 \text{ W} / \text{m} \cdot \text{K}$ proporciona un aïllament tèrmic equivalent a una capa de suro de 2,0 cm de gruix i conductivitat $k_{\text{suro}} = 0,040 \text{ W} / \text{m} \cdot \text{K}$

Solució. El criteri per valorar l'aïllament tèrmic és la resistència tèrmica del cos. Igualant les resistències tèrmiques del suro i del formigó, donades per l'equació 2.2, tenim:

$$\frac{e_{\text{formigó}}}{k_{\text{formigó}}} = \frac{e_{\text{suro}}}{k_{\text{suro}}} \Rightarrow e_{\text{formigó}} = e_{\text{suro}} \frac{k_{\text{formigó}}}{k_{\text{suro}}} = 2,0 \frac{1,3}{0,040} = 65 \text{ cm}.$$

Per tant, la resposta és: 65 cm.

2.2.2. Difusivitat tèrmica i efusivitat tèrmica

La difusivitat tèrmica i l'efusivitat tèrmica (també anomenada *admitància tèrmica*) són dos conceptes relacionats amb la resposta dels objectes a canvis en les condicions tèrmiques ambientals, que abans hem anomenat *inèrcia tèrmica*. Hi ha dos aspectes de la

inèrcia tèrmica que cal considerar amb relació a l'estabilitat tèrmica de l'interior d'un edifici. Primer, és desitjable que les condicions tèrmiques a l'interior siguin estables davant de modificacions de la temperatura exterior. Segon, és convenient que una eventual ambientització de l'interior (per exemple, per corregir una desviació de la temperatura interior respecte a l'interval de confort) es pugui mantenir quan els mitjans de calefacció/refrigeració es desconnecten. D'alguna manera, aquests dos vessants de la inèrcia tèrmica són contradictoris, la qual cosa fa que sigui complex optimitzar el disseny tèrmic de l'edifici.

La *difusivitat tèrmica*, representada per una a , més que una propietat tèrmica dels materials és una combinació de dues propietats: la conductivitat tèrmica i la calor específica. Per definició, la difusivitat tèrmica és el quocient entre la conductivitat tèrmica d'un material i la capacitat calorífica de la unitat de volum del mateix material: $a = \frac{k}{\rho c_e}$, i es

mesura en m^2/s o en mm^2/s . A continuació, s'indiquen alguns valors de la difusivitat tèrmica de diferents materials:

- Alumini: $a = 63,8 \text{ mm}^2/\text{s}$
- Acer: $a = 12,5 \text{ mm}^2/\text{s}$
- Marbre: $a = 1,4 \text{ mm}^2/\text{s}$
- Vidre: $a = 0,56 \text{ mm}^2/\text{s}$
- Llana mineral: $a = 0,31 \text{ mm}^2/\text{s}$
- Fusta: $a = 0,09 - 0,23 \text{ mm}^2/\text{s}$

La difusivitat tèrmica fa un paper important en la inèrcia tèrmica dels sistemes davant de variacions en la temperatura exterior. Com més petita és la difusivitat, ja sigui perquè la conductivitat és petita, o bé perquè la capacitat calorífica volumètrica és gran, més inèrcia tèrmica té el sistema.

Com ja hem vist al capítol 1, una de les conseqüències d'una gran inèrcia tèrmica és l'endarreriment en la resposta als canvis tèrmics del medi ambient. El temps característic de resposta està relacionat amb la difusivitat tèrmica, i la relació concreta la podem deduir de l'anàlisi dimensional següent. La difusivitat tèrmica es mesura en m^2/s i, per obtenir un temps a partir d'ella, l'hem d'invertir i multiplicar per una longitud al quadrat. Concretament, aquesta longitud és el gruix de l'objecte, el mur, etc. Efectivament, el gruix d'un objecte influeix tant en la resistència tèrmica (com més gran és el gruix, més gran és la resistència tèrmica) com en la capacitat calorífica (com més gran és el gruix, més massa té i, per tant, més capacitat calorífica), que són dues propietats relacionades amb la inèrcia. En definitiva, el temps de resposta és: $t = e^2 / a$. Veiem, doncs, que la difusivitat per si sola no determina la inèrcia tèrmica, sinó que també hi intervé el gruix de l'objecte.

Una altra manera de presentar el resultat anterior seria dir que, quan es produeix un canvi en la temperatura ambiental, aquest canvi es transmet progressivament a l'interior de l'objecte, de manera que, quan ha passat un temps t , el gruix del material afectat és:



$e = \sqrt{at}$. Per exemple, per a un objecte d'alumini, aquest gruix seria de 8 mm en un segon, o de 48 cm en una hora. En canvi, el senyal tèrmic només penetraria 7 cm al marbre al cap d'una hora, o entre 2 i 3 cm a la fusta.

L'*efusivitat tèrmica*, b , també és una combinació de propietats tèrmiques dels materials que permet estimar com contribueix un mur a la calefacció/refrigeració de l'interior. En aquest cas, l'objectiu seria que els materials del mur assolissin unes temperatures pròximes a la temperatura de consigna, i que la mantinguessin després de desconnectar els aparells de condicionament tèrmic. Per aconseguir-ho, convé que els materials intercanviïn eficientment calor amb l'interior i que siguin capaços d'emmagatzemar energia tèrmica per poder suplir els aparells de condicionament quan aquests deixen de funcionar. En altres paraules, els materials que es triessin haurien de tenir tant una conductivitat tèrmica alta com una capacitat calorífica volumètrica alta. L'efusivitat tèrmica incorpora ambdós factors en la seva definició: $b = \sqrt{k\rho c_e}$. Les unitats de l'efusivitat tèrmica són els $\text{J/m}^2 \cdot \text{K} \cdot \text{s}^{1/2}$, que també es poden escriure com $\text{J/m}^2 \cdot \text{K} \cdot \sqrt{\text{s}}$.

Per aconseguir un bon condicionament tèrmic de l'interior, són preferibles els murs formats per diverses capes, de manera que l'efusivitat tèrmica de les capes interiors sigui alta i la de les capes exteriors sigui baixa. Una manera de fer-ho és instal·lar capes d'aïllament tèrmic tant a l'exterior com sigui possible.

2.2.3. Conducció en condicions estacionàries

Diem que la conducció de la calor es fa en condicions estacionàries quan les magnituds tèrmiques (temperatura, flux de calor, etc.) no varien amb el temps. Per exemple, la temperatura a l'interior d'un conductor podria variar d'un punt a un altre, però a cada punt seria sempre la mateixa. Aquesta circumstància és representativa d'una situació ideal d'un ambient tèrmic en què la temperatura es manté estable. Però l'abast de les seves aplicacions va més enllà, atès que en la majoria dels casos pràctics en què la temperatura varia ho fa prou lentament perquè la hipòtesi de condicions estacionàries doni resultats vàlids. En endavant, suposarem que la transferència de calor es fa en condicions estacionàries, excepte si diem el contrari. També suposarem que l'àrea del conductor tèrmic és homogènia, és a dir, no varia al llarg del conductor. Com a exemples, podem mencionar un conductor de forma cilíndrica o una paret de superfície constant.

En les condicions que s'han exposat, totes les magnituds que apareixen a la llei de Fourier són iguals a tots els punts d'un conductor tèrmic homogeni, és a dir, format per un únic material. La conductivitat tèrmica ho és perquè tot el conductor és del mateix material, i el flux de calor ho és perquè, en cas contrari, es produiria una acumulació o una pèrdua neta de calor en alguna secció del conductor, que portaria a una variació de la seva temperatura, en contra de la hipòtesi de les condicions estacionàries. Un corol·lari, derivat de la llei de Fourier és que el gradient tèrmic també ha de ser el mateix a tots els punts del conductor. Abans hem vist que, en aquest cas, la distribució de la temperatura al conductor varia linealment amb la coordenada x , i el gradient tèrmic val: $\Delta T / e$.

2.2.4. La llei de Fourier en condicions estacionàries

En condicions estacionàries, la llei de Fourier adopta una forma més simple que la de l'equació 2.1, que podem expressar en diferents variants, segons les propietats tèrmiques que fem servir:

$$\dot{q}_{\text{cond}} = A \cdot k \cdot \Delta T / e \quad (2.3)$$

$$\text{o} \quad \dot{q}_{\text{cond}} = A \cdot \Delta T / R \quad (2.4)$$

$$\text{o} \quad \dot{q}_{\text{cond}} = A \cdot U \cdot \Delta T \quad (2.5)$$

En les dues últimes expressions, s'han fet servir les definicions de resistència tèrmica i de transmitància tèrmica, respectivament.

Exemple 2.2

Determineu el flux de calor a través de la capa de suro de l'exemple 2.1 sabent que té una àrea de $2,0 \text{ m}^2$ i que les temperatures de les superfícies límit són $13,5^\circ\text{C}$ i $19,0^\circ\text{C}$.

Solució. Podem calcular el flux de calor per conducció amb qualsevol de les equacions 2.3, 2.4 o 2.5. Per aplicar l'equació 2.4, hem d'obtenir prèviament el valor de la resistència tèrmica de la capa de suro: $R = \frac{e}{k} = 0,50 \text{ m}^2 \cdot \text{K/W}$ (en calcular la resistència tèrmica, hem introduït el valor del gruix en metres). Aplicant l'equació 2.4:

$$\dot{q}_{\text{cond}} = A \cdot \frac{\Delta T}{R} = 22 \text{ W}$$

Finalment, cal adonar-se que les unitats K i $^\circ\text{C}$ es poden fer servir indistintament en substituir valors a l'equació anterior, ja que totes dues fan referència a una *diferència de temperatures*.

Per tant, la resposta és: 22 W

2.3. Radiació

Quan James Clerk Maxwell va aconseguir unificar l'electricitat i el magnetisme a mitjan segle XIX, es va descobrir que *qualsevol càrrega elèctrica que canviï de velocitat ha d'emetre energia en forma d'ones electromagnètiques*. Abans hem vist que l'energia tèrmica està associada al moviment aleatori (per tant, contínuament accelerat i desaccelerat) de les partícules constituents de la matèria. Com que aquestes partícules contenen càrregues elèctriques (encara que les partícules siguin neutres, les càrregues elèctriques poden estar separades per una petita distància formant un dipol elèctric), podem esperar que *qualsevol sistema amb una energia tèrmica diferent de zero o, el que és equivalent, amb una temperatura superior a 0 K, radiarà ones electromagnètiques*. Aquesta radiació constitueix una forma de pèrdua d'energia tèrmica, és a dir, una transferència de calor. Al mateix temps, quan una ona electromagnètica incideix sobre un sistema i és absorbida, pot alterar l'estat energètic de les seves partícules, constituint una forma de guany d'energia tèrmica.



Per referir-nos a les ones electromagnètiques, podem identificar-les d'acord amb alguna de les seves propietats. Un fotó és la unitat mínima d'ona electromagnètica. Llavors, podem parlar de:

- energia o potència transportada pels fotons, o
- propietats de cada fotó, és a dir, freqüència, f , i longitud d'ona, λ .

El nombre de fotons que viatgen en una radiació tèrmica típica d'ones electromagnètiques és enorme. Per exemple, una superfície d'1 cm² que es trobi a una temperatura ordinària d'uns 300 K emet cada segon 10¹⁸ fotons. Per aquest motiu, normalment parlem de les propietats de la radiació tèrmica de les ones electromagnètiques com d'un conjunt format per un gran nombre de fotons de propietats individuals diferents, però caracteritzat per una determinada energia o potència global.

2.3.1. Intensitat d'una radiació

Per descriure les propietats de la radiació, convé introduir el concepte d'intensitat de la radiació. *Es defineix la intensitat, I , d'una ona o radiació com la relació entre la potència, Pot , que travessa una superfície orientada perpendicularment a la direcció de propagació de l'ona i la dimensió d'aquesta superfície, A :*

$$I = Pot / A \quad (2.6)$$

La intensitat de la radiació proporciona una mida de la concentració de la potència que transporta, independentment de la dimensió de la superfície d'un detector que la pugui mesurar. La unitat d'intensitat és W/m².

L'emitància o irradiància és un concepte similar a la intensitat, però referit al cos emissor de la radiació: l'emitància d'un cos és la relació entre la potència emesa en totes direccions i l'àrea de la superfície emissora. Igual que la intensitat, l'emitància també es mesura en W/m².

2.3.2. Espectre electromagnètic

El conjunt de totes les ones electromagnètiques possibles, caracteritzades cadascuna d'elles individualment per una longitud d'ona, es divideix en diferents bandes espectrals. El conjunt d'aquestes bandes espectrals s'anomena *espectre electromagnètic*. Aquest espectre és simplement una eina de classificació de les ones electromagnètiques. Les longituds d'ona possibles tenen valors extremament diversos, que van des de km, per a algunes ones de ràdio, fins a pm (picòmetres, 10⁻¹² m) o fm (femtòmetres, 10⁻¹⁵ m), per a la radiació gamma originada en les reaccions nuclears.

A més, per a una radiació electromagnètica particular, també podem parlar del seu *espectre* per referir-nos a la *distribució de l'energia de la radiació entre les diferents bandes espectrals o longituds d'ona*. Quan ens referim a la radiació emesa per un objecte, aquesta distribució es mesura per la irradiància emesa en un petit interval de longituds d'ona i s'anomena *irradiància espectral*. Són, doncs, dues accepcions diferents del terme *espectre*, que cal distingir.

Les bandes més rellevants per a la transferència de calor per radiació són:

- *Visible*, amb longituds d'ona compreses en l'interval $\lambda \in [400\text{nm}, 750\text{nm}]$. El centre de la banda es troba, aproximadament, a uns 555 nm.
- *Infraroja (IR)*, amb longituds d'ona superiors a les de la llum visible i dins de l'interval $\lambda \in [750\text{nm}, 100\mu\text{m}]$. No és visible, però és percebuda pel sentit del tacte i provoca una sensació de calor. És la radiació més corrent al nostre entorn.
- *Ultraviolada (UV)*, amb longituds d'ona inferiors a la banda visible i dins de l'interval $\lambda \in [1\text{nm}, 400\text{nm}]$. Tampoc no és visible per l'ull humà, però sí ho és per a algunes espècies animals, com les abelles.

2.3.3. Model de radiador tèrmic ideal: el cos negre

La naturalesa de les superfícies exteriors d'un cos determina com interactua amb la radiació electromagnètica, concretament com la genera i l'absorbeix. *Les propietats de diferents tipus de superfícies es defineixen amb referència a un model ideal de radiador tèrmic, anomenat cos negre.*

El cos negre es defineix com un sistema que absorbeix tota la radiació electromagnètica que hi incideix. Per tant, no reflecteix la radiació ni és transparent, d'aquí que s'anomeni *cos negre*:² si il·luminéssim un cos negre amb llum visible, no el veuríem.

Tanmateix, *un cos negre en equilibri tèrmic amb el seu entorn, a temperatura constant, ha de compensar la radiació absorbida amb una potència exactament igual de radiació emesa.* Però aquesta radiació emesa pel cos negre és una radiació “creada” pel propi cos negre, amb un espectre propi (l'empremta del cos negre) que no té res a veure amb l'espectre de la radiació que l'il·lumina. La temperatura del cos negre s'autoregula, en el sentit que, si es produeix un increment en la potència de la radiació absorbida, la temperatura augmenta i la potència de la radiació emesa també ho fa, fins que iguala la potència absorbida, moment en què la temperatura s'estabilitza.

Un exemple de cos negre pot ser una cavitat pintada de negre dintre d'un sòlid opac en què s'ha fet el buit i que es comuniqui amb l'exterior mitjançant una obertura petetíssima, d'àrea A . Qualsevol radiació electromagnètica que hi penetra experimenta reflexions a l'interior de la cavitat o és absorbida. En cas que es reflecteixi, la probabilitat que torni a sortir per l'obertura és molt petita i és més probable que torni a incidir sobre un altre punt de l'interior de la cavitat. Aquest procés es repeteix un gran nombre de vegades, fins que eventualment la radiació acaba essent absorbida per la cavitat.

Un altre exemple podria ser l'interior d'una habitació sense finestres i amb parets que proporcionin un aïllament tèrmic perfecte de l'exterior. En aquestes condicions, tota la radiació emesa per les superfícies interiors seria absorbida per la pròpia habitació.

² La denominació *cos negre* també es relaciona amb els materials que es van fer servir a mitjan segle XIX en els primers experiments que intentaven mesurar les propietats de la radiació tèrmica emesa per diferents cossos. El material més emprat, i la referència per les propietats d'altres materials, va ser el negre de fum, una varietat de carbó que s'utilitzava en la fabricació de pintures.

Potència radiada per un cos negre

L'any 1879, Josef Stefan va deduir la relació entre la potència radiada per un cos negre i la seva temperatura, basant-se en els resultats experimentals de John Tyndall.³ Posteriorment, el 1884, Ludwig Boltzmann va demostrar teòricament la mateixa relació, que avui porta el nom de *lleï de Stefan-Boltzmann*:

$$\dot{q}_{\text{rad}} = A \cdot \sigma \cdot T^4 \quad (2.7)$$

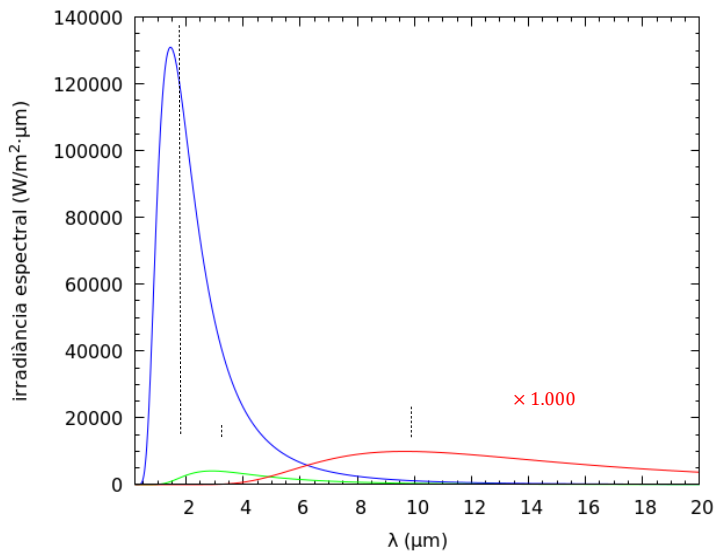
en què la temperatura del cos negre, T , ha de venir expressada necessàriament en l'escala Kelvin, i σ és una constant universal anomenada *constant de Stefan-Boltzmann*, de valor: $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}^4$.

Espectre de radiació d'un cos negre

L'emissió de radiació d'un cos negre es caracteritza, d'una banda, per la potència total irradiada en funció de la seva temperatura i, de l'altra, per la distribució d'aquesta potència entre totes les longituds d'ona possibles.

Si es representa gràficament *l'espectre de radiació del cos negre* (potència radiada a cada longitud d'ona vs. longitud d'ona), té forma acampanada, amb un pic a una longitud d'ona λ_{max} , el valor del qual depèn de la temperatura del cos negre (v. Fig. 2.2). A banda i banda del pic, la potència radiada decreix ràpidament a mesura que ens allunyem de λ_{max} . Per tant, és convenient prendre aquesta longitud d'ona com a representativa del tipus de radiació emesa pel cos negre.

Fig. 2.2
Espectre de radiació del cos negre per a diferents temperatures: en color blau, 2.000 K; en color verd, 1.000 K; i en color vermell, 300 K. L'espectre d'aquest últim s'ha multiplicat per un factor 1.000 perquè es pugui veure a la mateixa gràfica que els altres dos. Les línies verticals discontinues marquen la longitud d'ona en què la potència radiada és màxima per a cada temperatura, λ_{max} .



³ John Tyndall (1820-1893), físic irlandès que, entre altres contribucions, fou el primer a demostrar l'efecte hivernacle a l'atmosfera terrestre, fa més d'un segle i mig.

La dependència de $\lambda_{\max}$ de la temperatura ve donada per l'anomenada *lleï de Wien*:⁴

$$\lambda_{\max} \cdot T = 0,0029 \text{ m} \cdot \text{K} \quad (2.8)$$

Aplicant la lleï de Wien, podem deduir les temperatures del cos negre necessàries per emetre radiació en una banda electromagnètica determinada.

Per exemple, perquè $\lambda_{\max}$ caigui dintre de la banda visible, cal que la temperatura estigui compresa entre els 4.000 i els 8.000 K. La temperatura de la superfície del Sol és d'uns 6.000 K, que se situa al mig de l'interval anterior, cosa gens sorprenent, tenint en compte la influència del Sol en l'evolució de les espècies. El filament d'una bombeta d'incandescència o les flames d'un incendi forestal emeten llum visible, tot i que la seva temperatura no excedeixi els 2.000 K, però la radiació que podem veure no és més que la "cua" de la distribució espectral, una petita porció de la radiació que emeten, ja que el màxim d'emissió el tenen a l'IR.

D'altra banda, la temperatura dels objectes corrents del nostre entorn és d'uns 300 K, valor per al qual la lleï de Wien prediu una $\lambda_{\max} \approx 10 \text{ } \mu\text{m}$, dintre de la banda IR. Dit d'una altra manera, rebem l'energia solar majoritàriament a la banda visible i emetem la nostra pròpia radiació a la banda IR.

2.3.4. Radiació tèrmica d'un cos real

El cos negre és un model ideal que no es correspon amb cap objecte real al 100 %. No obstant això, *les propietats de la radiació emesa pels cossos reals les definim per referència al comportament del cos negre*.

Es defineix l'absorbància, α , d'un cos real (de fet, de la seva superfície) com la fracció de la potència de la radiació electromagnètica incident que hi és absorbida (la resta es reflecteix o el material és transparent). Un cos negre té, per definició, $\alpha = 1$. Per als cossos reals, l'absorbància és un nombre adimensional acotat entre 0 i 1.

Es defineix l'emissivitat, ε , d'un cos real (també determinada per la naturalesa de la seva superfície) com la relació entre la potència radiant que emet i la que emetria un cos negre a igual temperatura i amb la mateixa àrea. Per tant, per a un cos negre, $\varepsilon = 1$. La versió de la lleï de Stefan-Boltzmann per als cossos reals és:

$$\dot{q}_{\text{rad}} = \varepsilon \cdot A \cdot \sigma \cdot T^4 \quad (2.9)$$

Per als cossos reals, l'emissivitat és adimensional i està acotada entre 0 i 1.

Tant l'absorbància com l'emissivitat varien amb la longitud d'ona de la radiació, però, en equilibri tèrmic, $\varepsilon(\lambda) = \alpha(\lambda)$, relació coneguda com la *lleï de Kirchhoff*.⁵ És a dir, a una longitud d'ona de la radiació determinada, la fracció de potència radiant absorbida

⁴ Wilhelm Wien, físic alemany que va rebre el Nobel de Física l'any 1911 pel conjunt dels seus treballs sobre la radiació tèrmica.

⁵ Gustav Robert Kirchhoff (1824-1887), també conegut per les seves aportacions a la teoria dels circuits elèctrics.

per un cos real és la mateixa fracció que hi ha entre la potència emesa per aquest cos i la que emetria un cos negre.

Cossos selectius

Imagineu que el mecanisme principal de transferència de calor d'un cos és la radiació, i que la radiació que hi incideix i absorbeix és llum visible, per exemple radiació solar, d'intensitat I . El cos absorbirà més o menys calor de la radiació en funció de la seva absorbància corresponent a les longituds d'ona visibles, α_{vis} . Al mateix temps, el cos emetrà més o menys potència radiant en funció de la seva temperatura, T , i de la seva emissivitat a l'infraroig, ε_{IR} (suposant que la seva temperatura és de l'ordre de la temperatura ambiental en el nostre entorn). La llei de Kirchhoff no relaciona els valors de α_{vis} i ε_{IR} , ja que corresponen a bandes espectrals (longituds d'ona) diferents. Una vegada aclarida aquesta qüestió, d'ara endavant eliminarem els subíndexs dels dos coeficients per tal de facilitar l'escriptura de les equacions.

En una situació d'equilibri entre els guanys i les pèrdues de radiació, es pot escriure la igualtat següent:

$$\alpha I = \varepsilon \sigma T^4 \quad (2.10)$$

Fixeu-vos que l'equilibri radiant que acabem de plantejar permet que la temperatura s'autoreguli: si la temperatura és excessiva, el terme dret és massa gran i les pèrdues dominen els guanys de calor; d'altra banda, si la temperatura és massa baixa, el terme dret és petit i els guanys dominen les pèrdues de calor. Així doncs, el cos acabarà assolint la temperatura d'equilibri que resulta de l'equació 2.10:

$$T = \sqrt[4]{\alpha I / \varepsilon \sigma}$$

Aquest resultat ens mostra que la temperatura d'equilibri depèn, a més de la intensitat de la radiació incident, de les propietats del cos a través del quocient entre l'absorbància i l'emissivitat: α / ε . Com més gran sigui el quocient, més gran serà la temperatura del cos.

S'anomenen *cossos selectius* els que tenen una relació entre l'absorbància al visible i l'emissivitat a l'IR molt diferent de la unitat. Un cos selectiu càlid és un cos amb un valor de α / ε gran, com ara l'alumini, que té $\alpha / \varepsilon = 4$. Un cos selectiu fred és un cos o acabat superficial amb un valor petit de α / ε , com ara la pintura blanca, que té $\alpha / \varepsilon = 0,3$.

Altres cossos o acabats superficials no tenen un comportament tan extrem i no es consideren cossos selectius, per exemple la pintura negra, que té $\alpha / \varepsilon \approx 1$.

2.3.5. Radiació solar: intensitat

La intensitat de la radiació solar depèn de la distància al Sol. L'òrbita de la Terra és lleugerament el·líptica, cosa que fa que la distància al Sol variï moderadament amb l'estació de l'any. La Terra es troba un 4 % més a prop del Sol al solstici d'hivern que al solstici d'estiu. La intensitat de la radiació solar també varia moderadament en funció de l'estat d'activitat solar, que canvia amb cicles d'onze anys. Negligint aquestes petites

variacions, la intensitat de la radiació solar que arriba a les capes superiors de l'atmosfera terrestre es caracteritza per un valor anomenat constant solar: $I_{cs} = 1.350 \text{ W/m}^2$.

Una fracció, coneguda com *albedo*, de la radiació solar incident sobre el planeta és reflectida directament a l'espai i no augmenta el nivell d'energia tèrmica del planeta. L'albedo planetari és una mitjana ponderada dels albedos dels diferents tipus de material presents a la superfície del planeta, inclosos els núvols. En el cas de la Terra, l'albedo planetari és 0,31. La resta de la radiació solar incident, un 69 %, o una fracció de 0,69, escalfa la Terra. A continuació, es mostra una taula amb alguns valors característics de l'albedo de diferents superfícies. L'albedo de l'aigua varia molt amb la direcció de la radiació incident. Per a angles d'incidència (angle entre la direcció dels raigs de llum i la direcció normal a la superfície de l'aigua) petits, l'albedo és inferior a 0,10. En canvi, per a angles d'incidència grans, per exemple poc després de l'orto o poc abans de l'ocàs del Sol, l'aigua pot reflectir la majoria de la radiació solar (albedo ≈ 1).

	desert	cultius	aigua	neu
albedo	0,25 – 0,45	0,18 – 0,25	0,03 – 1	0,40 – 0,95

Taula 2.1.
Albedo de diferents tipus de superfícies.

La potència absorbida pel planeta es pot calcular considerant la superfície receptora que presenta la Terra, aproximadament la d'un disc de radi $R_T = 6.400 \text{ km}$. La potència absorbida és: $Pot = 0,69 \pi R_T^2 \cdot I_{cs} = 1,2 \cdot 10^{17} \text{ W}$. Aquesta potència es pot comparar amb el consum mitjà global, a escala planetària, que l'any 2018 va ser d'uns 10^{13} W .

La radiació solar arriba al terra després de travessar l'atmosfera, i en aquest viatge perd intensitat. La radiació solar al nivell del sòl varia segons la regió geogràfica, principalment per la latitud, però també depèn de la climatologia local. La màxima irradiació solar mitjana correspon a Egipte, amb gairebé 300 W/m^2 , mentre que la mínima se situa a l'Oceà Àrtic, amb uns 60 W/m^2 . A latituds intermèdies, com la de Sant Cugat del Vallès, la irradiació mitjana és de l'ordre d'uns $130\text{-}160 \text{ W/m}^2$.

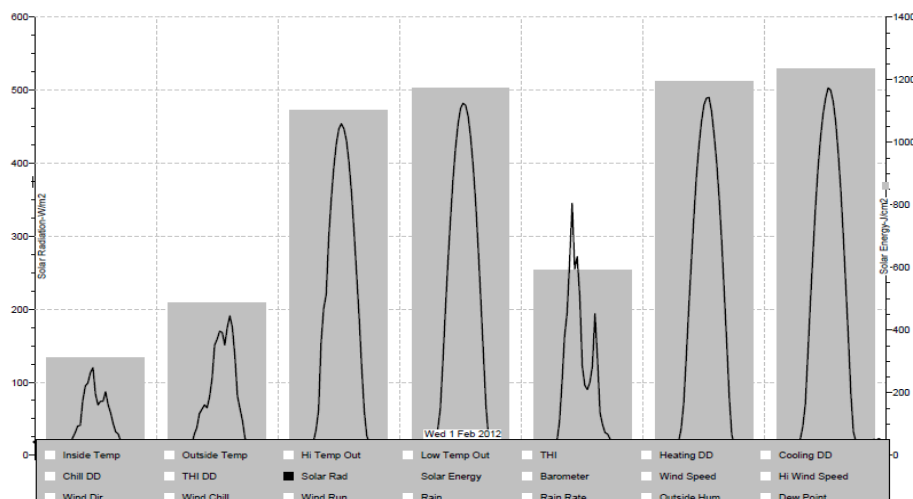
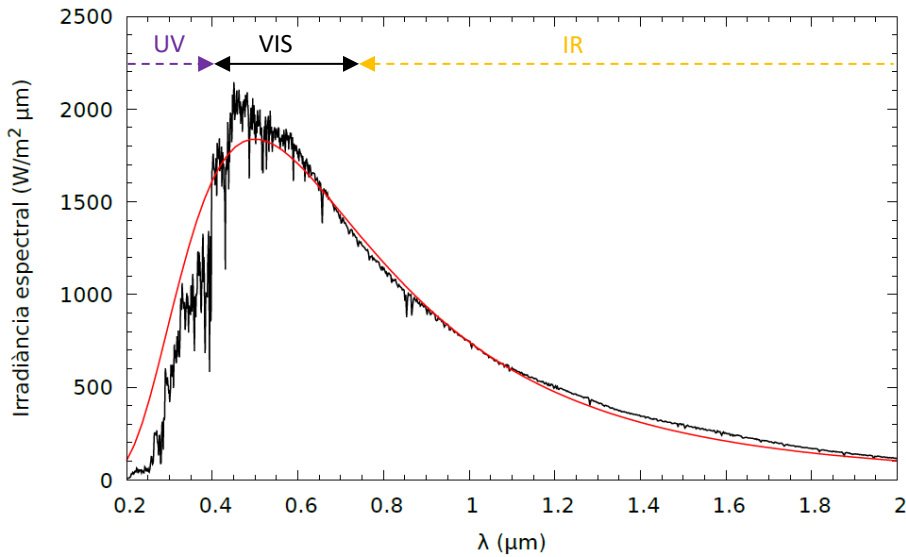


Fig. 2.3
Variació diària de la radiació solar al nivell del sòl a l'estació meteorològica de l'Escola Tècnica Superior d'Arquitectura del Vallès (1-7/2/2012). Les línies contínues mostren la radiació solar instantània (eix vertical esquerre), en unitats de W/m^2 . L'histograma (bandes grises) mostra l'energia solar acumulada en un dia (eix vertical dret), en unitats de J/cm^2 . Per referència, una energia solar acumulada de 1.000 J/cm^2 correspon a una radiació solar mitjana de 116 W/m^2 en 24 hores

2.3.6. Radiació solar: espectre

L'espectre de la radiació solar que arriba a les capes superiors de l'atmosfera terrestre és, aproximadament, el d'un cos negre a una temperatura d'uns 5.800 K (Fig. 2.4).

Fig. 2.4
Espectre de la radiació solar a l'exterior de l'atmosfera terrestre (línia negra irregular, 2000 ASTM Standard Extraterrestrial Spectrum), comparat amb l'espectre d'un cos negre a una temperatura de 5.800 K (línia vermella suau). La irradiància espectral és la intensitat de la radiació electromagnètica corresponent a un interval unitari de longituds d'ona centrat en una longitud d'ona, λ , determinada. A la part superior de la figura, es mostren les bandes ultraviolada, visible i infraroja



La major part de la potència ens arriba a les bandes visible i IR; concretament:

- un 9 % a la UV,
- un 49 % a la visible i
- un 42 % a la IR (específicament, a la subbanda coneguda com a *infraroig pròxim*, NIR, de longituds d'ona compreses entre 0,75 μm i un màxim de 2,5 a 3 μm).

2.3.7. Efecte hivernacle

Quan hem parlat dels cossos selectius, hem centrat l'atenció en la capacitat d'un material d'absorbir la radiació que hi incideix. Ara, prenem un enfocament diferent i considerem la transparència a la radiació. Hem de ser conscients que la transparència varia amb la longitud d'ona, de manera que un material pot ser transparent en una banda espectral i opac en una altra.

Un hivernacle és una estructura tancada per superfícies de vidre o de plàstic transparent, com ara el policarbonat. Les propietats del vidre i el policarbonat pel que fa al pas de la radiació electromagnètica són molt similars: tots dos són *gairebé perfectament transparents a la radiació de longituds d'ona visible i NIR (infraroig pròxim)*, però *gairebé perfectament opacs a radiació de longituds d'ona superior*. En total, passen les radiacions amb longituds d'ona d'entre 0,3 μm i 2 μm. En conseqüència, la radiació solar penetra sense gaires pèrdues per aquestes cobertes.

A l'interior de l'hivernacle, la radiació és absorbida eficaçment pel material vegetal. Aquest material, a temperatures de l'ordre d'uns 300 K, emet radiació pròpia, amb longituds d'ona superiors a 4 μm , ocupant les anomenades bandes d'infraroig mitjà (MIR) i llunyà (FIR), les quals no poden travessar les cobertes de l'hivernacle (Fig. 2.5, la transmissió és la fracció de la radiació incident que és transmesa pel material: a més transmissió, més transparència). La potència d'aquesta radiació és llavors reemesa per la coberta en totes direccions, una part cap a l'exterior, però una altra part cap a l'interior, reescalfant la massa vegetal. En definitiva, el resultat és un augment de la temperatura a l'interior de l'hivernacle en relació amb la que tindria si la cobertura fos opaca a la radiació solar, o sense cobertura (ja que no reemetria radiació cap a l'interior). Aquest efecte és conegut com a *efecte hivernacle*.

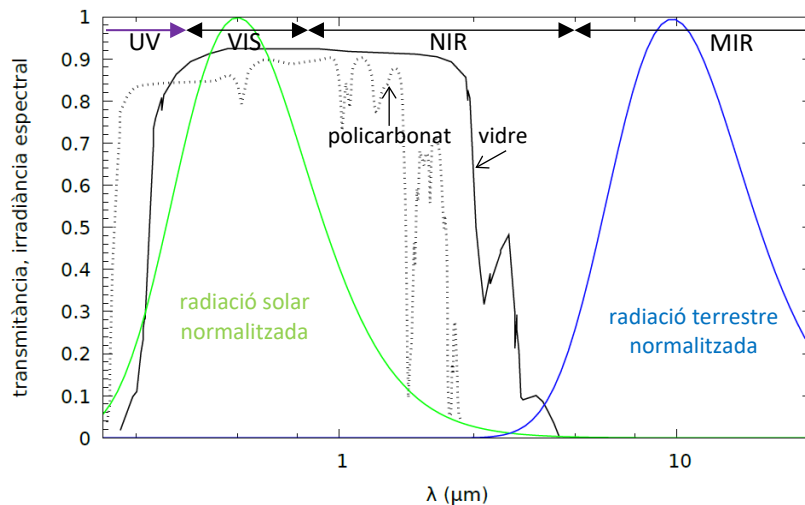


Fig. 2.5 Transmissió d'un vidre comú (línia contínua negra) i del policarbonat (línia de punts negra). També es representa, amb una línia verda, l'espectre d'un cos negre a 5.800 K (temperatura aproximada de la superfície solar) i, amb una línia blava, l'espectre d'un cos negre a 300 K (temperatura aproximada del nostre entorn). Tots dos espectres s'han normalitzat per tal que el màxim sigui 1, per facilitar-ne la comparació. A la part superior, es mostren les bandes UV, VIS, NIR i MIR

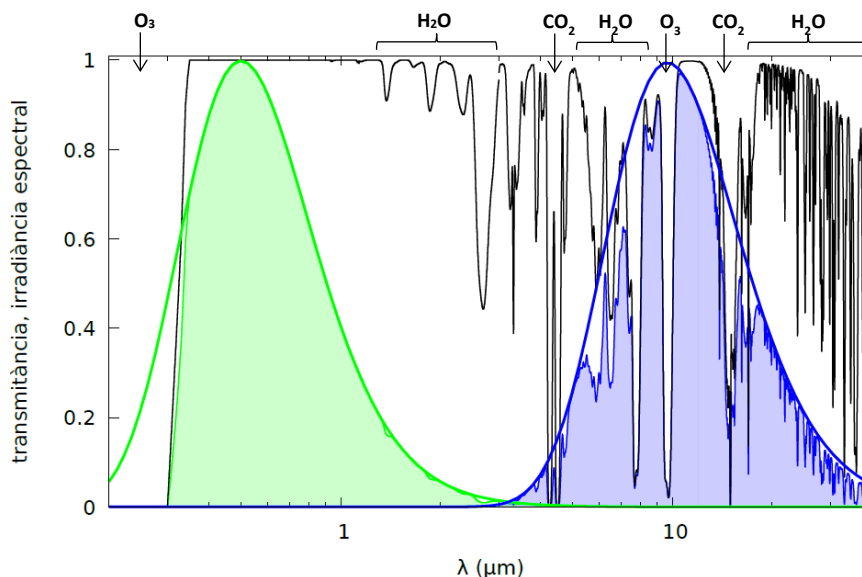


Fig. 2.6 Transmissió de l'atmosfera terrestre a la radiació electromagnètica (línia negra) en funció de la longitud d'ona, des de la UV fins a la IR. Igual com a la figura 2.5, les línies verda i blava són els espectres normalitzats de cossos negres a 5.800 K i 300 K, respectivament. Les àrees pintades de verd i blau són les fraccions respectives de les radiacions que aconsegueixen travessar l'atmosfera. Els compostos moleculars que contribueixen més a l'absorció estan assenyalats al gràfic



A l'atmosfera terrestre té lloc un fenomen de característiques similars. En aquest cas, és la pròpia atmosfera la que actua com a “coberta” semitransparent de la Terra. *Els diferents compostos químics presents a l'atmosfera absorbeixen bandes estretes de l'espectre de la radiació solar i són tant més opacs com més concentrats estiguin a l'atmosfera* (Fig. 2.6). Per exemple, l'ozó absorbeix eficientment la radiació UV a $\lambda < 0,3 \mu\text{m}$. Les bandes visible i NIR presenten molt poca absorció, és a dir, *l'atmosfera és pràcticament transparent al gruix de la radiació solar* (igual que el policarbonat i el vidre). En canvi, *tant el vapor d'aigua com el diòxid de carboni (CO_2) absorbeixen eficientment diverses longituds d'ona pertanyents a les bandes de MIR i FIR, on s'emet la radiació terrestre*. En conseqüència, una part important de la radiació terrestre no es pot escapar a l'espai i és absorbida per l'atmosfera, que la reemet novament en totes direccions, reescalfant el sòl.

Es pot establir un balanç de radiació al sòl, compensant les entrades de potència radiant amb les sortides (radiació emesa pel terra):

$$\alpha I + \chi \cdot \varepsilon \cdot \sigma \cdot T^4 = \varepsilon \cdot \sigma \cdot T^4 \quad (2.11)$$

on α és l'albedo del sòl (que variarà en funció de la naturalesa d'aquest: mar o terra, superfície vegetal, desert, neu, etc.), I és la intensitat de la radiació solar que arriba al sòl (per exemple, uns 300 W/m^2 de mitjana a Egipte), χ és la fracció de la potència emesa pel terra que és reemesa per l'atmosfera cap al sòl, ε és l'emissivitat del terreny, σ és la constant de Stefan-Boltzmann i T és la temperatura del sòl, expressada en K. Amb aquesta expressió, es pot estudiar com varia la temperatura del sòl en funció de canvis en la χ , que podem associar, per exemple, amb variacions de concentració de diòxid de carboni.

Exemple 2.3

Calculeu la temperatura d'equilibri del terra, en què els guanys i les pèrdues de calor per radiació es compensen.

Dades: intensitat de la radiació solar incident sobre el terra, $I = 186 \text{ W/m}^2$; coeficient d'absorció del terra, $\alpha = 0,74$; emissivitat del terra, $\varepsilon = 1,00$; reemissió d'ona curta de l'atmosfera cap al terra $\chi = 69 \%$ de l'emissió infraroja del terra.

Solució. Podem reagrupar els termes de l'equació 2.11 de la manera següent:

$$\alpha \cdot I = \varepsilon \cdot \sigma \cdot (1 - \chi) \cdot T^4 \Rightarrow T = \sqrt[4]{\frac{\alpha \cdot I}{\varepsilon \cdot \sigma \cdot (1 - \chi)}} = \sqrt[4]{\frac{0,74 \cdot 186 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}}{1,5,67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}^4} \cdot (1,00 - 0,69)}} = 297,47 \text{ K}$$

Per tant, la resposta és: 24°C

A la pràctica, a més de l'intercanvi radiatiu entre la superfície del sòl i l'atmosfera, també hi ha altres intercanvis de calor que regulen la temperatura del sòl, el més important dels quals és la calor latent d'evaporació de l'aigua. Un augment de la temperatura planetària



fa augmentar el grau d'evaporació de l'aigua i aquesta, per la seva banda, pot augmentar l'albedo planetari i afavorir la formació de núvols.

2.3.8. Coeficient radiatiu

El tractament que hem fet fins ara descriu la interacció entre un sistema i la radiació que l'envolta. Aquest tractament és adequat per tenir en compte la radiació solar. Però, a vegades, és més adient *tractar directament l'intercanvi de calor en forma de radiació electromagnètica entre dos sistemes a temperatures diferents*, sense entrar en la naturalesa de la radiació en si mateixa (per exemple, sense preocupar-nos pel seu espectre). Aquest és el cas quan tractem amb dos objectes relativament pròxims entre si que es troben a temperatures semblants, T_1 i T_2 . Suposarem que la temperatura més alta és T_2 i que $\Delta T = T_2 - T_1 \ll T_1, T_2$.

En aquestes circumstàncies, podem fer una aproximació lineal i definir un *coeficient radiatiu*, h_{rad} , tal que la potència radiativa neta intercanviada pels dos sistemes (guanyada pel sistema a temperatura T_1) sigui:

$$\dot{q}_{\text{rad}} = h_{\text{rad}} \cdot A \cdot (T_2 - T_1) \quad (2.12)$$

La unitat del coeficient radiatiu és $\text{W/m}^2 \cdot \text{K}$, o $\text{W/m}^2 \cdot ^\circ\text{C}$.

Per exemple, considerem dos cossos negres amb les seves superfícies enfrontades entre si, de manera que tota la radiació que emet un l'absorbeix l'altre, i viceversa. Tenint en compte la definició de cos negre i la llei de Stefan-Boltzmann, el cos a temperatura T_1 perdrà potència a raó de $A \cdot \sigma \cdot T_1^4$ i rebrà i absorbirà la potència radiada per l'altre cos, a raó de $A \cdot \sigma \cdot T_2^4$. És a dir, el balanç d'energia radiant per al primer cos serà:

$$\dot{q}_{\text{rad}} = A \cdot \sigma \cdot (T_2^4 - T_1^4) \quad (2.13)$$

Gràcies a la similitud de les temperatures T_1 i T_2 , es pot escriure:

$$T_2^4 - T_1^4 = (T_1^3 + T_1^2 \cdot T_2 + T_1 \cdot T_2^2 + T_2^3)(T_2 - T_1) = 4\bar{T}^3 \cdot (T_2 - T_1)$$

on $\bar{T}$ és una temperatura intermèdia entre T_1 i T_2 .

Substituint a l'expressió anterior per $\dot{q}_{\text{rad}}$ i comparant amb l'equació 2.12, es pot comprovar que, en aquest cas, el coeficient radiatiu val:

$$h_{\text{rad}} = 4\sigma \cdot \bar{T}^3 \quad (2.14)$$

El valor del coeficient radiatiu obtingut a l'exemple anterior, $h_{\text{rad}} \sim 6 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$, és un bon valor de referència per al coeficient radiatiu en circumstàncies més generals que les que han portat a deduir l'equació 2.14. Tot i així, en altres situacions, *el coeficient radiatiu pot dependre, a banda de la temperatura mitjana dels dos sistemes, de variables com l'emissivitat de la superfície d'un cos real o el factor de visió entre les superfícies dels dos sistemes que intercanvien radiació* (que mesura la fracció de la radiació emesa per un dels dos que rep l'altre).

Exemple 2.4

Considerem el intercanvi de calor per radiació entre dos objectes de la mateixa superfície i que es comporten com el cos negre, entre els quals s'interposa una pantalla. Compareu la potència neta guanyada pel cos més fred (a) sense la pantalla i (b) amb la pantalla.

Dades: $T_1 = 280 \text{ K}$; $T_2 = 300 \text{ K}$; $A = 1,00 \text{ m}^2$

Solució

- a) Per simplificar, suposarem que cada objecte rep (i absorbeix, perquè és un cos negre) tota la radiació emesa per l'altre objecte, i aplicarem l'equació 2.13 per calcular la potència radiant neta guanyada pel cos 1:

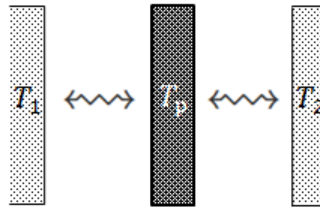
$$\dot{q}_{\text{rad}} = A \cdot \sigma \cdot (T_2^4 - T_1^4) = 1 \text{ m}^2 \cdot 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}^4} \cdot (300^4 - 280^4) \text{ K}^4 = 110,8 \text{ W}$$

També podríem haver fet servir l'aproximació lineal (equació 2.12) amb el coeficient radiatiu donat per l'equació 2.14: $h_{\text{rad}} = 4\sigma \cdot \bar{T}^3 = 5,53 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$, en què la temperatura mitjana és: $\bar{T} = 290 \text{ K}$. L'equació 2.12 proporciona el resultat següent:

$$\dot{q}_{\text{rad}} = h_{\text{rad}} \cdot A (T_2 - T_1) = 110,6 \text{ W},$$

valor que només discrepa un 0,2% del resultat aconseguit amb l'equació 2.13.

- b) En interposar la pantalla, l'intercanvi de radiació pren les característiques següents:



- (a) L'objecte 1 i la pantalla intercanvien calor directament a un ritme:

$$\dot{q}_{1p} = A \sigma (T_p^4 - T_1^4)$$

- (b) L'objecte 2 i la pantalla intercanvien calor directament a un ritme:

$$\dot{q}_{2p} = A \sigma (T_2^4 - T_p^4)$$

La temperatura a la qual la pantalla assoleix l'equilibri tèrmic, T_p , és la resultant d'igualar ambdós ritmes:

$$T_p^4 - T_1^4 = T_2^4 - T_p^4 \Rightarrow T_p^4 = (T_1^4 + T_2^4) / 2 \Rightarrow T_p = 290,5 \text{ K}.$$

Substituint a l'equació que proporciona el flux de calor net entre objecte 1 i pantalla:

$$\dot{q}_{1p} = A \sigma \left(\frac{(T_1^4 + T_2^4)}{2} - T_1^4 \right) = A \sigma (T_2^4 - T_1^4) / 2 = 55,4 \text{ W},$$

que és exactament la meitat del flux de calor net sense pantalla.

Per tant, la resposta és: 55,4 W amb pantalla; 111 W sense pantalla.



2.3.9. Factor de visió

El factor de visió entre un emissor de radiació i un receptor es defineix com la fracció de la potència emesa pel primer que incideix sobre el segon, F_{12} . Per exemple, en una habitació, no tota la radiació emesa pel sostre incideix sobre una de la parets. De la mateixa manera, no tota la radiació emesa per una paret incideix sobre el sostre.

El factor de visió depèn de la geometria i de la distribució de les superfícies, però, per a dues superfícies determinades, els factors de visió respectius, F_{12} i F_{21} , no són independents. Es pot demostrar que el quocient entre els factors de visió respectius de dues superfícies és la inversa del quocient entre les seves àrees, A_1 i A_2 :

$$\frac{F_{12}}{F_{21}} = \frac{A_2}{A_1}$$

La relació anterior (coneguda com a regla de reciprocitat) implica que, com més gran sigui l'àrea de la superfície 2 en relació amb la de la 1, més gran serà la proporció de la radiació emesa per la 1 que intercepta la 2. Per exemple, considerem el cas d'una persona de superfície exterior $A_1 = 1 \text{ m}^2$ que es troba completament envoltada per les superfícies interiors d'una habitació, que tenen una àrea total de $A_2 = 100 \text{ m}^2$. Podem imaginar que tota la radiació emesa per la persona acaba essent interceptada per alguna superfície interior de l'habitació, la qual cosa equival a dir que $F_{12} = 1$. Llavors, la regla de reciprocitat ens diu que la persona intercepta justament un 1 % de tota la radiació emesa per l'habitació: $F_{21} = \frac{A_1}{A_2} F_{12} = 0,01$.

Ara estem en condicions de reescriure l'equació 2.13 (vàlida per $F_{12} = F_{21} = 1$) per a un cas més general d'intercanvi d'energia radiant entre dos cossos negres de diferents àrees i amb factors de visió diferents de la unitat:

$$\dot{q}_{\text{rad},12} = A_1 \cdot F_{12} \cdot \sigma (T_2^4 - T_1^4) \quad (2.15)$$

En el cas particular que el cos 1 es trobi totalment envoltat pel cos 2, $F_{12} = 1$, i la fórmula de la potència calorífica neta intercanviada pel cos 1 recupera la forma de l'equació 2.13:

$$\dot{q}_{\text{rad}} = A_1 \cdot \sigma (T_2^4 - T_1^4)$$

Si, en comptes de comportar-se com un cos negre, el cos 1 té una emissivitat $\varepsilon_1 < 1$ i l'àrea del cos que l'envolta és molt gran, $A_2 \gg A_1$, es pot considerar que el cos 2 absorbeix tota la radiació emesa pel cos 1 (recordeu els exemples de comportament del cos negre a la secció 2.3.3), $\varepsilon_2 = 1$, i la potència calorífica intercanviada pel cos 1 val:

$$\dot{q}_{\text{rad}} = \varepsilon_1 \cdot A_1 \cdot \sigma (T_2^4 - T_1^4) \quad (2.16)$$

**Exemple 2.5**

Calculeu el balanç d'energia radiant per a una persona nua (suposeu el comportament d'un cos negre) en una habitació a 20°C. Suposeu una temperatura externa de la pell de 33°C i que la seva àrea és de 1,5 m².

Solució. Com acabem de veure, l'intercanvi de calor radiant entre dos sistemes amb comportament de cos negre ($\varepsilon = \alpha = 1$) i temperatures diferents, en què un d'ells (la persona) es troba totalment envoltat per l'altre (l'habitació), ve donat per l'equació següent, amb les temperatures en K:

$$\dot{q}_{\text{rad}} = A_1 \cdot \sigma \cdot (T_2^4 - T_1^4) = 1,5 \text{ m}^2 \cdot 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}^4} \cdot (293^4 - 306^4) \text{ K}^4 = -119 \text{ W}$$

Per tant, la resposta és que la persona perd una potència calorífica neta de 120 W.

2.3.10. Termòmetre IR

El termòmetre d'infrarojos és adient per mesurar la temperatura d'objectes que emeten la seva energia radiant preferentment en la banda IR, la qual cosa implica que la seva temperatura no pot superar els 1.000-1.500°C. Però, a la pràctica, cada termòmetre IR incorpora un sensor de radiació IR dissenyat per detectar la radiació en una banda de longituds d'ona més acotada, de manera que el rang de temperatures que pot mesurar també és més limitat. Un rang de longituds d'ona típic per a un termòmetre IR és de 8 a 14 μm, als quals, segons la llei de Wien, correspon una temperatura de cos negre d'entre -60°C i +90°C. Altres termòmetres IR dissenyats per a aplicacions especials són sensibles a longituds d'ona que poden anar des de 0,2 μm (que, de fet, pertany a la UV) fins a 20 μm. També existeixen termòmetres IR especials per mesurar la temperatura dels vidres i d'altres materials transparents a la radiació visible, com poden ser alguns plàstics. El que els fa especials és que s'ha d'assegurar que el material del qual es vol mesurar la temperatura sigui opac a la radiació IR en la banda d'operació del termòmetre.

Els termòmetres d'infrarojos estan proveïts sovint d'un punter làser per identificar la superfície enfocada pel sensor, de la qual detecta la radiació IR. Per mesurar-la correctament, el raig làser ha d'incidir sobre la superfície en una direcció pròxima a la normal. En principi, la distància a la superfície no té importància, sempre que no pugui arribar al sensor la radiació directa d'alguna altra superfície que emmascari la radiació de la superfície desitjada.

La radiació que mesura el sensor del termòmetre quan s'apunta a una superfície té dos components: la radiació emesa per la pròpia superfície, $\dot{q}_{\text{em}}$, que porta l'empremta de la seva temperatura, T , i la radiació ambiental reflectida per la superfície, $\dot{q}_{\text{ref}}$, que depèn de la temperatura ambiental, T_{amb} . Tenint en compte la llei de Kirchhoff, la radiació reflectida és una fracció $(1 - \varepsilon)$ de la radiació ambiental que hi incideix. Aplicant-hi la llei de Stefan-Boltzmann, podem deduir el senyal, M , mesurat pel sensor del termòmetre, que serà:

$$M \propto [\varepsilon T^4 + (1 - \varepsilon) T_{\text{amb}}^4] \quad (2.17)$$

A l'expressió anterior, la constant de Stefan-Boltzmann i l'àrea efectiva del sensor s'han inclòs en el factor de proporcionalitat, que no hem escrit explícitament.

La relació 2.17 ens mostra que el senyal mesurat pel termòmetre depèn, a més de la temperatura que es vol mesurar, de l'emissivitat de la superfície i de la temperatura ambiental. Un cas particular és el d'una superfície de màxima emissivitat, $\varepsilon = 1$, en què el senyal només es relaciona amb la temperatura del problema, $T : M \propto T^4$, i el mesurament és més segur.

Tot i que normalment les superfícies que s'han de mesurar tenen una emissivitat inferior a 1, un truc que de vegades es recomana per optimitzar el mesurament consisteix a enganxar una cinta adhesiva prima de color negre ($\varepsilon \approx 1$), de manera que recobreixi la superfície que es vol mesurar, esperar un temps per garantir que s'assoleixi l'equilibri tèrmic entre la cinta i la superfície i, a continuació, mesurar la temperatura amb el termòmetre IR. D'aquesta manera, no cal conèixer l'emissivitat real de la superfície ni la temperatura ambiental.

2.4. Convecció

La convecció consisteix en un moviment macroscòpic de parcel·les d'un fluid que transporta calor entre dos sistemes a temperatures diferents. Aquestes parcel·les, o cèl·lules convectives, operen entrant en contacte successivament amb els dos sistemes, i es refreden en contacte amb el sistema més fred i s'escalfen en contacte amb el sistema més calent. L'origen del moviment convectiu pot ser natural, a causa de les diferències de temperatura entre diferents regions del fluid, que es tradueixen en diferències de pressió o esforç, que provoquen l'acceleració de les respectives regions del fluid. També pot tenir un origen artificial, si es fa servir un sistema de ventilació.

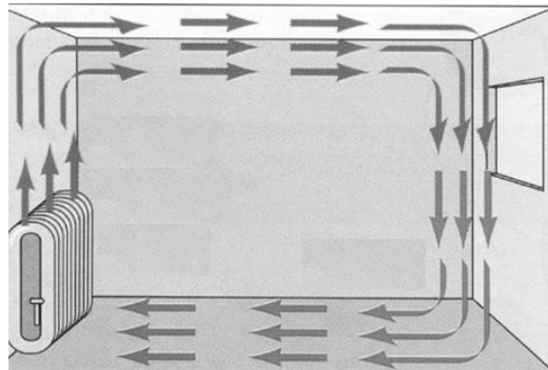


Fig. 2.7
Convecció en una habitació: l'aire calent es mou des del radiador fins a la finestra freda, cedeix calor a aquesta, es refreda i, a continuació, es mou cap al radiador calent, on s'escalfa i torna a començar el cicle convectiu

L'eficiència de la convecció com a mecanisme de transferència de calor depèn de factors molt diversos, entre els quals:

- si és natural o forçada,
- la geometria del problema, en particular del volum en què s'ha de moure el fluid,
- el tipus de fluid,
- la temperatura del fluid
- i d'altres.



2.4.1. La llei de Newton per a la convecció: el coeficient convectiu

Atesa la complexitat de considerar tots aquests factors, podem englobar-los en un *coeficient convectiu*, h_{conv} , de manera que la potència convectiva vingui donada per l'anomenada *lleï de Newton per a la convecció*:

$$\dot{q}_{\text{conv}} = h_{\text{conv}} \cdot A (T_2 - T_1) \quad (2.18)$$

on A és l'àrea de contacte amb el fluid, i T_2 i T_1 són les temperatures dels dos sistemes. Com es pot apreciar comparant aquesta equació 2.18 amb l'equació 2.12, el coeficient convectiu i el coeficient radiatiu fan el mateix paper. Tanmateix, el coeficient convectiu també té per unitats els $\text{W/m}^2 \cdot \text{K}$ o els $\text{W/m}^2 \cdot ^\circ\text{C}$. El valor del coeficient convectiu en els gasos pot anar des dels $2 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$, si la convecció és lliure, fins als $500 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$, si és forçada.

L'expressió 2.18 la podem fer servir per estudiar l'intercanvi convectiu de calor entre dos sistemes mediat per un fluid, o bé per estudiar l'intercanvi convectiu entre un sistema i el propi fluid.

Exemple 2.6

Calculeu la transferència de calor per convecció entre un corrent d'aire a 20°C i una superfície de 4.000 cm^2 que es troba a 250°C , sabent que el coeficient de convecció val $25 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$.

Solució. Amb les dades de l'enunciat, podem aplicar directament l'equació 2.18:

$$\dot{q}_{\text{conv}} = h_{\text{conv}} \cdot A (T_2 - T_1) = 25 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}} \cdot 0,40 \text{ m}^2 \cdot 230 ^\circ\text{C} = 2.300 \text{ W}.$$

Per tant, la resposta és: $2,3 \text{ kW}$

2.5. Transferència de calor entre una superfície i el seu entorn

Considerem l'intercanvi total de calor entre una superfície (per exemple, la superfície interior d'un mur) i l'aire amb què està en contacte. Es defineix la resistència tèrmica superficial, R_s , a través de l'equació següent (observeu la seva similitud amb l'equació 2.4):

$$\dot{q}_{\text{total}} = A \frac{\Delta T}{R_s} \quad (2.19)$$

on $\dot{q}_{\text{total}}$ és la potència calorífica total intercanviada pels dos sistemes per tots els mecanismes de transferència de calor i ΔT és la diferència entre la temperatura de la superfície, T_s , i la de l'aire, T_a . Observeu que la temperatura de la superfície pot ser diferent de la temperatura a l'interior de l'objecte limitat per aquesta superfície.

Com ja hem vist al principi d'aquest capítol, la potència calorífica total intercanviada és: $\dot{q}_{\text{total}} = \dot{q}_{\text{cond}} + \dot{q}_{\text{rad}} + \dot{q}_{\text{conv}}$. En el cas de l'aire en contacte amb un mur, la conducció tèrmica és poc eficient i podem negligir-la a l'expressió anterior: $\dot{q}_{\text{total}} \cong \dot{q}_{\text{rad}} + \dot{q}_{\text{conv}}$. Tenint en compte la llei de Newton per a la convecció (equació 2.18) i l'aproximació lineal de la radiació (equació 2.12), és fàcil provar la *relació entre la resistència tèrmica superficial i els coeficients radiatiu i convectiu*:

$$R_s = \frac{1}{h_{\text{rad}} + h_{\text{conv}}} \quad (2.20)$$

Per exemple, si el coeficient convectiu és de $2 \text{ W/m}^2\cdot\text{K}$ (apropiat per a la convecció lliure en un gas) i el radiatiu és de $6 \text{ W/m}^2\cdot\text{K}$ (calculat anteriorment per l'intercanvi de radiació entre cossos negres), la resistència tèrmica superficial val: $R_s = 0,12 \text{ W/m}^2\cdot\text{K}$.

El valor que pot tenir, a la pràctica, la resistència tèrmica superficial reflecteix les mateixes dependències ja esmentades per als coeficients radiatiu i convectiu, especialment aquest últim. Els valors típics en el cas dels tancaments d'edificis varien principalment en funció que la superfície sigui exterior o interior:

- La resistència tèrmica superficial exterior, R_{se} , s'acostuma a trobar en l'interval $[0,01-0,13] \text{ W/m}^2\cdot\text{K}$. Com més eficient és la convecció, menor és la resistència tèrmica superficial.
- La resistència tèrmica superficial interior, R_{si} , s'acostuma a trobar en l'interval $[0,10-0,17] \text{ W/m}^2\cdot\text{K}$, i reflecteix la dificultat més gran per establir una convecció eficient en un espai tancat.

Exemple 2.7

La superfície exterior del sostre d'una casa unifamiliar presenta un coeficient radiatiu de $5 \text{ W/m}^2\cdot\text{K}$ i un de convectiu de $25 \text{ W/m}^2\cdot^\circ\text{C}$. Determineu-ne la resistència tèrmica superficial exterior i el flux de calor per unitat d'àrea a través del sostre, si la temperatura de la superfície exterior és de $10,4^\circ\text{C}$ i la de l'aire exterior és de $9,8^\circ\text{C}$.

Solució. Per obtenir la resistència tèrmica superficial, apliquem l'equació 2.20:

$$R_s = \frac{1}{h_{\text{rad}} + h_{\text{conv}}} = \frac{1}{30 \text{ W/m}^2\cdot\text{K}} = 0,033 \text{ m}^2\cdot\text{K/W}$$

L'equació 2.19 proporciona el flux de calor:

$$\frac{\dot{q}_{\text{total}}}{A} = \frac{\Delta T}{R_s} = 18 \text{ W/m}^2$$

Per tant, la resposta és: resistència superficial = $0,033 \text{ m}^2\cdot\text{K/W}$, i flux de calor = 20 W/m^2 . (Observeu que la diferència de temperatures només la coneixem amb una única xifra significativa: $0,6^\circ\text{C}$.)

2.6. Cambres d'aire

Una cambra d'aire és un volum d'aire limitat per superfícies sòlides, que s'acostuma a trobar a l'interior d'un tancament. La cambra té generalment una forma paral·lelepipèdica i la calor es transfereix en la direcció de la dimensió més petita, el seu gruix e , normalment molt més petit que les altres dues dimensions. La cambra pot ser ventilada o no, la qual cosa influeix en l'eficiència de la convecció. En una edificació, es poden trobar típicament cambres d'aire a l'interior dels murs o a les finestres.

En qualsevol cas, les dues superfícies que limiten la cambra d'aire, a banda i banda del gruix e , es poden trobar a temperatures diferents, la qual cosa origina un flux de calor entre elles a través de l'aire de la cambra. Definim la resistència tèrmica de la cambra d'aire, R_{ca} , a través de l'equació següent (observeu la seva similitud amb les equacions 2.4 i 2.19):

$$\dot{q}_{total} = A \cdot \frac{\Delta T}{R_{ca}} \quad (2.21)$$

on $\dot{q}_{total}$ és la potència calorífica total intercanviada a través de la cambra, A és l'àrea de les superfícies a banda i banda de la cambra i ΔT és la diferència entre les temperatures d'aquestes dues superfícies.

Si tenim en compte els fluxos de calor a través de l'aire de la cambra per conducció (que, en aquest cas, no sempre es pot negligir), convecció i radiació, el mateix flux de calor total es pot escriure de la manera següent:

$$\dot{q}_{total} = \dot{q}_{cond} + \dot{q}_{rad} + \dot{q}_{conv} = A \cdot k_{aire} \cdot \frac{\Delta T}{e} + A \cdot h_{rad} \cdot \Delta T + A \cdot h_{conv} \cdot \Delta T$$

Comparant amb l'equació (2.21), veiem que la resistència tèrmica de la cambra és:

$$R_{ca} = \frac{1}{\frac{k_{aire}}{e} + h_{rad} + h_{conv}} \quad (2.22)$$

on $k_{aire} = 0,024 \text{ W/m}\cdot\text{K}$ és la conductivitat tèrmica de l'aire. Al denominador de l'equació anterior, el primer sumand (conducció a l'aire) pot ser negligible davant dels altres dos (convecció més radiació), depenent del gruix de la cambra, e .

Considerem primer les cambres d'aire situades a l'interior dels murs, usualment de gruixos e d'entre 5 i 20 cm. Amb aquests gruixos, la conducció tèrmica de l'aire és negligible

enfrent de la radiació: $\frac{k_{aire}}{e} \ll h_{rad} \sim 6 \text{ W/m}^2\cdot\text{K}$

- Cambres no ventilades. La convecció és poc eficient, $h_{conv} \ll h_{rad}$, i la transmissió de la calor ve determinada per la radiació. La resistència tèrmica de la cambra és d'uns $R_{ca} \approx 0,16 - 0,22 \text{ m}^2\cdot\text{K/W}$ i varia molt poc amb el gruix de la cambra.
- Cambres ventilades. La resistència tèrmica de la cambra és inferior (fins a la meitat) a la d'una cambra no ventilada de les mateixes característiques.

En el cas de les *cambres d'aire en finestres dobles*, el gruix acostuma a ser inferior a 1 cm, cosa que fa que el terme de conducció a l'equació 2.22 deixi de ser negligible. De fet, si el gruix és de 4 mm o menys, *la conducció a través de l'aire pot ser el mecanisme dominant de transmissió de calor a la cambra*. Per exemple, si suposem que $e = 4$ mm,

el terme de conducció és: $\frac{k_{\text{aire}}}{e} = 6 \text{ W/m}^2\cdot\text{K}$, comparable al coeficient radiatiu. Si la cambra és fins i tot més estreta, la conducció dominarà: per exemple, si $e = 1$ mm $\Rightarrow$

$\frac{k_{\text{aire}}}{e} = 24 \text{ W/m}^2\cdot\text{K} \gg h_{\text{rad}}$ (i la convecció pràcticament no opera en volums tan petits).

Per tant, a les cambres d'aire de les finestres *la resistència tèrmica de la cambra depèn fortament del seu gruix*.

En algunes finestres amb cambra d'aire, el coeficient radiatiu pot ser significativament inferior al valor de referència donat per l'equació 2.14, $6 \text{ W/m}^2\cdot\text{K}$, si les superfícies de vidre que tanquen la cambra d'aire estan tractades per aconseguir que la seva emissivitat sigui molt més baixa que la unitat.

A la figura següent, podeu veure un exemple de la dependència de la resistència tèrmica d'una cambra d'aire vertical no ventilada en funció de l'amplada de la cambra. En aquest exemple, la convecció només és rellevant per a amplades grans, $e \gtrsim 40$ cm.

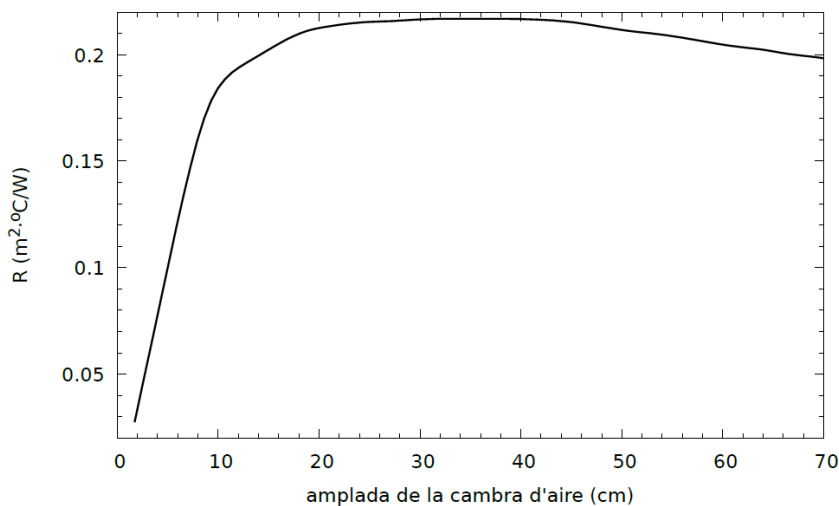


Fig. 2.8
Variació de la resistència tèrmica d'una cambra d'aire vertical en funció de l'amplada



Problemes resolts

P2.1 El cost de funcionament de l'aparell d'aire condicionat d'una casa unifamiliar és proporcional al ritme a què la casa absorbeix calor del seu voltant, dividit per l'eficiència de la màquina frigorífica. Suposant que la màquina és reversible, com dependrà el cost de la diferència de temperatures entre la casa i el medi exterior?

Solució:

Podem formular algebraicament la informació que ens proporciona l'enunciat entre el cost, ϵ , el flux de calor, $\dot{q}$, i l'eficiència, ϵ_{MF} : $\epsilon \propto \dot{q} / \epsilon_{MF}$. De fet, aquesta relació es correspon amb l'equació 1.15 i, simplement, expressa que el cost és proporcional a la potència consumida (com a treball elèctric) per la màquina.

Sabem que, per a qualsevol mecanisme de transferència de calor, la potència calorífica és proporcional a la diferència de temperatures entre els sistemes que intercanvien calor: $\dot{q} \propto \Delta T$. D'altra banda, l'equació 1.16 ens diu que l'eficiència de la màquina frigorífica és inversament proporcional a la diferència de temperatures: $\epsilon_{MF} \propto 1 / \Delta T$. En conclusió, el cost resulta ser proporcional al quadrat de la diferència de temperatures: $\epsilon \propto (\Delta T)^2$

P2.2 Una caixa de fusta de $30 \times 15 \times 10$ cm (coeficient de conductivitat tèrmica de la fusta = $0,15$ W/m·K) té un gruix de parets de 40 mm. Sabent que la caixa conté al seu interior gel a 0°C (calor de transformació de fusió del gel, $\ell_f = 80$ cal/g) i que l'ambient és a 30°C , determineu la quantitat de gel que es fon cada hora.

Nota: En aquest problema, es pot suposar que la caixa es troba en una habitació ventilada eficientment i que la seva resistència tèrmica superficial exterior és negligible.

Solució:

Negligir la resistència tèrmica superficial exterior de la caixa és tant com dir que la temperatura de la superfície exterior de la caixa és igual a la del seu medi ambient, és a dir: $T_{se} = 30^\circ\text{C}$. D'altra banda, podem assumir que la superfície interior de la fusta es troba en contacte directe amb el gel i hi comparteix la mateixa temperatura: $T_{si} = 0^\circ\text{C}$

La resistència tèrmica de les parets de fusta és: $R = \frac{e}{k} = 0,267$ m²·K/W, i el flux

de calor conductiu: $\dot{q}_{cond} = A \cdot \frac{\Delta T}{R} = 20,25$ W, on $A = 0,18$ m² és la superfície total de la caixa i $\Delta T = 30^\circ\text{C}$.

La calor perduda pel gel equival a calor latent: $\dot{q}_{cond} = \dot{m} \cdot \ell_f$, i el ritme a què es fon

el gel és: $\dot{m} = \frac{\dot{q}_{cond}}{\ell_f} = \frac{20,25 \text{ W}}{80 \text{ cal/g}} \times \frac{1 \text{ cal}}{4,186 \text{ J}} = 0,0605$ g/s o, el que és el mateix, 220 g cada hora.

P2.3 Un llac té una capa superficial de gel de 10 cm de gruix. Si la temperatura del medi ambient és de -20°C , determineu el temps que tardarà en augmentar 5,0 cm el gruix del gel. Supposeu que l'aigua es manté a 0°C i que la superfície exterior del gel té la mateixa temperatura que l'ambient.

Dades: densitat del gel, $\rho = 0,90 \text{ g/cm}^3$; conductivitat tèrmica del gel, $k = 2,2 \text{ W/m}\cdot\text{K}$; calor latent de fusió del gel, $\ell_f = 80 \text{ cal/g}$.

Solució:

La capa de gel condueix la calor entre l'aigua i el medi ambient a un ritme donat per: $\dot{q}_{\text{cond}} / A = k \cdot \Delta T / e$. A mesura que augmenta el gruix de la capa de gel, e , el

flux de calor disminueix, des d'un valor inicial: $\frac{\dot{q}_{\text{cond},0}}{A} = k \cdot \frac{\Delta T}{e_0} = 440,0 \text{ W/m}^2$,

fins arribar al valor final: $\frac{\dot{q}_{\text{cond},1}}{A} = k \cdot \frac{\Delta T}{e_1} = 293,3 \text{ W/m}^2$, on $e_0 = 10 \text{ cm}$ i $e_1 = 15 \text{ cm}$.

A continuació, es presenta la solució d'aquest problema en dues variants: (a) una de simplificada i (b) una altra de més complexa, però també més versàtil i precisa. Com comprovarem, la versió simplificada permet obtenir un resultat prou acurat.

a) En aquesta solució, treballem amb la mitjana dels valors inicial i final del flux

$$\text{de calor a través del gel: } \frac{\dot{q}_{\text{cond},m}}{A} = \frac{\left(\frac{\dot{q}_{\text{cond},0}}{A} + \frac{\dot{q}_{\text{cond},1}}{A} \right)}{2} = 366,7 \text{ W/m}^2.$$

La massa de gel congelada quan el gruix ha augmentat en $\Delta e = 5,0 \text{ cm}$ és: $m = \rho V = \rho \cdot A \cdot \Delta e$, on $V = A \cdot \Delta e$ és el volum corresponent de gel, i la calor latent necessària per a la congelació és:

$$Q_1 = m \cdot \ell_f = \rho \cdot A \cdot \Delta e \cdot \ell_f$$

En unitats de J/m^2 , aquesta calor latent val: $\frac{Q_1}{A} = \rho \cdot \Delta e \cdot \ell_f = 360 \frac{\text{cal}}{\text{cm}^2} = 15,05 \text{ MJ/m}^2$.

Ara, per trobar el temps necessari per transferir aquesta quantitat de calor, podem dividir-la pel flux de calor obtingut anteriorment:

$$t_f = \frac{Q_1 / A}{\dot{q}_{\text{cond},m} / A} = 41,036 \text{ s} = 11,4 \text{ hores}$$

Mantenim un nombre de xifres significatives superior al que tocaria, a fi de poder comparar-la amb la solució següent.

b) El plantejament general d'aquesta variant segueix les mateixes pautes que l'anterior, amb l'excepció que, en comptes de treballar amb un flux de calor mitjà, es busca la massa de gel, dm , que es congela en un interval de temps infinitesimal, dt , durant el qual el gruix de la capa de gel augmenta també infinitesimalment, en de . L'equació que se n'obtingui s'haurà d'integrar entre les condicions inicials i finals.



Per començar, en un interval dt , la relació entre calor latent i gruix que hem derivat abans continua essent vàlida, però referida a quantitats infinitesimals:

$$dQ_l = \ell_f \cdot dm = \rho \cdot A \cdot \ell_f \cdot de$$

Aquesta mateixa calor és el resultat de la transferència de calor per conducció a un ritme $\dot{q}_{\text{cond}}$ durant un temps dt :

$$dQ_l = \dot{q}_{\text{cond}} \cdot dt = k \cdot A \cdot \frac{\Delta T}{e} \cdot dt$$

Igalant les dues darreres expressions per dQ_l , tenim:

$$\rho \cdot A \cdot \ell_f \cdot de = k \cdot A \cdot \frac{\Delta T}{e} \cdot dt$$

i, reagrupant els termes:

$$e \cdot de = \left(\frac{k \cdot \Delta T}{\rho \cdot \ell_f} \right) \cdot dt$$

Totes les quantitats del parèntesi anterior són constants; per tant, es pot integrar l'equació. Fem les integrals definides, entre les condicions inicials, $t = 0$ i $e_0 = 10$ cm, i les finals, $t = t_f$ i $e_1 = 15$ cm. Al membre esquerre de l'equació per integrar tenim:

$$\int_{e_0}^{e_1} e \cdot de = \frac{1}{2} (e_1^2 - e_0^2) = 62,5 \text{ cm}^2,$$

mentre que la integració del membre dret de l'equació dona:

$$\int_0^{t_f} \left(\frac{k \cdot \Delta T}{\rho \cdot \ell_f} \right) \cdot dt = \left(\frac{k \cdot \Delta T}{\rho \cdot \ell_f} \right) \int_0^{t_f} dt = \left(\frac{k \cdot \Delta T}{\rho \cdot \ell_f} \right) \cdot t_f = 0,00146 \frac{\text{cm}^2}{\text{s}} \cdot t_f$$

Igalant les dues integrals, podem resoldre per al temps:

$$t_f = \frac{1}{2} \frac{e_1^2 - e_0^2}{(k \cdot \Delta T) / (\rho \cdot \ell_f)} = 42.750 \text{ s} = 11,9 \text{ hores.}$$

Aquest resultat només difereix en mitja hora del resultat aproximat obtingut en (a), cosa que equival a un error del 4 % en la primera variant de la solució.

P2.4 Considereu una bombeta de filament d'emissivitat $\varepsilon = 0,42$, que emet una potència radiant de 100 W quan la temperatura del filament és de 2.700 K. Calculeu l'àrea emissora del filament.

Solució:

Podem aplicar la versió de la llei de Stefan-Boltzmann adient per a cossos reals (equació 2.9):

$$\dot{q}_{\text{rad}} = \varepsilon \cdot A \cdot \sigma \cdot T^4$$

i aïllar-ne l'àrea emissora, tot recordant, un cop més, que la temperatura ha d'estar expressada en kelvin:

$$A = \frac{\dot{q}_{\text{rad}}}{(\varepsilon \cdot \sigma \cdot T^4)} = 7,9 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2 = 79 \text{ mm}^2$$

- P2.5** Determineu la temperatura a la qual un cos d'alumini assoleix l'equilibri tèrmic si rep llum visible d'intensitat $I = 100 \text{ W/m}^2$ i intercanvia calor per convecció amb l'aire que l'envolta. Es pot negligir l'intercanvi de calor per conducció.

Dades: emissivitat de l'alumini a l'infraroig, $\varepsilon = 0,050$; coeficient d'absorció de l'alumini al visible, $\alpha = 0,20$; coeficient convectiu, $h_{\text{conv}} = 20 \text{ W/m}^2\cdot\text{K}$; temperatura de l'aire, $T_a = 25 \text{ }^\circ\text{C}$

Solució:

Suposem que el cos d'alumini radia preferentment a l'infraroig i comprovarem al final que el resultat sigui congruent amb aquesta hipòtesi.

A l'equilibri tèrmic, els guanys de calor es compensen per pèrdues iguals de calor. Per tant, el balanç energètic del cos el podem plantejar com segueix:

$$\alpha \cdot A \cdot I = \varepsilon \cdot \sigma \cdot A \cdot T^4 + h_{\text{conv}} \cdot A \cdot (T - T_a) \Rightarrow T = 298 \text{ K} = 25 \text{ }^\circ\text{C}$$

La temperatura és coherent amb la hipòtesi de radiació preferent a l'IR.

- P2.6** Un termòmetre d'infrarojos és configurat per mesurar la temperatura de superfícies d'emissivitat $\varepsilon = 0,95$. Determineu l'error en la temperatura proporcionada per l'aparell, $T_{\text{IR}} = 27 \text{ }^\circ\text{C}$, quan es mesura una superfície d'emissivitat real $\varepsilon' = 0,30$, si la temperatura ambiental és $T_{\text{amb}} = 23 \text{ }^\circ\text{C}$.

Solució:

El senyal detectat pel termòmetre, que representarem per M , depèn de l'emissió IR de la superfície mesurada i de la radiació que la mateixa superfície reflecteix del medi ambient:

$$M = \varepsilon' \cdot T^4 + (1 - \varepsilon') \cdot T_{\text{amb}}^4$$

on T és la temperatura real de la superfície.

Si el termòmetre es configura per calcular la temperatura fent servir un valor d'emissivitat $\varepsilon = 0,95$, la temperatura que es mostrarà a la pantalla, T_{IR} , serà la que compleixi la relació:

$$M = \varepsilon \cdot T_{\text{IR}}^4 + (1 - \varepsilon) \cdot T_{\text{amb}}^4$$

amb el mateix valor de M que abans, ja que aquesta és una dada real del termòmetre.



Igualant les dues expressions de M , tenim:

$$\varepsilon' \cdot T^4 + (1 - \varepsilon') \cdot T_{\text{amb}}^4 = \varepsilon \cdot T_{\text{IR}}^4 + (1 - \varepsilon) \cdot T_{\text{amb}}^4$$

i, després d'aïllar la temperatura de la superfície, obtenim com a resultat:

$$T = \sqrt[4]{\frac{\varepsilon}{\varepsilon'} (T_{\text{IR}}^4 - T_{\text{amb}}^4) + T_{\text{amb}}^4} = 35^\circ \text{C}$$

Per tant, l'error comès és: $T - T_{\text{IR}} = 8^\circ \text{C}$

P2.7 Determineu el ritme de degradació de l'energia en els dos supòsits de l'exemple 2.4.

Solució:

- (a) Sense pantalla, els cossos intercanvien una potència calorífica: $\dot{q}_{\text{rad}} = 110,8 \text{ W}$ i el ritme al qual varia l'entropia de l'univers és:

$$\dot{S}_{\text{u}} = \dot{q}_{\text{rad}} \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) = 0,0263 \text{ W/K}$$

L'energia no utilitzable es degrada al ritme:

$$\dot{E}_{\text{n.u.}} = T_{\text{min}} \cdot \dot{S}_{\text{u}} = T_1 \cdot \dot{S}_{\text{u}} = 7,4 \text{ W}$$

En aquest darrer càlcul, la temperatura mínima dels cossos que participen en el procés és: $T_{\text{min}} = T_1 = 280 \text{ K}$

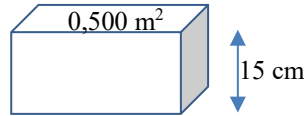
- (b) Amb pantalla, els càlculs són els mateixos però amb una potència calorífica que és la meitat de l'anterior. Per tant, la variació d'entropia de l'univers és $\dot{S}_{\text{u}} = 0,0132 \text{ W/K}$, i el ritme de degradació de l'energia: $\dot{E}_{\text{n.u.}} = 3,7 \text{ W}$

Observeu que la pantalla no intervé en el càlcul de la variació d'entropia, perquè no experimenta un guany o una pèrdua neta de calor: rep la mateixa potència del cos 2 que la que emet cap al cos 1 i, per tant, no varia d'entropia.

Aquest problema posa de manifest dues característiques de la degradació de l'energia en els processos irreversibles. En primer lloc, tal com ja havíem vist a la secció 1.7.2, l'entropia de l'univers augmenta més (més ràpidament, en aquest problema) si les transformacions són brusques que si són graduals. En aquest problema, la transferència de calor amb pantalla és més gradual, i això es tradueix en un ritme menor de degradació de l'energia.

En segon lloc, es pot comprovar que el treball (o potència mecànica) que s'hauria pogut obtenir fent servir una màquina tèrmica per transferir calor del cos 2 al cos 1 és exactament igual a l'energia no utilitzable (o ritme de degradació de l'energia) que hem trobat abans. En altres paraules, l'energia no utilitzable és l'energia que no hem aprofitat per produir treball. Però, a més, l'energia no utilitzable s'ha perdut definitivament ja que, en tractar-se d'un procés irreversible, aquesta energia no es podrà aprofitar mai més per produir treball.

- P2.8** Un bloc de gel té una forma paral·lelepèdica, de gruix $e = 15 \text{ cm}$, i l'àrea de la superfície superior és $A = 5.000 \text{ cm}^2$. La temperatura de la superfície superior del gel és $T_{\text{sup}} = 0,0^\circ\text{C}$ i la de la superfície inferior és $T_{\text{inf}} = -5,0^\circ\text{C}$.



- Sabent que el coeficient de conductivitat tèrmica del gel és $k = 2,2 \text{ W/m}\cdot^\circ\text{C}$, determineu la potència calorífica que intercanvien ambdues superfícies per conducció tèrmica a través del gel.
- La temperatura de l'aire que passa sobre la superfície superior és $T_{\text{aire}} = 12^\circ\text{C}$. Si el coeficient de convecció entre l'aire i el gel és de $h_{\text{conv}} = 8,0 \text{ W/m}^2\cdot^\circ\text{C}$, determineu la potència calorífica intercanviada per convecció.
- Sobre la superfície superior del gel incideix radiació solar d'intensitat $I = 1.200 \text{ W/m}^2$. Si el coeficient d'absorció en el visible és $\alpha = 0,250$, determineu la potència radiant absorbida pel gel.
- Determineu la potència radiant emesa per la superfície superior del gel, sabent que la seva emissivitat és $\varepsilon = 0,970$.
- Tenint en compte els resultats dels quatre apartats anteriors, feu el balanç energètic de la superfície superior del gel i determineu el ritme a què es va fonent.

Solució:

- (a) Apliquem la llei de Fourier en condicions estacionàries:

$$\dot{q}_{\text{cond}} = A \cdot k \cdot \frac{(T_{\text{sup}} - T_{\text{inf}})}{e} = 37 \text{ W}$$

- (b) Apliquem la llei de Newton per a la convecció:

$$\dot{q}_{\text{conv}} = A \cdot h_{\text{conv}} \cdot (T_{\text{aire}} - T_{\text{sup}}) = 48 \text{ W}$$

- (c) Potència radiant absorbida:

$$\dot{q}_{\text{abs}} = \alpha \cdot I \cdot A = 150 \text{ W}$$

- (d) Potència emesa, d'acord amb la llei de Stefan-Boltzmann per a un cos real:

$$\dot{q}_{\text{rad}} = \varepsilon \cdot \sigma \cdot A \cdot T_{\text{sup}}^4 = 153 \text{ W}$$

- (e) Les potències corresponents als apartats a i d corresponen a pèrdues de calor, mentre que les dels apartats b i c són guanys de calor. El balanç és:

$$\dot{q}_{\text{net}} = \dot{q}_{\text{conv}} + \dot{q}_{\text{abs}} - \dot{q}_{\text{cond}} - \dot{q}_{\text{rad}} = 8 \text{ W}$$

Ara, podem igualar aquesta potència neta amb el ritme de canvi d'estat del gel a líquid:

$$\frac{\dot{q}_{\text{net}}}{l_f} = 0,024 \frac{\text{g}}{\text{s}} = 90 \frac{\text{g}}{\text{h}} \text{ (arrodonit a una xifra significativa)}$$



P2.9 Una finestra doble té una cambra d'aire de 6,0 mm. Determineu la resistència tèrmica de la cambra d'aire.

Dades: conductivitat de l'aire, $k_{\text{aire}} = 0,024 \text{ W/m}\cdot\text{°C}$; coeficient convectiu, $h_{\text{conv}} = 2,0 \text{ W/m}^2\cdot\text{K}$; coeficient radiatiu, $h_{\text{rad}} = 6,0 \text{ W/m}^2\cdot\text{K}$

Solució:

La resistència tèrmica de la cambra d'aire es pot calcular substituint directament les dades de l'enunciat a l'equació 2.22:

$$R_{\text{ca}} = \frac{1}{\frac{k_{\text{aire}}}{e} + h_{\text{rad}} + h_{\text{conv}}} = 0,083 \text{ m}^2\cdot\text{K/W}$$

Problemes proposats

P2.10 Calculeu quin gruix d'acer proporciona el mateix aïllament tèrmic que una capa de suro de 2,0 cm. I si, en comptes d'acer, fos totxo?

Dades: $k_{\text{acer}} = 46 \text{ W/m}\cdot\text{K}$; $k_{\text{suro}} = 0,040 \text{ W/m}\cdot\text{K}$; $k_{\text{totxo}} = 0,87 \text{ W/m}\cdot\text{K}$

R: 23 m d'acer; 44 cm de totxo

P2.11 Un resort turístic d'un país nòrdic està construït completament amb gel. Determineu quin gruix d'escuma de poliestirè proporcionaria el mateix aïllament tèrmic que les parets de gel, que són de 100 cm de gruix.

Dades: coeficient de conductivitat tèrmica del gel $= 0,60 \text{ W/m}\cdot\text{K}$; de l'escuma de poliestirè $= 0,0080 \text{ W/m}\cdot\text{°C}$

R: 1,3 cm

P2.12 Les parets de la façana d'un edifici estan formades per uns materials amb les característiques termoconstructives (de gruix i conductivitat tèrmica) que s'indiquen a la taula següent. Calculeu les resistències tèrmiques de cada capa.

	e (m)	k (W/m·°C)
Totxana	0,110	0,80
Aïllament	0,050	0,040
Guix	0,020	1,00

R: $R_{\text{totxana}} = 0,14 \text{ m}^2\cdot\text{K/W}$, $R_{\text{aïllament}} = 1,3 \text{ m}^2\cdot\text{K/W}$, $R_{\text{guix}} = 0,020 \text{ m}^2\cdot\text{K/W}$

P2.13 Un mur està format per les capes següents: totxana de 15 cm de gruix i $0,21 \text{ cal/m}\cdot\text{s}\cdot\text{K}$ de conductivitat tèrmica; formigó d'11 cm de gruix i $0,20 \text{ W/m}\cdot\text{K}$ de conductivitat tèrmica; guix d'1,3 cm de gruix i $0,30 \text{ W/m}\cdot\text{°C}$ de conductivitat tèrmica; poliestirè de 3,0 mm de gruix i $0,040 \text{ W/m}\cdot\text{K}$ de conductivitat tèrmica. Calculeu les resistències tèrmiques de cada capa.

R: $R_{\text{totxana}} = 0,17 \text{ m}^2 \cdot \text{K/W}$, $R_{\text{formigó}} = 0,55 \text{ m}^2 \cdot \text{K/W}$, $R_{\text{guix}} = 0,043 \text{ m}^2 \cdot \text{K/W}$,
 $R_{\text{poliestirè}} = 0,075 \text{ m}^2 \cdot \text{K/W}$

P2.14 Un recipient isotèrmic necessita dissipar 411 W per mantenir la seva temperatura constant. Determineu la diferència de temperatures amb el seu entorn, suposant que aquesta potència s'intercanvia exclusivament per convecció.

Dada: coeficient de convecció = $2,8 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$; superfície del recipient = $2,0 \text{ m}^2$

R: 73°C

P2.15 Calculeu la temperatura de la superfície del Sol amb les dades següents: radi del Sol, $R_{\odot} = 696.000 \text{ km}$; lluminositat solar, $\dot{q}_{\text{rad}, \odot} = 3,80 \cdot 10^{26} \text{ W}$; emissivitat, $\varepsilon = 1,00$

Nota: El Sol no té una superfície sòlida. La regió que emet la radiació que rebem es coneix com a fotosfera i es troba a una distància radial de 696.000 km respecte al centre de l'estrella.

R: 5.760 K

P2.16 Determineu la potència radiant que emet un radiador de superfície $2,0 \text{ m}^2$ quan la seva temperatura superficial és de 37°C , si la seva emissivitat és 0,55.

R: 580 W

P2.17 Determineu la temperatura a la qual un cos d'alumini assoleix l'equilibri tèrmic si rep llum visible d'intensitat 1.000 W/m^2 i intercanvia calor per convecció amb l'aire que l'envolta. Es pot negligir l'intercanvi de calor per conducció.

Dades: emissivitat de l'alumini a l'infraroig, $\varepsilon = 0,050$; coeficient d'absorció de l'alumini al visible, $\alpha = 0,20$; coeficient convectiu, $h_{\text{conv}} = 20 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$; temperatura de l'aire, $T_a = 25^\circ\text{C}$

R: 34°C

P2.18 Repetiu els càlculs del problema anterior si el cos està recobert per pintura blanca (per tant, en comptes de l'emissivitat i el coeficient d'absorció de l'alumini, s'han de fer servir els de la pintura blanca). Comparant el resultat amb el del problema anterior, està justificat considerar l'alumini com un cos selectiu càlid i la pintura blanca com a selectiva freda?

Dades: emissivitat de la pintura blanca a l'infraroig = 0,90; íd. al visible = 0,30

R: 21°C

P2.19 Repetiu un cop més els càlculs del problema anterior si la intensitat que rep el cos recobert per pintura blanca és de 100 W/m^2 . Compareu el resultat amb el del problema 2.5.

R: 10°C



P2.20 Un cos rep una radiació visible de 50 W/m^2 , de la qual reflecteix 20 W/m^2 i n'absorbeix la resta.

- a) Determineu-ne la temperatura tot suposant que la radiació absorbida es compensa exactament amb la radiació emesa i que l'emissivitat a l'IR és 0,50.
- b) Quina intensitat emetria a l'IR un cos negre de la mateixa temperatura i de superfície emissora 100 cm^2 ?

R: a) -93°C ; b) $0,60 \text{ W}$

P2.21 Repetiu els càlculs de l'exemple 2.3 tot suposant que no hi ha reemissió d'ona curta de l'atmosfera cap al terra, és a dir, no hi ha cap mena d'efecte hivernacle: $\chi = 0$

R: -51°C

P2.22 Un termòmetre d'infrarojos és configurat per mesurar la temperatura de superfícies d'emissivitat $\varepsilon = 0,950$. Calculeu l'error en la temperatura proporcionada per l'aparell, $T_{\text{IR}} = 27,0^\circ\text{C}$, quan es mesura una superfície d'emissivitat real $\varepsilon' = 0,800$, si la temperatura ambiental és $T_{\text{amb}} = 23,0^\circ\text{C}$.

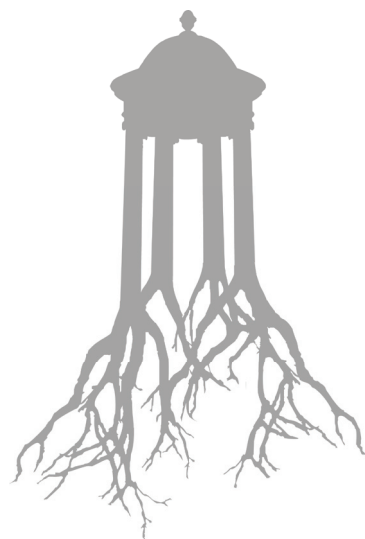
R: $0,7^\circ\text{C}$

P2.23 Una finestra doble té una cambra d'aire de 16 mm . Determineu la resistència tèrmica de la cambra d'aire.

Dades: conductivitat de l'aire = $0,024 \text{ W/m}\cdot^\circ\text{C}$; coeficient convectiu = $2,0 \text{ W/m}^2\cdot\text{K}$; coeficient radiatiu = $2,0 \text{ W/m}^2\cdot\text{K}$

Nota: els vidres d'aquesta finestra tenen un tractament anomenat *aïllament tèrmic reforçat*, que permet que el coeficient radiatiu sigui petit i la resistència tèrmica de la cambra sigui relativament gran.

R: $0,18 \text{ m}^2\cdot\text{K/W}$



→ 3



Balanç energètic d'un edifici

Un edifici es pot tractar com un sistema termodinàmic complex que intercanvia calor i matèria amb el seu entorn. Les lleis de la física i els principis de la termodinàmica hi són aplicables, com en qualsevol altre sistema físic. En particular, és vàlid tot el que hem vist als capítols anteriors, si bé ara n'haurem de fer algunes simplificacions perquè el problema sigui tractable. Per exemple, en la major part del capítol, prendrem com a referència una única temperatura de l'aire interior i una única temperatura de l'aire exterior, descartant la possibilitat que aquestes temperatures no siguin totalment homogènies. El balanç de totes les entrades i les sortides d'energia tèrmica en un edifici pot tenir dos resultats: o bé es compensen mútuament, i en aquest cas la temperatura és estable i podem assumir un estat estacionari, o bé hi ha un saldo net de calor, cosa que originaria una deriva tèrmica. En aquest capítol, ens centrarem en la primera possibilitat. En l'altre cas, el resultat de la deriva tèrmica depèn bàsicament de la inèrcia tèrmica de l'edifici, concepte que ja hem tractat als capítols anteriors. Començarem per estudiar la resistència tèrmica d'un mur, com a sistema format per un conjunt de capes consecutives que separen els sistemes en què centrem la nostra atenció: l'aire interior i l'aire exterior de l'edifici. En deduir com depèn la resistència tèrmica d'un mur de la de les diferents capes que el componen també podrem calcular el perfil tèrmic del mur, és a dir, com varia la temperatura al seu interior, la qual cosa té aplicacions en el càlcul de les condensacions i en la inèrcia tèrmica. A continuació, plantejarem l'equació de balanç energètic d'un edifici, tenint en compte totes les entrades i les sortides d'energia tèrmica. Definirem una magnitud que caracteritza l'intercanvi de calor a través de l'estructura exterior de l'edifici, el seu embolcall tèrmic, i estudiarem també l'intercanvi de calor degut a la ventilació i a la radiació solar. Finalment, introduïrem una magnitud que resumeix l'intercanvi total de calor entre l'aire interior i l'aire exterior, l'anomenat *coeficient global de pèrdues*, i veurem quina forma adopta l'equació de balanç energètic quan s'hi incorporen les definicions anteriors.

3.1. Resistència tèrmica d'un mur

Imaginem un mur d'un edifici, format per diferents materials col·locats un a continuació de l'altre, separant dos volums d'aire a temperatures diferents. *Ens interessa saber com influeixen les característiques d'aquests materials en la transferència de calor entre els*

dos volums d'aire. Per concretar, imaginem que aquest mur és exterior, de manera que els volums d'aire en qüestió són l'aire interior de l'edifici, a temperatura T_{ai} , i l'aire exterior a l'edifici, a temperatura T_{ae} , però el tractament que fem a continuació és aplicable igualment a murs interiors que separin diferents estances de l'edifici. Així mateix, aquest tractament el podem aplicar sense canvis al cas en què l'estructura que separi l'interior de l'exterior no sigui exactament un mur, per exemple un finestral, una porta, etc.

Definim la *resistència tèrmica d'un mur*, R , amb l'equació següent:

$$\dot{q} = A \cdot \frac{\Delta T}{R} = A \cdot \frac{T_{ai} - T_{ae}}{R} \quad (3.1)$$

on $\dot{q}$ és la potència calorífica total intercanviada a través del mur entre l'aire interior i l'aire exterior, i A és l'àrea del mur (que suposem que és constant o que varia poc al llarg del mur). Observeu la similitud d'aquesta expressió amb les equacions 2.4, 2.19 i 2.21, però fixeu-vos que les diferències de temperatura, ΔT , que apareixen a totes aquestes equacions tenen significats diferents. A l'equació 2.4, és la diferència de temperatures entre els extrems d'un conductor tèrmic homogeni (d'un únic material); a l'equació 2.19 és la diferència de temperatures entre una superfície i l'aire que l'envolta, i a l'equació 2.21 és la diferència de temperatures entre les superfícies que limiten una cambra d'aire.

A l'equació 3.1, ΔT és la diferència de temperatures entre els volums d'aire interior i exterior. Normalment, aquestes són les temperatures de referència, en el cas de la temperatura de l'aire exterior perquè el seu valor ens ve donat per les condicions ambientals, sobre les quals no tenim gaire influència, i en el cas de la temperatura de l'aire interior perquè és la que en última instància volem controlar, per exemple, per garantir les condicions de confort tèrmic.

També definim la *transmitància tèrmica del mur* com la inversa de la seva resistència tèrmica (vegeu l'apartat "Altres propietats tèrmiques" del capítol 2.2):

$$U = 1 / R \quad (3.2)$$

amb unitats de $\text{W}/\text{m}^2 \cdot \text{K}$. La potència calorífica total intercanviada entre l'aire interior i l'aire exterior en funció de la transmitància tèrmica del mur és:

$$\dot{q} = A \cdot U \cdot \Delta T \quad (3.3)$$

El valor de la *resistència tèrmica d'un mur format per N capes planes i paral·leles*, cadascuna d'elles caracteritzades per una resistència tèrmica R_j (j és un índex identificador de les capes, que pren valors des de $j = 1$ fins a $j = N$), és:

$$R = R_{se} + R_{si} + \sum_{j=1}^N R_j \quad (3.4)$$

Aquest resultat és conseqüència de les lleis d'associació de resistències tèrmiques en sèrie, en condicions estacionàries.



Exemple 3.1

Calculeu el coeficient de transmissió tèrmica d'un mur format per una capa d'11 cm de totxana ($k_{\text{totxana}} = 0,87 \text{ W/m}\cdot\text{K}$), una cambra d'aire de resistència $0,18 \text{ m}^2\cdot\text{K/W}$, una capa d'11 cm de formigó ($k_{\text{formigó}} = 0,20 \text{ W/m}\cdot\text{K}$), una capa d'1,3 cm de guix ($k_{\text{guix}} = 0,30 \text{ W/m}\cdot\text{K}$) i una capa de 3,0 mm de poliestirè ($k_{\text{poliestirè}} = 0,040 \text{ W/m}\cdot\text{K}$).

Dades: $R_{\text{si}} = 0,12 \text{ m}^2\cdot\text{K/W}$; $R_{\text{se}} = 0,08 \text{ m}^2\cdot\text{K/W}$

Solució. Les resistències tèrmiques de les capes són: $R_{\text{totxana}} = \frac{e_{\text{totxana}}}{k_{\text{totxana}}} = \frac{0,11 \text{ m}}{0,87 \frac{\text{W}}{\text{m}\cdot\text{K}}} = 0,126$

$\text{m}^2\cdot\text{K/W}$, $R_{\text{ca}} = 0,18 \text{ m}^2\cdot\text{K/W}$, $R_{\text{formigó}} = \frac{e_{\text{formigó}}}{k_{\text{formigó}}} = 0,55 \text{ m}^2\cdot\text{K/W}$, $R_{\text{guix}} = \frac{e_{\text{guix}}}{k_{\text{guix}}} = 0,043$

$\text{m}^2\cdot\text{K/W}$, i $R_{\text{poliestirè}} = \frac{e_{\text{poliestirè}}}{k_{\text{poliestirè}}} = 0,075 \text{ m}^2\cdot\text{K/W}$.

La resistència tèrmica del mur és la suma de la de les capes més les resistències tèrmiques superficials interior i exterior (equació 3.4):

$$R = R_{\text{se}} + R_{\text{si}} + R_{\text{totxana}} + R_{\text{ca}} + R_{\text{formigó}} + R_{\text{guix}} + R_{\text{poliestirè}} = 1,174 \text{ m}^2\cdot\text{K/W}$$

La transmitància tèrmica del mur és la inversa de la seva resistència tèrmica (equació 3.2):

$$U = \frac{1}{R} = 0,85 \text{ W/m}^2\cdot\text{K}.$$

Per tant, la resposta és: $0,85 \text{ W/m}^2\cdot\text{K}$

3.1.1. Associació de resistències tèrmiques en sèrie

Parlem d'*associació de resistències tèrmiques en sèrie* quan el flux de calor travessa, successivament, diferents resistències tèrmiques que es troben una a continuació de l'altra, separant dos sistemes termodinàmics a temperatures diferents. Un exemple és el mur que hem descrit anteriorment, format per capes planes i paral·leles que separen l'aire interior de l'aire exterior. És important adonar-se que la resistència tèrmica superficial actua com la de qualsevol conductor, determinant el flux de calor entre dos sistemes que, en aquest cas, són l'aire i la superfície.

En condicions estacionàries, i suposant la mateixa àrea A per a totes les resistències tèrmiques, el flux de calor per unitat d'àrea es manté constant en propagar-se per l'associació. Aplicant aquesta propietat a cada resistència tèrmica, podem escriure:

$$\frac{\dot{q}}{A} = \frac{\Delta T_j}{R_j} = \frac{\Delta T_s}{R_s} = \text{constant} \quad (3.5)$$

i aquesta equació és aplicable a totes les capes, identificades pel subíndex j , i també a les dues resistències tèrmiques superficials, interior i exterior, a les quals correspon el



subíndex s (ΔT_s és la diferència de temperatures entre una d'aquestes superfícies i l'aire amb què està en contacte).

Una conseqüència de les igualtats 3.5 és que *el salt tèrmic a cada capa, ΔT_j , és proporcional a la seva resistència tèrmica: $\Delta T_j = \text{constant} \times R_j$, i $\Delta T_s = \text{constant} \times R_s$* . Per tant, un aïllant tèrmic suporta, en general, una diferència de temperatures entre els seus extrems molt més gran que la que correspon a un bon conductor de calor.

Com que la diferència entre les temperatures de l'aire interior i l'aire exterior és igual a la suma de les variacions de temperatura a cada capa del mur més les variacions de les temperatures superficials, tenim que:

$$T_{\text{ai}} - T_{\text{ae}} = \Delta T_{\text{si}} + \sum_{j=1}^N \Delta T_j + \Delta T_{\text{se}} = \frac{\dot{q}}{A} \times \left(R_{\text{se}} + \sum_{j=1}^N R_j + R_{\text{si}} \right)$$

i, donada la definició de resistència tèrmica del mur (equació 3.1), queda demostrada l'equació 3.4.

Exemple 3.2

Una vareta, aïllada per evitar pèrdues de calor, té un dels extrems submergits en aigua bullent a 100°C i l'altre en una barreja d'aigua i gel a 0°C . La vareta es compon de dues parts, una de coure de longitud $e_{\text{Cu}} = 100 \text{ cm}$, amb un extrem en el vapor, i l'altra d'acer de longitud e_{Fe} , i que té un extrem en el gel. Els dos trossos tenen la mateixa secció, $A = 5,0 \text{ cm}^2$, i estan soldats per l'extrem lliure. Sabent que, en estat estacionari, la temperatura de la soldadura és de 60°C , determineu quantes calories per segon passen del bany de vapor a la barreja d'aigua i gel, i quant val e_{Fe} .

Dades: $k_{\text{Cu}} = 401 \text{ W/m}\cdot\text{K}$; $k_{\text{Fe}} = 46 \text{ W/m}\cdot\text{K}$

Solució. En estat estacionari, cada capa compleix l'equació 3.5. En particular, per al coure:

$$\dot{q} = A \cdot \frac{\Delta T_{\text{Cu}}}{R_{\text{Cu}}} = 0,00050 \text{ m}^2 \cdot \frac{100^\circ\text{C} - 60^\circ\text{C}}{\frac{1,00}{401} \text{ m}^2\text{K} / \text{W}} = 8,0 \text{ W} = 1,9 \text{ cal/s.}$$

També podem introduir les propietats de la capa d'acer:

$$\frac{\Delta T_{\text{Cu}}}{R_{\text{Cu}}} = \frac{\Delta T_{\text{Fe}}}{R_{\text{Fe}}} \Rightarrow R_{\text{Fe}} = R_{\text{Cu}} \frac{\Delta T_{\text{Fe}}}{\Delta T_{\text{Cu}}} = \frac{1,00}{401} \frac{\text{m}^2\text{K}}{\text{W}} \cdot \frac{60^\circ\text{C} - 0^\circ\text{C}}{100^\circ\text{C} - 60^\circ\text{C}} = 0,00374 \text{ m}^2\cdot\text{K/W}$$

i la longitud de l'acer és:

$$e_{\text{Fe}} = R_{\text{Fe}} \cdot k_{\text{Fe}} = 0,17 \text{ m}$$

Per tant, la resposta és: passen $1,9 \text{ cal/s}$, i la longitud d'acer és 17 cm



3.2. Perfil tèrmic

Per calcular el perfil tèrmic d'un mur, és a dir, la distribució de temperatures al seu interior, suposem condicions estacionàries, tot recordant que, en aquestes circumstàncies, *el gradient tèrmic no varia a l'interior d'un conductor homogeni* (secció 2.2.3). Per tant, *bastarà trobar el valor de la temperatura als extrems de cada capa homogènia* de les que componen el mur: en una representació gràfica del perfil tèrmic a l'interior del mur, uniríem amb una línia recta les temperatures als extrems de cada capa homogènia.

Si suposem conegudes les temperatures de l'aire interior i de l'aire exterior i totes les propietats tèrmiques del mur, resumides en les resistències tèrmiques superficials i de cada capa, incloses les eventuais cambres d'aire, podem determinar el perfil tèrmic mitjançant un procediment iteratiu en què es va resolent la temperatura a l'extrem d'una capa a cada pas. Al pas següent, aquesta temperatura esdevé una dada que es pot fer servir per avançar a una nova capa, i així successivament fins haver completat el mur. En fer-ho, apliquem les equacions 3.1 i 3.5.

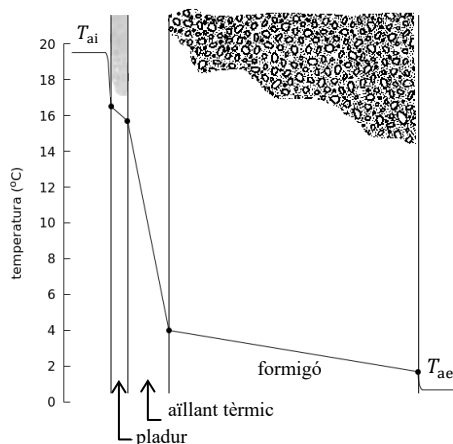


Fig. 3.1
Exemple de perfil tèrmic en una paret formada per tres capes (d'interior a exterior): pladur, aïllant tèrmic i formigó

A continuació, enunciem el *mètode de càlcul de la distribució de temperatures*:

- Determinar la resistència tèrmica total entre l'aire interior i l'aire exterior, R , incloent-hi les resistències tèrmiques de cada capa, R_j , i les resistències tèrmiques superficials interior i exterior, R_{si} i R_{se} : $R = R_{si} + R_{se} + \sum R_j$.
- Determinar la temperatura a la superfície de cada capa, a partir de les temperatures de l'aire interior, T_{ai} , i de l'aire exterior, T_{ae} , començant per la temperatura superficial exterior:

$$T_{se} = T_{ae} + \frac{R_{se}}{R}(T_{ai} - T_{ae}), \quad (3.6)$$

i continuant, capa per capa, fins arribar a la superfície interior:

$$T_i = T_{se} + \frac{R_1}{R}(T_{ai} - T_{ae}); \quad T_{j+1} = T_j + \frac{R_{j+1}}{R}(T_{ai} - T_{ae}); \text{ etc.} \quad (3.7)$$

**Exemple 3.3**

Una paret està composta per una capa interior, A; una capa de poliestirè expandit, B, i una capa exterior de formigó, C, les resistències tèrmiques de les quals, juntament amb les resistències superficials, s'indiquen més endavant. Les temperatures de l'aire interior i de l'aire exterior són $T_{ai} = 20,0^\circ\text{C}$ i $T_{ac} = 0,0^\circ\text{C}$. Calculeu el perfil tèrmic de la paret.

Dades: $R_{si} = 0,123 \text{ m}^2\cdot\text{K/W}$; $R_{sc} = 0,055 \text{ m}^2\cdot\text{K/W}$; $R_A = 0,060 \text{ m}^2\cdot\text{K/W}$; $R_B = 0,750 \text{ m}^2\cdot\text{K/W}$; $R_C = 0,105 \text{ m}^2\cdot\text{K/W}$

Solució. Per determinar-ne el perfil tèrmic, seguirem el procediment que tot just hem explicat en aquesta secció.

- a. Comencem per calcular la resistència tèrmica total:

$$R = R_{si} + R_{sc} + R_A + R_B + R_C = 1,093 \text{ m}^2\cdot\text{K/W}$$

- b. Calculem la temperatura superficial exterior:

$$T_{sc} = T_{ac} + \frac{R_{sc}}{R}(T_{ai} - T_{ac}) = 0,0^\circ\text{C} + \frac{0,055}{1,093}(20,0^\circ\text{C} - 0,0^\circ\text{C}) = 1,01^\circ\text{C}$$

i continuem calculant les temperatures de les capes següents, una per una:

$$T_{B-C} = T_{sc} + \frac{R_C}{R}(T_{ai} - T_{ac}) = 1,01^\circ\text{C} + \frac{0,105}{1,093}(20,0^\circ\text{C} - 0,0^\circ\text{C}) = 2,93^\circ\text{C}$$

$$T_{A-B} = T_{B-C} + \frac{R_B}{R}(T_{ai} - T_{ac}) = 2,93^\circ\text{C} + \frac{0,750}{1,093}(20,0^\circ\text{C} - 0,0^\circ\text{C}) = 16,65^\circ\text{C}$$

Les temperatures T_{B-C} i T_{A-B} corresponen a les superfícies límit entre les capes C i B, i entre les capes B i A, respectivament. La temperatura següent que s'ha de determinar ja és la de la superfície interior de la capa A (i del mur):

$$T_{si} = T_{A-B} + \frac{R_A}{R}(T_{ai} - T_{ac}) = 16,65^\circ\text{C} + \frac{0,060}{1,093}(20,0^\circ\text{C} - 0,0^\circ\text{C}) = 17,75^\circ\text{C}$$

Amb la determinació de la temperatura de la superfície interior, hem completat el càlcul del perfil tèrmic. L'equació 3.8 ens permet fer una comprovació de la precisió o correcció dels resultats obtinguts. Calculem els valors dels dos membres d'aquesta equació:

$$T_{ai} - T_{si} = 20,0^\circ\text{C} - 17,75^\circ\text{C} = 2,25^\circ\text{C}$$

$$\frac{R_{si}}{R}(T_{ai} - T_{ac}) = \frac{0,123}{1,093}(20,0^\circ\text{C} - 0,0^\circ\text{C}) = 2,25^\circ\text{C}$$

La comparació dels dos membres de l'equació 3.8 posa de manifest que els resultats són precisos fins al segon decimal. No obstant això, com que les dades de les temperatures inicials només es coneixen fins al primer decimal, donarem totes les temperatures amb aquesta mateixa precisió.

Per tant, la resposta és: $T_{si} = 17,8^\circ\text{C}$; $T_{A-B} = 16,7^\circ\text{C}$; $T_{B-C} = 2,9^\circ\text{C}$; $T_{sc} = 1,0^\circ\text{C}$

El mètode descrit permet obtenir el perfil tèrmic començant per la superfície exterior i acabant per la interior. Un cop determinada la temperatura de la superfície interior, podem utilitzar una *equació de comprovació*, és a dir, sense cap incògnita, per verificar la coherència dels resultats obtinguts:

$$T_{ai} - T_{si} = \frac{R_{si}}{R} (T_{ai} - T_{ae}) \quad (3.8)$$

El procediment de càlcul de les temperatures també es pot fer de dins cap enfora, és a dir, començant per calcular la temperatura de la superfície interior i acabar amb la de la superfície exterior:

$$T_{si} = T_{ai} - \frac{R_{si}}{R} (T_{ai} - T_{ae})$$

i així successivament. Fixeu-vos que, en aquest cas, les temperatures van disminuint a cada nou pas del procediment iteratiu (sempre pensant que $T_{ai} > T_{ae}$).

En molts casos, les parets dels edificis estan formades per agregació de diferents tipus de tancaments, situats en paral·lel, que ocupen diferents àrees. En aquests casos, perquè siguin aplicables l'equació 3.4 (càlcul de la resistència tèrmica de la paret) i el mètode de càlcul del perfil tèrmic, cal que els diferents tipus de tancament estiguin perfectament aïllats tèrmicament entre si, de manera que no hi pugui haver cap flux de calor lateral dintre del mur (com passaria si dues zones intramurs que estiguessin en contacte tèrmic tinguessin temperatures diferents). Si aquesta mena de tractament tèrmic no és adient, els càlculs només proporcionaran una aproximació a la situació real.

A la figura 3.2, podeu veure un exemple de la distribució de temperatures a l'interior d'una paret, amb aïllament tèrmic entre els dos tipus de tancament de què es compon, o sense. Amb l'aïllament, els perfils tèrmics dels dos tancaments estan nítidament separats, mentre que, en treure l'aïllament transversal, la distribució de temperatures es difumina: les temperatures a A baixen i a B pugen, però de manera no uniforme, en funció de la distància a la superfície que separa A i B.

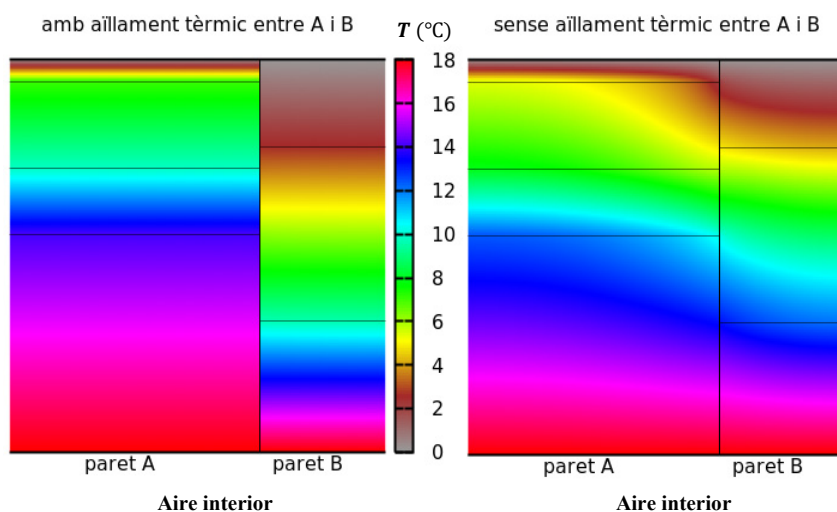


Fig. 3.2
Exemple de perfil tèrmic en una paret formada per dos tancaments en paral·lel: un de quatre capes, A, i un altre format per tres capes, B: a l'esquerra, amb aïllament tèrmic entre A i B i, a la dreta, sense aquest aïllament. El valor de la temperatura està codificat en color, d'acord amb l'escala que s'indica al mig de les dues figures. L'aire interior es troba a una temperatura fixa de 18°C, l'aire exterior (a dalt) està a 0°C

3.2.1. Factor de temperatura de la superfície interior

L'equació 3.8 també ens permet explicar el conegut fenomen que, en una situació típica d'hivern, la superfície dels *ponts tèrmics* es troba a una temperatura inferior a la resta de superfícies interiors d'una estructura. Un pont tèrmic és una part dels tancaments d'un edifici que presenta una resistència tèrmica, R , molt inferior a la de la resta de tancaments. La resistència tèrmica d'un pont tèrmic la podem desglossar entre les resistències tèrmiques superficials i la resistència tèrmica pròpia del material o materials del pont tèrmic. Com que les resistències tèrmiques superficials varien poc d'una zona del tancament a una altra, deduïm que el quocient R_{si} / R , que apareix a l'equació 3.8, és més alt per a un pont tèrmic (denominador petit) que per a la resta del tancament. En conseqüència, la diferència de temperatures, $T_{ai} - T_{si}$, entre l'aire interior (relativament calent a l'hivern) i la superfície interior del pont tèrmic és més gran, és a dir, la superfície del pont tèrmic està freda, en comparació amb altres superfícies interiors.

La temperatura superficial interior dels tancaments es caracteritza per l'anomenat *factor de temperatura de la superfície interior*, f_{Rsi} , definit com la proporció entre el salt tèrmic entre la superfície interior i l'aire exterior i el salt tèrmic entre l'aire interior i l'aire exterior:

$$f_{Rsi} = \frac{T_{si} - T_{ae}}{T_{ai} - T_{ae}} = 1 - \frac{T_{ai} - T_{si}}{T_{ai} - T_{ae}} \quad (3.9)$$

o, aplicant l'equació 3.8:

$$f_{Rsi} = 1 - \frac{R_{si}}{R}$$

La darrera equació ens mostra que el factor de temperatura és una quantitat adimensional i acotada, $0 < f_{Rsi} < 1$, i que el seu valor depèn de la proporció entre la resistència tèrmica superficial interior i la resistència tèrmica total del tancament.

3.3. Balanç energètic

El balanç energètic d'un edifici consisteix a comptabilitzar tots els guanys i les pèrdues d'energia tèrmica de l'edifici, i el resultat que se n'obté és una potència calorífica neta, $\dot{q}_{net}$, que pot ser positiva o negativa:

$$\dot{q}_{net} = -\dot{q}_{emb} - \dot{q}_{vent} + \dot{q}_{sol} + \dot{q}_{cal} + \dot{q}_{gen} + \dot{q}_{alt} \quad (3.10)$$

amb el significat següent dels termes que apareixen a l'equació de balanç:

- $\dot{q}_{emb}$ és la potència calorífica intercanviada entre l'aire interior i l'aire exterior a través dels tancaments externs de l'edifici,
- $\dot{q}_{vent}$ és la potència calorífica intercanviada entre l'aire interior i l'aire exterior per ventilació,
- $\dot{q}_{sol}$ correspon als guanys de potència deguts a la radiació solar,



- $\dot{q}_{\text{cal}}$ és la potència de calefacció o refrigeració (en aquest darrer cas, caldria canviar-li el signe),
- $\dot{q}_{\text{gen}}$ és la potència deguda a la generació de calor a l'interior de l'edifici d'origen diferent a la calefacció o la refrigeració (per exemple, per la presència de persones o animals, pel funcionament de maquinària, etc.), i
- $\dot{q}_{\text{alt}}$ correspon a altres fonts de calor eventuals, no incloses en els termes anteriors.

A l'equació 3.10, s'ha adoptat un signe negatiu (pèrdua de calor) per als dos primers termes del segon membre, corresponents a l'intercanvi de calor a través dels tancaments externs i degut a la ventilació. De fet, ambdós termes haurien de canviar-se de signe si la temperatura de l'aire exterior fos superior a la de l'aire interior, situació típica d'estiu (clima continental, hemisferi nord) per a un edifici aclimatat.

El resultat de l'equació de balanç energètic d'un edifici pot ser de dos tipus:

- $\dot{q}_{\text{net}} = 0$,
- $\dot{q}_{\text{net}} \neq 0$.

En el primer cas, l'edifici es troba en estat estacionari i la seva temperatura és estable. En el segon cas, hi haurà una evolució tèrmica en què la temperatura de l'aire interior tendirà a la de l'aire exterior, evolució en la qual la inèrcia tèrmica de l'edifici compleix un paper determinant.

A continuació, veiem amb més detall alguns dels termes que intervenen en l'equació de balanç energètic.

3.4. Radiació solar

Quan la radiació solar incideix sobre un edifici, es troba amb superfícies gairebé transparents (finestres, forats) i amb altres que no ho són. La potència guanyada per l'edifici es pot considerar la suma de la potència transmesa pel primer tipus de superfície més la potència absorbida pels altres tipus:

$$\dot{q}_{\text{sol}} = \dot{q}_{\text{sol,t}} + \dot{q}_{\text{sol,a}} \quad (3.11)$$

Com hem vist al capítol anterior, els vidres són gairebé transparents a la radiació solar, tant en la banda visible com en la de l'infraroig pròxim, on es concentra el gruix de la seva potència. La radiació que hi incideix és transmesa cap a l'interior de l'edifici amb una transmissió $\tau \sim 0,9 - 1$ i suposa un guany de potència per a l'edifici:

$$\dot{q}_{\text{sol,t}} = \tau \cdot A_{\text{eff,t}} \cdot I \quad (3.12)$$

on $A_{\text{eff,t}}$ és l'àrea efectiva que presenten les finestres i els forats en la direcció dels raigs solars, i I és la intensitat de la radiació solar a nivell de terra. L'àrea efectiva es diferencia de l'àrea física de les finestres i els forats, A_t , perquè té en compte la seva orientació en relació amb els raigs solars, i es pot calcular com: $A_{\text{eff,t}} = A_t \cdot \cos \theta$, essent θ l'angle entre la direcció dels raigs solars i la direcció normal a la superfície. Òbviament,

aquest angle varia amb l'hora del dia i amb l'època de l'any. A més, la intensitat de la radiació solar depèn d'alguns factors ambientals, com la presència de núvols.

La radiació solar absorbida per superfícies no transparents de l'edifici provoca un augment de la temperatura superficial exterior i, en conseqüència, una reducció del flux de calor des de l'interior cap a l'exterior en una situació típica d'hivern. Aquesta reducció del flux de calor, la podem incorporar al balanç energètic com la potència calorífica $\dot{q}_{\text{sol,a}}$, que apareix a l'equació 3.11 i que és una fracció de la potència de la radiació solar absorbida per les superfícies (similar a l'equació 3.12):

$$\dot{q}_{\text{sol,a}} = \alpha \cdot A_{\text{eff,a}} \cdot I \cdot \frac{R_{\text{se}}}{R} \quad (3.13)$$

on $A_{\text{eff,a}}$ és l'àrea efectiva de les superfícies que reben la radiació solar, $A_{\text{eff,a}} = A_a \cdot \cos \theta$, A_a és l'àrea física il·luminada per la radiació solar i α és l'absorbància d'aquestes superfícies en relació amb la radiació solar. El factor R_{se} / R reflecteix l'esmentat increment de la temperatura superficial exterior en relació amb el salt tèrmic total entre T_{ai} i T_{ac} (apèndix D). El perfil tèrmic a l'interior del mur es pot veure alterat per la regulació del flux de calor al seu interior, com a conseqüència de la radiació solar absorbida. Normalment, aquest efecte no es té en compte en calcular el perfil tèrmic, per raó de la naturalesa intrínsecament transitòria de la radiació solar.

3.5. Coeficient global de transmissió tèrmica

3.5.1. Embolcall tèrmic

L'*embolcall tèrmic d'un edifici* és el conjunt de superfícies (parets, finestres, etc.) que separen l'espai interior habitable de l'espai no habitable. Si no diem el contrari, en endavant farem dues simplificacions per tal de calcular $\dot{q}_{\text{emb}}$ en funció de les propietats tèrmiques de les superfícies de l'embolcall tèrmic:

1. Suposarem que tot l'espai interior és habitable i que l'aire s'hi troba a una temperatura uniforme, T_{ai} .
2. Suposarem que la temperatura a l'exterior de les superfícies de l'embolcall tèrmic també és uniforme i val T_{ac} .

La primera aproximació fallarà quan l'edifici contingui algun espai no condicionat (per exemple, un garatge, un traster, etc.). En aquest cas, pot ser necessari determinar la temperatura de l'espai no condicionat, i utilitzar aquesta temperatura per calcular el flux de calor entre l'espai condicionat i el no condicionat. Aquest flux de calor es produirà a través de la superfície de separació entre ambdós espais. La segona simplificació pot ser discutible pel que fa a l'exterior del terra de l'edifici, la temperatura del qual pot diferir de la de l'aire exterior, motiu pel qual inicialment només en fem la primera simplificació.

Imaginem que l'embolcall tèrmic està integrat per un conjunt de N tancaments diferents, cadascun d'ells d'àrea A_k i transmitància tèrmica U_k , on ara k és un índex que identifica cada tancament. Observeu que cadascun d'aquests tancaments pot estar format



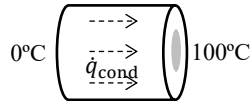
per un nombre de capes de diferents materials i que la seva transmitància tèrmica s'hauria de calcular per aplicació de les equacions 3.4 i 3.2. La potència calorífica intercanviada a través de cadascuna d'aquestes superfícies, $\dot{q}_k$, ve donada per l'equació 3.3, i la potència calorífica total n'és la suma:

$$\dot{q}_{\text{emb}} = \sum_{k=1}^N \dot{q}_k = \sum_{k=1}^N [A_k \cdot U_k \cdot (T_{\text{ai}} - T_k)] \quad (3.14)$$

on T_k és la temperatura exterior a la superfície k . En el cas que estudiem aquí, aquesta temperatura serà la temperatura de l'aire exterior, $T_k = T_{\text{ae}}$, excepte al terra, on la temperatura pot ser diferent.

Exemple 3.4

Una barra de 2,0 m de longitud està formada per un nucli massís d'acer d'1,0 cm de diàmetre, envoltat per un recobriment de coure que té un diàmetre exterior de 2,0 cm. La superfície exterior de la barra està aïllada tèrmicament, de manera que la calor es transmet entre els extrems, un dels quals es manté a 0°C mentre que l'altre es manté a 100°C. Determineu la potència calorífica total que condueix la barra.



Dades: $k_{\text{Cu}} = 401 \text{ W/m}\cdot\text{K}$; $k_{\text{Fe}} = 46 \text{ W/m}\cdot\text{K}$

Solució. La calor es condueix independentment a través del nucli d'acer i del recobriment de coure; per tant, la potència calorífica total, $\dot{q}_{\text{cond}}$, és la suma de les corresponents a les dues seccions, cadascuna de les quals es pot calcular amb l'equació 2.3:

$$\dot{q}_{\text{cond}} = A_{\text{Fe}} \cdot k_{\text{Fe}} \cdot \frac{\Delta T}{e} + A_{\text{Cu}} \cdot k_{\text{Cu}} \cdot \frac{\Delta T}{e} = A_{\text{Fe}} \cdot U_{\text{Fe}} \cdot \Delta T + A_{\text{Cu}} \cdot U_{\text{Cu}} \cdot \Delta T$$

que coincideix amb l'equació 3.14 i on $e = 2,0 \text{ m}$ i $\Delta T = 100^\circ\text{C}$.

Les transmitàncies tèrmiques són: $U_{\text{Fe}} = \frac{k_{\text{Fe}}}{e} = 23 \text{ W/m}^2\cdot\text{K}$, $U_{\text{Cu}} = \frac{k_{\text{Cu}}}{e} = 201 \text{ W/m}^2\cdot\text{K}$, i les àrees de les seccions d'acer i coure: $A_{\text{Fe}} = \pi \cdot r_{\text{Fe}}^2 = \pi \cdot 0,0050^2 \text{ m}^2 = 0,0000785 \text{ m}^2$, $A_{\text{Cu}} = \pi \cdot r_{\text{Cu}}^2 - A_{\text{Fe}} = \pi \cdot 0,010^2 \text{ m}^2 - 0,0000785 \text{ m}^2 = 0,000236 \text{ m}^2$.

Finalment, $\dot{q}_{\text{cond}} = 4,9 \text{ W}$.

Per tant, la resposta és: 4,9 W

Pel que fa a l'aplicabilitat de l'equació 3.14, també s'aplica la mateixa salvaguarda que es va fer a la secció 3.2 sobre les superfícies de tancament de diferents composicions que estan en contacte tèrmic entre si, i les seves conseqüències sobre el càlcul de perfil tèrmic

i la resistència tèrmica de cadascun dels tancaments. Si pot haver-hi flux de calor transversal als murs, l'equació 3.14 proporciona un límit inferior a la potència calorífica transmesa a través de l'embolcall tèrmic.

3.5.2. Ponts tèrmics

Els ponts tèrmics augmenten el flux de calor a través de l'embolcall tèrmic, usualment perquè es trenca la integritat de l'aïllament tèrmic, per exemple, amb una biga que connecta l'interior amb l'exterior. La fenomenologia dels ponts tèrmics és molt variada i poden correspondre a elements que geomètricament són molt petits (superficials, lineals o, fins i tot, gairebé puntuals) però que, en no haver-hi un aïllament tèrmic efectiu, condueixen la calor eficientment. En presència de ponts tèrmics, cal modificar el càlcul de la potència calorífica transmesa a través de l'embolcall tèrmic (equació 3.14), afegint-hi la potència perduda a través dels ponts, $\dot{q}_{\text{ponts}}$:

$$\dot{q}_{\text{emb}} = \sum_{k=1}^N [A_k \cdot U_k \cdot (T_{\text{ai}} - T_k)] + \dot{q}_{\text{ponts}}$$

En les properes seccions, negligirem el terme $\dot{q}_{\text{ponts}}$, llevat que diguem el contrari explícitament.

3.5.3. Transmissió tèrmica global

Si suposem que la temperatura a l'exterior de totes les superfícies de l'embolcall tèrmic és uniforme i igual a la temperatura de l'aire exterior, podem treure la diferència de temperatures, $T_{\text{ai}} - T_{\text{ae}}$, factor comú de l'últim membre de l'equació 3.14, i la potència calorífica total a través de l'embolcall tèrmic queda com:

$$\dot{q}_{\text{emb}} = (T_{\text{ai}} - T_{\text{ae}}) \cdot \sum_{k=1}^N (A_k \cdot U_k)$$

Definim la *transmissió tèrmica global* de l'edifici, U_g , mitjançant:

$$U_g = \frac{1}{A} \cdot \sum_{k=1}^N (A_k \cdot U_k) \quad (3.15)$$

on $A = \sum_{k=1}^N A_k$ és l'àrea total de l'embolcall tèrmic de l'edifici.

Comparant les dues equacions anteriors, queda clara la forma de calcular la potència calorífica total a través de l'embolcall tèrmic en funció de la transmissió tèrmica global:

$$\dot{q}_{\text{emb}} = A \cdot U_g \cdot (T_{\text{ai}} - T_{\text{ae}}) \quad (3.16)$$

El membre dret de l'equació 3.15 correspon a una *mitjana ponderada* de les transmissió tèrmiques de les superfícies de l'embolcall tèrmic. En aquesta mitjana ponderada, la rellevància de cada transmissió tèrmica depèn de la seva àrea. La transmissió tèrmica global s'aproximarà més a la de les superfícies de l'embolcall tèrmic que tinguin una àrea més gran.

Exemple 3.5

Determineu la transmitància tèrmica global i el flux de calor a través de les parets exteriors d'una casa unifamiliar de planta quadrada que tingui les característiques que es detallen a continuació. Les parets ocupen una superfície total de 140 m² i són de 30 cm de formigó lleuger recobert a l'interior per una capa de pintura de resistència tèrmica negligible. Les dues parets, orientades cap al nord i a cap l'est, es recobreixen, a més, a l'exterior amb material aïllant tèrmic. A part, hi ha 30 m² de superfície vidrada, repartits uniformement entre les quatre orientacions de les parets, i una porta d'1,5 m² a la paret est. El sostre té una superfície de 160 m² i es considera que el terra no intervé en la transmissió de calor. La temperatura de l'aire interior és de 22°C i la de l'aire exterior, de 2°C.

Dades: $U_{\text{vidre}} = 5,00 \text{ W/m}^2 \cdot ^\circ\text{C}$, $U_{\text{portes}} = 1,5 \text{ W/m}^2 \cdot ^\circ\text{C}$, $U_{\text{sostre}} = 0,750 \text{ W/m}^2 \cdot ^\circ\text{C}$; $R_{\text{si}} = 0,12 \text{ m}^2 \cdot ^\circ\text{C/W}$; resistència tèrmica superficial exterior de les parets orientades al nord i a l'est, $R_{\text{se}} = 0,05 \text{ m}^2 \cdot ^\circ\text{C/W}$, i de les parets orientades al sud i a l'oest, $R'_{\text{se}} = 0,10 \text{ m}^2 \cdot ^\circ\text{C/W}$; $k_{\text{formigó}} = 2,0 \text{ W/m} \cdot ^\circ\text{C}$; $R_{\text{aïllant}} = 0,75 \text{ m}^2 \cdot ^\circ\text{C/W}$.

Solució. Com a pas previ abans de poder aplicar l'equació 3.15 per calcular la transmitància tèrmica global i l'equació 3.16 per determinar la potència calorífica, és necessari obtenir les transmitàncies tèrmiques i les àrees ocupades per cada part del tancament. Com es diu a l'enunciat, el terra no intervé en la transmissió de calor i, per tant, d'ara endavant el negligim.

La resistència tèrmica de les parets nord i est és:

$$R_{\text{N+E}} = R_{\text{si}} + R_{\text{se}} + \frac{e_{\text{formigó}}}{k_{\text{formigó}}} + R_{\text{aïllant}} = 1,07 \text{ m}^2 \cdot ^\circ\text{C/W}$$

i la de les parets sud i oest:

$$R_{\text{S+O}} = R_{\text{si}} + R'_{\text{se}} + \frac{e_{\text{formigó}}}{k_{\text{formigó}}} = 0,37 \text{ m}^2 \cdot ^\circ\text{C/W}$$

Les respectives transmitàncies tèrmiques són:

$$U_{\text{N+E}} = \frac{1}{R_{\text{N+E}}} = 0,935 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}; \quad U_{\text{S+O}} = \frac{1}{R_{\text{S+O}}} = 2,70 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$$

Les àrees del sostre, el vidre i les portes es troben directament a l'enunciat. Les de les parets, les hem de deduir. Les parets nord i est ocupen 70 m², menys 15 m² de vidres i 1,5 m² de la porta: $A_{\text{N+E}} = 53,5 \text{ m}^2$. A les parets sud i oest, no s'ha de descomptar l'àrea de la porta:

$$A_{\text{S+O}} = 55 \text{ m}^2.$$

Per acabar de trobar la transmitància tèrmica global, pot ser útil organitzar totes les dades en una taula com la següent:

	$A \text{ (m}^2\text{)}$	$U \text{ (W/m}^2 \cdot \text{K)}$	$A \cdot U \text{ (W/m}^2 \cdot \text{K)}$
parets N+E	53,5	0,935	50,0
parets S+O	55	2,70	148,5
sostre	160	0,750	120,0
vidres	30	5,00	150,0
porta	1,5	1,5	2,3
<i>sumes</i>	300,0		470,8



Amb aquests valors, l'equació 3.15 ens proporciona la transmitància tèrmica global:

$$U_g = \frac{1}{A} \cdot \sum_{k=1}^N (A_k \cdot U_k) = \frac{470,8}{300,0} = 1,57 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K},$$

valor que correspon a un aïllament tèrmic normal.

El flux de calor total a través de l'embolcall tèrmic és:

$$\dot{q}_{emb} = A \cdot U_g \cdot (T_{ai} - T_{ae}) = 300 \text{ m}^2 \cdot 1,57 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}} \cdot 20^\circ \text{C} = 9.420 \text{ W}$$

Per tant, la resposta és: transmitància tèrmica global = 1,6 W/m²·K, i flux de calor = 9,4 kW.

La *qualitat de l'aïllament tèrmic d'un edifici* es pot classificar atenent el valor de la seva transmitància tèrmica global:

- $U_g \leq 1 \rightarrow$ aïllament tèrmic bo
- $1 < U_g \leq 2 \rightarrow$ aïllament tèrmic normal
- $U_g > 2 \rightarrow$ aïllament tèrmic deficient

3.6. Ventilació

La renovació de l'aire o ventilació implica la substitució d'un volum d'aire interior per la mateixa quantitat d'aire exterior. Si la temperatura de l'aire exterior és diferent a la de l'aire interior, i suposant que la pressió atmosfèrica no canvia, es produeix un intercanvi de calor igual a la variació d'entalpia de l'aire, descrita per l'equació 1.10. La variació d'entalpia està en funció de la diferència de temperatures, $T_{ai} - T_{ae}$, i del volum d'aire interior, V :

$$Q_t = \Delta H = C_p \cdot V \cdot (T_{ai} - T_{ae}) \quad (3.17)$$

on $C_p \approx 1.300 \text{ J/m}^3 \cdot \text{K}$ és la *capacitat calorífica de l'aire per unitat de volum*. El valor atribuït a C_p és aproximat, ja que pot variar amb la temperatura i amb la humitat.

La potència calorífica associada a la ventilació, la podem obtenir dividint l'equació 3.17 pel *temps que triga a completar-se la renovació de tot l'aire interior*, que representarem per t_{vent} :

$$\dot{q}_{vent} = C_p \cdot \frac{V}{t_{vent}} \cdot (T_{ai} - T_{ae}) \quad (3.18)$$

Normalment, es treballa amb l'invers del temps de renovació, $n \equiv 1/t_{vent}$, anomenat *índex de renovació de l'aire*. Les unitats de n són s⁻¹, tot i que moltes vegades es dona en h⁻¹ (nombre de vegades que es renova completament l'aire interior cada hora) i cal fer el corresponent canvi d'unitats. En alguns textos, s'atribueix a C_p un valor d'entre 0,34 i 0,37. En aquests casos, s'estan utilitzant unitats de W·h per a l'energia. Tenint en compte que $1 \text{ W} \cdot \text{h} = 3.600 \text{ J}$, se n'obté (aproximadament) el valor de C_p que hem donat abans.

Tanmateix, utilitzar $C_p = 0,34-0,37 \text{ W}\cdot\text{h}/\text{m}^3\cdot\text{K}$ té l'avantatge que n s'ha d'expressar en h^{-1} , que és la unitat en què s'acostuma a trobar en la normativa.

En definitiva, l'expressió final que pren la *potència calorífica associada a la ventilació* és:

$$\dot{q}_{\text{vent}} = C_p \cdot n \cdot V \cdot (T_{\text{ai}} - T_{\text{ae}}) \quad (3.19)$$

3.7. Coeficient global de pèrdues d'un habitatge

La *potència calorífica total intercanviada entre l'aire interior i l'aire exterior en un edifici, tant per transmissió a través dels tancaments com per ventilació*, és:

$$\dot{q}_{\text{emb}} + \dot{q}_{\text{vent}} = G \cdot V \cdot (T_{\text{ai}} - T_{\text{ae}}) \quad (3.20)$$

En aquesta equació, G és l'anomenat *coeficient global de pèrdues* o coeficient volumètric de pèrdues d'un edifici. Aquesta magnitud permet resumir el comportament tèrmic de l'edifici tenint en compte la transmissió de calor i la ventilació. Les unitats de G són $\text{W}/\text{m}^3\cdot\text{K}$.

Comparant l'equació 3.20 –que és, de fet, una definició de G – amb les equacions 3.16 i 3.19, podem deduir la *dependència de G en les propietats dels materials utilitzats en els tancaments de l'edifici*:

$$G = n \cdot C_p + \frac{A}{V} U_g \quad (3.21)$$

Exemple 3.6

Determineu el coeficient global de pèrdues de la casa unifamiliar de l'exemple 3.5, sabent que el volum d'aire és de 400 m^3 i que l'aire interior es renova completament cada 180 minuts.

Solució. Fem servir el valor de $C_p = 0,37 \text{ W}\cdot\text{h}/\text{m}^3\cdot\text{K}$; per tant, l'índex de renovació de l'aire és l'invers del temps de renovació expressat en hores ($180 \text{ min} = 3,00 \text{ h}$): $n = 1/3 \text{ h}^{-1}$. Podem calcular el coeficient global de pèrdues a partir de l'equació 3.21:

$$G = n \cdot C_p + \frac{A}{V} U_g = \frac{1}{3 \text{ h}} \cdot 0,37 \frac{\text{W}\cdot\text{h}}{\text{m}^3\cdot\text{K}} + \frac{300 \text{ m}^2}{400 \text{ m}^3} \cdot 1,57 \frac{\text{W}}{\text{m}^2\cdot\text{K}} = 1,30 \text{ W}/\text{m}^3\cdot\text{K}.$$

Tot i que no es demana a l'enunciat, podem calcular la potència calorífica total intercanviada a través dels embolcalls i per ventilació, aplicant l'equació 3.20:

$$\dot{q}_{\text{emb}} + \dot{q}_{\text{vent}} = G \cdot V \cdot (T_{\text{ai}} - T_{\text{ae}}) = 1,30 \frac{\text{W}}{\text{m}^3\cdot\text{K}} \cdot 400 \text{ m}^3 \cdot 20^\circ\text{C} = 10,4 \text{ kW},$$

que és una mica més gran que el resultat de l'exemple 3.5. És a dir, la ventilació només és responsable d'aproximadament un 10% de les pèrdues de calor de la casa.

Per tant, la resposta és: $1,3 \text{ W}/\text{m}^3\cdot\text{K}$.

Grau·dia

El grau·dia és una magnitud que facilita la previsió a llarg termini del consum energètic necessari per mantenir la temperatura interior d'un edifici. Com hem vist abans, la potència calorífica intercanviada per l'aire interior i l'aire exterior en un edifici depèn de la diferència de temperatures. La calor total intercanviada en un període determinat de temps es pot obtenir integrant l'equació 3.20:

$$Q_{\text{emb}} + Q_{\text{vent}} = G \cdot V \cdot \int (T_{\text{ai}} - T_{\text{ae}}) \cdot dt$$

A mitjà i a llarg termini, la temperatura de l'aire exterior varia de forma més o menys previsible en funció de la zona climàtica on es troba l'edifici. Pel que fa a la temperatura de l'aire interior, usualment es pren un valor de referència constant per avaluar-ne la integral, una temperatura de consigna, T_{cons} :

$$Q_{\text{emb}} + Q_{\text{vent}} \approx G \cdot V \cdot \int (T_{\text{cons}} - T_{\text{ae}}) \cdot dt$$

i la integral que queda es pot obtenir de les bases de dades proporcionades per les estacions meteorològiques locals. Precisament, el resultat de la integral són els graus·dia. Quan la temperatura exterior és inferior a la temperatura de consigna, es parla de graus·dia de calefacció (*heating degree days* o HDD) i, quan la temperatura exterior és més gran que la de consigna, parlem de graus·dia de refrigeració (*cooling degree days* o CDD):

$$T_{\text{cons}} > T_{\text{ae}} ? \begin{cases} \text{sí} \rightarrow Q_{\text{emb}} + Q_{\text{vent}} \approx G \cdot V \cdot \text{HDD} \\ \text{no} \rightarrow Q_{\text{emb}} + Q_{\text{vent}} \approx -G \cdot V \cdot \text{CDD} \end{cases}$$

Com a exemple, a la taula 3.1 podeu veure els graus·dia de l'any 2011 a l'estació meteorològica de l'Escola Tècnica Superior d'Arquitectura del Vallès, per a una temperatura de referència $T_{\text{cons}} = 18,3^\circ\text{C}$.

Taula 3.1.
Graus·dia de calefacció (HDD) i de refrigeració (CDD) a l'Escola Tècnica Superior d'Arquitectura del Vallès durant l'any 2011, agregats per mesos i per a una temperatura de consigna de $18,3^\circ\text{C}$

	Gener	Febrer	Març	Abril	Maig	Juny
HDD	371	288	255	119	70	34
CDD	0	0	1	20	47	78
	Juliol	Agost	Setembre	Octubre	Novembre	Desembre
HDD	7	3	21	11	175	326
CDD	95	103	95	14	0	0

3.8. Temperatura d'equilibri

Podem substituir l'expressió 3.20 a l'equació de balanç energètic d'un edifici (equació 3.10):

$$\dot{q}_{\text{net}} = -G \cdot V \cdot (T_{\text{ai}} - T_{\text{ae}}) + \dot{q}_{\text{sol}} + \dot{q}_{\text{cal}} + \dot{q}_{\text{gen}} + \dot{q}_{\text{alt}}$$

i així mostrar la dependència explícita del flux net de calor, $\dot{q}_{\text{net}}$, en la temperatura de l'aire interior. Si totes les altres quantitats que hi apareixen són independents d'aquesta

temperatura, existirà un valor de T_{ai} pel qual s'anul·larà el segon membre. Aquest valor és la *temperatura d'equilibri*, T_{eq} :

$$\dot{q}_{net} = 0 \Rightarrow T_{eq} = T_{ae} + \frac{1}{GV} (\dot{q}_{sol} + \dot{q}_{cal} + \dot{q}_{gen} + \dot{q}_{alt}) \quad (3.22)$$

És a dir, *si l'aire interior d'un edifici es troba a la temperatura d'equilibri, aquesta temperatura serà estable i l'edifici estarà en condicions estacionàries*. Si, per contra, l'aire interior és més fred o més calent que la temperatura d'equilibri, $T_{eq} \neq T_{ai}$, es produirà una deriva tèrmica que anirà acostant progressivament la temperatura de l'aire interior a la temperatura d'equilibri. En aquest cas, el flux net de calor es pot calcular mitjançant:

$$\dot{q}_{net} = GV (T_{eq} - T_{ai})$$



3.9. Problemes resolts

P3.1 Un mur consta de tres capes de gruixos de 5,0 cm, 4,0 cm i 6,0 cm, i conductivitats tèrmiques de 4,0 W/m·K, 8,0 W/m·K i 12 W/m·K, respectivament. Si es vol substituir per un únic material X de 15 cm de gruix, quina ha de ser la conductivitat tèrmica d'aquest material?

Solució:

Per aconseguir el mateix aïllament tèrmic, la resistència tèrmica total ha de ser la mateixa en ambdós casos. La resistència tèrmica del mur de tres capes és la suma de les resistències tèrmiques de cada capa:

$$R = R_1 + R_2 + R_3 = \frac{e_1}{k_1} + \frac{e_2}{k_2} + \frac{e_3}{k_3} = 0,0225 \text{ m}^2 \cdot \text{K} / \text{W}$$

Per tant, la conductivitat tèrmica del material X ha de ser:

$$k_x = \frac{e_x}{R} = \frac{0,15 \text{ m}}{0,0225 \text{ m}^2 \cdot \text{K} / \text{W}} = 6,7 \text{ W/m} \cdot \text{K}$$

P3.2 Les parets d'una caldera industrial estan formades pels materials següents:

	e (m)	k (W/m·°C)
totxana refractària	0,3	2
fibra de vidre	0,040	0,040

La superfície total del recipient és de 2,0 m² i la temperatura ambiental exterior, de 20,0°C. Les resistències superficials interior i exterior són, respectivament, 0,11 i 0,060 m²·°C/W. Sabent que la caldera conté vapor d'aigua a temperatura $T_{\text{vap}} = 300$ °C, calculeu:

- El coeficient de transmissió tèrmica de les parets de la caldera.
- El flux calorífic total que es perd per la caldera.
- La distribució de temperatures a les superfícies i a les interfícies de les capes de què està format el recipient.

Solució:

- a) Primer, calculem la resistència tèrmica total de les parets com la suma de les resistències tèrmiques superficials, de la totxana i de la fibra de vidre:

$$R = R_{\text{se}} + R_{\text{si}} + \frac{e_1}{k_1} + \frac{e_2}{k_2} = 0,06 + 0,11 + \frac{0,040}{0,040} + \frac{0,3}{2} = 1,32 \text{ m}^2 \cdot \text{K} / \text{W}$$

La transmitància tèrmica total és la inversa de la resistència tèrmica total:

$$U = \frac{1}{R} = 0,758 \approx 0,76 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$$

- b) El flux calorífic a través de les parets de la caldera, el podem calcular com:



$$\dot{q} = AU \cdot \Delta T = 2,0 \text{ m}^2 \cdot 0,758 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}} \cdot 280^\circ \text{C} = 420 \text{ W}$$

- c) Hem de calcular les temperatures superficials, T_{se} i T_{si} , i a la separació entre la totxana i la fibra, T_1 . Seguint el mètode explicat a la secció 3.2:

$$T_{\text{se}} = T_{\text{ac}} + \frac{R_{\text{se}}}{R} (T_{\text{vap}} - T_{\text{ac}}) = 20,0^\circ \text{C} + \frac{0,060}{1,32} \cdot 280^\circ \text{C} = 32,73^\circ \text{C} \approx 33^\circ \text{C}$$

$$T_1 = T_{\text{se}} + \frac{R_1}{R} (T_{\text{vap}} - T_{\text{ac}}) = 32,73^\circ \text{C} + \frac{1,0}{1,32} \cdot 280^\circ \text{C} = 244,85^\circ \text{C} \approx 240^\circ \text{C}$$

$$T_{\text{si}} = T_1 + \frac{R_2}{R} (T_{\text{vap}} - T_{\text{ac}}) = 244,85^\circ \text{C} + \frac{0,15}{1,32} \cdot 280^\circ \text{C} = 276,67^\circ \text{C} \approx 280^\circ \text{C}$$

L'equació de comprovació ens permet estimar la precisió de les temperatures obtingudes:

$$T_{\text{vap}} - T_{\text{si}} = 300 - 276,67 = 23,33^\circ \text{C},$$

$$\frac{R_{\text{si}}}{R} (T_{\text{vap}} - T_{\text{ac}}) = \frac{0,11}{1,32} \cdot 280^\circ \text{C} = 23,33^\circ \text{C},$$

valors que confirmen els resultats anteriors.

P3.3 Un *resort* turístic d'un país nòrdic està construït completament amb gel. Les parets exteriors són de 100 cm de gruix i ocupen una superfície de 110 m².

- Determineu el flux de calor a través d'aquestes parets si la temperatura interior és de -5°C i l'exterior, de -25°C, i les resistències tèrmiques superficials interior i exterior són, respectivament, de 0,15 i 0,05 m²·K/W.
- Imagineu que el *resort* es manté a la temperatura constant de -5°C gràcies al funcionament d'una bomba tèrmica reversible que intercanvia calor amb l'interior i amb l'exterior, a la temperatura també constant de -25°C. Determineu el ritme de degradació de l'energia.
- Si, en comptes de fer servir una bomba tèrmica reversible, el *resort* es manté a temperatura constant mitjançant calefactores elèctrics, quin serà el ritme de degradació de l'energia?

Dada: coeficient de conductivitat tèrmica del gel = 0,60 W/m·K

Solució:

- a) La resistència tèrmica de les parets és:

$$R = R_{\text{se}} + R_{\text{si}} + \frac{e}{k} = 0,05 + 0,15 + \frac{1}{0,60} = 1,87 \text{ m}^2 \cdot \text{K/W}$$

i el flux de calor:

$$\dot{q} = A \cdot \frac{\Delta T}{R} = 1,2 \text{ kW}$$

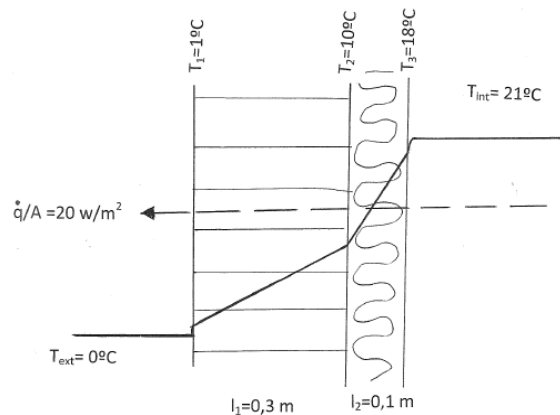
- b) El funcionament d'una bomba tèrmica *reversible* no augmenta l'entropia de l'univers. Així doncs, la variació d'entropia de l'univers és deguda únicament a la calor intercanviada a través de les parets per l'aire interior i l'exterior. El ritme de degradació de l'energia és (secció 1.7):

$$\dot{E}_{n.u.} = T_{\min} \cdot \Delta \dot{S}_u = T_{ac} \cdot \left(\frac{\dot{q}}{T_{ac}} - \frac{\dot{q}}{T_{ai}} \right) = 88 \text{ W}$$

- c) El funcionament dels calefactores elèctrics ha de compensar la calor perduda cap a l'exterior, amb el resultat que l'entropia de l'aire interior no varia. L'increment d'entropia de l'univers és degut únicament a la calor rebuda per l'aire exterior:

$$\dot{E}'_{n.u.} = T_{\min} \cdot \Delta \dot{S}_u = T_{ac} \cdot \frac{\dot{q}}{T_{ac}} = \dot{q} = 1,2 \text{ kW}$$

P3.4 Es mesura experimentalment el flux de calor en el tancament de la figura, amb un resultat de $\dot{q}/A = 20 \text{ W/m}^2$. Determineu les conductivitats tèrmiques dels dos materials i les resistències tèrmiques superficials externa i interna.



Solució:

L'equació 3.5 ens proporciona una relació entre el flux de calor, les resistències tèrmiques i el salt de temperatura en cada capa:

$$\frac{\dot{q}}{A} = \frac{\Delta T_j}{R_j} = \frac{\Delta T_s}{R_s}$$

Per la figura, podem deduir que el salt tèrmic entre l'aire exterior i la superfície exterior és de $\Delta T_{se} = 1^\circ\text{C}$; a través de la capa 1 és de $\Delta T_1 = 9^\circ\text{C}$; a través de la capa 2 és de $\Delta T_2 = 8^\circ\text{C}$, i entre la superfície interior i l'aire interior és de $\Delta T_{si} = 3^\circ\text{C}$. Podem obtenir fàcilment les resistències tèrmiques que volem:



$$R_{se} = \frac{\Delta T_{se}}{\left(\frac{\dot{q}}{A}\right)} = 0,05 \text{ m}^2 \cdot \text{K/W}; \quad R_{si} = \frac{dT_{si}}{\left(\frac{\dot{q}}{A}\right)} = 0,15 \text{ m}^2 \cdot \text{K/W} \approx 0,2 \text{ m}^2 \cdot \text{K/W};$$

$$R_1 = \frac{\Delta T_1}{\left(\frac{\dot{q}}{A}\right)} = 0,45 \text{ m}^2 \cdot \text{K/W}; \quad R_2 = \frac{\Delta T_2}{\left(\frac{\dot{q}}{A}\right)} = 0,40 \text{ m}^2 \cdot \text{K/W}$$

Finalment, les conductivitats tèrmiques dels materials de les dues capes són:

$$k_1 = \frac{e_1}{R_1} = \frac{0,3}{0,45} = 0,7 \text{ W/m} \cdot \text{K} \quad \text{i} \quad k_2 = \frac{e_2}{R_2} = \frac{0,1}{0,40} = 0,3 \text{ W/m} \cdot \text{K}$$

P3.5 Una façana consta de dos elements: la paret ($U_{\text{paret}} = 0,60 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$) i el vidre ($U_{\text{vidre}} = 6,0 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$). Quin hauria de ser el percentatge de superfície vidrada perquè el coeficient de transmissió tèrmica de la façana fos de $U = 1,50 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$?

Solució:

El coeficient de transmissió tèrmica de la façana és la mitjana ponderada dels coeficients de transmissió de la paret i el vidre (equació 3.15):

$$U = \frac{(A_{\text{paret}} \cdot U_{\text{paret}} + A_{\text{vidre}} \cdot U_{\text{vidre}})}{A} = \frac{A_{\text{paret}}}{A} \cdot U_{\text{paret}} + \frac{A_{\text{vidre}}}{A} \cdot U_{\text{vidre}}$$

tenint en compte que la superfície total és la suma de les superfícies de la paret i el vidre, podem escriure: $A_{\text{paret}} = A - A_{\text{vidre}}$, i traslladar-ho a l'equació anterior:

$$U = \frac{A - A_{\text{vidre}}}{A} \cdot U_{\text{paret}} + \frac{A_{\text{vidre}}}{A} \cdot U_{\text{vidre}} \Rightarrow$$

$$U = U_{\text{paret}} + \frac{A_{\text{vidre}}}{A} \cdot (U_{\text{vidre}} - U_{\text{paret}})$$

en què l'única incògnita és la fracció de superfície vidrada. El resultat és:

$$\frac{A_{\text{vidre}}}{A} = \frac{U - U_{\text{paret}}}{U_{\text{vidre}} - U_{\text{paret}}} = 0,17,$$

que equival a dir que el percentatge de superfície vidrada hauria de ser del 17 %.

P3.6 Un habitacle de 264 m^3 de volum i amb una àrea externa de 200 m^2 té un índex de renovació de l'aire de $0,50 \text{ h}^{-1}$. Quan la temperatura exterior és de -1°C , la calefacció ha de proporcionar 15 kW per mantenir la temperatura interior a 23°C . Determineu el coeficient de transmissió tèrmica global de l'edifici.

Nota: Suposeu que l'única font de calor a l'interior de l'habitable és la calefacció.

**Solució:**

En aquest problema, hi podem aplicar l'equació 3.10, tot suposant que el guany o la pèrdua neta de calor de l'habitable són nuls, $\dot{q}_{\text{net}} = 0$:

$$\dot{q}_{\text{emb}} + \dot{q}_{\text{vent}} = \dot{q}_{\text{sol}} + \dot{q}_{\text{cal}} + \dot{q}_{\text{gen}} + \dot{q}_{\text{alt}}$$

A més, segons l'enunciat:

$$\dot{q}_{\text{sol}} = \dot{q}_{\text{gen}} = \dot{q}_{\text{alt}} = 0 \Rightarrow \dot{q}_{\text{emb}} + \dot{q}_{\text{vent}} = \dot{q}_{\text{cal}} = 15 \text{ kW}$$

La potència calorífica associada a la ventilació ve donada per l'equació 3.19:

$$\dot{q}_{\text{vent}} = C_p \cdot n \cdot V \cdot (T_{\text{ai}} - T_{\text{ae}}) = 0,37 \frac{\text{W} \cdot \text{h}}{\text{m}^3 \cdot \text{K}} \cdot 0,50 \text{ h}^{-1} \cdot 264 \text{ m}^3 \cdot 24^\circ \text{C} = 1,17 \text{ kW}$$

Per tant, el flux de calor a través de l'embolcall tèrmic ha de ser: $\dot{q}_{\text{emb}} = 13,83 \text{ kW}$. L'equació 3.16 relaciona aquest flux de calor amb la transmissància tèrmica global:

$$\dot{q}_{\text{emb}} = A \cdot U_g \cdot (T_{\text{ai}} - T_{\text{ae}}) \Rightarrow U_g = 2,9 \text{ W/m}^2 \cdot ^\circ \text{C}.$$

P3.7 Un quiosc està format per un cub de 2,0 m d'aresta (sostre de fusta: $U_{\text{sostre}} = 1,25 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$; parets de vidre: $U_{\text{vidre}} = 6,00 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$; terra de formigó: $U_{\text{terra}} = 2,15 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$). Si la temperatura de l'aire exterior és de $T_{\text{ae}} = 4^\circ \text{C}$; la de l'aire sota el terra ventilat, de $T_{\text{terra}} = 2^\circ \text{C}$; el venedor s'escalfa amb una estufa de potència 1.700 W, i la renovació d'aire és de $4,0 \text{ m}^3/\text{h}$, calculeu la temperatura interior del quiosc. Supposeu que el quiosc es troba en un estat estacionari.

Solució:

En aquest problema, no és aplicable la hipòtesi que hem fet al començament de la secció 3.5.3, que la temperatura exterior és uniforme, ja que l'aire sota el terra ventilat és més fred que al voltant de la resta del quiosc (parets i sostre). L'equació 3.14 permet calcular la calor total intercanviada a través de l'embolcall tèrmic:

$$\begin{aligned} \dot{q}_{\text{emb}} &= \sum_{k=1}^N [A_k \cdot U_k \cdot (T_{\text{ai}} - T_k)] = \\ &= (A_{\text{sostre}} \cdot U_{\text{sostre}} + A_{\text{vidre}} \cdot U_{\text{vidre}}) \cdot (T_{\text{ai}} - T_{\text{ae}}) + A_{\text{terra}} \cdot U_{\text{terra}} (T_{\text{ai}} - T_{\text{terra}}) \\ &= 101 \frac{\text{W}}{\text{K}} \cdot (T_{\text{ai}} - T_{\text{ae}}) + 8,60 \frac{\text{W}}{\text{K}} \cdot (T_{\text{ai}} - T_{\text{terra}}) \end{aligned}$$

La potència calorífica intercanviada per ventilació entre l'aire interior i l'aire exterior (suposem que la temperatura d'aquest últim és T_{ae}) és:

$$\dot{q}_{\text{vent}} = C_p \cdot n \cdot V \cdot (T_{\text{ai}} - T_{\text{ae}}) = 0,37 \frac{\text{W} \cdot \text{h}}{\text{m}^3 \cdot \text{K}} \cdot 0,50 \text{ h}^{-1} \cdot 8,0 \text{ m}^3 \cdot (T_{\text{ai}} - T_{\text{ae}}) = 1,48 \frac{\text{W}}{\text{K}} \cdot (T_{\text{ai}} - T_{\text{ae}})$$

on el temps de renovació de l'aire és el quocient entre el volum del quiosc i el ritme de renovació donat a l'enunciat: $t_{\text{vent}} = 8,0 \text{ m}^3 / 4,0 \text{ m}^3 \cdot \text{h}^{-1} = 2,0 \text{ h}$, i l'índex de renovació de l'aire n'és l'invers: $n = 1/t_{\text{vent}} = 0,50 \text{ h}^{-1}$.

Ara podem escriure l'equació de balanç energètic del quiosc, amb $\dot{q}_{\text{cal}} = 1.700 \text{ W}$ i $\dot{q}_{\text{net}} = 0$, i resoldre per a T_{ai} :

$$\dot{q}_{\text{emb}} + \dot{q}_{\text{vent}} = \dot{q}_{\text{cal}} \Rightarrow$$

$$102,48 \frac{\text{W}}{\text{K}} \cdot (T_{\text{ai}} - T_{\text{ac}}) + 8,60 \frac{\text{W}}{\text{K}} \cdot (T_{\text{ai}} - T_{\text{terra}}) = 1.700 \text{ W} \Rightarrow T_{\text{ai}} = 19^\circ \text{C}$$

P3.8 Un edifici industrial de $40 \times 20 \times 10 \text{ m}$ presenta els coeficients de transferència tèrmica següents: parets ($1,6 \text{ W/m}^2\text{°C}$), finestres ($5,5 \text{ W/m}^2\text{°C}$), porta ($2,5 \text{ W/m}^2\text{°C}$), i sostre ($1,3 \text{ W/m}^2\text{°C}$). Les finestres ocupen el 20 % de les parets laterals, la porta ocupa 10 m^2 , i es pot negligir el flux de calor a través del terra. L'índex de renovació de l'aire és $1,8 \text{ h}^{-1}$. Es demana:

- Calcular el coeficient global de pèrdues.
- Si la temperatura interior de consigna és de 18°C i la temperatura exterior mitjana al llarg d'un dia és de 4°C , determinar la potència calorífica que cal subministrar a l'edifici per mantenir la temperatura de consigna.

Solució:

Comencem per calcular la transmitància tèrmica global aplicant l'equació 3.15 amb les dades de l'enunciat:

	$A \text{ (m}^2\text{)}$	$U \text{ (W/m}^2\text{·K)}$	$A \cdot U \text{ (W/K)}$
parets	950	1,6	1.520
finestres	240	5,5	1.320
porta	10	2,5	25
sostre	800	1,3	1.040
sumes	2.000		3.905

$$U_g = \frac{1}{A} \cdot \sum_{k=1}^N (A_k \cdot U_k) = \frac{3.905}{2.000} = 1,9525 \text{ W/m}^2\text{·K}$$

A continuació, podem calcular el coeficient global de pèrdues amb l'equació 3.21:

$$G = n \cdot C_p + \frac{A}{V} U_g =$$

$$1,8 \text{ h}^{-1} \cdot 0,37 \frac{\text{W} \cdot \text{h}}{\text{m}^3 \cdot \text{K}} + \frac{2.000 \text{ m}^2}{8.000 \text{ m}^3} \cdot 1,9525 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}} = 1,15 \text{ W/m}^3 \cdot \text{K} \approx 1,2 \text{ W/m}^3 \cdot \text{K}$$

- La potència calorífica perduda per l'edifici a través de l'embolcall tèrmic i per ventilació és:

$$\dot{q}_{\text{emb}} + \dot{q}_{\text{vent}} = G \cdot V \cdot (T_{\text{ai}} - T_{\text{ac}}) = 130 \text{ kW}$$

Si no hi ha més aportacions externes (radiació solar) ni internes al balanç energètic de l'edifici, aquesta és la potència calorífica que s'ha de subministrar.



3.10. Problemes proposats

P3.9 Calculeu el flux de calor a través del mur de l'exemple 3.1 si la paret és de $6,0 \text{ m}^2$ i la diferència de temperatures entre l'interior i l'exterior és de 10°C ?

R: 51 W

P3.10 Calculeu el coeficient de transmissió tèrmica del mur de l'exemple 3.1 si la cambra d'aire se substitueix per una capa d'escuma d'1 cm de gruix i amb una conductivitat tèrmica de $0,026 \text{ W/m}\cdot\text{K}$.

R: $0,73 \text{ W/m}^2\cdot\text{K}$

P3.11 Una façana de 24 m^2 consta de dos elements: la paret ($U_{\text{paret}} = 0,80 \text{ W/m}^2\cdot^\circ\text{C}$) i el vidre ($U_{\text{vidre}} = 5,5 \text{ W/m}^2\cdot^\circ\text{C}$).

- Si la paret ocupa $19,5 \text{ m}^2$ i el vidre $4,5 \text{ m}^2$, determineu el coeficient de transmissió tèrmica de la façana.
- Si les temperatures interior i exterior són 18°C i 6°C , respectivament, quina potència calorífica es transmet a través de la façana?

R: a) $1,7 \text{ W/m}^2\cdot\text{K}$; b) 480 W

P3.12 Una casa unifamiliar té unes pèrdues de calor mitjanes de 1.580 W a través de l'estructura i de 870 W per ventilació. Durant els mesos de tardor i hivern, la casa rep 27.500 MJ de radiació solar. Si el sistema de calefacció proporciona 24 MJ/kg de combustible, determineu la massa de combustible consumida durant aquests mesos.

Nota: Considereu que tots els mesos són de 30 dies.

R: 440 kg

P3.13 Un pavelló poliesportiu té forma paral·lelepípedica, de $40\times 20 \text{ m}$ de planta i 10 m d'altura; el 20 % de la superfície vertical externa l'ocupen finestres, i les portes ocupen una superfície de 6 m^2 . Els coeficients de transmissió tèrmica són: $U_{\text{paret}} = 1,6 \text{ W/m}^2\cdot^\circ\text{C}$, $U_{\text{finestra}} = 5,5 \text{ W/m}^2\cdot^\circ\text{C}$, $U_{\text{porta}} = 2,5 \text{ W/m}^2\cdot^\circ\text{C}$, $U_{\text{sostre}} = 1,5 \text{ W/m}^2\cdot^\circ\text{C}$; l'aire interior es renova completament quatre vegades cada hora, i l'ocupació humana a l'interior genera contínuament una potència calorífica de 22 kW. La temperatura exterior és de -2°C i la interior, de 18°C , ambdues constants. Podem considerar que el terra no intervé en la transmissió tèrmica.

- Determineu la calor neta perduda pel pavelló en 6 hores a través de l'embolcall tèrmic i per ventilació.

Es disposa d'uns radiadors que emeten 440 W per cada m^2 de superfície calefactora.

- Determineu la superfície de radiadors requerida per mantenir la temperatura interna.

Dada: $C_p = 0,37 \text{ W}\cdot\text{h/m}^3\cdot^\circ\text{C}$

R: a) 6,9 GJ; b) 670 m^2

P3.14 Una aula d'examen intercanvia calor amb l'exterior només a través de les finestres, de vidre simple de 10 mm de gruix i amb una superfície total de 10 m² (no hi ha ventilació). Determineu-ne la temperatura interior durant un examen si la temperatura exterior és de 15,5°C i hi ha 80 estudiants a dins de l'aula, cadascun dels quals allibera 25 W de potència calorífica.

Dades: $k_{\text{vidre}} = 0,80 \text{ W/m}\cdot\text{K}$; resistències tèrmiques superficials exterior i interior, 0,05 i 0,10 m²·K/W

R: 48°C

P3.15 Per millorar l'aïllament tèrmic de l'aula del problema anterior, les finestres de vidre simple se substitueixen per finestres de doble vidre, cadascun de 5 mm de gruix i amb una cambra d'aire intermèdia de resistència tèrmica $R_{\text{ca}} = 0,15 \text{ m}^2\cdot\text{K/W}$.

- Quantes vegades és més gran la resistència tèrmica del vidre doble amb cambra d'aire que la del vidre simple (sense comptar les resistències tèrmiques superficials)?
- Determineu-ne la temperatura d'equilibri, mantenint la resta de dades i hipòtesis del problema anterior.

R: a) 13 vegades; b) 78°C (evidentment, la hipòtesi que només s'evacua calor a través de les finestres és excessivament restrictiva).

P3.16 Les parets i el sostre d'un edifici de característiques paral·lelepípediques (11×8,0×3,0 m) tenen un coeficient de transferència tèrmica mitjà de $U = 0,65 \text{ W/m}^2\cdot\text{°C}$. L'aire interior de l'edifici es renova completament una vegada cada hora. S'ignoren les pèrdues provinents del terra, com també els guanys per radiació solar. Determineu:

- El coeficient global de pèrdues.
- Les pèrdues de calor en un dia si la temperatura interior és de 24°C i la exterior es manté a 0°C.

La casa s'escalfa amb calefacció de gas natural, que disposa d'una calor de combustió (calor alliberada per metre cúbic de gas cremat) de 9.300 kcal/m³.

- Calculeu el consum diari de gas natural per mantenir la temperatura interior de 24°C.

Dada: $C_p = 0,37 \text{ W}\cdot\text{h/m}^3\cdot\text{°C}$.

R: a) 0,87 W/m³·°C; b) 470 MJ; c) 12 m³

P3.17 Una cabana aïllada al camp, de tipologia rectangular (6,0×5,0×3,0 m), està formada pels dos materials que es mostren a la taula, llevat del terra, que no contribueix a efectes tèrmics.

	$e \text{ (m)}$	$k \text{ (W/m}\cdot\text{°C)}$
material extern	0,050	0,030
material intern	0,150	0,150



La renovació de l'aire interior es considera de $0,50 \text{ h}^{-1}$. Determineu-ne el coeficient global de pèrdues i la potència calefactora necessària per mantenir una diferència de temperatures de 18°C entre l'interior i l'exterior.

Dades: $C_p = 0,37 \text{ W}\cdot\text{h}/\text{m}^3\cdot^\circ\text{C}$; $R_{se} = 0,06 \text{ m}^2\cdot^\circ\text{C}/\text{W}$; $R_{si} = 0,11 \text{ m}^2\cdot^\circ\text{C}/\text{W}$

R: $0,56 \text{ W}/\text{m}^3\cdot^\circ\text{C}$, 910 W

P3.18 Es coneixen les dades següents, relatives al balanç energètic d'un edifici al mes de novembre: radiació solar absorbida = 20 kW ; generació de calor per maquinària = $7,3 \text{ kW}$; generació de calor humana = $3,6 \text{ kW}$; pèrdues de calor a través de l'embolcall tèrmic = $96,3 \text{ kW}$; pèrdues de calor per ventilació = 41 kW .

- Determineu la potència calorífica necessària per equilibrar el balanç energètic i el consum d'energia per calefacció al cap d'un mes de 30 dies, suposant que les dades anteriors no varien.
- Feu servir les dades anteriors per determinar el coeficient global de pèrdues, suposant una temperatura de l'aire interior de 18°C i de l'aire exterior de 2°C , i un volum d'aire interior de 5.000 m^3 .
- La potència perduda per ventilació, 41 kW , correspon a un índex de renovació de l'aire $n = 3,82 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$. Determineu la potència que es perdria per ventilació si es canviés el ritme de renovació de l'aire interior, de manera que es renovés completament cada dues hores.

R: a) 106 kW , 66 Gcal ; b) $1,7 \text{ W}/\text{m}^3\cdot^\circ\text{C}$; c) 15 kW

P3.19 Un recipient isotèrmic conté vapor d'aigua a 600°C i el seu medi ambient exterior es troba a 20°C . La paret del recipient té dues capes: la interior, de $30,0 \text{ cm}$, de totxos refractaris ($k_{\text{totxo}} = 1,74 \text{ W}/\text{m}\cdot\text{K}$), i l'exterior, de $4,00 \text{ cm}$, de fibra de vidre ($k_{\text{fibra}} = 0,105 \text{ W}/\text{m}\cdot\text{K}$). Les resistències tèrmiques superficials exterior i interior són, respectivament, $0,034 \text{ m}^2\cdot\text{K}/\text{W}$ i $0,086 \text{ m}^2\cdot\text{K}/\text{W}$. Calculeu, en estat estacionari, la temperatura de la superfície exterior del recipient.

R: $49,3^\circ\text{C}$

P3.20 Els tancaments exteriors d'una casa estan formats per 330 m^2 de parets i 30 m^2 de finestres. El vidre de les finestres és simple, de 6 mm , i té un coeficient de conductivitat tèrmica d' $1,11 \text{ W}/\text{m}\cdot\text{K}$. Les parets estan compostes d'una capa exterior d'aïllant, de $5,0 \text{ cm}$, amb una conductivitat tèrmica de $0,033 \text{ W}/\text{m}\cdot\text{K}$, i una capa interior de formigó de 20 cm , amb una conductivitat tèrmica de $0,15 \text{ W}/\text{m}\cdot\text{K}$. Les resistències tèrmiques superficials interior i exterior són, respectivament, de $0,11$ i $0,060 \text{ m}^2\cdot\text{K}/\text{W}$, igual per a les finestres i per a les parets. La temperatura de l'aire exterior és de $0,5^\circ\text{C}$ i la de l'aire interior 20°C .

- Determineu el flux de calor a través de l'embolcall tèrmic de la casa.
- Determineu les temperatures a les superfícies interior i exterior del vidre.

R: a) $5,5 \text{ kW}$; b) $7,8$ i $7,2^\circ\text{C}$ a l'interior i a l'exterior, respectivament



P3.21 En una façana, hi ha dues finestres. Una d'elles, la finestra A, és de doble vidre de 4-6-4, és a dir, està formada per dos vidres, cadascun d'ells de 4 mm de gruix, separats per una cambra d'aire de 6 mm. L'altra finestra, la B, és també de doble vidre, de 4-16-4, és a dir, està formada per dos vidres, també cadascun de 4 mm de gruix i separats per una cambra d'aire, que en aquest cas és de 16 mm. Les temperatures de l'aire interior i l'aire exterior són de 24°C i 9°C, respectivament.

- Determineu la resistència tèrmica de cada finestra.
- Determineu la temperatura superficial interior de cada finestra.

Dades: resistències tèrmiques superficials interior i exterior, iguals per a ambdues finestres, $R_{si} = 0,14 \text{ m}^2\cdot\text{K}/\text{W}$ i $R_{se} = 0,08 \text{ m}^2\cdot\text{K}/\text{W}$; conductivitat del vidre = $0,7 \text{ W}/\text{m}\cdot^\circ\text{C}$; resistència tèrmica de la cambra d'aire de la finestra A, $R_{ca,A} = 0,08 \text{ m}^2\cdot\text{K}/\text{W}$; resistència tèrmica de la cambra d'aire de la finestra B, $R_{ca,B} = 0,18 \text{ m}^2\cdot\text{K}/\text{W}$

R: a) $R_A = 0,31 \text{ m}^2\cdot\text{K}/\text{W}$, $R_B = 0,41 \text{ m}^2\cdot\text{K}/\text{W}$; b) $T_{si,A} = 17^\circ\text{C}$; $T_{si,A} = 19^\circ\text{C}$

P3.22 Per resoldre un tancament, disposem de tres materials amb les propietats de la taula (gruix, conductivitat tèrmica, densitat, i calor específica).

	$e \text{ (m)}$	$k \text{ (W}/\text{m}\cdot^\circ\text{C})$	$\rho \text{ (kg}/\text{m}^3)$	$c_e \text{ (J}/\text{g}\cdot^\circ\text{C})$
material 1	0,150	0,15	2.700	0,85
material 2	0,050	0,060	152	0,60
material 3	0,150	1,50	800	0,50

Les temperatures exterior i interior són $0,0^\circ\text{C}$ i $20,0^\circ\text{C}$, respectivament, i les resistències tèrmiques superficials exterior i interior són $0,11$ i $0,06 \text{ m}^2\cdot\text{K}/\text{W}$, respectivament. Es donen dues possibles solucions:

- material 1 a l'interior i material 3 a l'exterior.
- material 3 a l'interior i material 1 a l'exterior.

Compareu les pèrdues de calor per a cada solució.

R: $9,5 \text{ W}/\text{m}^2$, igual per a les dues solucions, atès que la resistència tèrmica del tancament no depèn de l'ordre de les capes.

P3.23 Determineu el perfil tèrmic corresponent a les dues opcions del problema anterior.

R: a) $T_{si} = 19,4^\circ\text{C}$, $T_{12} = 9,9^\circ\text{C}$, $T_{23} = 2,0^\circ\text{C}$, $T_{se} = 1,1^\circ\text{C}$; b) $T_{si} = 19,4^\circ\text{C}$, $T_{23} = 18,5^\circ\text{C}$, $T_{12} = 10,6^\circ\text{C}$, $T_{se} = 1,1^\circ\text{C}$

P3.24 Amb les dades del problema 3.22 i els resultats del problema 3.23, compareu la calor necessària per assolir el perfil tèrmic del tancament, suposant que partim d'una distribució inicial de $0,0^\circ\text{C}$ arreu.

R: a) $5,2 \text{ MJ}/\text{m}^2$; b) $3,2 \text{ MJ}/\text{m}^2$



Humitat

La quantitat de vapor d'aigua present a l'aire és un dels paràmetres determinants del confort ambiental. Ja al segle XV, Leonardo da Vinci va inventar un higròscopi amb el qual va poder detectar la major o menor presència de vapor a l'atmosfera. L'aparell consistia bàsicament en una balança en què hi havia cotó en un dels platets. El cotó absorbeix eficientment el vapor, de manera que, quan el contingut de vapor a l'aire augmenta, el cotó “pesa” més a causa de l'aigua absorbida. Aquest aparell no permetia una mesura precisa de la humitat, que no va ser possible fins al final del segle XVIII, quan es van introduir altres tipus d'instruments més acurats com l'higròmetre de punt de rosada de John Frederic Daniell (1820).

En aquest capítol, veurem de quins factors depèn i com es quantifica la concentració de vapor d'aigua en l'aire. Per començar, posarem de manifest el comportament de l'aigua, veurem com la seva concentració a l'aire té un límit que depèn de la temperatura i en definirem la pressió de saturació. Les diferents maneres de mesurar o expressar el grau d'humitat s'introduiran per comparació amb aquesta pressió de saturació. Totes les propietats del vapor d'aigua en condicions normals de pressió atmosfèrica es poden plasmar en un gràfic, l'àbac psicromètric o diagrama de Mollier, que resulta pràctic per fer estimacions ràpides, tot i que amb precisió limitada. Els conceptes introduïts ens permetran plantejar una equació de balanç de vapor en un edifici, seguint la mateixa línia que l'equació de balanç energètic descrita al capítol anterior.

Un altre aspecte destacat de la humitat és la possibilitat que el vapor es condensi, cosa que pot causar problemes de degradació dels materials de construcció, especialment si la condensació té lloc a l'interior d'un mur –l'anomenada *condensació intersticial*. La segona part del capítol es dedica a l'estudi de les condensacions, començant per la llei de Fick, que descriu la rapidesa de difusió d'una substància –que, en el nostre cas, serà el vapor d'aigua– a través d'una altra –en el nostre cas, un mur. Definirem les magnituds que caracteritzen les propietats de cada material que pot formar part d'un mur, pel que fa a la major o menor facilitat amb què permet la difusió del vapor a través seu. Introduïrem l'anomenat *diagrama de Glaser*, que permet identificar gràficament els espais amb risc de condensació intersticial. I, finalment, repassarem les principals estratègies per evitar les condensacions.



4.1. Aire humit: humitat absoluta i humitat específica

L'aire és una barreja de molècules de naturalesa diferent, en què els elements més abundants són: nitrogen, oxigen, vapor d'aigua, argó, diòxid de carboni, neó i heli. El vapor d'aigua és especial entre aquestes substàncies, perquè és l'única que pot condensar en les condicions ambientals pròpies del nostre entorn. Per aquest motiu, se'l diferencia de la resta, de manera que tots els components de l'aire, tret del vapor d'aigua, reben el nom d'aire sec. La barreja de l'aire sec amb vapor d'aigua se la coneix com *aire humit* (de fet, és l'aire "normal" que respirem).

Les condicions en les quals un gas es pot condensar depenen de la temperatura i de la concentració de molècules del gas, mesurada en mol/m³, però, per a cada tipus de gas, hi ha una temperatura màxima, anomenada *temperatura crítica*, per damunt de la qual només pot existir en estat gasós. La temperatura crítica de l'aigua és 374°C, mentre que la dels diferents components de l'aire sec queda per sota de les temperatures ambientals del nostre món: -118°C per a l'oxigen, -147°C per al nitrogen, -268°C per a l'heli. L'excepció és el diòxid de carboni, la temperatura crítica del qual és de només 31°C. Per sota d'aquesta temperatura, si hi ha prou concentració de diòxid de carboni, aquest passa directament a l'estat sòlid i forma el que es coneix amb el nom de *neu carbònica* o *gel sec*. Per exemple, els residus de la combustió als motors dels aeroplans contenen tant diòxid de carboni com vapor d'aigua i, quan es refreden al cap de poc d'haver estat expulsats, es condensen i deixen un rastre que es pot veure fàcilment des del terra.

Per mesurar el grau d'humitat de l'aire, es fan servir diferents magnituds. Vegem-ne, de moment, dues:

- Humitat absoluta:

$$H_a = \rho_v = m_v / V \quad (4.1)$$

que és igual a la densitat de vapor d'aigua, ρ_v , és a dir, el quocient entre la massa de vapor d'aigua present en un volum d'aire i la pròpia dimensió d'aquest volum. La seva unitat és el kg/m³, però també s'utilitza sovint el g/l. El valor numèric de la humitat absoluta és idèntic en ambdues unitats.

- Humitat específica:

$$X = \frac{m_v}{m_{a.s.}} = \frac{\rho_v}{\rho_{a.s.}} \quad (4.2)$$

que és el quocient entre les masses de vapor i d'aire sec presents en un determinat volum d'aire. La humitat específica també és igual al quocient entre les densitats del vapor i de l'aire sec. La unitat més comuna per a la humitat específica és g/kg, és a dir, els grams de vapor d'aigua que hi ha presents en el mateix volum que conté un kilogram d'aire sec.

4.2. Pressió d'un gas ideal

El model del gas ideal descriu el comportament dels gasos –com el nitrogen o l'oxigen, és a dir, els components principals de l'aire– en condicions típiques. En aquest model, la pressió, P , exercida per un gas pur (això és, format per una única substància) és

proporcional a la densitat d'aquest gas, ρ , i a la seva temperatura T , expressada en l'escala Kelvin:

$$P = \frac{\rho}{m} RT \quad (4.3)$$

A l'equació 4.3, $R = 8,317 \text{ J/mol}\cdot\text{K}$ és la constant dels gasos ideals, que sempre té el mateix valor, i m és la massa molar del gas, que té per unitats kg/mol i que depèn de la naturalesa del gas. Per exemple, $m_{\text{a.s.}} \cong 29 \text{ g/mol}$, per a l'aire sec, i $m_v = 18 \text{ g/mol}$, per al vapor d'aigua.

Exemple 4.1

Un dipòsit de volum constant conté un gas ideal a 20°C i $1,0 \text{ atm}$. Calculeu la pressió a què arribarà la temperatura a l'interior del dipòsit augmenta fins a 120°C .

Solució. Per comparar la pressió del gas ideal en les dues temperatures, P_1 i P_2 , podem fer servir l'equació 4.3, però hem d'anar amb compte a expressar les temperatures en kelvin: $T_1 = 20^\circ\text{C} = 293,15 \text{ K}$; $T_2 = 120^\circ\text{C} = 393,15 \text{ K}$. Tenint en compte que els valors de la densitat i el pes molar del gas no variaran (perquè acceptem, com diu l'enunciat, que el volum del recipient es manté constant), el quocient entre les dues pressions queda:

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{\frac{\rho}{m} RT_2}{\frac{\rho}{m} RT_1} = \frac{T_2}{T_1} = \frac{393,15 \text{ K}}{293,15 \text{ K}} = 1,34$$

Per tant, la resposta és: $1,3 \text{ atm}$

4.3. Pressió de vapor

S'anomena *pressió de vapor* la pressió exercida pel vapor d'aigua, P_v . D'acord amb el model del gas ideal, la pressió de vapor depèn de la concentració de vapor d'aigua a l'aire, mesurada per la seva densitat o per la humitat absoluta:

$$P_v = \frac{\rho_v}{m_v} RT = \frac{H_a}{m_v} RT \quad (4.4)$$

on hem aplicat la igualtat 4.1 entre la humitat absoluta i la densitat del vapor.

La pressió total d'una barreja de gasos, com l'aire humit, segueix la llei de Dalton,¹ que diu que: 1) la pressió de cada component de la barreja, anomenada *pressió parcial*, és independent de la presència dels altres components, i 2) la *pressió total* és la suma de les pressions parcials de tots els components. En altres paraules, per a l'aire humit:

¹ John Dalton, físic britànic (1766-1844), que també va investigar i va donar nom al defecte visual consistent a no poder distingir determinats colors (daltonisme).



$P = P_{a.s.} + P_v$, és a dir, la pressió total de l'aire humit, P , és la de l'aire sec, $P_{a.s.}$, més la del vapor d'aigua.

A temperatures moderades, per sota de 45°C, la pressió del vapor és molt inferior a la de l'aire sec, $P_v \ll P_{a.s.} \Rightarrow P_{a.s.} \approx P_{atm}$, és a dir, l'aire sec fa una pressió gairebé idèntica a la pressió atmosfèrica. En aquestes condicions, *la pressió de vapor és proporcional a la humitat específica, independentment de la temperatura*, si podem considerar que la pressió atmosfèrica es manté constant:

$$\frac{P_v}{P_{a.s.}} = \frac{\rho_v}{\rho_{a.s.}} \cdot \frac{m_{a.s.}}{m_v} = X \cdot \frac{m_{a.s.}}{m_v}$$

on $m_{a.s.} / m_v \cong 1,6$. Per tant, tenint en compte que, a temperatures inferiors a 45°C, la pressió atmosfèrica és gairebé igual a la pressió de l'aire sec, obtenim l'aproximació següent per a la pressió de vapor:

$$P_v \approx X \frac{m_{a.s.}}{m_v} P_{atm} \quad (4.5)$$

Exemple 4.2

La temperatura de l'aire d'una habitació és de 20°C i la seva humitat específica és d'11 g/kg. Calculeu-ne la humitat absoluta.

Solució. Podem combinar les equacions 4.4 i 4.5: $P_v = \frac{H_a}{RT} \approx X \frac{m_{a.s.}}{m_v} P_{atm}$, per obtenir una expressió per la humitat absoluta:

$$H_a \approx \frac{X \cdot m_{a.s.} \cdot P_{atm}}{RT} = \frac{0,011 \frac{\text{kg}}{\text{kg}} \cdot 0,029 \frac{\text{kg}}{\text{mol}} \cdot 1,013 \times 10^5 \text{ Pa}}{8,317 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}} \cdot 293,15 \text{ K}} = 0,0133 \text{ kg/m}^3$$

En substituir els valors de la humitat específica i el pes molar de l'aire sec, s'ha tingut compte d'expressar-ho tot en unitats del Sistema Internacional. Per exemple, $X = 11 \frac{\text{g}}{\text{kg}} = 0,011 \frac{\text{kg}}{\text{kg}}$.

També s'ha tingut en compte que $1 \text{ J} = 1 \text{ Pa} \cdot 1 \text{ m}^3$.

Per tant, la resposta és: 0,013 kg/m³, o 0,013 g/l.

4.4. Pressió de saturació

S'anomena saturació la condició de l'aire humit en què no pot absorbir més vapor d'aigua. En aquesta situació, un excés de vapor es tradueix en condensació d'aigua líquida. *L'assoliment de la saturació es caracteritza per un valor límit de la pressió de vapor, anomenat pressió de saturació, P_s .* És a dir:

- si $P_v = P_s$ el vapor pot condensar
- si $P_v < P_s$ no es produeix condensació

El valor de la *pressió de saturació depèn de la temperatura de l'aire*, ja que a major temperatura l'agitació tèrmica fa més difícil l'associació de molècules d'aigua. De fet, la pressió de saturació augmenta molt ràpidament quan la temperatura de l'aire puja. A 100°C, la pressió de saturació del vapor d'aigua és 1 atm, motiu pel qual és impossible que el vapor sature l'aire a aquesta temperatura i pressió atmosfèrica (recordeu la llei de Dalton), i l'aigua bull fins a convertir-se completament en vapor.

La pressió de saturació del vapor d'aigua es pot obtenir de taules que recullen els resultats experimentals. A la taula 4.1, es proporciona la pressió de saturació, expressada en hPa, en funció de la temperatura de l'aire.

Taula 4.1
Pressió de saturació
del vapor d'aigua, en
hPa, en funció de la
temperatura

T (°C)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	6,112	6,517	7,060	7,581	8,135	8,725	9,353	10,02	10,73	11,48
10	12,28	13,13	14,03	14,98	15,99	17,06	18,19	19,38	20,64	21,98
20	23,39	24,88	26,45	28,11	29,85	31,69	33,63	35,67	37,82	40,08
30	42,46	44,96	47,59	50,35	53,24	56,28	59,47	62,81	66,32	69,99
40	73,89	77,87	82,08	86,50	91,11	95,94	101,0	106,3	111,8	117,5
50	123,5	129,8	136,3	143,1	150,2	157,6	165,3	173,3	181,7	190,4
60	199,9	208,9	218,7	228,8	239,4	250,4	261,8	273,7	286,0	298,7
70	312,0	325,7	334,0	354,8	370,1	385,9	402,4	419,4	437,0	455,3
80	474,1	493,7	513,9	534,8	556,3	578,7	601,7	625,5	650,2	675,6
90	701,8	728,9	756,9	785,7	815,4	846,1	877,7	910,3	943,9	978,5
100	1013	1050	1089	1128	1168	1208	1252	1296	1340	1386
110	1434	1483	1533	1584	1637	1692	1748	1805	1864	1925

Per llegir el valor de la pressió de saturació a la taula, cal identificar la cel·la corresponent a la temperatura formada per les desenes de graus (fileres) i les unitats de grau (columnes). Per exemple, per a una temperatura de 13°C (= 10 + 3), ens situem a la fila que comença en 10 i a la columna encapçalada pel valor 3, i llegim la pressió de saturació de 14,98 hPa. Si la temperatura és de 47°C (= 40 + 7), la pressió de saturació és de 106,3 hPa, etc.

També es fan servir sovint expressions analítiques que aproximen la dependència de P_s en T , com la següent:

$$P_s = 9,208 \times 10^{(8-2223,6/T)} \quad (4.6)$$

on T s'expressa en kelvin i el resultat de P_s , en mbar. Per exemple, per a una temperatura de 10°C = 283,15 K, la pressió de saturació determinada amb l'equació 4.6 és:

$$P_s = 9,208 \times 10^{(8-2223,6/283,15)} = 9,208 \times 10^{0,147} = 12,91 \text{ hPa}$$



Com es pot comprovar fàcilment inspeccionant la taula 4.1, el valor tabulat de la pressió de saturació a 10°C no coincideix amb el que acabem de calcular. L'equació 4.6 és una aproximació que pot ser convenient d'utilitzar en determinades circumstàncies, però és preferible fer servir les dades experimentals (taula 4.1) sempre que sigui possible.

Exemple 4.3

Quina és la pressió de saturació del vapor d'aigua a una temperatura de 13,7°C?

Solució. A la taula 4.1, podem trobar la pressió de saturació a les temperatures $T_1 = 13^\circ\text{C}$ i $T_2 = 14^\circ\text{C}$, amb valors: $P_{s,1} = 14,98$ hPa i $P_{s,2} = 15,99$ hPa. La pressió de saturació a 13,7°C tindrà un valor comprès entre $P_{s,1}$ i $P_{s,2}$.

Per obtenir una aproximació a aquest valor, podem suposar que la pressió de saturació varia linealment amb la temperatura entre els dos valors de 13°C i 14°C, i aplicar-hi una regla de tres: si, per a una diferència de temperatura d'1°C, la diferència de pressió de saturació és d'1,01 hPa (= 15,99 - 14,98), per a una diferència de temperatura de 0,7°C (respecte a una referència de 13°C), la pressió de saturació variarà en: $0,7 \times 1,01 = 0,71$ hPa. Aquest és el valor que s'ha d'afegir a la pressió de saturació de referència, $P_{s,1}$.

Finalment, $P_s(13,7^\circ\text{C}) = 14,98 + 0,71 = 15,69$ hPa

Per tant, la resposta és: 15,69 hPa

Exemple 4.4

La ciutat d'El Alto, a Bolívia, amb un milió d'habitants, es troba a una altitud de 4.070 m sobre el nivell del mar, amb una pressió atmosfèrica mitjana de 0,60 atm. A quina temperatura bull l'aigua a El Alto?

Solució. L'aigua bull a la temperatura, T_b , a la qual la pressió de saturació, $P_s(T_b)$, iguala la pressió atmosfèrica. A El Alto, $P_s(T_b) = 0,60 \text{ atm} = 607,8 \text{ hPa} = 607,8 \text{ mbar}$.

En aquest exemple, farem us de la relació analítica entre la temperatura i la pressió de saturació (equació 4.6). Per aïllar la temperatura a l'equació, prenem logaritmes decimals:

$$\log(P_s) = \log(9,208) + \left(8 - \frac{2223,6}{T}\right) \Rightarrow T = \frac{2223,6}{\log(9,208) + 8 - \log(P_s)}$$

Substituïm el valor de $P_s(T_b)$, en mbar:

$$T = \frac{2223,6}{\log(9,208) + 8 - \log(607,8)} = 359,8 \text{ K} = 86,6^\circ\text{C}$$

Per tant, tenint en compte que l'equació 4.6 és una aproximació, la resposta seria: entre 86°C i 87°C (que coincideix amb la taula 4.1).

4.5. Humitat relativa

Com ja s'ha dit abans, es pot produir condensació quan $P_v = P_s$, i no hi ha condensació si $P_v < P_s$ (i es pot descartar que $P_v > P_s$). Una manera natural de mesurar la proximitat de la condició de saturació és comparar ambdues pressions. Es defineix la *humitat relativa*, H_r , com el quocient entre la pressió de vapor i la pressió de saturació a la temperatura de l'aire humit, $H_r = P_v / P_s$. La humitat relativa no té unitats, però s'expressa en tant per cent, % (per la qual cosa s'ha de multiplicar el resultat de la divisió de pressions per un factor 100).

En resum:

- si $H_r = 100\%$, *el vapor es pot condensar*
- si $H_r < 100\%$, *no hi ha condensació*

Observeu que la pressió de saturació és funció únicament de la temperatura, mentre que la pressió de vapor ho és de la humitat específica (a $T \lesssim 45^\circ\text{C}$). Per tant, concretant els valors de T i de X , podem conèixer si es donen les condicions de saturació o no, i el valor de H_r .

4.6. Temperatura de rosada

La temperatura de rosada és una altra forma d'especificar la proximitat o la llunyania de la condició de saturació. Es defineix la *temperatura de rosada*, T_R , corresponent a una determinada concentració de vapor, mesurada a través de X o de P_v , com la temperatura a la qual seria saturant. És a dir, la pressió de saturació corresponent a T_R coincideix amb el valor actual de la pressió de vapor: $P_v = P_s(T_R)$. Podem reformular l'expressió de la humitat relativa introduint-hi la temperatura de rosada, de la manera següent:

$$H_r = P_s(T_R) / P_s(T)$$

En resum:

- si $T_R = T$, *el vapor es pot condensar*
- si $T_R < T$, *no hi ha condensació*

4.7. Àbac psicromètric

L'àbac psicromètric és un gràfic on es representen els possibles estats de l'aire humit i les seves propietats, totes elles referides a una pressió total constant igual a una atmosfera, $P_{\text{atm}} = 1 \text{ atm}$ (Fig. 4.1).

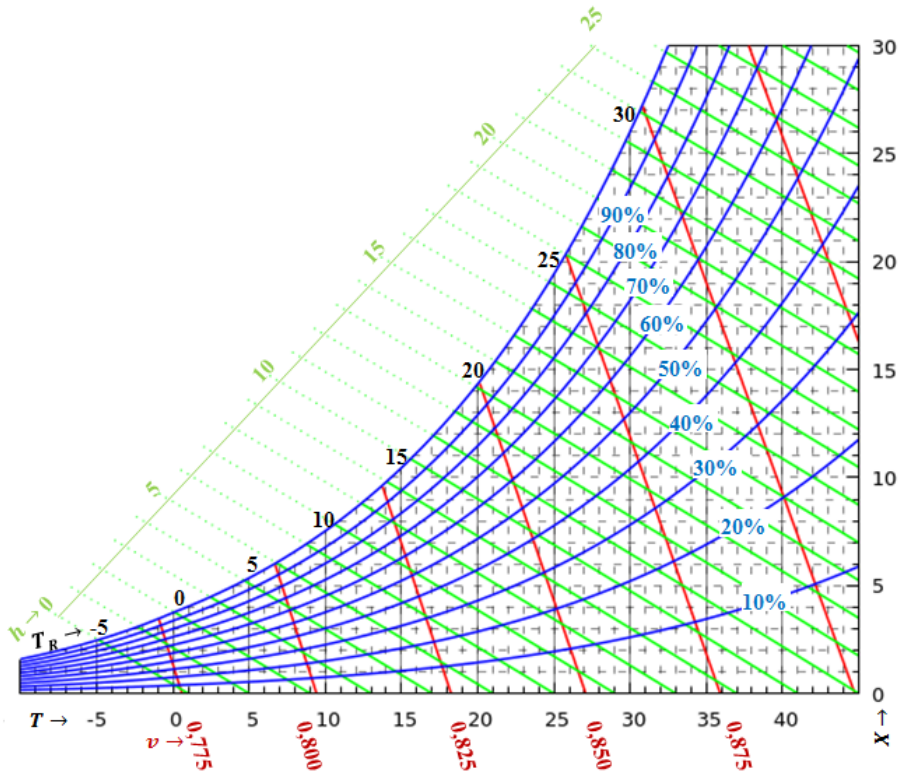
Fig. 4.1

Àbac psicromètric corresponent a una pressió atmosfèrica estàndard,
 $P_{\text{atm}} = 1 \text{ atm}$.

Es mostren, en funció de la temperatura, T , en $^{\circ}\text{C}$, i la humitat específica, X , expressada en

grams de vapor d'aigua per cada kilogram d'aire sec: la humitat relativa (línies blaves); l'entalpia específica a la saturació, h , en kcal/kg d'aire sec (línies verdes), i el volum específic de l'aire, v , en m^3/kg d'aire sec (línies vermelles). La temperatura de rosada, T_R , en $^{\circ}\text{C}$,

està marcada sobre la corba de saturació (humitat relativa 100%). El valor inicial de l'entalpia, $h = 0$, és arbitrari, el que realment és rellevant són les diferències d'entalpia entre dos estats



A cada emplaçament, la pressió atmosfèrica varia periòdicament amb amplituds molt petites, de menys de l'1 %. En circumstàncies excepcionals, la pressió atmosfèrica pot arribar a variar fins a un 5 %. Per tant, la hipòtesi de pressió atmosfèrica constant és, en general, prou acurada per fer una predicció de les propietats de l'aire humit en condicions normals. No obstant això, s'ha de tenir en compte que la pressió atmosfèrica mitjana en una ubicació determinada depèn de la seva altitud. Així, per exemple, a Madrid, a 657 m sobre el nivell del mar, la pressió mitjana és d'unes 0,94 atm. A la Ciutat de Mèxic, a una altitud de 2.240 m sobre el nivell del mar, la pressió mitjana és, aproximadament, $P_{\text{atm}} = 0,77 \text{ atm}$. A grans altituds, l'àbac s'ha de recalibrar.

A l'àbac psicromètric, les condicions de l'aire humit vénen donades per la combinació de temperatura, representada a l'eix horitzontal, i humitat específica, representada a l'eix vertical (que, a l'àbac, es col·loca a la dreta del gràfic). Per a una parella de valors de temperatura i humitat específiques (T, X), les pressions de saturació i de vapor es poden calcular amb les equacions 4.5 i 4.6 (o la taula 4.1) i, per tant, se'n pot calcular la humitat relativa. Aquesta informació, junt amb altres, com l'entalpia de l'aire per unitat de massa d'aire sec, anomenada *entalpia específica*, o el volum específic (la inversa de la densitat de l'aire sec, ρ) es troba a l'àbac, cosa que el converteix en una eina de càlcul ràpida i eficaç. Com es pot veure a la figura 4.1, el volum específic de l'aire humit es troba a l'entorn de 0,775-0,875 m^3/kg ; per tant, la densitat típica és 1,14 – 1,29 kg/m^3 .

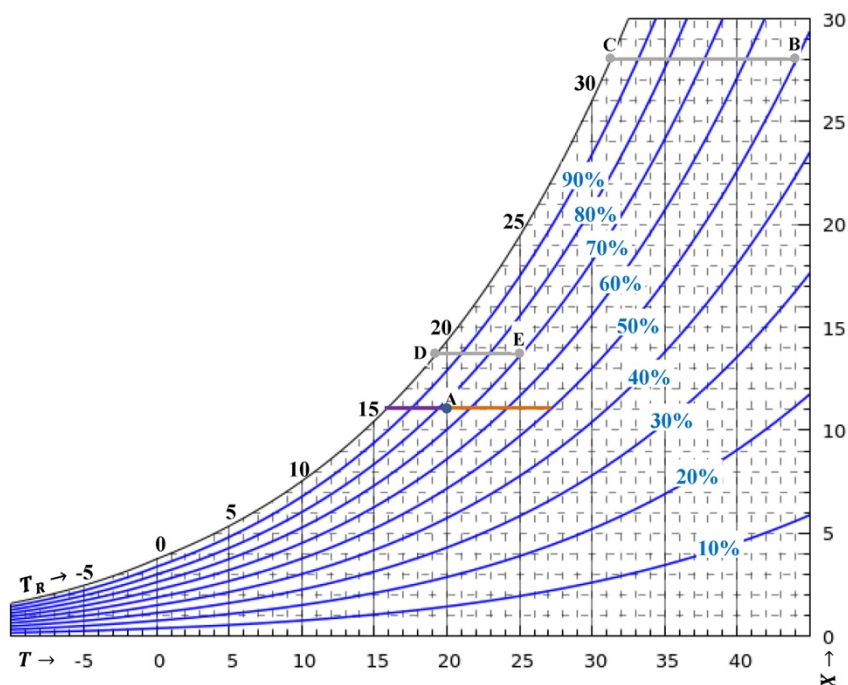


Fig. 4.2
Línies d'humitat relativa constant (en blau) a l'àbac psicromètric. Per simplificar-ne l'aplicació als exemples 4.5, 4.6 i 4.7, i millorar-ne la visualització, s'han eliminat de l'àbac les línies d'entalpia constant i de volum específic constant. El punt A és l'estat a què fa referència l'exemple 4.5. Les línies magenta i taronja són, respectivament, les transformacions a què fan referència els exemples 4.6 i 4.7.

Exemple 4.5

La temperatura de l'aire d'una habitació és de 20°C i la seva humitat específica és d'11 g/kg. Determineu-ne la humitat relativa.

Solució. A l'àbac psicromètric, hem de localitzar el punt de coordenada horitzontal 20°C i vertical 11 g/kg (punt A a la Fig. 4.2). La humitat relativa és del 75 %, aproximadament.

Per tant, la resposta és: aproximadament, del 75%

4.7.1. Aplicacions de l'àbac psicromètric

Veiem alguns exemples d'aplicacions de l'àbac psicromètric:

- *Calor total.* La calor total necessària per produir una transformació a l'aire, que pot implicar un canvi de temperatura –i, per tant, calor sensible– i un canvi de contingut de vapor –per tant, calor latent–, es pot llegir a l'àbac com una *diferència d'entalpies específiques entre els estats inicial i final*. Per fer-ho, només cal identificar els punts corresponents a aquests dos estats i llegir-ne les h corresponents, tot seguint les línies d'entalpia constant.
- *Temperatura de rosada.* Per determinar la temperatura de rosada corresponent a les condicions ambientals de l'aire, *basta conèixer la humitat específica, X* . A partir del valor de X , seguint una línia horitzontal, cal veure en quin punt s'assoleix la *corba de saturació* (T_R), i llegir a l'escala inferior la temperatura, que en aquest cas és la



temperatura de rosada. Per exemple, a $X = 10 \text{ g/kg}$, li correspon una $T_R = 14^\circ\text{C}$, aproximadament.

- *Risc de condensacions superficials.* Si l'aire no es troba saturat però hi ha una superfície, a temperatura T_s , més freda que l'aire, és possible que, en entrar l'aire en contacte amb aquesta superfície, es produeixi condensació superficial. Per comprovar-ho mitjançant l'àbac, cal *determinar primer la temperatura de rosada de l'aire, T_R , i comparar-la amb T_s* : si $T_s > T_R$, no hi ha condensació superficial. Recordant el que s'ha dit a la secció 3.2 sobre *els ponts tèrmics*, es pot entendre per què aquests són propensos a la condensació superficial.

Exemple 4.6

A quina temperatura s'hauria d'escalfar l'aire de l'exemple 4.5 per tal que la humitat relativa fos del 50 %, tot mantenint la humitat específica?

Solució. A l'àbac, tracem una línia horitzontal (línia taronja a la Fig. 4.2) des del punt A fins arribar a la corba d'humitat relativa del 50 %. Al punt en què es tallen, llegim una temperatura (coordenada horitzontal) d'uns 27°C .

Per tant, la resposta és: 27°C

Exemple 4.7

A quina temperatura condensaria l'aire de l'exemple 4.5, si es manté el mateix valor de la humitat específica?

Solució. A l'àbac, tracem una línia horitzontal (línia magenta a la Fig. 4.2) des del punt A fins arribar a la corba de saturació (humitat relativa del 100 %). Al punt en què es tallen, hi llegim una temperatura de rosada de 16°C .

Per tant, la resposta és: 16°C

- *Refredament per polvorització de gotes d'aigua.* Un sistema de baixar la temperatura de l'aire consisteix a polvoritzar gotetes d'aigua que, si l'aire no està saturat d'humitat, s'evaporen i absorbeixen de l'aire la calor latent necessària per a aquesta transformació. *L'aire baixa de temperatura a entalpia constant* (no hi ha intercanvi de calor fora del sistema) *i augmenta la humitat* (específica, relativa, etc.). Si, eventualment, s'assoleix la corba de saturació, l'aigua no pot continuar evaporant-se i el procés arriba al final. Per tant, sobre la corba de saturació, i connectada amb el punt de partida per una línia d'entalpia constant, hi trobem la *mínima temperatura que es pot obtenir polvoritzant gotes d'aigua*.
- *Assecament d'aire.* Molts sistemes de refrigeració necessiten desfer-se de part del vapor d'aigua present en l'aire exterior, normalment a alta temperatura, per tal que aquest vapor no resulti saturant en les condicions interiors, és a dir, a una temperatura inferior. Aquest assecament d'aire es pot fer en *tres fases*. Primer, es refreda l'aire exterior a humitat específica constant fins assolir la corba de saturació. Segon, es continua refredant l'aire i expulsant l'aigua que es va condensant. Tercer, es pot

tornar a reescalfar lleugerament l'aire assecat per aconseguir una humitat relativa i una temperatura adients. A l'àbac de la figura 4.2, podria ser un traçat com el format pels punts $B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E$, o acabat en D.

4.8. Balanç de vapor d'un edifici

El nivell d'humitat ambiental a l'interior d'un edifici és el resultat de la relació entre la generació de vapor a l'interior i les pèrdues de vapor cap a l'exterior, ja sigui a través dels tancaments externs de l'edifici, ja sigui com a resultat de la ventilació. S'ha de tenir en compte que, típicament, el grau d'humitat a l'interior acostuma a ser més gran que a l'exterior, tot i que hi ha excepcions.

El balanç de vapor d'un edifici ens permet obtenir el *ritme de variació respecte del temps de la massa total de vapor present en l'aire interior*, $\dot{m}_v$, és a dir, el nombre de kg/s en què augmenta o disminueix el contingut de vapor. *En equilibri* (estat estacionari), *la humitat es manté estable*, $\dot{m}_v = 0$.

Podem escriure l'equació de balanç de vapor de la forma següent:

$$\dot{m}_v = r_{\text{gen}} - r_{\text{difu}} - r_{\text{vent}} \quad (4.7)$$

on els diferents termes del segon membre tenen el significat que es detalla a continuació.

- r_{gen} és el *ritme de generació de vapor a l'interior de l'edifici* (mesurat en kg/s, com tota la resta de quantitats que apareixen a l'equació de balanç de vapor). Aquest ritme es pot trobar tabulat a la normativa de referència, en funció de l'ocupació humana i l'ús de l'edifici, així com de la presència de maquinària que pugui generar vapor (neveres, cuines), banys, etc. A la normativa, és fàcil trobar aquest ritme expressat en una unitat més convenient, com g/h.
- r_{difu} és el *ritme de pèrdua de vapor a l'interior com a conseqüència de la difusió del vapor a través dels tancaments d'un edifici*. De moment, obtindrem aquest ritme com el producte de dues quantitats:

$$r_{\text{difu}} = F \cdot A \quad (4.8)$$

on A és l'àrea total dels tancaments externs de l'edifici i F és l'anomenat *flux de vapor per unitat d'àrea*, mesurat en $\text{kg/s} \cdot \text{m}^2$, que més endavant veurem com es pot determinar.

- r_{vent} és el *ritme de pèrdua de vapor a l'interior per la ventilació*. Com a conseqüència de la ventilació, el volum total d'aire interior, V , se substitueix pel mateix volum d'aire exterior, cadascun amb una humitat absoluta diferent: $H_{a,ai}$ l'aire interior i $H_{a,ae}$ l'aire exterior. El ritme de pèrdua de massa de vapor s'obté dividint pel temps necessari per renovar tot l'aire interior, t_{vent} (secció 3.6) o multiplicant per la seva inversa, és a dir, per l'índex de renovació de l'aire, n :

$$r_{\text{vent}} = n \cdot V \cdot (H_{a,ai} - H_{a,ae}) \quad (4.9)$$

4.9. Difusió de matèria

Molts materials que es fan servir per a la construcció no són completament estancs als gasos sinó que aquests poden trobar camins per travessar-los i passar d'un extrem a l'altre. El grau de porositat d'un material es pot mesurar com la proporció entre el volum interior que ocupa l'aire i el volum total d'una peça del material en qüestió. Alternativament, es pot caracteritzar la porositat com la relació entre la superfície dels espais interiors buits i la massa del material. Per exemple, per al ciment, aquest darrer quocient és de l'ordre de $20 \text{ m}^2/\text{g}$, un valor relativament alt. En conseqüència, el ciment es considera porós, igual que la totxana o la fusta. Com a contraexemple, el vidre o l'acer són pràcticament impermeables, per manca de porositat.

4.9.1. Difusió del vapor: llei de Fick

La tendència natural per a una substància és passar d'un ambient de major pressió i concentració a un ambient en què aquestes són inferiors. En el cas dels edificis, normalment la pressió del vapor d'aigua és més alta a l'interior, motiu pel qual el vapor viatja normalment de dins cap enfora.

Considerem un material, de gruix e , que separa dos ambients, 1 i 2, amb pressions de vapor respectives $P_{v,1}$ i $P_{v,2}$, és a dir, una diferència de pressions de vapor: $\Delta P_v = P_{v,1} - P_{v,2}$. La facilitat amb què un material determinat permet que el vapor d'aigua el travessi es mesura amb una propietat anomenada *permeabilitat al vapor d'aigua*, representada per Π . Per definir la permeabilitat, ens basarem en una llei empírica que relaciona el flux de vapor per unitat d'àrea a través d'un material, F (al qual ja ens hem referit a la secció 4.8), amb la diferència de pressions de vapor en els dos ambients separats pel material en qüestió. Aquesta és la *lleï de Fick*,² que només estudiarem en condicions estacionàries:

$$F = \Pi \cdot \Delta P_v / e \quad (4.10)$$

D'acord amb la llei de Fick, *el flux de vapor a través d'un material és directament proporcional a la diferència de pressions de vapor entre els dos ambients que limita i inversament proporcional al seu gruix*.

4.9.2. Permeabilitat al vapor d'aigua

El flux de vapor a través d'un material també és proporcional a la seva permeabilitat, Π . Les unitats de Π són $\text{kg}/\text{m} \cdot \text{s} \cdot \text{Pa}$. A continuació, en teniu alguns exemples:

- Aire: $\Pi_0 = 2,0 \times 10^{-10} \text{ kg}/\text{m} \cdot \text{s} \cdot \text{Pa}$
- Guix: $\Pi = 2,7 \times 10^{-11} \text{ kg}/\text{m} \cdot \text{s} \cdot \text{Pa}$
- PVC: $\Pi = 7,3 \times 10^{-13} \text{ kg}/\text{m} \cdot \text{s} \cdot \text{Pa}$

² Adolf Fick, metge alemany, va formular aquesta llei l'any 1855 arran dels seus estudis sobre la difusió de fluids a través de les membranes cel·lulars.

L'aire presenta la permeabilitat al vapor d'aigua més elevada entre les substàncies més comuns. Per aquest motiu, *la permeabilitat de l'aire es pren com a valor de referència i s'identifica amb el subíndex 0*.

Exemple 4.8

Una peça de PVC d'1,5 cm de gruix separa dos volums d'aire. Calculeu el flux de vapor que travessa el PVC si la pressió de vapor a cada costat difereix en 100 mm Hg.

Solució. Podem aplicar directament l'equació 4.10, amb $e = 0,015$ m, $\Pi = 7,3 \cdot 10^{-13}$ kg/m·s·Pa, i $\Delta P_v = 100$ mm Hg = 13.330 Pa :

$$F = \Pi \cdot \frac{\Delta P_v}{e} = 6,5 \cdot 10^{-7} \text{ kg/m}^2 \cdot \text{s}.$$

Per tant, la resposta és: $6,5 \cdot 10^{-7} \text{ kg/m}^2 \cdot \text{s}$

En la literatura, i en la normativa d'aplicació, es poden trobar maneres alternatives de proporcionar la informació sobre la permeabilitat al vapor d'aigua d'un material. Vegem-ne dues:

- *Resistivitat a la difusió del vapor d'aigua, r_v* . Es defineix com la inversa de la permeabilitat (per tant, mesura la dificultat que posa un material a la difusió del vapor), $r_v = 1 / \Pi$. Les seves unitats són les inverses de les de la permeabilitat, és a dir, m·s·Pa/kg.
- *Factor de resistència a la difusió del vapor d'aigua, μ* , d'un material. És el quocient entre la permeabilitat de l'aire i la d'aquest material: $\mu = \Pi_0 / \Pi$. El factor de resistència és adimensional i, en general, més gran que la unitat. Expressa *quantas vegades és més impermeable al vapor un material del que ho és l'aire*. Alguns exemples són: $\mu_{\text{aire}} = 1$, $\mu_{\text{guix}} = 7,4$, $\mu_{\text{PVC}} = 270$

4.9.3. Gruix equivalent d'aire enfront de la difusió del vapor d'aigua

La permeabilitat, Π , és una propietat dels materials que expressa la facilitat amb què es pot difondre el vapor a través seu, però la llei de Fick ens diu que el gruix, e , també influeix en el flux de vapor. Les dues magnituds es combinen en una de nova, anomenada *gruix equivalent d'aire enfront de la difusió del vapor d'aigua*, de símbol S_d , definida mitjançant les igualtats següents:

$$S_d = e \cdot \mu = e \cdot \Pi_0 / \Pi \quad (4.11)$$

Les unitats del gruix equivalent d'aire són unitats de longitud: m, etc.

La llei de Fick pren l'aspecte següent, en funció del gruix equivalent d'aire:

$$F = \Pi_0 \cdot \Delta P_v / S_d \quad (4.12)$$



Observeu que, en aquesta darrera expressió, sempre s'ha de fer servir la *permeabilitat de l'aire*, $\Pi_0 = 2,0 \times 10^{-10} \text{ kg/m} \cdot \text{s} \cdot \text{Pa}$.

Una forma alternativa de relacionar les propietats de permeabilitat del material i el gruix de la capa és l'anomenada *resistència a la difusió del vapor d'aigua*, $R_v = \frac{e}{\Pi} = S_d / \Pi_0$. La unitat de la resistència a la difusió del vapor és $\text{m}^2 \cdot \text{s} \cdot \text{Pa/kg}$.

Exemple 4.9

La resistència a la difusió del vapor d'una peça de poliestirè expandit és $2,2 \times 10^9 \text{ m}^2 \cdot \text{s} \cdot \text{Pa/kg}$. Calculeu-ne el gruix equivalent d'aire.

Solució. D'acord amb la definició de resistència a la difusió del vapor, $R_v = S_d / \Pi_0$, el gruix equivalent d'aire de la peça de poliestirè expandit és:

$$S_d = \Pi_0 \cdot R_v = 2,0 \cdot 10^{-10} \cdot 2,2 \cdot 10^9 = 0,44 \text{ m}.$$

Per tant, la resposta és: 0,44 m

4.9.4. Gruix equivalent d'un mur

El gruix equivalent d'aire d'un mur multicapa, S_d , és la suma aritmètica dels gruixos equivalents d'aire, $S_{d,j}$, de les N capes que el conformen, més els gruixos equivalents d'aire de les superfícies interior i exterior, $S_{d,si}$ i $S_{d,se}$:

$$S_d = \sum_{j=1}^N S_{d,j} + S_{d,si} + S_{d,se} \quad (4.13)$$

En condicions estacionàries, la pressió de vapor es manté constant. Si, a més, no hi ha condensació del vapor ni ventilació directa des de l'interior del mur cap enfora (per exemple, mitjançant una cambra d'aire), el flux de vapor, F , és el mateix a totes les capes interiors al mur. En aquestes circumstàncies, *el gruix equivalent d'aire enfront de la difusió del vapor*, S_d , d'un mur que separa l'aire interior amb pressió de vapor $P_{v,ai}$ de l'aire exterior amb pressió de vapor $P_{v,ae}$ compleix l'equació:

$$F = \Pi_0 \cdot (P_{v,ai} - P_{v,ae}) / S_d \quad (4.14)$$

La demostració segueix les mateixes pautes que s'han vist al capítol 3.1 per deduir la resistència tèrmica d'un mur.

4.10. Condensació intersticial

Una conseqüència de la difusió de vapor d'aigua a través dels murs de tancament dels edificis és que *aquest vapor es pot condensar a l'interior dels murs si es donen les circumstàncies adients*: concretament, que *localment la pressió de vapor iguali la pressió de saturació* (o, el que és equivalent, que la temperatura de rosada iguali la temperatura

real). Les condensacions a l'interior dels murs s'anomenen *condensacions intersticials* i tenen efectes no volguts sobre les prestacions del mur:

- deteriorament
- corrosió
- insalubritat
- trencament de l'aïllament tèrmic

A més, un cop produïda una condensació intersticial, aquesta és difícil d'eliminar. Per tant, és més convenient prevenir-les i adequar el disseny del mur per tal d'evitar-les. La predicció del risc de condensacions intersticials passa per ser capaç de determinar la relació entre la pressió de vapor i la de saturació (o entre la temperatura real i la de rosada) a tot l'interior del mur. Per fer-ho, necessitem calcular el *perfil tèrmic* (secció 3.2) i el *perfil de vapor* al mur.

4.10.1. Perfil de vapor

El càlcul del *perfil de vapor en un mur* segueix les mateixes pautes que el del perfil tèrmic. Suposem que *les dades de què disposem són: els gruixos equivalents d'aire de les diferents capes del mur i a les superfícies interior i exterior, i les pressions de vapor a l'aire interior i a l'aire exterior*. Si no disposem de les pressions de vapor directament, les podem calcular a partir de les humitats relatives i de les temperatures corresponents. El *mètode de càlcul del perfil de vapor* seria el següent:

- a. *Determinar el gruix equivalent d'aire total, S_d , tenint en compte els de cada capa, incloses les cambres d'aire, si n'hi ha, i els proporcionats per les superfícies externa i interna:*

$$S_d = S_{d,si} + S_{d,se} + \sum S_{d,j}$$

A la pràctica, els gruixos equivalents d'aire superficials, $S_{d,si}$ i $S_{d,se}$, són molt petits, de l'ordre d'1 cm, i moltes vegades es poden negligir en el càlcul del perfil de vapor:

$$S_d \approx \sum S_{d,j}$$

- b. *Determinar la pressió de vapor a la superfície de cada capa, començant, per exemple, per la pressió de vapor a la superfície interior de l'estructura:*

$$P_{v,si} = P_{v,ai} - \frac{S_{d,si}}{S_d} (P_{v,ai} - P_{v,ae})$$

Si es negligeix el gruix equivalent d'aire de la superfície interior, la pressió de vapor a la superfície interior coincideix amb la pressió de vapor de l'aire interior:

$$S_{d,si} \approx 0 \Rightarrow P_{v,si} \approx P_{v,ai}$$

- c. *Continuar determinant la pressió de vapor a la superfície de separació de cada capa, fins arribar a la superfície exterior:*



$$P_{v,1} = P_{v,si} - \frac{S_{d,1}}{S_d} (P_{v,ai} - P_{v,ae}); \quad P_{v,j+1} = P_{v,j} - \frac{S_{d,j+1}}{S_d} (P_{v,ai} - P_{v,ae}), \text{ etc.}$$

Exemple 4.10

Un mur està compost per les capes següents, ordenades d'interior a exterior: 2 cm de guix de permeabilitat $0,045 \text{ g/m}\cdot\text{h}\cdot\text{kPa}$; 12 cm de totxana de permeabilitat $0,080 \text{ g/m}\cdot\text{h}\cdot\text{kPa}$; capa hidròfuga de 5 mm i $0,022 \text{ g/m}\cdot\text{h}\cdot\text{kPa}$; barrera de vapor de resistència a la difusió del vapor $83,33 \text{ m}^2\cdot\text{h}\cdot\text{kPa/g}$; placa de poliestirè expandit de 2,5 cm i $0,023 \text{ g/m}\cdot\text{h}\cdot\text{kPa}$, i totxana vista de 12 cm i $0,080 \text{ g/m}\cdot\text{h}\cdot\text{kPa}$. Les pressions de vapor a la superfície interior i la superfície exterior són, respectivament, $1,339 \text{ kPa}$ i $0,447 \text{ kPa}$. Determineu-ne el perfil de vapor.

Solució. En determinarem el perfil de vapor seguint el mètode que hem descrit més amunt. Com a pas previ, calculem els gruixos equivalents d'aire de cada material:

- Guix (equació 4.11):

$$S_{d,1} = \frac{e \cdot \Pi_0}{\Pi} = 0,02 \text{ m} \cdot \frac{2,0 \cdot 10^{-10} \frac{\text{kg}}{\text{m}\cdot\text{s}\cdot\text{Pa}}}{0,045 \frac{\text{g}}{\text{m}\cdot\text{h}\cdot\text{kPa}}} \cdot \frac{3600 \text{ s}}{1 \text{ h}} \cdot \frac{1000 \text{ Pa}}{1 \text{ kPa}} \cdot \frac{1000 \text{ g}}{1 \text{ kg}} = 0,32 \text{ m}$$

- Totxana, $S_{d,2} = e \cdot \Pi_0 / \Pi = 1,08 \text{ m}$
- Capa hidròfuga, $S_{d,3} = e \cdot \Pi_0 / \Pi = 0,16 \text{ m}$
- Barrera de vapor:

$$S_{d,4} = \Pi_0 \cdot R_v = 2,0 \cdot 10^{-10} \frac{\text{kg}}{\text{m}\cdot\text{s}\cdot\text{Pa}} \cdot 83,33 \frac{\text{m}^2\cdot\text{h}\cdot\text{kPa}}{\text{g}} \cdot \frac{3600 \text{ s}}{1 \text{ h}} \cdot \frac{1000 \text{ Pa}}{1 \text{ kPa}} \cdot \frac{1000 \text{ g}}{1 \text{ kg}} = 60,00 \text{ m}$$

- Poliestirè expandit, $S_{d,5} = e \cdot \Pi_0 / \Pi = 0,94 \text{ m}$
- Totxana, $S_{d,6} = e \cdot \Pi_0 / \Pi = 1,08 \text{ m}$

I, ara, procedim amb el mètode, pas a pas:

- Gruix equivalent d'aire total,

$$S_d = S_{d,1} + S_{d,2} + S_{d,3} + S_{d,4} + S_{d,5} + S_{d,6} = 63,58 \text{ m.}$$

- L'enunciat ja ens proporciona les pressions de vapor a la superfície interior i exterior:

$$P_{v,ai} = P_{v,si} = 1.339 \text{ Pa i } P_{v,ae} = P_{v,se} = 447 \text{ Pa}$$

- Pressió de vapor a la superfície de cada capa, començant per la superfície interior del guix, $P_{v,0} = P_{v,si} = 1.339 \text{ Pa}$, i aplicant recurrentment la relació:

$$P_{v,j+1} = P_{v,j} - \frac{S_{d,j+1}}{S_d} (P_{v,ai} - P_{v,ae})$$

- Superfície de separació guix-totxana:

$$P_{v,1} = P_{v,0} - \frac{S_{d,1}}{S_d} (P_{v,ai} - P_{v,ae}) = 1.339 - \frac{0,32}{63,58} (1.339 - 447) = 1334,5 \text{ Pa}$$

- Superfície de separació totxana-capla hidròfuga:

$$P_{v,2} = P_{v,1} - \frac{S_{d,2}}{S_d} (P_{v,ai} - P_{v,ae}) = 1334,5 - \frac{1,08}{63,58} (1.339 - 447) = 1319,3 \text{ Pa}$$

- Superfície entre capa hidròfuga i barrera de vapor: $P_{v,3} = 1317,1$ Pa
- Superfície entre barrera de vapor i poliestirè expandit: $P_{v,4} = 477,5$ Pa
- Superfície entre poliestirè expandit i totxana: $P_{v,5} = 464,3$ Pa
- Finalment, a la superfície exterior de la totxana vista, la pressió de vapor és: $P_{v,6} = P_{v,se} = 447$ Pa

Fixeu-vos que, amb cinc capes, hem trobat quatre pressions de vapor a les superfícies intercapa més dues pressions de vapor a les superfícies exterior i interior.

Per tant, la resposta és: $P_{v,si} = 1.339$ Pa, $P_{v,i} = 1.335$ Pa, $P_{v,2} = 1.319$ Pa, $P_{v,3} = 1.317$ Pa, $P_{v,4} = 478$ Pa, $P_{v,5} = 464$ Pa, i $P_{v,se} = 447$ Pa

4.10.2. Risc de condensació: diagrama de Glaser

El diagrama de Glaser³ és una representació gràfica de les distribucions de P_v i de P_s (o, alternativament, de T i de T_R) a l'interior d'un mur. El càlcul del diagrama de Glaser permet identificar possibles problemes de condensacions intersticials abans que es produeixin. Per tal que sigui efectiu, cal aplicar-lo en les condicions més favorables per a l'aparició de condensacions:

- temperatures mínimes pel lloc d'emplaçament de l'edifici i
- humitat relativa mitjana al mateix lloc i època

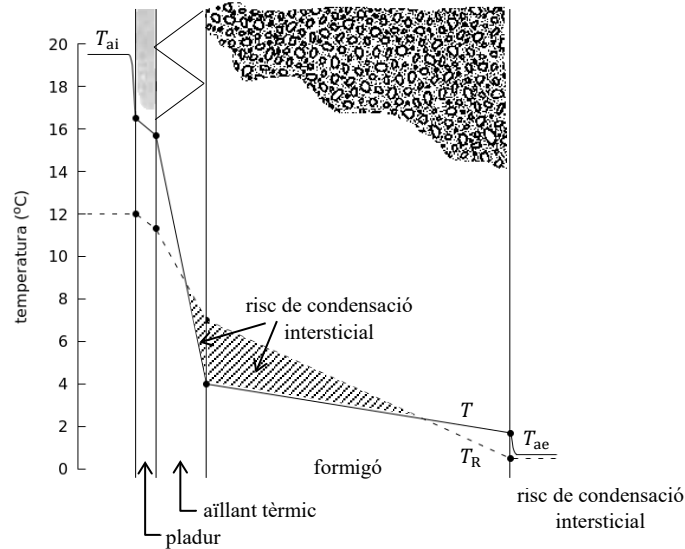
En aquestes circumstàncies, i pensant en un edifici climatitzat, la temperatura interior serà superior a la temperatura exterior. D'altra banda, normalment la pressió de vapor a l'interior d'un edifici ocupat serà més alta que a l'exterior. Per tant, els perfils tant de temperatura com de temperatura de rosada seran decreixents de dins cap enfora.

La figura següent mostra un exemple de diagrama de Glaser per a un tancament format per tres capes: la més interior de pladur, la del mig de poliestirè expandit (EPS) i l'exterior de formigó. La línia contínua representa la temperatura i la discontinua, la temperatura de rosada. La zona on $T_R > T$ és la zona de risc de condensacions intersticials que, a la figura, comprèn part de l'EPS i del formigó.

Com ja s'ha comentat a la secció 4.4, és impossible que la pressió de vapor sigui superior a la de saturació, com també és impossible que la temperatura sigui inferior a la temperatura de rosada. No obstant això, al diagrama de Glaser es pot identificar una zona, la zona de risc de condensació intersticial, on formalment obtenim el resultat que $T_R > T$.

³ Diagrama creat pel físic alemany Helmut Glaser a mitjan anys cinquanta del segle passat.

Fig. 4.3
Exemple de diagrama de Glaser per a una paret amb tres capes: pladur, aïllant tèrmic i formigó. La línia contínua representa la distribució de temperatura, T , i la línia discontinua, la de la temperatura de rosada, T_R . També estan senyalitzades la temperatura de l'aire interior, T_{ai} , i la de l'aire exterior, T_{ae} .



Aquest resultat ens serveix per identificar el problema (la condensació intersticial) i implica que l'aigua es condensa, motiu pel qual el flux de vapor a través de les diferents capes deixa de ser constant i el perfil de vapor no es pot calcular seguint el procediment explicat a la secció 4.10.1. És a dir, *l'únic resultat vàlid que ens deixa el diagrama de Glaser és la detecció del problema*. A la resolució del problema 4.8, podeu veure una anàlisi que va més enllà de la detecció del risc de condensació, en què es calcula el perfil real de vapor en un tancament amb condensació intersticial.

4.10.3. Actuacions anticondensacions

L'estratègia per evitar les condensacions intersticials consisteix a evitar que la pressió de vapor, P_v , assolixi el valor de saturació, P_s , o, el que és equivalent, garantir que la temperatura superi la temperatura de rosada. Per aconseguir-ho, es pot actuar sobre la temperatura del tancament o sobre la pressió de vapor.

- Primera opció: augmentar la temperatura i, per tant, la P_s a tot el tancament.
 - a. Instal·lant un aïllant tèrmic tan exterior com sigui possible.
 - b. Millorant l'aïllament tèrmic, en general.
- Segona opció: disminuir la pressió de vapor i, per tant, la T_R a tot el tancament.
 - c. Utilitzant cambres d'aire ventilades que desviïn part del vapor directament cap a l'exterior.
 - d. Disminuint la humitat interior per renovació de l'aire.
 - e. Instal·lant una *barrera de vapor tan interior com sigui possible*.

Una barrera de vapor és una capa prima de material amb gran resistència a la difusió del vapor: algunes pintures, solucions bituminoses, pel·lícules d'alumini, paper de vinil, etc. La instal·lació d'una barrera de vapor implica augmentar la renovació de l'aire interior per tal de garantir que el vapor d'aigua pugui ser evacuat eficientment de l'edifici.

4.11. Intrusió d'aigua líquida

Per cloure aquest capítol, descriurem dos fenòmens que poden tenir importància en la presència d'aigua líquida a l'interior dels tancaments. En aquest cas, es tracta d'aigua líquida que pot penetrar en els tancaments; per tant, no és condensació de vapor d'aigua i es pot produir encara que l'aire no estigui saturat d'humitat.

4.11.1. Capil·laritat

El fenomen de la capil·laritat consisteix en la formació d'una columna de líquid dintre d'un tub o orifici allargat i vertical, de secció petita, en contacte amb una massa del líquid.

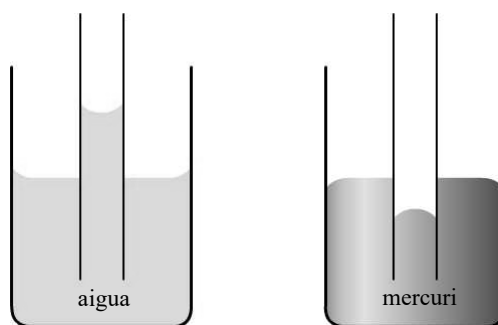


Fig. 4.4
Capil·laritat de l'aigua (esquerra) i del mercuri (dreta) en contacte amb un tub de vidre

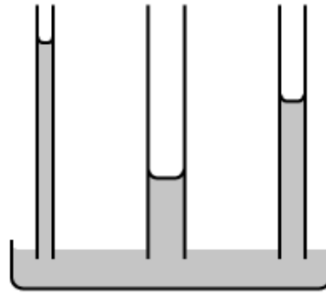
L'origen del fenomen es troba en les forces que exerceixen a la superfície del líquid tant les pròpies molècules del líquid com les de la superfície sòlida del tub. Si aquestes últimes predominen sobre les del líquid, existeix una força atractiva neta cap a les parets del tub que fa pujar el líquid, el qual adquireix la configuració que es pot veure a la imatge esquerra de la figura 4.4, amb la seva superfície còncava. Aquest és el cas de l'aigua en contacte amb el vidre o amb la majoria de materials de construcció.

També es pot donar el cas que les forces atractives entre les molècules del líquid siguin més grans que les exercides per les parets del tub, per exemple en el contacte del mercuri amb el vidre, llavors, en comptes d'una columna de líquid, s'observa una depressió del líquid dintre del tub (Fig. 4.4, dreta).

Com a conseqüència de la capil·laritat, si un mur es troba en contacte amb una massa d'aigua, normalment sota el terra, i tenint en compte que els materials de construcció contenen al seu interior buits interconnectats que poden actuar com els tubs de la figura 4.4, l'aigua pot pujar fins a una altura determinada i deteriorar el material del mur. L'altura a què pot pujar l'aigua depèn del calibre dels capil·lars interns: l'altura de la columna d'aigua és inversament proporcional al diàmetre dels capil·lars (Fig. 4.5).

El valor concret de l'altura de la columna d'aigua, per a un diàmetre capil·lar donat, varia molt poc entre els diferents materials de construcció. A una temperatura d'entre 10°C i 20°C, l'altura de la columna d'aigua és d'uns 3 cm si el diàmetre del capil·lar és d'1 mm, de 30 cm si el diàmetre és de 0,1 mm, etc. Cal ressenyar que els capil·lars dels ciments de construcció poden tenir diàmetres molt inferiors a una micra. A temperatures més altes, l'altura decreix lleugerament, i a temperatures més baixes passa el contrari.

Fig. 4.5
L'altura de la columna
d'aigua en un tub de
vidre és inversament
proporcional al diàme-
tre del tub capil·lar



Algunes estratègies per prevenir la intrusió d'aigua per capil·laritat en els murs són les següents:

- Ventilar amb una cambra d'aire sanitària.
- Drenar el terra al voltant del mur.
- Interposar en contacte amb el terra una capa de material amb un alt grau de porositat per tal que el diàmetre dels capil·lars sigui gran i l'aigua no pugi eficientment per capil·laritat.
- Tractar amb pigments (per exemple, negre de fum) els materials per tancar els capil·lars.

4.11.2. Higroscòpia

La higroscòpia és la capacitat d'alguns materials d'atraure i emmagatzemar molècules d'aigua al seu interior. En els materials sòlids, l'aigua és captada de l'aire en forma de vapor, les seves molècules queden adherides a la superfície interna dels buits del material (fenomen conegut com a *adsorció*) i es combinen formant aigua líquida. El procés contrari (*desorció*) també es pot donar: l'aigua present a l'interior d'un material pot tornar a l'aire humit en forma de vapor. El comportament higroscòpic d'un material depèn de tres factors: temperatura, humitat relativa de l'aire i concentració d'aigua en el material. En qualsevol cas, es tracta d'un procés lent i la resposta del material normalment va endarrerida respecte dels canvis ambientals, tot proporcionant una inèrcia que serveix per esmorteir els efectes d'eventuals fluctuacions de la humitat.

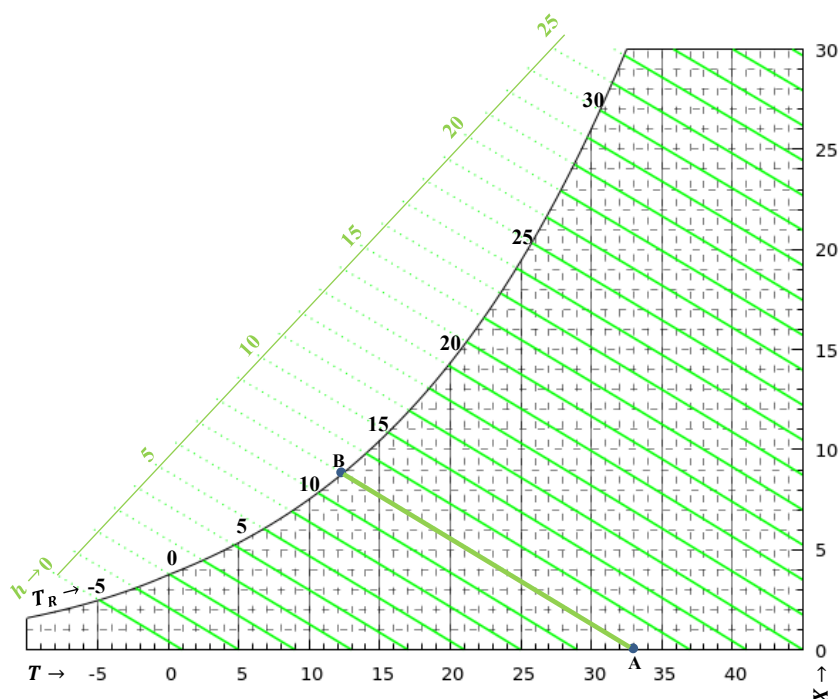
4.12. Problemes resolts

P4.1 Es polvoritza aigua en un volum ocupat inicialment per aire sec ($H_r = 0\%$) a una temperatura de 33°C . L'aigua absorbeix calor i es vaporitza, refredant l'aire i pujant-ne la humitat relativa. Fins a quina temperatura es pot refredar l'aire amb aquest procediment?

Solució:

En aquest procés, la calor latent absorbida per l'aigua és compensada per la calor sensible cedida per l'aire; per tant, la calor total és zero i l'entalpia es manté constant (i la massa d'aire sec és constant; per tant, l'entalpia específica també ho és). A l'àbac psicromètric que es mostra a continuació, s'han eliminat les línies d'humitat relativa constant i de volum específic constant per a més claredat. Suposarem que, en tot moment, la pressió atmosfèrica és 1 atm.

L'estat inicial correspon al punt A de l'àbac. Des d'aquest punt, cal seguir la línia d'entalpia específica constant (línia verda d'entalpia específica $h = 8$ kcal/kg d'aire), fins arribar a la saturació, estat representat pel punt B, al qual correspon una temperatura aproximada de 12°C . Des del moment en què s'arriba a la saturació, l'aire no pot absorbir més vapor d'aigua i, en cas de continuar polvoritzant, les gotes d'aigua es mantindrien en estat líquid.





P4.2 Un volum d'aire humit a 10,0°C i 1,0 atm de pressió conté vapor amb una humitat relativa del 80 %. Determineu-ne la humitat específica.

Solució:

A l'àbac psicromètric que es troba a continuació, l'estat que es descriu a l'enunciat correspon al punt A. La seva coordenada vertical, la humitat específica, és: $X_A = 6 \text{ g/kg}$ (sis grams de vapor d'aigua per a cada kilogram d'aire sec).

Si es vol millorar la precisió de la resposta, podem utilitzar la taula 4.1, de pressions de saturació. Al punt A, amb una temperatura de 10,0°C i humitat relativa del 80 %, la pressió de vapor és:

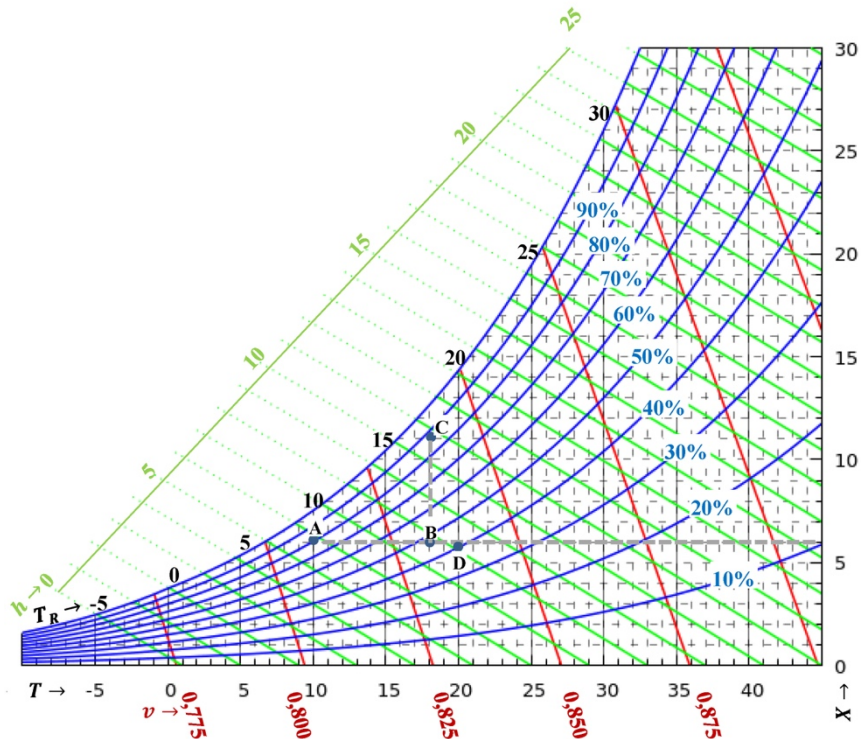
$$P_{v,A} = 0,80 \cdot P_s(10,0^\circ\text{C}) = 0,80 \cdot 12,28 = 9,82 \text{ hPa}$$

Amb l'aproximació de l'equació 4.5 (vàlida per a temperatures inferiors a 45°C), la relació entre humitat específica i pressió de vapor és:

$$P_v \approx X \frac{m_{a.s.}}{m_v} P_{\text{atm}} = 1,61X \text{ atm} = 1.632X \text{ hPa}$$

Igualant a 9,82 hPa, n'obtenim una humitat específica de $X_A = \frac{9,82}{1.632} = 0,00602$

kg de vapor d'aigua per a cada kg d'aire sec, és a dir: $X_A = 6,02 \text{ g/kg}$. Tenint en compte les xifres significatives de les dades, el resultat és: $X_A = 6,0 \text{ g/kg}$



- P4.3** El volum d'aire anterior s'escalfa fins a 18,0°C. Calculeu-ne la nova humitat relativa si la pressió atmosfèrica es manté a 1,0 atm.

Solució:

No hi ha variació de la quantitat de vapor d'aigua; per tant, la transformació es fa a humitat específica, X , constant, seguint la línia discontinua grisa fins als 18°C (punt B). La nova humitat relativa és, doncs, d'entre un 45 % i un 50 %, aproximadament.

En aquest problema, també podem millorar la precisió fent ús de la taula 4.1. La pressió de vapor a l'estat B és la mateixa que a A, $P_{v,B} = P_{v,A} = 9,82$ hPa, mentre que la pressió de saturació és: $P_s(18,0^\circ\text{C}) = 20,64$ hPa. En conseqüència, la humitat relativa a B és:

$$H_{R,B} = \frac{9,82}{20,64} = 48 \%$$

- P4.4** Al volum d'aire anterior se li afegeixen 5,0 g de vapor d'aigua per a cada kg d'aire, tot mantenint la temperatura constant a 18,0°C. Calculeu-ne la nova humitat relativa si la pressió atmosfèrica es manté a 1,0 atm.

Solució:

A l'àbac psicromètric, passem de l'estat B al C, de coordenada vertical: $6 + 5 = 11$ g/kg. La humitat relativa és aproximadament del 85%.

Si en volem millorar la precisió, podem actuar com a la solució del problema 4.2, relacionant la humitat específica amb la pressió de vapor i, a continuació, calcular la humitat relativa per comparació amb la pressió de saturació obtinguda de la taula 4.1. D'aquesta manera, la pressió de vapor a l'estat C és:

$$P_{v,C} \approx 1.632 \cdot X_C = 1.632 \cdot 0,01102 = 17,98 \text{ hPa}$$

Fixeu-vos que, en introduir el valor numèric de la humitat específica a l'equació 4.5, l'hem dividit per un factor 1.000 per passar de g/kg a kg/kg.

La pressió de saturació és la mateixa del problema anterior, atès que la temperatura no ha variat, i la humitat relativa és:

$$H_{R,C} = \frac{17,98}{20,64} = 87 \%$$

- P4.5** Una cuina de 25 m³ de volum està inicialment a 20°C, amb un 40 % d'humitat relativa. A continuació, es posa a bullir aigua, que s'evapora a raó de 14 g/min, i s'observa que al cap de 4 minuts el vidre de la finestra comença a entelar-se. Determineu la temperatura de la finestra, tot suposant que la pressió atmosfèrica és d'1 atm en tot moment i que l'ebullició de l'aigua canvia la humitat de l'aire de la cuina però no la seva temperatura.

Solució:

A mesura que l'aigua va bullint, augmenta la massa de vapor a la cuina (no es preveu l'ús d'una campana de ventilació). Eventualment, la pressió del vapor



igual a la pressió de saturació corresponent a la temperatura de la superfície interior de la finestra, moment en què aquesta es comença a entelar. Per tant, caldrà determinar la pressió de vapor 4 minuts després de començar el procés d'ebullició. Inicialment, la pressió de vapor de l'aire humit és:

$$P_v = 0,40 \cdot P_s(20^\circ\text{C}) = 0,40 \cdot 23,39 = 9,36 \text{ hPa}$$

i la humitat específica, $X \approx P_v / 1.632 = 0,00573 \text{ kg/kg} = 5,73 \text{ g/kg}$.

Al ritme constant d'evaporació donat a l'enunciat, en 4 minuts la massa de vapor d'aigua augmenta en 56 g. Per calcular quina és la variació de la humitat específica, necessitem conèixer la massa inicial d'aire a la cuina en la qual es dilueix l'aigua evaporada. L'àbac psicromètric ens en proporciona un valor aproximat pel volum específic de l'aire sec en les condicions inicials (punt D a l'àbac): $v \approx 0,84 \text{ m}^3/\text{kg}$. La massa continguda en 25 m^3 és: $25/0,84 = 29,8 \text{ kg}$, i el canvi en la humitat

específica: $\Delta X = \frac{56}{29,8} = 1,88 \text{ g/kg}$. Per tant, la humitat específica final, al cap de

4 minuts, és: $X' = 5,73 + 1,88 = 7,61 \text{ g/kg}$, i la pressió de vapor corresponent: $P'_v \approx 1.632 \cdot X' = 1.632 \cdot 0,00761 = 12,4 \text{ hPa}$. A la taula 4.1, podem comprovar que la temperatura de rosada corresponent a $12,4 \text{ hPa}$ es troba entre 10°C i 11°C , aproximadament a $10,1^\circ\text{C}$.

P4.6 Una paret està composta per una capa interior, A, de 10 mm de gruix; una capa, B, de poliestirè expandit de 22 mm, i una capa, C, de 15 cm de formigó. L'aire en contacte amb la superfície interior de la paret es troba a 20°C i al 59 % d'humitat relativa, i l'aire en contacte amb la superfície exterior es troba a 0°C i saturat d'humitat. Els factors de resistència a la difusió del vapor de les diferents capes i el perfil tèrmic de la paret, en les condicions esmentades, es donen més endavant. Dibuixeu el diagrama de Glaser i determineu si hi ha risc de condensacions. Com es podria millorar el disseny de la paret?

Dades: $\mu_A = 10$; $\mu_B = 20$; $\mu_C = 6,0$; $T_{si} = 17,75^\circ\text{C}$; $T_{A-B} = T_i = 16,65^\circ\text{C}$; $T_{B-C} = T_2 = 2,93^\circ\text{C}$; $T_{se} = 1,01^\circ\text{C}$

Solució:

Per dibuixar el diagrama de Glaser, hem d'obtenir el perfil de vapor i el perfil de pressions de saturació o, alternativament, el perfil tèrmic (que, en aquest problema, ja ens ha estat proporcionat a l'enunciat) i el perfil de temperatures de rosada.

Per calcular el perfil de vapor, seguim el mètode que es detalla a la secció 4.10, del qual també hem vist una aplicació a l'exemple 4.10.

Comencem per calcular els gruixos equivalents d'aire de cada capa:

- Capa A, $S_{d,1} = e_A \cdot \mu_A = 0,010 \cdot 10 = 0,10 \text{ m}$
- Capa B, $S_{d,2} = e_B \cdot \mu_B = 0,44 \text{ m}$
- Capa C, $S_{d,3} = 0,90 \text{ m}$

I, ara, procedim amb el mètode, pas a pas:

- a. Gruix equivalent d'aire total:

$$S_d = S_{d,1} + S_{d,2} + S_{d,3} = 1,44 \text{ m}$$

- b. Les pressions de vapor a les superfícies interior i exterior les deduïm a partir de les respectives temperatures i humitats relatives:

$$P_{v,si} = P_{v,ai} = 0,59 \cdot P_s (20^\circ \text{C}) = 1.379 \text{ Pa};$$

$$P_{v,se} = P_{v,ae} = P_s (0^\circ \text{C}) = 611 \text{ Pa}$$

- c. Pressió de vapor a la superfície de cada capa, començant per la superfície interior de la capa A, $P_{v,0} = P_{v,si} = 1.379 \text{ Pa}$, i aplicant-hi recurrentment la relació:

$$P_{v,j+1} = P_{v,j} - \frac{S_{d,j+1}}{S_d} (P_{v,ai} - P_{v,ae})$$

Superfície de separació entre les capes A i B:

$$P_{v,1} = P_{v,0} - \frac{S_{d,1}}{S_d} (P_{v,ai} - P_{v,ae}) = 1.379 - \frac{0,10}{1,44} (1.379 - 611) = 1.326 \text{ Pa}$$

Superfície de separació entre les capes B i C:

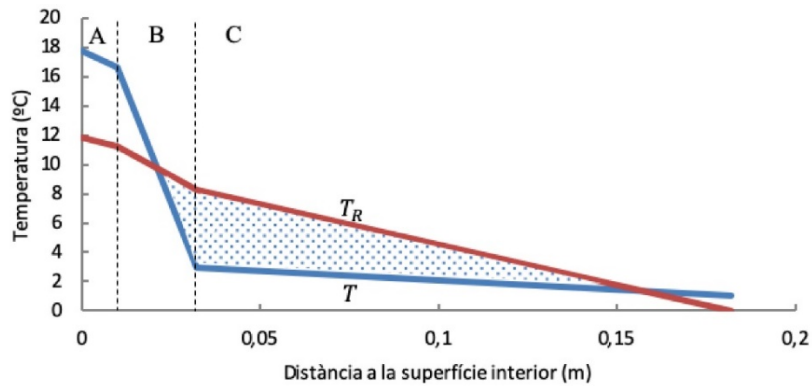
$$P_{v,2} = P_{v,1} - \frac{S_{d,2}}{S_d} (P_{v,ai} - P_{v,ae}) = 1.326 - \frac{0,44}{1,44} (1.379 - 611) = 1.091 \text{ Pa}$$

La pressió de vapor a la superfície externa de la capa C ja s'ha calculat:

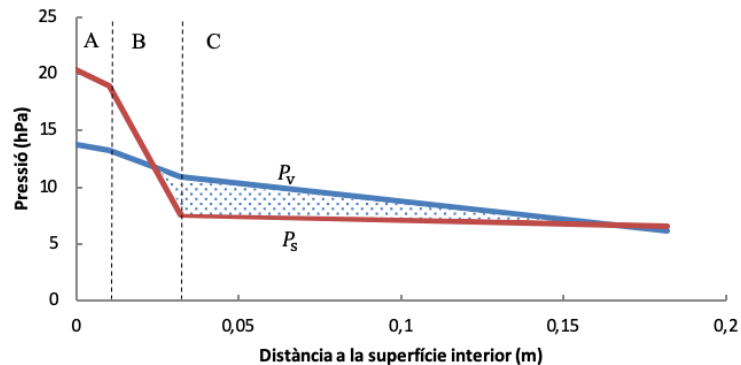
$$P_{v,se} = 611 \text{ Pa}$$

Ara que ja disposem del perfil de pressions de vapor (conjunt de valors de $P_{v,si}$, $P_{v,1}$, $P_{v,2}$ i $P_{v,se}$), en podem calcular les respectives temperatures de rosada mitjançant la taula 4.1. El valor de $P_{v,si} = 1.379 \text{ Pa} = 13,79 \text{ hPa}$ es troba entre les pressions de saturació d' 11°C i 12°C . Amb una regla de tres, com ja hem fet a l'exemple 4.3, obtenim un valor aproximat de la temperatura de rosada de $T_{R,si} = 11,7^\circ \text{C}$. De manera similar, les temperatures de rosada corresponents a les altres pressions de vapor són: $T_{R,1} = 11,1^\circ \text{C}$, $T_{R,2} = 8,2^\circ \text{C}$, i $T_{R,se} = 0^\circ \text{C}$. De fet, el valor d'aquesta última el podem haver deduït directament de la informació que l'aire exterior és saturant.

Traslladant al diagrama de Glaser les temperatures (línia blava) i les temperatures de rosada (línia vermella), es pot comprovar que hi ha risc de condensació ($T \leq T_R$) a les capes B i C.



Complementàriament, determinarem també l'aspecte del diagrama de Glaser quan es representen les pressions de vapor i de saturació, en comptes de les temperatures. A aquest efecte, necessitem calcular les pressions de saturació corresponents al perfil tèrmic proporcionat a l'enunciat. Tornem a fer ús de la taula 4.1, interpolant entre els valors de temperatura de la taula per excés i per defecte de cada temperatura. Així n'obtenim els valors següents: $P_s(T_{si}) = 20,33$ hPa; $P_s(T_1) = 18,96$ hPa; $P_s(T_2) = 7,54$ hPa; $P_s(T_{se}) = 6,52$ hPa. A continuació, es pot veure el diagrama de Glaser en funció de les pressions de vapor (línia blava) i les pressions de saturació (línia vermella). Evidentment, el resultat és el mateix que ja mostrava el diagrama en funció de les temperatures, és a dir, hi ha risc de condensació ($P_v \geq P_s$) a les capes B i C.



Per millorar el disseny de la paret i evitar el risc de condensacions intersticials, es pot seguir qualsevol de les estratègies esmentades a la secció 4.10.3. En particular, si encara és possible, es pot augmentar la temperatura de tota la paret col·locant l'aïllament tèrmic a l'exterior, és a dir, intercanviant les capes B (que és l'aïllament tèrmic) i C. Alternativament, es podria instal·lar una barrera de vapor a la superfície interior de la paret.

- P4.7** Amb les mateixes dades ambientals del problema anterior (temperatura i humitat relativa), determineu la ventilació necessària per tal de mantenir el grau d'humitat interior si els tancaments exteriors de l'edifici tenen un gruix equivalent d'aire,

$S_d = 1,44$ m, i presenten una àrea de 200 m^2 ; el volum d'aire interior és de 250 m^3 ; la generació de vapor a l'edifici és de 370 g/h (sense comptar l'ocupació humana), i és ocupada, de mitjana, per dues persones (generació de vapor per persona = 50 g/h). Supposeu que no hi ha condensació.

Solució:

En aquest problema, es busca el ritme de ventilació adient per mantenir l'equilibri entre la producció de vapor i la seva eliminació, per difusió a través dels tancaments i per ventilació, de manera que es pugui mantenir la humitat relativa de l'aire interior. Hi apliquem l'equació de balanç de vapor (equació 4.7):

$$\dot{m}_v = r_{\text{gen}} - r_{\text{difú}} - r_{\text{vent}}$$

imposant-ne la condició d'equilibri: $\dot{m}_v = 0 \Rightarrow r_{\text{vent}} = r_{\text{gen}} - r_{\text{difú}}$

La difusió del vapor es pot trobar amb l'equació 4.8: $r_{\text{difú}} = F \cdot A$, on $A = 200 \text{ m}^2$ és l'àrea exterior dels tancaments i F és el flux de vapor. L'equació 4.14 relaciona el flux de vapor a través dels tancaments amb el gruix equivalent d'aire:

$$F = \Pi_0 \cdot (P_{v,\text{ai}} - P_{v,\text{ae}}) / S_d$$

Els valors de les pressions de vapor de l'aire interior i exterior, $P_{v,\text{ai}} = 1.379 \text{ Pa}$ i $P_{v,\text{ae}} = 611 \text{ Pa}$, ja s'han determinat durant la resolució del problema anterior. Substituint-hi els valors adients, se n'obté el resultat: $F = 1,067 \cdot 10^{-7} \text{ kg/m}^2 \cdot \text{s}$, i el ritme de pèrdua de vapor com a conseqüència de la difusió a través dels tancaments, que és: $r_{\text{difú}} = 2,13 \cdot 10^{-5} \text{ kg/s}$.

Per al càlcul anterior, hem hagut de suposar que no hi ha condensació intersticial o, cosa equivalent, que el flux de vapor és el mateix a totes les capes del tancament, condició necessària per poder aplicar l'equació 4.14. Si hi hagués condensació intersticial, el flux de vapor que penetraria al tancament seria més gran que el que en sortiria, i la diferència ens donaria el ritme a què es condensa el vapor d'aigua a l'interior del tancament.

El ritme de generació de vapor a l'interior de l'edifici el podem calcular directament amb les dades de l'enunciat:

$$r_{\text{gen}} = 370 + 2 \cdot 50 = 470 \text{ g/h} = \frac{0,470 \text{ kg}}{3600 \text{ s}} = 1,306 \cdot 10^{-4} \text{ kg/s}$$

Per tant, la condició d'equilibri esmentada ens proporciona el ritme volgut de pèrdua de vapor per ventilació:

$$r_{\text{vent}} = r_{\text{gen}} - r_{\text{difú}} = 1,093 \cdot 10^{-4} \text{ kg/s}$$

Per completar la resolució del problema, hem de calcular l'índex de renovació de l'aire, n , que es relaciona amb r_{vent} per l'equació 4.9:

$$r_{\text{vent}} = n \cdot V \cdot (H_{a,\text{ai}} - H_{a,\text{ae}})$$

El volum és, segons l'enunciat, $V = 250 \text{ m}^3$. Les humitats absolutes les podem calcular aplicant l'equació 4.4:

$$P_v = \frac{H_a}{m_v} RT \Rightarrow H_a = \frac{P_v \cdot m_v}{RT}$$

Recordem que les temperatures han d'estar expressades en kelvin: $T_{ai} = 293,15$ K i $T_{ae} = 273,15$ K. Les humitats absolutes resulten ser: $H_{a,ai} = 0,0102$ kg/m³ i $H_{a,ae} = 0,0048$ kg/m³

Ara, ja podem resoldre l'índex de renovació de l'aire:

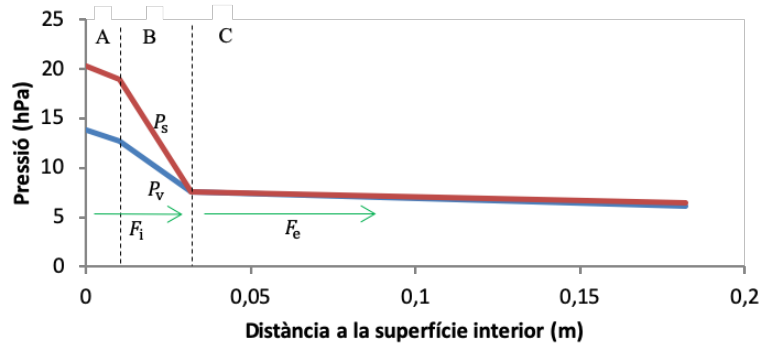
$$n = \frac{r_{vent}}{V(H_{a,ai} - H_{a,ae})} = 8,10 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1} = 0,29 \text{ h}^{-1}$$

és a dir, es renova una fracció 0,29 del volum d'aire interior cada hora. És a dir, el temps que triga a renovar-se tot el volum d'aire interior és $1/0,29 = 3,4$ hores.

P4.8 Determineu el ritme al qual es condensa el vapor d'aigua a l'interior del tancament del problema 4.6.

Solució:

A la pràctica, en presència de condensació intersticial, el flux de vapor a les dues capes més internes serà diferent al flux de vapor a la capa externa, i el ritme de condensació en serà la diferència. Com que la pressió de vapor real no pot superar mai la pressió de saturació, el perfil de vapor real a l'interior del mur difereix del que s'ha calculat al problema 4.6 i adopta l'aspecte següent:



Com es pot veure, la pressió de vapor a l'extrem de la capa en què s'ha detectat la condensació de vapor, capa B, s'ha igualat al valor màxim possible, és a dir, a la corresponent pressió de saturació en aquell mateix punt: $P'_{v,2} = P_s(T_2) = 7,54$ hPa. A partir d'aquest valor, podem calcular el flux de vapor des de l'interior, F_i , i el flux cap a l'exterior, F_e . En fer-ho, tindrem en compte les diferències entre $P'_{v,2}$ i les pressions de vapor de l'aire (exterior i interior), i el gruix equivalent d'aire total de les capes que separen els dos ambients en qüestió (capa 3 cap a l'exterior, i capes 1 i 2 cap a l'interior):

$$F_e = \Pi_0 \cdot \frac{(P'_{v,2} - P_{v,ae})}{S_{d,3}} = 3,18 \cdot 10^{-8} \text{ kg/m}^2 \cdot \text{s};$$

$$F_i = \Pi_0 \cdot \frac{(P_{v,ai} - P'_{v,2})}{S_{d,1} + S_{d,2}} = 2,315 \cdot 10^{-7} \text{ kg/m}^2 \cdot \text{s}.$$

Observeu que el flux de vapor cap a l'exterior és inferior al que hem calculat al problema 4.7, en què hem fet la hipòtesi que no hi havia condensació intersticial, però, en canvi, el flux de vapor des de l'interior és més gran.

El ritme al qual es condensa el vapor a l'interior del mur és: $F_i - F_e = 2,0 \cdot 10^{-7} \text{ kg/m}^2 \cdot \text{s}$. Si l'àrea dels tancaments és de 200 m^2 , es condensaran 0,040 grams cada segon i, si la condició es manté indefinidament, 100 kg d'aigua al mes!

P4.9 Un mur de maons de 102 mm està aïllat interiorment per una capa de 40 mm de llana mineral, seguida de pladur de 10 mm. Les resistivitats a la difusió del vapor dels diferents materials es donen més endavant. Determineu el gruix equivalent d'aire del mur.

Dades: $r_{v,maó} = 6,0 \cdot 10^{10} \text{ m} \cdot \text{s} \cdot \text{Pa/kg}$; $r_{v,llana} = 5 \cdot 10^9 \text{ m} \cdot \text{s} \cdot \text{Pa/kg}$;

$r_{v,pladur} = 5 \cdot 10^{10} \text{ m} \cdot \text{s} \cdot \text{Pa/kg}$

Solució:

El gruix equivalent d'aire de cada capa ve donat per l'equació 4.11:

$$S_{d,i} = e_i \cdot \mu_i$$

on el factor de resistència a la difusió del vapor es pot relacionar amb la resistivitat a la difusió del vapor mitjançant: $\mu_i = \frac{\Pi_0}{\Pi_i} = \Pi_0 \cdot r_{v,i}$. Per exemple, pel maó:

$$\mu_{maó} = \Pi_0 \cdot r_{v,maó} = 2,0 \cdot 10^{-10} \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s} \cdot \text{Pa}} \cdot 6,0 \cdot 10^{10} \frac{\text{m} \cdot \text{s} \cdot \text{Pa}}{\text{kg}} = 12$$

Operant de forma anàloga amb els altres dos materials: $\mu_{llana} = 1$; $\mu_{pladur} = 10$.

L'enunciat del problema proporciona directament els gruixos de cada capa: $e_{maó} = 0,102 \text{ m}$; $e_{llana} = 0,040 \text{ m}$; $e_{pladur} = 0,010 \text{ m}$.

Els respectius gruixos equivalents d'aire són: $S_{d,maó} = e_{maó} \cdot \mu_{maó} = 1,22 \text{ m}$; $S_{d,llana} = 0,04 \text{ m}$; $S_{d,pladur} = 0,10 \text{ m}$. El gruix equivalent d'aire del mur és la suma dels de cada capa:

$$S_d = S_{d,maó} + S_{d,llana} + S_{d,pladur} = 1,36 \text{ m} \approx 1,4 \text{ m}$$

P4.10 Un tancament està format per les capes següents (ordenades d'interior a exterior): guix d'1,5 cm, maó foradat de 5,3 cm, capa de 50 mm de llana de vidre impermeabilitzada a la cara interior, i maó de cara vista d'11,5 cm. La resistència a la



difusió del vapor de la barrera de vapor és de $2,4 \cdot 10^{10} \text{ m}^2 \cdot \text{s} \cdot \text{Pa/kg}$. Les resistivitats a la difusió del vapor de la resta de capes es donen més endavant. Determineu el gruix equivalent d'aire del tancament.

Dades: $r_{v, \text{guix}} = 6 \cdot 10^{10} \text{ m} \cdot \text{s} \cdot \text{Pa/kg}$; $r_{v, \text{maó_foradat}} = 3 \cdot 10^{10} \text{ m} \cdot \text{s} \cdot \text{Pa/kg}$;
 $r_{v, \text{llana}} = 9 \cdot 10^9 \text{ m} \cdot \text{s} \cdot \text{Pa/kg}$; $r_{v, \text{maó_vist}} = 4,3 \cdot 10^{10} \text{ m} \cdot \text{s} \cdot \text{Pa/kg}$

Solució:

Aquest problema es resol de forma similar al problema 4.9; l'única diferència és la presència d'una capa impermeabilitzant, la barrera de vapor, de la qual coneixem la resistència a la difusió del vapor: $R_{v, \text{barrera}} = 2,4 \cdot 10^{10} \text{ m}^2 \cdot \text{s} \cdot \text{Pa/kg}$. El corresponent gruix equivalent d'aire de la barrera de vapor és (v. exemple 4.9):

$$S_{d, \text{barrera}} = \Pi_0 \cdot R_{v, \text{barrera}} = 2,0 \cdot 10^{-10} \cdot 2,4 \cdot 10^{10} = 4,8 \text{ m}$$

Les resistències a la difusió del vapor i els gruixos equivalents d'aire de les altres capes són: $\mu_{\text{guix}} = \Pi_0 \cdot r_{v, \text{guix}} = 12$; $S_{d, \text{guix}} = e_{\text{guix}} \cdot \mu_{\text{guix}} = 0,180 \text{ m}$; $\mu_{\text{maó_foradat}} = 6$;
 $S_{d, \text{maó_foradat}} = 0,318 \text{ m}$; $\mu_{\text{llana}} = 1,8$; $S_{d, \text{llana}} = 0,090 \text{ m}$; $\mu_{\text{maó_vist}} = 8,6$;
 $S_{d, \text{maó_vist}} = 0,989 \text{ m}$

Finalment, el gruix equivalent d'aire del tancament és la suma:

$$S_d = S_{d, \text{guix}} + S_{d, \text{maó_foradat}} + S_{d, \text{barrera}} + S_{d, \text{llana}} + S_{d, \text{maó_vist}} = 6,377 \text{ m} \approx 6,4 \text{ m}$$

4.13. Problemes proposats

P4.11 Un volum d'aire humit a 10°C té una pressió de vapor de 540 Pa. Calculeu-ne la humitat relativa.

R: 44%

P4.12 Un volum d'aire a 0°C conté vapor amb humitat relativa del 80%. Calculeu-ne la humitat específica.

Nota: En aquest problema i en els que vénen a continuació, considereu, llevat que explícitament es digui el contrari, que la pressió atmosfèrica és, en tot moment, d'1 atm.

R: 3 g/kg

P4.13 El volum d'aire anterior s'escalfa fins a 18°C . Calculeu-ne la nova humitat relativa.

R: 24%

P4.14 Al volum d'aire anterior, se li afegeixen 5,0 g de vapor d'aigua per a cada kg d'aire, tot mantenint la temperatura constant a 18°C . Calculeu-ne la nova humitat relativa.

R: 63%

P4.15 A quina temperatura es condensaria l'aire del problema anterior?

R: aproximadament, a 11°C

P4.16 En un dia d'hivern, es renova completament l'aire d'una casa fent-hi entrar aire de l'exterior a 0°C , amb una humitat relativa del 30 %, que després s'escalfa fins a 20°C sense canviar el contingut de vapor d'aigua. Determineu-ne la humitat relativa final dins la casa.

R: 8 %

P4.17 Considereu un volum d'aire a una temperatura de 32°C i amb una humitat relativa del 30 %. D'acord amb l'àbac psicromètric, quina entalpia específica té?

R: 13 kcal/kg d'aire sec

P4.18 Si es polvoritza aigua al volum del problema anterior, aquesta absorbeix calor i es vaporitza, refreda l'aire i puja la seva humitat relativa. Fins a quina temperatura es pot refredar l'aire si no es vol que la humitat relativa sobrepassi el 70 %?

R: 24°C

P4.19 Determineu, mitjançant l'àbac psicromètric, la calor sensible i la calor latent intercanviades per l'aire humit en els problemes 4.13 i 4.14, tot suposant que la massa d'aire sec és d'1 kg.

R: $Q_s \approx 4,5$ kcal, $Q_l \approx 3$ kcal

P4.20 L'aire d'una habitació és a 20°C , amb una humitat relativa del 60 %, mentre que les parets es troben a 15°C . Determineu si hi haurà condensació superficial.

R: No

P4.21 En un dia d'estiu, es renova completament l'aire d'una casa fent-hi entrar aire de l'exterior a 37°C , amb una humitat relativa del 68 %, que després es refreda mitjançant un sistema d'aire condicionat.

- Si l'aire condicionat no canvia la humitat específica de l'aire exterior, quina és la temperatura mínima que es pot seleccionar per tal d'evitar que hi hagi condensació?
- Fins a quin valor ha de disminuir la humitat específica per poder arribar a 25°C sense que es produeixi condensació?

R: a) 31°C ; b) 19 g/kg

P4.22 Quan la superfície d'una paret té una temperatura d' 11°C i l'aire de 14°C , comença a produir-se condensació superficial.

- Determineu la humitat relativa de l'aire.
- En quin percentatge s'hauria de baixar la humitat específica perquè la temperatura de rosada baixés 5°C ?

R: a) 82%; b) 29%

P4.23 En un espai tancat, es vol refredar l'aire pel sistema de polvorització d'aigua (evolució a entalpia específica, h , constant), fins arribar al 70 % d'humitat relativa. Si les condicions inicials són 33°C de temperatura i una humitat relativa del

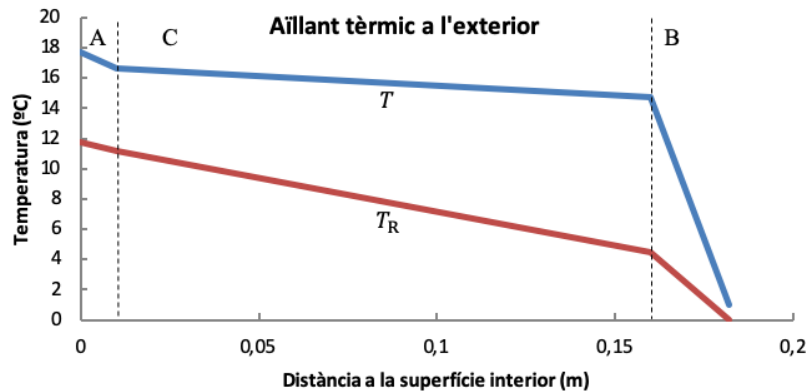


40 %, determineu si es produirà condensació superficial sobre una finestra que es troba a 19°C.

R: Sí, perquè la temperatura de rosada final serà de poc menys de 21°C.

P4.24 En el disseny de la paret del problema 4.6, s'hi intercanvien les posicions de les capes B i C. Determineu, mitjançant el diagrama de Glaser, si hi ha risc de condensació intersticial després d'aquesta modificació.

R: No. Amb l'aïllant tèrmic a l'exterior desapareix el risc de condensació intersticial, com podeu veure al diagrama de Glaser que es mostra a continuació.



P4.25 Determineu, mitjançant el diagrama de Glaser, si hi ha risc de condensació intersticial en una estructura de cinc capes, les propietats de les quals es donen més endavant, ordenades d'exterior a interior, i en les condicions següents: temperatura de l'aire interior, $T_{ai} = 20^\circ\text{C}$; temperatura de l'aire exterior, $T_{ae} = 0^\circ\text{C}$; humitat relativa de l'aire interior = 60 %, i humitat relativa de l'aire exterior = 50%. Suposeu $P_{v,si} = P_{v,ai}$ i $P_{v,se} = P_{v,ae}$.

Dades: $R_{si} = 0,12 \text{ m}^2\cdot\text{K}/\text{W}$; $R_{se} = 0,08 \text{ m}^2\cdot\text{K}/\text{W}$; la capa 1 fa 11 cm de gruix, conductivitat tèrmica: $0,87 \text{ W}/\text{m}\cdot\text{K}$, i permeabilitat al vapor d'aigua: $0,019 \text{ g}/\text{m}\cdot\text{h}\cdot\text{mbar}$; la capa 2 és una cambra d'aire de 10 cm, resistència tèrmica: $0,18 \text{ m}^2\cdot\text{K}/\text{W}$ i permeabilitat Π_0 ; la capa 3 fa 11 cm de gruix, conductivitat tèrmica: $0,2 \text{ W}/\text{m}\cdot\text{K}$ i permeabilitat: $0,0023 \text{ g}/\text{m}\cdot\text{h}\cdot\text{mbar}$; la capa 4 és d'1,3 cm, conductivitat tèrmica: $0,3 \text{ W}/\text{m}\cdot\text{K}$ i permeabilitat: $0,010 \text{ g}/\text{m}\cdot\text{h}\cdot\text{mbar}$, i la capa 5 és de 3 mm de gruix, conductivitat tèrmica: $0,04 \text{ W}/\text{m}\cdot\text{K}$ i permeabilitat: $0,00075 \text{ g}/\text{m}\cdot\text{h}\cdot\text{mbar}$.

R: Perfil tèrmic: $1,4^\circ\text{C}$, $3,5^\circ\text{C}$, $6,6^\circ\text{C}$, $15,9^\circ\text{C}$, $16,6^\circ\text{C}$, $17,9^\circ\text{C}$; perfil de pressions de vapor: $3,06 \text{ hPa}$, $4,11 \text{ hPa}$, $4,36 \text{ hPa}$, $13,09 \text{ hPa}$, $13,32 \text{ hPa}$, $14,03 \text{ hPa}$. No hi ha risc de condensacions intersticials.

P4.26 Un mur de maons de 102 mm està aïllat interiorment per una capa de 40 mm de llana mineral, seguida de pladur de 10 mm. Les resistències tèrmiques i les resistivitats a la difusió del vapor de les diferents capes, així com les resistències tèrmiques de les superfícies interior i exterior són les que es donen més endavant. L'aire interior es troba a 20°C i al 59 % d'humitat relativa, i l'aire exterior es

troba a 0°C i saturat d'humitat. Dibuixeu el diagrama de Glaser i determineu si hi ha risc de condensacions. Supposeu $P_{v,si} = P_{v,ai}$ i $P_{v,se} = P_{v,ae}$.

Dades: $R_{si} = 0,123 \text{ m}^2\cdot\text{K}/\text{W}$; $R_{se} = 0,055 \text{ m}^2\cdot\text{K}/\text{W}$; $R_{maó} = 0,133 \text{ m}^2\cdot\text{K}/\text{W}$;
 $r_{v,maó} = 6\cdot 10^{10} \text{ m}\cdot\text{s}\cdot\text{Pa}/\text{kg}$; $R_{llana} = 0,4 \text{ m}^2\cdot\text{K}/\text{W}$; $r_{v,llana} = 5\cdot 10^9 \text{ m}\cdot\text{s}\cdot\text{Pa}/\text{kg}$;
 $R_{pladur} = 0,06 \text{ m}^2\cdot\text{K}/\text{W}$; $r_{v,pladur} = 5\cdot 10^{10} \text{ m}\cdot\text{s}\cdot\text{Pa}/\text{kg}$.

R: Perfil tèrmic: $1,4^{\circ}\text{C}$, $4,9^{\circ}\text{C}$, $15,3^{\circ}\text{C}$, $16,8^{\circ}\text{C}$; perfil de pressions de vapor: $6,11 \text{ hPa}$, $13,01 \text{ hPa}$, $13,24 \text{ hPa}$, $13,80 \text{ hPa}$. Hi ha risc de condensacions intersticials a les capes de llana mineral i de maó.

P4.27 Un tancament està format per les capes següents (ordenades d'interior a exterior): guix d'1,5 cm, maó foradat de 5,3 cm, capa de 50 mm de llana de vidre impermeabilitzada a la cara interior i maó de cara vista d'11,5 cm. La resistència a la difusió del vapor de la barrera de vapor és de $2,4\cdot 10^{10} \text{ m}^2\cdot\text{s}\cdot\text{Pa}/\text{kg}$, i es pot considerar que no presenta resistència tèrmica. Les resistències tèrmiques i les resistivitats a la difusió del vapor de la resta de capes, així com les resistències tèrmiques de les superfícies interior i exterior, són les que es donen més endavant. L'aire interior es troba a 18°C i al 60 % d'humitat relativa. L'aire exterior es troba a -2°C i la seva pressió de vapor és $4,85 \text{ hPa}$. Dibuixeu el diagrama de Glaser i determineu si hi ha risc de condensacions. Supposeu $P_{v,si} = P_{v,ai}$ i $P_{v,se} = P_{v,ae}$.

Dades: $R_{si} = 0,11 \text{ m}^2\cdot\text{K}/\text{W}$; $R_{se} = 0,06 \text{ m}^2\cdot\text{K}/\text{W}$; $R_{guix} = 0,05 \text{ m}^2\cdot\text{K}/\text{W}$;
 $r_{v,guix} = 6\cdot 10^{10} \text{ m}\cdot\text{s}\cdot\text{Pa}/\text{kg}$; $R_{maó_foradat} = 0,11 \text{ m}^2\cdot\text{K}/\text{W}$; $r_{v,maó_foradat} = 3\cdot 10^{10} \text{ m}\cdot\text{s}\cdot\text{Pa}/\text{kg}$;
 $R_{llana} = 1,43 \text{ m}^2\cdot\text{K}/\text{W}$; $r_{v,llana} = 9\cdot 10^9 \text{ m}\cdot\text{s}\cdot\text{Pa}/\text{kg}$; $R_{maó_vist} = 0,15 \text{ m}^2\cdot\text{K}/\text{W}$; $r_{v,maó_vist} = 4,3\cdot 10^{10} \text{ m}\cdot\text{s}\cdot\text{Pa}/\text{kg}$.

R: Perfil tèrmic: $16,8^{\circ}\text{C}$, $16,3^{\circ}\text{C}$, $15,2^{\circ}\text{C}$, $15,2^{\circ}\text{C}$, $0,2^{\circ}\text{C}$, $-1,4^{\circ}\text{C}$; perfil de pressions de vapor: $12,22 \text{ hPa}$, $12,01 \text{ hPa}$, $11,64 \text{ hPa}$, $6,10 \text{ hPa}$, $5,99 \text{ hPa}$, $4,85 \text{ hPa}$. No hi ha risc de condensacions intersticials.

P4.28 Una paret està composta per una capa interior d'un material A, una capa de formigó i una capa exterior de poliestirè expandit. Amb les dades que es donen més endavant, dibuixeu el diagrama de Glaser i determineu si hi ha risc de condensació intersticial en un dia d'estiu, en què l'aire interior es troba a 17°C i amb un 59 % d'humitat relativa, i l'aire exterior, a 35°C , amb un 90 % d'humitat relativa. Supposeu $P_{v,si} = P_{v,ai}$ i $P_{v,se} = P_{v,ae}$.

Dades: Temperatura de la superfície interior de la paret = $18,6^{\circ}\text{C}$, temperatura de la superfície interior del formigó = $19,8^{\circ}\text{C}$, temperatura de la superfície exterior del formigó = $29,7^{\circ}\text{C}$, temperatura de la superfície exterior de la paret = $33,1^{\circ}\text{C}$. Resistències a la difusió del vapor: capa interior = $5\cdot 10^8 \text{ m}^2\cdot\text{s}\cdot\text{Pa}/\text{kg}$, formigó = $4,5\cdot 10^9 \text{ m}^2\cdot\text{s}\cdot\text{Pa}/\text{kg}$, poliestirè = $2,2\cdot 10^9 \text{ m}^2\cdot\text{s}\cdot\text{Pa}/\text{kg}$.

R: Perfil de pressions de vapor: $11,43 \text{ hPa}$, $14,16 \text{ hPa}$, $38,67 \text{ hPa}$, $50,65 \text{ hPa}$. Hi ha risc de condensació tocant a la superfície externa de la paret.

→ 5



Acústica

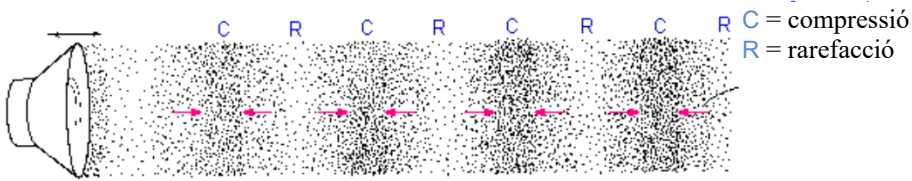
El so és un dels vincles principals dels éssers humans amb el món que ens envolta; ens n'aporta informació, i és un vehicle prioritari de comunicació. Normalment, la informació va acompanyada de soroll, que es pot considerar una forma de contaminació, la contaminació acústica. Precisament, un dels objectius del disseny arquitectònic és facilitar el control del soroll i aconseguir que els espais interiors tinguin una bona qualitat acústica. Per afrontar aquests reptes, cal entendre bé la naturalesa física del so i ser capaços d'identificar què determina que la sensació sonora sigui més o menys forta, aspectes que seran els primers que abordarem en aquest capítol. A continuació, definirem el nivell d'intensitat del so, mesurat en decibels (dB), que és la forma amb què normalment caracteritzem l'energia que transporten les ones sonores. Les dues últimes seccions conformen l'anomenada *acústica arquitectònica*, que consisteix en l'estudi de les dues vessants del disseny arquitectònic que s'orienten a la qualitat acústica d'un local: primer, l'aïllament acústic, que caracteritza la capacitat dels tancaments d'un local per evitar que sons externs no volguts hi penetrin, i, segon, la reverberació, fenomen central en l'audibilitat dels sons generats a l'interior d'un local. A l'apèndix B, es recullen alguns conceptes relatius a les ones, que són la base per a l'estudi d'aquest capítol.

5.1 Naturalesa del so

5.1.1 Ones sonores

El so consisteix en la *propagació simultània d'ones mecàniques de pressió, densitat i desplaçament*, és a dir, que pertorben la pressió del medi, la seva densitat i la posició de les partícules que el componen. Les tres ones estan acoblades (v. Fig. 5.1): un desplaçament de les molècules de l'aire altera la densitat (a la figura, el desplaçament es representa amb les fletxes vermelles), la qual determina la pressió (v., per exemple, l'equació 4.3). El canvi de pressió és diferent d'un punt a un altre, cosa que origina una força neta sobre les molècules, les quals són accelerades i es desplacen, iniciant de nou el bucle de propagació de les ones sonores. L'ona de desplaçament és una ona longitudinal: el canvi de posició de cada partícula es produeix en la mateixa direcció de propagació de l'ona.

Fig. 5.1
Esquema de les ones
sonores en aire gene-
rades per la vibració
d'una membrana.
Crèdit de la imatge:
[http://members.optus-
net.com.au/scottsoftc/](http://members.optus-
net.com.au/scottsoftc/)



El que se sent i el que mesuren els instruments són els canvis de pressió, la seva pertorbació. Anomenem *pressió acústica* la pertorbació de la pressió del medi. La pressió acústica sempre és petita (i, normalment, molt petita), comparada amb la pressió atmosfèrica.

Les *qualitats del so* que podem apreciar són tres: la *freqüència*, f ; la *intensitat*, I , i l'espectre, és a dir, com està distribuïda la intensitat entre les diferents freqüències del so. En acústica fisiològica, la freqüència dominant d'un so s'anomena *to*, i l'espectre és el *timbre*.

Velocitat del so

La *velocitat de les ones sonores* depèn de diferents factors, en funció que es propagui per un fluid o per un sòlid.

En el cas d'un gas ideal (amb molt bona aproximació, el cas de l'aire), la velocitat del so ve determinada per la temperatura i la composició química:

$$v = \sqrt{\gamma RT / m}$$

on:

- γ = coeficient adiabàtic, valor adimensional característic del gas. En general, el seu valor està acotat a l'interval $1 < \gamma < 1,7$; per a l'aire, el seu valor és $\gamma = 1,4$.
- R = constant dels gasos ideals
- T = temperatura absoluta, expressada en K
- m = massa molar del gas (secció 4.2)

En conseqüència, la velocitat del so en un gas augmenta amb la temperatura. A més, en dos gasos a igual temperatura, el so es propaga més ràpidament en el gas més lleuger (m més petita).

Substituint els valors adients del coeficient adiabàtic i de la massa molar de l'aire, $m_{a.s.} \cong 29 \text{ g/mol}$, es pot trobar una expressió per a la velocitat del so en aire que només depèn de la temperatura: $v = 343\sqrt{(T / 293 \text{ K})} \text{ m/s}$, on la temperatura també s'ha d'expressar en K.

En un sòlid elàstic, la velocitat del so depèn de la densitat i un coeficient relacionat amb l'elasticitat: $v = \sqrt{Y / \rho}$, on:

- Y és el mòdul d'elasticitat de Young,¹ magnitud que relaciona la deformació experimentada pel sòlid amb l'esforç a què ha estat sotmès.
- ρ és la densitat del sòlid.

El mòdul de Young té gran importància en el càlcul d'estructures arquitectòniques, i la seva unitat és el pascal. El so es propaga més ràpidament en un sòlid més rígid (Y gran, com per exemple l'acer) que en un més fàcilment deformable (Y més petita, per exemple el plom).

La taula següent conté alguns valors de la velocitat del so en diferents medis materials.

Medi	Velocitat del so (m/s)
aire a 20 °C	343
heli a 20 °C	1.009
aigua	1.480
vidre	5.000 – 6.000
acer	5.000
fusta	1.000 – 5.000
formigó	3.500
totxo	2.000 – 2.500
pladur	2.000
plom	1.320
suro	40 – 150

Taula 5.1
Velocitat del so en diferents medis materials

5.1.2 Ones sonores harmòniques

Les ones harmòniques (v. apèndix B) són un tipus particular de pertorbació periòdica de les propietats d'un medi, caracteritzades per una freqüència determinada, f , però les seves propietats es poden estendre a qualsevol tipus de pertorbació periòdica més general. Estudiarem les ones sonores harmòniques per dos motius principals: per simplicitat i perquè l'oïda humana funciona com un analitzador de Fourier. L'anàlisi de Fourier és una tècnica matemàtica que permet analitzar un fenomen repetitiu com una composició de funcions harmòniques. Com ja s'ha dit, l'oïda humana té aquesta facultat i pot dissonar un so complex en les diferents freqüències que hi són presents.

La funció d'ones (equació B.1, apèndix B) la podem reescriure substituint en lloc de y cadascuna de les magnituds pertorbades a l'ona sonora: pressió, densitat o posició. En concret, la pressió acústica, δP , ve donada per l'expressió següent, en funció de la posició, x (per exemple, la distància a l'altaveu de la Fig. 5.1), i del temps, t ,

$$\delta P = P_{\max} \cdot \sin \left[\omega \left(t - \frac{x}{v} \right) \right] \quad (5.1)$$

¹ Thomas Young (1773-1829), físic britànic famós també per l'experiment de la doble escletxa, amb què va demostrar la formació d'interferències i el caràcter ondulatori de la llum, i pels seus estudis sobre òptica fisiològica.



on $P_{\max}$ és l'amplitud de l'ona de pressió, és a dir, el valor màxim que la pressió acústica pot assolir en aquesta pertorbació. L'amplitud de l'ona de pressió es mesura en pascals (Pa). És costum utilitzar una magnitud auxiliar, anomenada *pressió eficaç acústica*, que es relaciona amb l'amplitud de pressió mitjançant l'expressió:

$$P_{\text{ef}} = P_{\max} / \sqrt{2} \quad (5.2)$$

La pressió eficaç acústica també es mesura en pascals. La intensitat de les ones sonores està directament relacionada amb la pressió eficaç acústica, com es veurà més endavant.

Recordem, també, que la pulsació ω està relacionada amb la freqüència del so per $\omega = 2\pi f$.

5.1.3 Espectre de les ones sonores

Perquè un so sigui audible, s'ha de trobar dintre d'uns intervals de freqüència i intensitat. Pel que fa a la freqüència, les ones sonores es classifiquen en tres grans grups:

- Infrasons, si $f \lesssim 20 \text{ Hz}^2$. Són freqüències no audibles, però que poden interaccionar amb diferents parts del cos.
- Audibles, si $20\text{Hz} \lesssim f \lesssim 20\text{kHz}$.
- Ultrasons, si $f \geq 20 \text{ kHz}$. Com els infrasons, les seves freqüències no són audibles, però els ultrasons poden interaccionar amb diferents parts del cos.

El fet que un infràs o un ultrasò no siguin audibles no significa que no tinguin cap efecte sobre el cos humà. Per exemple, els infrasons poden afectar el cap o els ulls, i els ultrasons poden tenir efectes sobre la sang o el cervell, entre d'altres. Alguns d'aquests efectes poden ser perniciosos; per tant, s'ha de procurar minimitzar-los.

Per la seva banda, els sons audibles es diferencien en:

- Greus, si $20 \text{ Hz} \lesssim f \lesssim 400 \text{ Hz}$.
- Mitjans, si $400 \text{ Hz} \lesssim f \lesssim 1.600 \text{ Hz}$.
- Aguts, si $1.600 \text{ Hz} \lesssim f \lesssim 20 \text{ kHz}$.

Com es pot apreciar, els límits entre les diferents categories són imprecisos. Diferents autors situen els límits en valors lleugerament diferents i, de fet, la percepció del so (audible vs. infrasons, o audible vs. ultrasons) varia entre un subjecte i un altre, encara que la normativa sí que fixa aquests límits.

A la figura 5.2, es pot veure l'espectre de les ones sonores audibles i la combinació de freqüència i pressió eficaç acústica a què és sensible l'oïda humana. Sovint, ens referim

² 1 Hz = 1 Hertz, la unitat de freqüència, que correspon a un cicle cada segon: $1 \text{ Hz} = 1 \text{ s}^{-1}$.

a les corbes que representen els llindars d'audibilitat i de dolor amb el nom de *corba o corbes de Wegel*.³

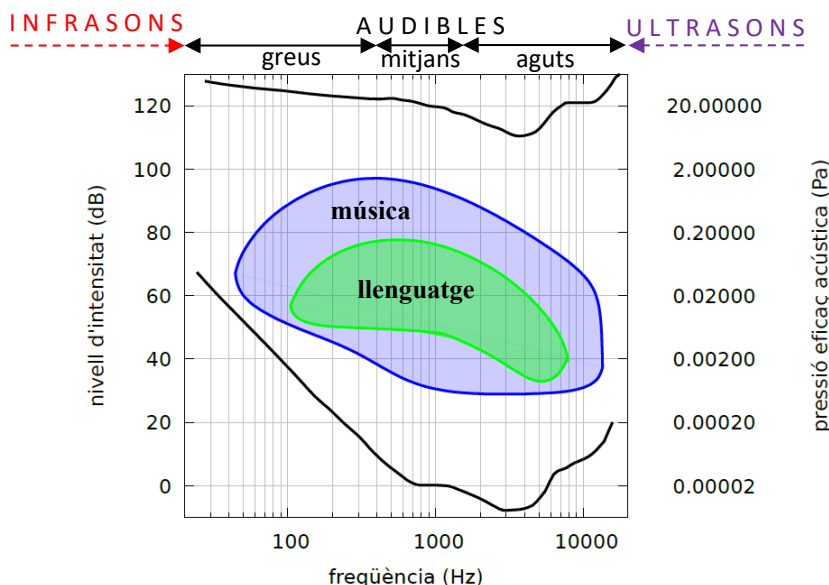


Fig. 5.2
Espectre de les ones sonores audibles, en funció de la freqüència i la intensitat del so (v. secció 5.3). La corba inferior marca el llindar d'audibilitat i la superior, el llindar de dolor. Les altres corbes corresponen a l'espai que ocupen correntment la comunicació oral i la música

5.2 Potència i intensitat

Al capítol 2, hem vist la definició d'intensitat d'una radiació, que és aplicable igualment al cas de les ones sonores. La intensitat d'una ona sonora, I , ve donada per l'equació 2.6: $I = Pot / A$, és a dir, el quocient entre la potència transportada per l'ona a través d'una superfície i la mida, A , d'aquesta mateixa superfície, que ha d'estar orientada perpendicularment a la direcció de propagació de l'ona. Recordem que la unitat d'intensitat és el W/m^2 . En una ona sonora, la intensitat està determinada per la pressió eficaç acústica, que és una propietat específica del so, i dues propietats del medi de propagació, la densitat, ρ , i la velocitat del so, v :

$$I = \frac{P_{ef}^2}{\rho v} \quad (5.3)$$

és a dir, la intensitat varia amb el quadrat de la pressió eficaç acústica.

5.2.1 Ones planes i esfèriques

La generació d'energia acústica es produeix en el moment de l'emissió de l'ona sonora. La propagació de l'ona el que fa es repartir la seva energia en un espai més o menys gran. En funció de les circumstàncies en què es propaga l'ona, la superfície afectada en un moment determinat pot variar i, en conseqüència, la intensitat de l'ona també. Els casos més senzills i alhora els més útils són els de les anomenades *ones sonores planes* i *ones*

³ La corba de Wegel la van començar a construir l'any 1922 els nord-americans Edmund P. Fowler i Robert L. Wegel, després que es van desenvolupar els primers audímetres.



sonores esfèriques. En aquest apartat, estudiem l'efecte de la geometria del front d'ones sobre la intensitat del so. A l'apartat següent, veurem l'efecte de l'absorció d'energia sonora pel medi de propagació.

Una *ona plana* es defineix com aquella en què el front d'ones és pla. En general, la direcció de propagació és perpendicular al front d'ones i *la dimensió de la superfície afectada per l'ona no canvia durant la propagació*, de manera que, *si la potència no canvia, la intensitat és constant durant la propagació*. És a dir, a diferents distàncies del focus d'una ona plana, la intensitat percebuda seria la mateixa:

$$I = \text{constant} \quad (5.4)$$

Una ona plana pot ser generada per un focus sonor de geometria plana (per exemple, un gran altaveu pla o una paret que transmet el so entre dos locals), sempre que la distància al focus no sigui molt gran.

Una *ona esfèrica* es defineix com aquella en què el front d'ones és esfèric. La direcció de propagació és radial a partir del centre de l'esfera (posició ocupada pel focus sonor, si aquest no es mou). A mesura que l'ona es va propagant, els fronts d'ones corresponen a superfícies esfèriques concèntriques, cada cop de radi, r , més gran, motiu pel qual *la superfície afectada per l'ona augmenta amb el quadrat de la distància al focus*:

$$I = \frac{Pot}{4\pi r^2}$$

és a dir, *la intensitat d'una ona esfèrica varia com la inversa del quadrat de la distància al focus*, sempre que la potència es mantingui constant:

$$I \propto 1/r^2 \quad (5.5)$$

Aquest fenomen es coneix amb el nom de *dilució geomètrica* i no comporta cap pèrdua d'energia acústica, sinó únicament una redistribució d'aquesta per una superfície progressivament més gran. Una conseqüència de l'equació 5.5 és que la relació entre les intensitats d'un mateix so a diferents distàncies del focus, r_1 i r_2 , és:

$$I_1 / I_2 = (r_2 / r_1)^2 \quad (5.6)$$

Exemple 5.1

Un altaveu emet ones esfèriques de 0,01 W de potència. Calculeu-ne la intensitat a 10 m i a 10 km, suposant que no hi ha absorció d'energia sonora per l'aire (potència constant).

Solució. Tractant-se d'ones esfèriques, podem aplicar l'equació $I = \frac{Pot}{4\pi r^2}$. Amb les dades de

l'enunciat, $Pot = 0,01 \text{ W}$ i $r = 10 \text{ m}$, el resultat és: $I = 7,96 \cdot 10^{-6} \text{ W/m}^2$.

Per calcular la intensitat a 10 km, podem repetir la mateixa operació o aplicar l'equació 5.6, en què, per exemple, les quantitats amb subíndex 2 correspondrien a 10 m i les de subíndex 1, a les de 10 km: $I_1 = I_2 (r_2 / r_1)^2 = 7,96 \cdot 10^{-6} (10 \text{ m} / 10 \text{ km})^2 = 7,96 \cdot 10^{-12} \text{ W/m}^2$.

Per tant, la resposta és: $8 \cdot 10^{-6} \text{ W/m}^2$ a 10 m, i $8 \cdot 10^{-12} \text{ W/m}^2$ a 10 km

Una ona esfèrica pot ser generada per un focus sonor puntual. Tingueu en compte que el caràcter puntual del focus s'ha de considerar en comparació amb la distància a què es troba. Així, un focus de dimensió d'1 metre, per exemple, es podria considerar puntual a distàncies de centenars de metres. D'altra banda, quan una ona sonora es propaga a l'aire lliure, la forma del front d'ones –i, per tant, la manera com la intensitat depèn de la distància recorreguda pel so– pot variar per reflexions al terra o obstacles i al fenomen de la difracció (apèndix B).

5.2.2 Absorció durant la propagació

En general, el medi de propagació de les ones sonores és un medi dissipatiu, en el qual el so va perdent potència a mesura que es propaga. Un agent d'aquesta dissipació és la fricció que resulta del moviment del fluid provocat per la pròpia ona sonora. L'energia acústica perduda es transforma en calor (la quantitat de calor generada així normalment és negligible, en comparació amb altres mecanismes de generació de calor). En qualsevol cas, la pèrdua de potència s'incrementa amb la distància recorreguda per l'ona.

En el cas de la propagació per l'aire, es defineix el *coeficient d'absorció del so per l'aire*, β , mitjançant l'expressió:

$$\beta = -\frac{1}{Pot} \frac{dPot}{dx}$$

on $dPot/dx$ mesura la rapidesa amb què es perd potència en funció de la distància recorreguda, x . El coeficient d'absorció del so per l'aire té unitats de m^{-1} . Com a resultat de la seva definició, com més gran és β , més potència es perd per a una mateixa distància a la font sonora. El coeficient d'absorció del so per l'aire depèn de la temperatura i de la humitat relativa de l'aire, i és prou petit perquè no s'hagi de tenir en compte en espais interiors. No obstant això, més endavant (seccions 5.3.2 i 5.7.4) ens hi tornarem a referir i en veurem alguna excepció.

5.2.3 Absorció en reflexions: coeficients de reflexió, d'absorció i de transmissió

Qualsevol ona, quan incideix sobre una superfície que separa medis amb diferents propietats (densitat, velocitat de propagació), es divideix en dues ones diferents, una ona reflectida i una ona refractada, cadascuna de les quals transporta una part de l'energia de l'ona incident.

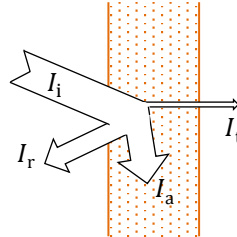
Considerem ara un volum que separa dos medis diferents. Per concretar, podem imaginar-nos un mur de separació entre dos locals, o entre un local i l'exterior. Els dos medis separats pel mur seran normalment aire. Una ona sonora que viatgi per l'aire d'un local eventualment arribarà al mur de separació i es produiran tota una sèrie de reflexions i refraccions en les dues superfícies límits del mur.

Podem considerar l'efecte global d'aquestes ones secundàries, i separar-lo en tres categories (Fig. 5.3):

- Una part del so incident serà *reflectida* cap al mateix local, amb una intensitat I_r .

- Una altra part serà *transmesa* a l'aire que hi ha a l'altra banda del mur, amb una intensitat I_t .
- Finalment, la resta de la intensitat del so incident serà *absorbida* pel mur, i li correspondrà una intensitat I_a .

Fig. 5.3
Esquema de la incidència d'una ona sonora sobre un mur



L'energia es conserva; per tant, la intensitat del so incident, I_i , és la suma de les tres intensitats anteriors:

$$I_i = I_r + I_t + I_a$$

Des del punt de vista del local per on viatjava el so originalment, s'haurà produït una pèrdua d'energia acústica, deguda tant a la transmissió com a l'absorció pel mur. Per caracteritzar la capacitat del mur d'eliminar energia acústica d'un local, en definim el *coeficient d'absorció* del mur, α , mitjançant l'expressió:

$$\alpha = 1 - \frac{I_r}{I_i} = \frac{I_t + I_a}{I_i} \quad (5.7)$$

Observeu que el coeficient d'absorció del mur suma els efectes tant de la transmissió com del que abans hem anomenat *absorció pel mur*. Aquest coeficient és *adimensional* i està *acotat entre 0 i 1*: $0 \leq \alpha \leq 1$. Un valor de $\alpha = 0$ significa que no hi ha absorció del so, que aquest és reflectit totalment, és a dir, que tota l'energia acústica es manté al local original. Un valor de $\alpha = 1$ significa que l'energia del so incident desapareix completament del local (per exemple, a través d'una finestra oberta).

El factor que influeix més sobre el valor del coeficient d'absorció és *la naturalesa de la superfície* present al local pel qual es propaga el so incident. Com podeu veure a la taula 5.2, el coeficient d'absorció també depèn de la freqüència del so. En moltes aplicacions, es treballa amb un únic valor representatiu del coeficient d'absorció per a cada material, obtingut com la mitjana aritmètica dels valors dels coeficients a les sis freqüències que apareixen a la taula 5.2. Per exemple, per al suro, la mitjana és: $\alpha_{m,suro} = (0,05 + 0,10 + 0,20 + 0,55 + 0,60 + 0,55) / 6 = 0,34$.

Taula 5.2
Coeficient d'absorció
de diferents materials
en funció de la fre-
qüència del so

Freqüència (Hz):	128	256	512	1.024	2.048	4.096
formigó	0,02	0,02	0,02	0,04	0,05	0,05
suro	0,05	0,10	0,20	0,55	0,60	0,55
fusta	0,05	0,04	0,03	0,03	0,03	0,03
cortines	0,14	0,32	0,45	0,45	0,40	0,35

També es defineix un coeficient de reflexió com el quocient I_r / I_i , però aquest coeficient és exactament $1 - \alpha$ (v. equació 5.7), de manera que no aporta informació addicional al coeficient d'absorció.

Per caracteritzar la capacitat del mur de transmetre el so, definim el *coeficient de transmissió* del mur, t , mitjançant l'expressió:

$$t = \frac{I_t}{I_i} \quad (5.8)$$

Aquest coeficient també és *adimensional* i està *acotat entre 0 i 1*: $0 \leq t \leq 1$. Un valor de $t = 0$ significa que no hi ha transmissió del so, és a dir, que l'aïllament acústic és total enfront de sons de transmissió aèria. Un valor de $t = 1$ significa que tot el so és transmès a l'aire que hi ha a l'altre costat del mur (per exemple, a través d'un forat o una finestra oberta). *El valor del coeficient de transmissió està determinat per la composició del mur i el seu gruix, i també depèn de la freqüència del so.*

Exemple 5.2

Una ona sonora d'intensitat $2 \times 10^{-5} \text{ W/m}^2$ incideix sobre una paret de coeficient de transmissió 0,02. Determineu la intensitat del so transmès per la paret.

Solució. Per calcular la intensitat transmesa, l'aïllem de l'equació 5.8:

$$I_t = t \cdot I_i = 0,02 \cdot (2 \cdot 10^{-5}) = 4 \cdot 10^{-7} \text{ W/m}^2$$

Per tant, la resposta és $4 \cdot 10^{-7} \text{ W/m}^2$.

La dependència del coeficient de transmissió del so en el gruix d'un mur, e , segueix, aproximadament, una llei de la inversa del quadrat, anomenada *llei de les masses*: $t \propto 1/e^2$. Aquesta és una llei empírica de precisió limitada i només s'aplica a parets simples. Per a parets múltiples, formades per estructures separades per una cambra d'aire, el coeficient de transmissió total és el producte dels coeficients de transmissió de cada estructura, sempre que la freqüència del so sigui alta. Per a freqüències mitjanes i baixes, el caràcter ondulatori del so pot facilitar la transmissió eficient d'estructura a estructura, i incrementar el valor final de t . Aquest inconvenient es pot mitigar omplint l'espai entre les estructures amb material porós absorbent del so.

També es formula l'anomenada *llei de les freqüències*, $t \propto 1/f^2$, essent f la freqüència del so. Aquesta llei és de precisió encara més limitada que la llei de les masses, però permet estimar, en primer ordre, l'efecte d'un canvi en la freqüència del so sobre la seva transmissió.

5.3 Nivell d'intensitat

L'oïda humana pot detectar sons d'intensitats molt diverses. Com es pot veure a la figura 5.2 (corba de Wegel), a una freqüència de referència de 1.000 Hz (una de les freqüències a què l'oïda humana és més sensible), la mínima pressió eficaç acústica audible és d'uns

20 μPa i la màxima, d'uns 20 Pa (compareu-les amb la pressió atmosfèrica, de l'ordre de 100,000 Pa). Si la pressió eficaç acústica és més gran que el límit superior de la corba de Wegel, la sensació no és auditiva sinó de dolor. Amb aquests valors límit de la pressió eficaç acústica, podem trobar les corresponents intensitats límit amb l'ajut de l'equació 5.3 i uns valors típics de la densitat de l'aire, $\rho \approx 1,18 \text{ kg/m}^3$, i de la velocitat del so en aire, $v \approx 340 \text{ m/s}$. Els resultats són:

- *Intensitat llindar d'audibilitat*, $I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$. És la mínima intensitat audible a una freqüència de 1.000 Hz. Aquest valor s'agafa com a *referència per a qualsevol altra intensitat sonora*.
- *Intensitat llindar de dolor*, $I_{\max} = 1 \text{ W/m}^2$. Com es pot veure a la figura 5.2, el llindar de dolor varia poc amb la freqüència del so.

En resum, *el rang d'intensitats audibles varia en dotze ordres de magnitud!* A la pràctica, per manejar un rang d'intensitats tan ampli, és costum treballar amb una escala logarítmica que dona (de forma indirecta) la intensitat del so. Definim el *nivell d'intensitat*, N , d'un so d'intensitat I com:

$$N = 10 \cdot \log(I / I_0) \quad (5.9)$$

En aquesta expressió, el logaritme és decimal (base 10). El valor de referència, I_0 , es pren exactament de 10^{-12} W/m^2 , i és una constant independent de la freqüència del so. Per tant, hi ha una correspondència perfecta entre la intensitat d'un so i el seu nivell d'intensitat, és a dir, n'hi ha prou a conèixer un dels dos per poder-ne calcular l'altre. *La unitat de nivell d'intensitat és el decibel (dB).*⁴

La taula següent mostra el valor del nivell d'intensitat en algunes situacions típiques.

Possibilitat de conversa	Sensació auditiva	Nivell d'intensitat (dB)	Sorolls
Xiuxiueig	Llindar d'audibilitat	0	Laboratori d'acústica
	Molta tranquil·litat	10	Estudi de gravació
		20	Estudi de ràdio
	Tranquil·litat	35	Embarcació de vela
Amb veu normal	Força tranquil·litat	45	Apartament normal
Forçant la veu	Sorolls corrents	50	Automòbil silenciós
		60	Embarcació de motor
	Sorolls forts	75	Oficines
Difícil	Difícil d'entendre	85	Taller de tornejat
		95	Taller de forja
Cridant	Difícilment suportable	100	Serra de motor
		110	Taller de caldereria
Impossible	Llindar de dolor, exigeix una protecció especial	120	Banc d'assaig de motors
		140	Turboreactor en un banc d'assaigs

⁴ El decibel és la desena part d'un bel, unitat introduïda en honor d'Alexander Graham Bell (1847-1922).

El nivell d'intensitat i la seva unitat, el decibel, es corresponen força bé amb la sensació sonora subjectiva percebuda per una persona. Aquesta correspondència, de vegades, es recull en forma de llei matemàtica, l'anomenada *lleï de Weber-Fechner*, tema que es tracta més endavant.

A partir de l'equació 5.9 i el valor de I_0 , es pot deduir la fórmula següent, que es pot utilitzar indistintament per calcular el nivell d'intensitat, sempre que la intensitat s'expressi en W/m^2 :

$$N = 120 + 10 \cdot \log(I) \quad (5.10)$$

Per calcular la intensitat a partir del nivell d'intensitat, podem fer servir la relació següent: $I = 10^{(N/10)} 10^{-12} \text{ W/m}^2$.

Vegem-ne alguns exemples:

- Un so de 0 dB té una intensitat igual al llindar d'audició, $I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$.
- Un so d'exactament 1 dB té una intensitat $I = 1,26 \cdot I_0 = 1,26 \cdot 10^{-12} \text{ W/m}^2$.
- Un so de 3 dB té una intensitat $I = 2 \cdot I_0 = 2 \cdot 10^{-12} \text{ W/m}^2$.
- Un so de 10 dB té una intensitat igual a deu vegades el llindar d'audició, $I = 10 \cdot I_0 = 10^{-11} \text{ W/m}^2$.
- Un so de 120 dB té una intensitat $I = 10^{12} I_0 = I_{\text{màx}} = 1 \text{ W/m}^2$.

Existeix una altra magnitud, anomenada *nivell de pressió acústica* (*sound pressure level* o SPL), que es defineix per l'expressió següent, en funció de la pressió eficaç acústica:

$$\text{SPL} = 20 \cdot \log\left(\frac{P_{\text{ef}}}{20 \mu\text{Pa}}\right) \quad (5.11)$$

La quantitat en el denominador de l'equació 5.11 és la pressió eficaç acústica corresponent al llindar d'audibilitat. De la relació entre P_{ef} i I (equació 5.3), es pot deduir que *el valor del SPL és numèricament igual al del nivell d'intensitat, N*. De fet, la unitat de SPL és també el decibel, i totes dues magnituds, SPL i nivell d'intensitat, es poden utilitzar indistintament.

5.3.1 Sons simultanis

Quan dos sons estan presents simultàniament al mateix espai, les seves potències i *intensitats se sumen*.⁵ S'ha de tenir molt present que, a causa de la relació logarítmica entre I i N , *els nivells d'intensitat no se sumen mai!*

⁵ En determinades circumstàncies, no és cert que les intensitats se sumin –per exemple, a causa del fenomen de les interferències–, però les condicions necessàries perquè es doni aquest fenomen no s'apliquen, en general, en un context arquitectònic. Per aquest motiu, en aquest text no les tindrem en compte.

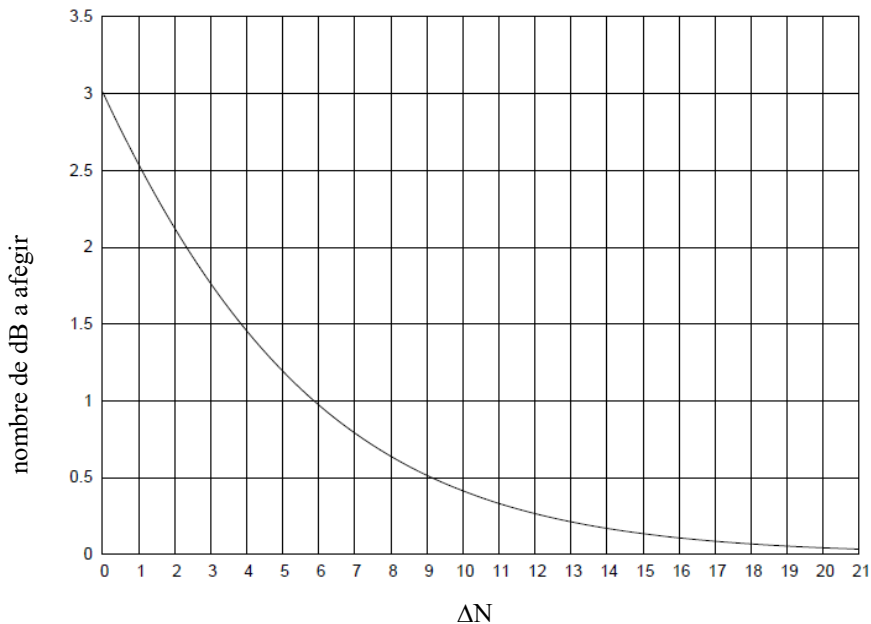
És a dir, si les intensitats dels dos sons originals són I_1 i I_2 (i els nivells d'intensitat respectius, N_1 i N_2), tenim: $I = I_1 + I_2$, però: $N \neq N_1 + N_2$. Exemples:

- Si $I_1 = I_2$, la intensitat resultant és $I = 2I_1$ però el nivell d'intensitat resultant és $N = N_2 + 3$ dB.
- Si $I_1 = 9I_2$, la intensitat resultant és $I = 10I_2$ però el nivell d'intensitat resultant és $N = N_2 + 10$ dB.

Per facilitar el càlcul del nivell resultant, existeixen els anomenats *sumadors de decibels*, que, de forma gràfica o mitjançant una taula, permeten obtenir el nombre de decibels resultant a partir dels valors de N_1 i N_2 . Més endavant, es poden veure els dos formats del sumador de decibels.

La manera d'operar amb els sumadors de decibels és aquesta. Primer, es calcula la diferència en dB entre els dos sons que es volen sumar: $\Delta N = N_1 - N_2$ (suposem que $N_1 > N_2$). Amb el resultat, s'entra a la taula o es busca el valor de ΔN a l'eix d'abscisses de la gràfica, i es llegeix el valor que s'ha de sumar a N_1 .

Fig. 5.4
Sumador gràfic de decibels. La corba mostra el nombre de dB que s'han d'afegir al nivell més elevat, en funció de la diferència de dB entre els dos nivells (ΔN)



Per exemple, si els sons que s'han de sumar són de 17,0 dB i 23,0 dB, la diferència és $\Delta N = 6,0$ dB, que a la taula dóna un valor de 0,97 dB (i a la gràfica, ~ 1 dB), que seria la quantitat que s'hauria d'afegir al nivell més alt d'intensitat (23 dB). Per tant, en aquest cas, el so resultant seria de 23,97 dB $\cong$ 24 dB.

ΔN (dB)	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0	3,01	2,96	2,91	2,86	2,81	2,77	2,72	2,67	2,63	2,58
1	2,54	2,50	2,45	2,41	2,37	2,32	2,28	2,24	2,20	2,16
2	2,12	2,09	2,05	2,01	1,97	1,94	1,90	1,87	1,83	1,80
3	1,76	1,73	1,70	1,67	1,63	1,60	1,57	1,54	1,51	1,48
4	1,46	1,43	1,40	1,37	1,35	1,32	1,29	1,27	1,24	1,22
5	1,19	1,17	1,15	1,12	1,10	1,08	1,06	1,04	1,01	0,99
6	0,97	0,95	0,93	0,91	0,90	0,88	0,86	0,84	0,82	0,81
7	0,79	0,77	0,76	0,74	0,73	0,71	0,70	0,68	0,67	0,65
8	0,64	0,63	0,61	0,60	0,59	0,57	0,56	0,55	0,54	0,53
9	0,51	0,50	0,49	0,48	0,47	0,46	0,45	0,44	0,43	0,42
10	0,41	0,40	0,40	0,39	0,38	0,37	0,36	0,35	0,35	0,34
11	0,33	0,32	0,32	0,31	0,30	0,30	0,29	0,28	0,28	0,27
12	0,27	0,26	0,25	0,25	0,24	0,24	0,23	0,23	0,22	0,22
13	0,21	0,21	0,20	0,20	0,19	0,19	0,19	0,18	0,18	0,17
14	0,17	0,17	0,16	0,16	0,15	0,15	0,15	0,14	0,14	0,14
15	0,14	0,13	0,13	0,13	0,12	0,12	0,12	0,12	0,11	0,11
16	0,11	0,11	0,10	0,10	0,10	0,10	0,09	0,09	0,09	0,09
17	0,09	0,08	0,08	0,08	0,08	0,08	0,07	0,07	0,07	0,07
18	0,07	0,07	0,07	0,06	0,06	0,06	0,06	0,06	0,06	0,06
19	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,04
20	0,04	0,04	0,04	0,04	0,04	0,04	0,04	0,04	0,04	0,04

Taula 5.4.
Sumador de decibels.
La taula mostra el nombre de dB que s'ha d'afegir al nivell més alt, en funció de la diferència de dB entre els dos nivells (ΔN)

Exemple 5.3

Calculeu el nivell d'intensitat resultant de la superposició de dos sons de 85,1 dB i 87,0 dB.

Solució. La diferència en dB entre els dos sons que se superposen és:

$$\Delta N = N_1 - N_2 = 87,0 - 85,1 = 1,9 \text{ dB}$$

A la figura 5.4, podem veure que, per a aquest valor de l'abscissa, l'ordenada és lleugerament superior a 2 dB. A la taula 5.4, podem llegir amb més precisió que, per a $\Delta N = 1,9$ dB, la quantitat que s'ha d'afegir al nivell més elevat (87,0 dB) és 2,16 dB, i això fa un total de $87,0 + 2,16 = 89,2$ dB, quantitat arrodonida al primer decimal per excés.

Per tant, la resposta és 89,2 dB.

5.3.2 Variacions en el nivell d'intensitat durant la propagació del so

Abans hem vist que la intensitat d'una ona sonora pot disminuir durant la seva propagació, per tres efectes:

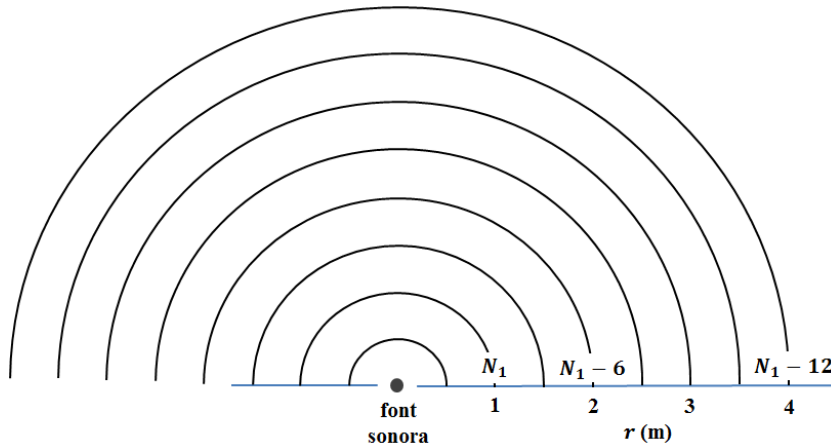
1. Dilució geomètrica
2. Absorció per l'aire
3. Absorció en reflexions

La *dilució geomètrica* es dona quan el so es propaga a partir d'una font puntual, i fa que la intensitat disminueixi amb la distància al focus, r , d'acord amb les equacions 5.5 i 5.6. Traslladant aquesta darrera relació als nivells d'intensitat, tenim:

$$N_1 - N_2 = 20 \cdot \log(r_2 / r_1) \quad (5.12)$$

Així, per exemple, a una distància deu vegades més gran, $r_2 = 10 \cdot r_1$, la dilució geomètrica provoca que el so tingui 20 dB menys: $N_2 = N_1 - 20$ dB.

Fig. 5.5
Dilució geomètrica en la propagació d'una ona esfèrica: cada vegada que es dobla la distància a la font sonora, es resten 6 dB



Exemple 5.4

La botzina d'un automòbil té un nivell acústic de 70 dB quan es mesura a 8 m de distància. Quin nivell tindrà a 80 m?

Solució. Per calcular la disminució del nivell d'intensitat per dilució geomètrica, apliquem l'equació 5.12. Si distingim les quantitats referides a 8 m amb el subíndex 1 i les que fan referència a 80 m amb el subíndex 2: $N_1 - N_2 = 20 \cdot \log(r_2 / r_1) = 20 \cdot \log\left(\frac{80 \text{ m}}{8 \text{ m}}\right) = 20$ dB. El nivell d'intensitat a 80 m és: $N_2 = N_1 - 20 = 50$ dB.

Per tant, la resposta és 50 dB.

L'absorció per l'aire només s'ha de tenir en compte per a grans distàncies de propagació. El decrement del nivell d'intensitat en funció del coeficient d'absorció per l'aire, β , i de la distància recorreguda, $r_2 - r_1$, és:

$$N_1 - N_2 = 4,34 \cdot \beta (r_2 - r_1) \quad (5.13)$$

Exemple 5.5

Un altaveu emet a 1.000 Hz ones esfèriques de 0,010 W de potència, que es propaguen per l'aire, amb una humitat relativa del 50%. El coeficient d'absorció del so per l'aire a 1.000 Hz i amb un 50 % d'humitat relativa és $3,3 \cdot 10^{-4} \text{ m}^{-1}$. Calculeu el nivell d'intensitat a 10 m i a 500 m.

Solució. La intensitat a 10 m sense tenir en compte l'absorció de l'aire, i en les mateixes condicions de l'enunciat, s'ha calculat a l'exemple 5.1, amb el resultat: $7,96 \cdot 10^{-6} \text{ W/m}^2$. El nivell d'intensitat corresponent (equació 5.10) és de $120 + 10 \cdot \log(7,96 \cdot 10^{-6}) = 69,0 \text{ dB}$. La pèrdua de dB per absorció d'energia sonora a 10 m és (equació 5.13):

$$4,34 \cdot \beta \cdot (10 \text{ m}) = 4,34 \cdot 3,3 \cdot 10^{-4} \cdot (10) = 0,014 \text{ dB}$$

que resulta negligible, i deixa el resultat en $N_1 = 69,0 \text{ dB}$ a 10 m.

Per calcular el nivell d'intensitat a 500 m, N_2 , podem partir del resultat a 10 m i aplicar-hi les equacions 5.12 (dilució geomètrica) i 5.13 (absorció):

$$\begin{aligned} N_1 - N_2 &= 20 \cdot \log(r_2 / r_1) + 4,34 \cdot \beta \cdot (r_2 - r_1) \\ &= 20 \cdot \log\left(\frac{500}{10}\right) + 4,34 \cdot 3,3 \cdot 10^{-4} \cdot (500 - 10) = 33,98 + 0,70 = 34,68 \text{ dB} \end{aligned}$$

Restant aquesta quantitat, obtenim el nivell d'intensitat a 10 m: $N_2 = N_1 - 34,7 = 34,3 \text{ dB}$. Fixeu-vos que la pèrdua de decibels per dilució geomètrica fins a 500 m és força més gran que la deguda a absorció per l'aire. A més distància, la importància de l'absorció és més gran.

Per tant, la resposta és: 69,0 dB a 10 m, i 34,3 dB a 500 m.

Pel que fa a l'absorció en reflexions, el seu impacte s'estudia a les seccions 5.6 i 5.7.

5.4 Eficiència del sentit auditiu

El sentit de l'oïda té diferents sensibilitats en funció de la freqüència de les ones sonores, com posa de manifest la corba de Wegel. Segons una llei psicofísica qualitativa, la llei de Weber,⁶ per percebre un canvi en la intensitat d'un so, aquest canvi ha de ser tant més gran com més intens sigui el so. La llei de Weber-Fechner⁷ va un pas més enllà i li dóna forma matemàtica dient que la sensació sonora subjectiva és proporcional al logaritme de la intensitat. La llei de Weber-Fechner és d'aplicació limitada, però posa de manifest que el concepte de nivell d'intensitat té una relació directa amb la sensació sonora subjectiva.

Quantitativament, el mínim canvi perceptible en la intensitat d'un so també depèn de la seva freqüència. Per tenir-ho en compte, es defineix una nova quantitat associada a un so

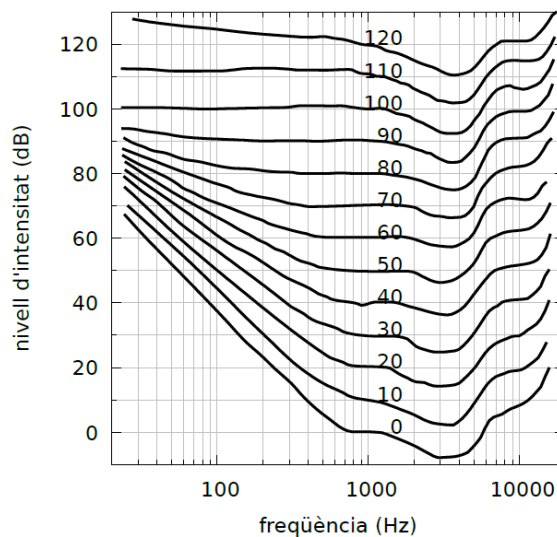
⁶ Ernst Heinrich Weber (1795-1878), metge alemany que va estudiar la psicologia des del punt de vista experimental. Estava interessat en la percepció sensorial. La llei de Weber també s'aplica a la percepció de la llum.

⁷ Gustav Theodor Fechner (1801-1887), psicòleg alemany, deixeble d'Ernst Weber.

de freqüència f , anomenada *nombre de fons*, de manera que el seu valor coincideix amb el nivell d'intensitat, mesurat en dB, d'un so de 1.000 Hz que origini la mateixa sensació sonora. Per definició, per a un so de 1.000 Hz, el nombre de fons coincideix amb el nombre de decibels.

La figura 5.6 mostra les anomenades *corbes isofòniques*, que connecten els sons de diferents intensitats i freqüències però idèntic nombre de fons. Per exemple, la sensació sonora subjectiva de 40 fons requereix un nivell d'intensitat de 40 dB a 1.000 Hz (per definició), però aquest nivell ha de ser de gairebé 60 dB si la freqüència és de 100 Hz. En canvi, si la freqüència és de 3.000 Hz, bastaria un nivell d'intensitat d'uns 35 dB per aconseguir el mateix nombre de fons, és a dir, la mateixa sensació sonora subjectiva.

Fig. 5.6
Sensibilitat de l'oïda a
diferents freqüències:
nombre de fons d'un
so, indicat a sobre de
cada corba isofònica



Les corbes isofòniques mostren que l'oïda humana és molt menys sensible a les freqüències greus que a les mitjanes i agudes, especialment per a sons de menys de 80-90 dB. A intensitats superiors, la sensibilitat depèn poc de la freqüència. La manca de sensibilitat a freqüències baixes es compensa amb l'espectre acústic de la veu humana, que típicament presenta un pic d'energia acústica a freqüències pròximes a 200 Hz.

En aplicacions pràctiques, el concepte de nombre de fons d'un so no resulta còmode i s'utilitza un estàndard diferent per tenir en compte la resposta sensitiva de l'oïda. Per a aquest fi, es defineixen els "decibels A" (dBA), com s'explica a continuació, a partir d'una aproximació a la corba isofònica de 40 fons (corba negra a la Fig. 5.7). En primer lloc, cal considerar que un so, en general, està format per una combinació de diferents freqüències, cadascuna amb una intensitat i un nombre de dB. Per a cada freqüència, s'ha de corregir el nombre de dB sumant o restant la diferència entre la corba vermella de la figura 5.7 i el valor de referència de 40 dB. El resultat es transforma en "intensitat" (tot i que aquest càlcul no proporciona una intensitat física real, mesurada en W/m^2), invertint l'equació 5.10. Finalment, se sumen les "intensitats" obtingudes a cada freqüència i es torna a aplicar l'equació 5.10, ara en sentit directe, per obtenir els dBA.

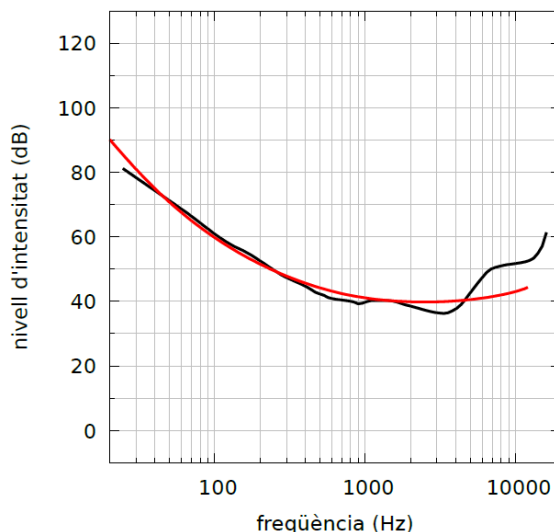


Fig. 5.7
Definició dels decibels
A (dBA) per aproxima-
ció de la corba de 40
fons

5.5 Mesurant el so

L'instrument que permet mesurar el nivell d'intensitat del so en un punt determinat és el sonòmetre (Fig. 5.8). Existeixen sonòmetres de diferents prestacions però, en general, per a mesuraments de precisió, cal que l'error inherent a l'aparell no sigui superior a ± 1 dB. La temperatura ambient pot afectar el mesurament, però perquè l'impacte sigui significatiu cal una temperatura realment extrema, inferior a -25 °C o superior a 60 °C.

El sonòmetre disposa d'un micròfon, que és la part que recull les ones sonores. S'ha de col·locar tan a prop com sigui possible del punt del qual es vol conèixer el nivell d'intensitat –en tot cas, no més lluny de 15 cm– i procurant que ni l'aparell ni el seu operador facin d'obstacle per a la propagació de les ones sonores.

Com que els sons corrents estan formats per diferents freqüències i intensitats, els sonòmetres poden proporcionar els decibels associats a bandes espectrals de freqüències pre-determinades.



Fig. 5.8
Sonòmetre.
Imatge i informació addi-
cional:
https://www.osha.gov/dts/osta/otm/new_noise/

5.6 Acústica arquitectònica I: aïllament acústic

En una ciutat típica, el nivell de soroll permès al carrer és d'entre 50 dB a 70 dB, mentre que el nivell de soroll recomanat en un dormitori durant la nit és de menys de 30 dB (com a referència, un mosquit que vola a 2 m de distància produeix un so d'uns 20 dB, i un ronc potent equival a uns 50 dB). Aquestes xifres posen en context la necessitat que els habitatges estiguin separats de l'exterior per tancaments capaços d'aportar l'aïllament acústic suficient per reduir la intensitat del so extern fins als nivells recomanats a l'interior.

Quan un habitatge es troba en un edifici alt en comparació amb el seu entorn, s'ha de tenir en compte que el nivell de soroll exterior varia amb l'altura i, en general disminueix quan l'altura augmenta. Aquesta regla general es pot veure afectada per fenòmens atmosfèrics, com la presència d'un gradient tèrmic vertical a l'aire. En condicions normals, la temperatura i la velocitat del so a l'aire (v. secció 5.1.1 per la dependència de la velocitat del so en la temperatura) disminueixen amb l'altura, i les ones sonores es refracten corbant-se i concentrant el soroll cap amunt (v. apèndix B i Fig. 6.1). En conseqüència, el soroll a nivell de carrer pot arribar als pisos superiors més fàcilment i amb més intensitat que en absència del gradient tèrmic.

Per entendre correctament la transmissió del so, s'ha de diferenciar la manera com arriba el so a l'embolcall d'un local. Hi pot arribar a través de l'aire, o bé per impacte directe sobre alguna superfície límit del local (que vibra i actua com un altaveu, transmetent l'energia de la seva vibració a l'aire interior del local) o, indirectament, a través d'un element constructiu (pont acústic) que connecti el local amb el lloc de generació del so, encara que aquest estigui relativament lluny. En la major part d'aquest capítol, ens concentrarem a estudiar l'aïllament de sons de transmissió aèria.

Per avaluar si s'aconsegueix l'objectiu de nivell de soroll a l'interior, tindrem en compte els dos processos que l'afecten:

- La transmissió del so pels tancaments.
- L'absorció del so per les superfícies interiors.

5.6.1 Índex d'aïllament acústic

Definim l'*índex d'aïllament acústic* d'un mur (per exemple, d'un tancament extern), R , com la diferència entre el nivell d'intensitat del so incident sobre el mur, N_i , i el so transmès pel mateix a l'altre costat, N_t :

$$R = N_i - N_t \quad (5.14)$$

L'índex d'aïllament acústic també és anomenat sovint *coeficient de reducció sonora* o *coeficient d'atenuació sonora*. La unitat de l'índex d'aïllament acústic és el decibel. L'índex d'aïllament acústic s'aplica a sorolls de transmissió aèria (és a dir, no s'aplica a sorolls transmesos per vibració o per cops aplicats directament sobre el mur en qüestió).

L'índex d'aïllament acústic està determinat pel coeficient de transmissió del so:

$$R = 10 \cdot \log(1/t) \quad (5.15)$$

Efectivament, aplicant l'equació 5.8:

$$R = 10 \cdot \log(I_i / I_t) = 10 \cdot \log I_i - 10 \cdot \log I_t$$

que, tenint en compte també l'equació 5.10, finalment queda com l'equació 5.14.

Exemple 5.6

Calculeu l'índex d'aïllament del so d'una paret que té un coeficient de transmissió de 0,020.

Solució. Apliquem directament l'equació 5.15: $R = 10 \cdot \log(1/t) = 10 \cdot \log(1/0,020) = 17,0$ dB.

Per tant, la resposta és 17,0 dB.

La llei de les masses (secció 5.2.3) implica que, doblant el gruix d'un mur, s'aconsegueix un increment lineal de l'índex d'aïllament acústic, R , en 6 dB. La taula 5.5 mostra alguns valors típics de l'índex d'aïllament acústic, amb els quals es pot comprovar el grau d'aproximació de la llei de les masses (per exemple, comparant les dades de les dues files corresponents a finestres senzilles segellades). La massa per unitat d'àrea (columna 3 de la taula, també coneguda com a *densitat superficial* o *densitat areolar*) és la massa que hi ha darrere d'una superfície d'1 m² i és igual al producte de la densitat mitjana pel gruix del material.

	Material	Massa/u.àrea (kg/m ²)	R (dB)
Paret	Totxo enguixat de 215 mm	425	50
	Totxo enguixat de 102,5 mm	215	45
	Formigó dens de 100 mm	230	45
	Formigó lleuger de 300 mm	190	42
	Placa de pladur de 12 mm	12	25
Finestra	Doble, amb cambra d'aire de 200 mm i segellada		40
	Senzilla, de 12 mm, segellada	30	30
	Senzilla, de 6 mm, segellada	15	25
	Senzilla, de 6 mm, no segellada	15	20

Taula 5.5
Índex d'aïllament
acústic per a diferents
materials i dimensions

5.6.2 Coeficient de transmissió mitjà

Quan considerem un mur format per agregació de diferents estructures –per exemple, una façana formada per una determinada superfície de finestrals i una altra superfície de totxana– la potència sonora transmesa total és la suma de les potències transmeses per cada part. Tenint en compte la relació entre potència i intensitat (equació 2.6), la quantitat que caracteritza les propietats d'aïllament acústic del mur en conjunt és el seu coeficient



de transmissió mitjà, $\bar{t}$, que correspon a una mitjana ponderada dels coeficients de transmissió de les diferents parts que el componen, de manera similar a la definició de la transmitància tèrmica global (equació 3.15).

Per tant, el *coeficient de transmissió del so mitjà* ve donat per l'expressió següent:

$$\bar{t} = \frac{1}{A} \cdot \sum_{k=1}^{L'} (A_k \cdot t_k) \quad (5.16)$$

En aquesta equació, el subíndex k identifica les diferents parts del mur (finestrals i totxana a l'exemple anterior), fins a un nombre total de parts L' .

Amb la definició de l'equació 5.16, el coeficient de transmissió del so mitjà relaciona la mitjana de la intensitat del so transmès pel mur en conjunt, amb la intensitat del so incident, $\bar{t} = \bar{I}_t / I_i$. L'índex mitjà d'aïllament acústic del mur és:

$$\bar{R} = 10 \cdot \log(1 / \bar{t}).$$

5.6.3 Nivell de soroll

Considerem un local en què hi ha diferents superfícies absorbents del so (parets, sostre, terra, mobiliari, persones, etc.). Imaginem que, en total, són L' superfícies diferents, cadascuna amb una superfície A_k i un coeficient d'absorció α_k . Si en aquest local hi ha *una font sonora que genera contínuament una potència acústica* determinada, Pot , eventualment s'establirà un *equilibri entre la potència generada per la font i l'absorbida per les superfícies del local*:

$$Pot = I_s \cdot \sum_{k=1}^{L'} (A_k \cdot \alpha_k)$$

de tal manera que s'assolirà un *nivell de soroll estacionari, d'intensitat I_s* . A l'expressió anterior, el producte $I_s \cdot A_k \cdot \alpha_k$ és la potència absorbida per la k -èsima superfície present al local, de manera que la potència absorbida total n'és la suma.

Definim l'*absorbància* del local, $\mathcal{A}$, com el sumatori que apareix a l'equació anterior:

$$\mathcal{A} = \sum_{k=1}^{L'} (A_k \cdot \alpha_k) \quad (5.17)$$

La unitat d'absorbància és el sabine (Sb), definit com l'absorbància d'una superfície d'1 m² amb coeficient d'absorció unitari (per exemple, una finestra d'1 m² oberta encaixaria amb aquesta definició). La intensitat del soroll en funció de l'absorbància es pot expressar com:

$$I_s = Pot / \mathcal{A} \quad (5.18)$$

i el nivell de soroll corresponent: $N_s = 120 + 10 \cdot \log(I_s) = 120 + 10 \cdot \log(Pot / \mathcal{A})$.

L'absorbància resulta molt convenient per expressar les propietats globals d'un local pel que fa a l'absorció del so. Com es veurà a la secció 5.7, apleix un paper molt important en la qualitat acústica dels locals. S'ha de tenir en compte que l'absorbància d'un local no està completament determinada per les seves característiques constructives, ja que també hi influeixen altres factors, com la presència de mobiliari, de persones, etc.

5.6.4 Índex d'aïllament acústic normalitzat

L'anàlisi de la intensitat del soroll estacionari que acabem de veure, en funció de la potència d'una font i l'absorbància del local, es pot estendre al *cas particular que la font de soroll sigui un mur de separació* del local amb un altre local o habitació, o amb l'exterior. Si la superfície d'aquest mur és A_f i la intensitat mitjana del so transmès pel mur és $\bar{I}_t$, la potència total transmesa pel mur ve donada per: $Pot = A_f \cdot \bar{I}_t$, i la intensitat del soroll estacionari al local és (equació 5.18): $I_s = A_f \cdot \bar{I}_t / \mathcal{A}$. És a dir, *la intensitat del soroll al local és un factor $A_f / \mathcal{A}$ major (o menor) que la intensitat mitjana transmesa pel mur*.

Es defineix l'*índex d'aïllament acústic normalitzat*, R' , d'un mur que tanca un local com la diferència entre els nivells d'intensitat del so incident sobre el mur (des de l'exterior del local) i el nivell d'intensitat del soroll estacionari al local:

$$R' = N_i - N_s = R - 10 \cdot \log(A_f / \mathcal{A}) \quad (5.19)$$

Per tant, l'índex d'aïllament acústic normalitzat es diferencia de l'índex d'aïllament acústic del mur en un nombre de decibels igual a: $-10 \cdot \log(A_f / \mathcal{A})$. *L'índex d'aïllament acústic normalitzat també té per unitat el decibel.*

Exemple 5.7

L'absorbància d'un local és de 500 Sb. Una de les parets del local té un coeficient d'atenuació acústica de 20 dB i una superfície de 50 m². Determineu l'índex d'aïllament acústic normalitzat de la paret.

Solució. Apliquem l'equació 5.19, amb $R = 20$ dB, $A_f = 50$ m², i $\mathcal{A} = 500$ Sb:

$$R' = R - 10 \cdot \log\left(\frac{A_f}{\mathcal{A}}\right) = 30 \text{ dB}$$

Per tant, la resposta és 30 dB.

5.6.5 Millora de l'aïllament acústic

Existeixen diferents estratègies per optimitzar l'aïllament acústic, en funció de la font de transmissió del soroll.

Per a sorolls de transmissió aèria:

- Afegir al tancament una capa de material absorbent del so.



- Incrementar la massa per unitat d'àrea, és a dir, el gruix.
- Segellar (per exemple, un forat que ocupi només un 0,1 % de l'àrea d'una paret pot reduir l'atenuació sonora de 50 dB a 30 dB).
- Instal·lar barreres acústiques absorbents del so a l'exterior de l'edifici, per tal de limitar la intensitat del soroll ambiental incident.

*Per a sorolls de transmissió aèria o d'impacte:*⁸

- Millorar l'aïllament de l'element menys aïllant o pont acústic (conductes d'aire, aigua o gas, bigues, endolls, etc.).
- Incrementar l'elasticitat del tancament.
- Aplicar tècniques de construcció discontinua (diferents materials disposats en sèrie; per exemple, una finestra doble amb cambra d'aire).
- Evitar connexions rígides.

5.7 Acústica arquitectònica II: reverberació

Imaginem que s'ha de dissenyar un local destinat a sala de concerts o de conferències, aula, cinema o per a qualsevol altra funció en què la transmissió del so (música, veu) sigui una de les finalitats principals. En aquests casos, el so es genera a l'interior del local i es requereix que arribi a oients situats en diferents posicions dintre del local, amb la màxima qualitat possible. La *qualitat acústica d'un local* té en compte diversos aspectes:

- *intensitat sonora adequada,*
- *uniformitat de l'energia acústica* (que no variï excessivament segons la localització de l'oient),
- *absència d'ecos i*
- *persistència adequada de la sensació sonora.*

En alguns casos, particularment en l'audició de música, també es pot demanar que el so sigui “envoltant”, és a dir, que sembli que arriba de tot arreu, cosa que podríem associar amb la isotropia en la propagació del so.

L'eco és un so reflectit que arriba a l'oient quan aquest ja ha perdut la sensació sonora del so original, és a dir, que es percep com una repetició. Com que *l'oïda humana reté les sensacions sonores durant un temps aproximat de 0,1 s*, aquest és el temps que ha de transcórrer, com a mínim, entre l'arribada del so original i el mateix so reflectit perquè hi hagi eco.

En canvi, *la reverberació d'un so és un fenomen que consisteix en la percepció prolongada del so durant un temps després que la font ha deixat d'emetre'l, com a conseqüència de l'arribada a l'oient de successives ones reflectides*. A diferència de l'eco, en la

⁸ L'aïllament a sorolls d'impacte es mesura com els dB transmesos com a conseqüència d'un impacte estandarditzat.

reverberació no hi ha pèrdua de la sensació sonora original, és a dir, el so reverberant es percep com una continuació ininterrompuda del so original. Això és possible gràcies al temps de persistència del so a l'oïda de què hem parlat abans.

Per afavorir la propagació uniforme del so en un local, és preferible que la seva planta no es correspongui amb una figura geomètrica simple. *Les plantes de forma irregular són més “riques” acústicament* perquè eviten que el so vagi fent sempre el mateix recorregut i amb trajectòries paral·leles. Una alternativa o un complement al disseny de formes irregulars pot ser la col·locació d'*elements difusors a les parets*, que aconsegueixen el mateix propòsit.

5.7.1 Eco

El disseny geomètric d'un local influeix en el repartiment de l'energia acústica i en l'eventual formació d'ecos. Per minimitzar el risc d'ecos, s'han d'evitar retards superiors a 0,1 s entre l'arribada de sons reflectits consecutius (o entre l'arribada del so original i el primer so reflectit) a la posició d'un oient. És a dir, a la velocitat típica del so a l'aire, $v = 340 \text{ m/s}$, s'han d'evitar diferències de camins de més de 34 m. Amb aquesta finalitat, és molt estesa l'adopció de *sostres baixos*, que dona origen a la forma anomenada de “capsa de sabates”. A la figura 5.9, es pot veure com la diferència entre els dos camins, el del so directe (de la font “f” al receptor “r”) i el del so reflectit al sostre “s”, és petita si el sostre és baix. Per contra, si el sostre és suficientment alt, la diferència de camins és pràcticament el doble de l'altura del sostre, de manera que, si l'altura és superior a 17 m (la meitat de 34 m, per tenir en compte el camí de pujada i el de baixada), hi ha el perill que es formin ecos.

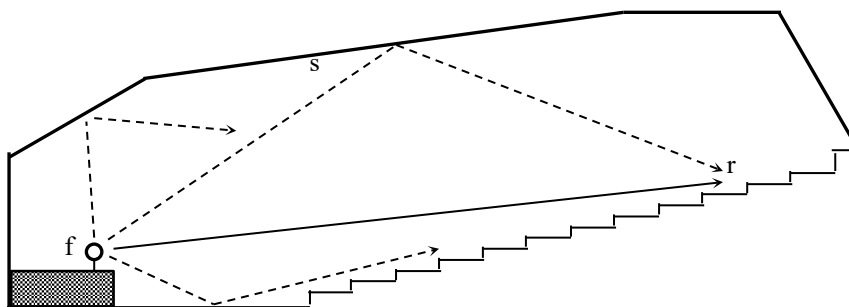
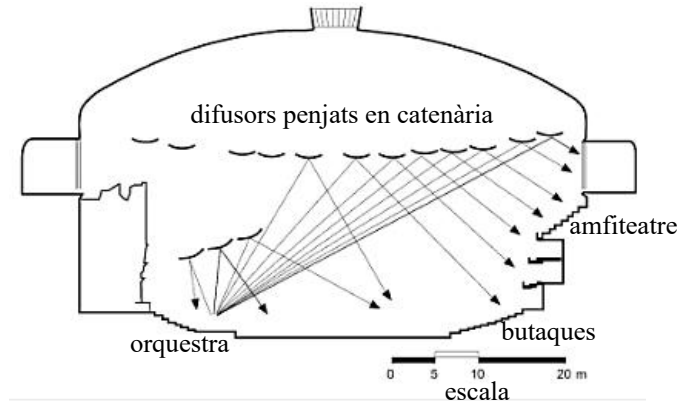


Fig. 5.9
Esquema d'un auditori amb sostre baix. El so arriba des de la font, f, a l'oient, r, directament (línia contínua) i després d'una o de diverses reflexions (línies discontinues)

La figura 5.10 mostra una secció de l'auditori del Royal Albert Hall, a Londres. Aquest auditori, construït l'any 1871, es va fer amb una planta el·líptica de $83 \times 72 \text{ m}$ i una altura de 41 m, essent un exemple típic d'auditori de sostre alt. A més, el sostre era originalment de vidre, material que reflecteix el so eficientment. En conseqüència, l'acústica era molt dolenta. Per solucionar el problema, es va adoptar la solució de penjar del sostre uns difusors en forma de “platets volants” o “bolets”, per disminuir la seva altitud efectiva. També es va *augmentar l'absorció acústica del sostre* amb alumini, evitant que el so reflectit per aquest (que arriba als oients amb molt retard) pogués interferir en el so directe i el reverberant.

Fig. 5.10
Secció del Royal Albert
Hall.

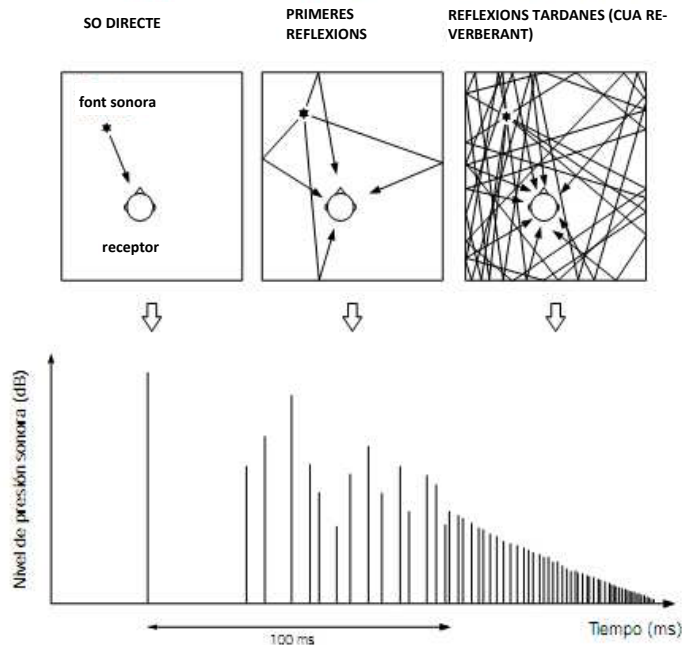
Crèdit de la imatge:
<http://audiogigale.blogspot.com/2012/11/royal-albert-hall.html>



5.7.2 Reverberació

La reverberació del so és un fenomen que incideix notablement en la qualitat acústica dels locals. A la figura 5.11, es pot veure un esquema del fenomen. L'absorció parcial del so a cada reflexió en les diferents superfícies del local ocasiona que la intensitat de la cua reverberant disminueixi exponencialment amb el temps, és a dir, que el *nivell d'intensitat o SPL disminueixi linealment amb el temps*. El so que arriba a l'oient després d'una o més reflexions constitueix l'anomenat *camp acústic difús*, anomenat així per diferenciar-lo del so que arriba directament de la font sonora. La reverberació també influeix positivament en la uniformitat de l'energia acústica al local i en la isotropia del so.

Fig. 5.11
Esquema de la reverberació acústica.
Crèdit de la imatge:
Carrón, A. (1998): Diseño acústico de espacios arquitectónicos.
Barcelona: Edicions UPC



5.7.3 Temps de reverberació

El paràmetre amb què es mesura la reverberació és l'anomenat *temps de reverberació del local*, TR_{60} , definit com el *temps (mesurat en segons) necessari perquè el nivell d'intensitat del so disminueixi exactament en 60 dB després de desconnectar la font sonora*.

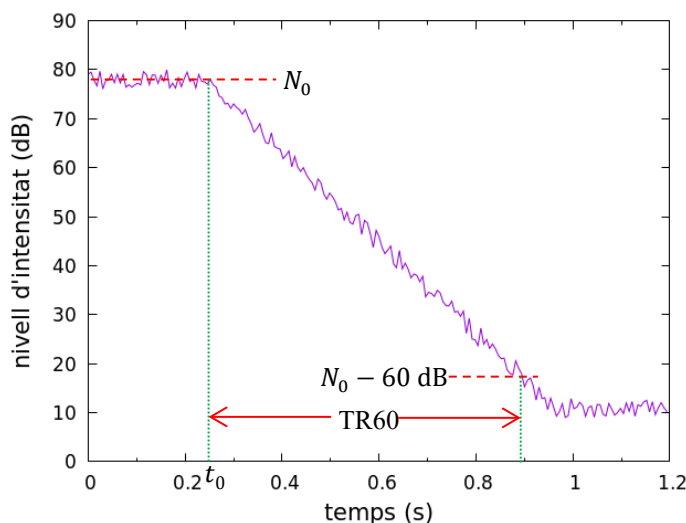


Fig. 5.12
Esquema del concepte de temps de reverberació. En aquesta figura, $TR_{60} = 0.65$ s i $N_0 = 78$ dB. Aquest valor és una mitjana temporal del nivell mesurat, el qual està afectat pel soroll

La figura 5.12 mostra la variació lineal del nivell d'intensitat amb el temps (de manera aproximada, negligint el soroll del senyal). Una font sonora produeix inicialment un so de nivell d'intensitat N_0 . En el temps t_0 , es desconnecta la font i el nivell d'intensitat del so comença a disminuir gradualment, fins arribar al nivell de soroll ambiental (uns 10 dB, a la figura). Després de passar un temps TR_{60} , el nivell d'intensitat ha disminuït al valor $N_0 - 60$ dB, per tant TR_{60} és el temps de reverberació del local.

**Exemple 5.8**

Per mesurar el temps de reverberació d'un local, es disposa d'un altaveu que produeix un so de 50,0 dB en un determinat punt de la sala. Es desconnecta l'altaveu i, quan ha transcorregut un temps $t = 1,2$ s, es mesura el nivell de so enregistrat en el mateix punt, amb un valor de 27,3 dB. Determineu-ne el temps de reverberació.

Solució. En aquest cas, la variació del nivell d'intensitat mesurada en un segon no arriba als 60 dB, de manera que el temps de reverberació és més gran que 1 s. Per calcular-lo, podem aprofitar la variació lineal de N amb el temps i aplicar-hi una senzilla regla de tres. Si en 1,2 s el nivell d'intensitat ha variat en $50,0 - 27,3 = 22,7$ dB, en un temps TR60 variarà 60 dB:

$$TR60 = 1,2 \text{ s} \frac{60 \text{ dB}}{22,7 \text{ dB}} = 3,2 \text{ s}$$

Per tant, la resposta és 3,2 s.

Existeix un rang de *valors òptims* de TR60 per a un local, en funció de l'ús a què es vulgui destinar. Per exemple, per a una *sala de conferències* o una *aula*, l'òptim es troba entre 0,4 i 0,8 s, mentre que, per a una *sala de concerts*, va des de TR60 ~ 1 s per a la música lleugera, fins a TR60 ~ 2 s, per a la música d'orgue.

El valor òptim per a una sala de conferències es pot entendre tenint en compte el temps de persistència del so a l'oïda, $\sim 0,1$ s, que aproximadament coincideix amb la durada mitjana de la pronunciació d'una síl·laba. Adoptant el valor mitjà del rang òptim del temps de reverberació en aquest tipus de locals, és a dir, TR60 = 0,6 s, resulta que el ritme a què disminueix el nivell d'intensitat és de 10 dB cada 0,1 s (60 dB en 0,6 s). Gràcies a aquesta disminució del nivell d'intensitat durant el temps de persistència de la sensació sonora, al final d'aquest temps l'oïda està preparada per poder captar una nova síl·laba amb claredat.

5.7.4 Fórmula de Sabine

Wallace Clement Sabine (1868-1919) va determinar que *les característiques d'un local que influeixen més en el temps de reverberació són el volum, V , i l'absorbància, A* . Mitjançant un model matemàtic de la propagació de l'energia acústica en un local (apèndix E), va arribar a establir una relació entre aquestes quantitats, que avui dia es coneix com la *fórmula de Sabine*:

$$TR60 = 0,161 \cdot V / A \quad (5.20)$$

amb el volum expressat en m^3 i l'absorbància, en Sb. És a dir, a major volum o menor absorbància, més gran és el temps de reverberació.

Exemple 5.9

Una sala paral·lelepèdica de $40 \times 20 \times 4,0$ m està recoberta per un material de coeficient d'absorció 0,050. Determineu-ne el temps de reverberació.

Solució. Podem aplicar l'equació 5.20, en què el volum del local és $V = 40 \times 20 \times 4,0 = 3.200 \text{ m}^3$ i la superfície total de les parets ve donada per:

$$A = 2 \times (40 \times 20 + 40 \times 4,0 + 20 \times 4,0) = 2.080 \text{ m}^2.$$

El coeficient d'absorció és $\alpha = 0,050$ i l'absorbància: $\mathcal{A} = A \cdot \alpha = 104$ Sb. La fórmula de Sabine ens proporciona el temps de reverberació: $\text{TR}60 = 0,161 \cdot V / \mathcal{A} = 4,95$ s. Aquest temps de reverberació és massa alt per a qualsevol finalitat del local, però cal tenir en compte que només s'ha considerat l'absorció del so en les reflexions a les parets, al sostre i al terra del local. La introducció de mobiliari, cortines i persones n'augmentaria l'absorbància i en disminuiria el temps de reverberació a un valor més convenient.

Per tant, la resposta és 5,0 s (arrodonint a dos decimals per excés).

Tenint en compte la definició d'absorbància, es pot reescriure la fórmula de Sabine:

$$\text{TR}60 = 0,161 \frac{V}{A \cdot \bar{\alpha}} \quad (5.21)$$

en la qual s'ha substituït l'absorbància pel producte de la superfície total absorbent del local (tenint en compte les parets, el sostre, el terra, el mobiliari, les persones, etc.), A , i el coeficient d'absorció mitjà, $\bar{\alpha}$, definit com:

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{A} \sum_{k=1}^{L'} (A_k \cdot \alpha_k) = \mathcal{A} / A \quad (5.22)$$

en què el sumatori s'estén a un nombre total de superfícies absorbents diferents L' .

La fórmula de Sabine és una expressió aproximada. Les aproximacions que es fan en la seva derivació en determinen les *condicions de validesa*:

1. Tracta l'absorció dels tancaments com un procés continu (considera absorcions en un temps infinitesimal, dt) $\Rightarrow$ els coeficients d'absorció han de ser petits.
2. Suposa que la densitat d'energia sonora, E_V , és uniforme a tot el local (l'energia acústica total al local és: $E = E_V \cdot V$).
3. Suposa una propagació isòtropa en totes direccions $\Rightarrow$ independència de la forma geomètrica i difusió perfecta en les reflexions.

La derivació de la fórmula de Sabine (apèndix E) permet deduir que:

- La intensitat del so i l'energia acústica total de la sala són directament proporcionals.
- La intensitat del so decau exponencialment amb el temps.
- El nivell d'intensitat varia linealment amb el temps.



Una variant de la fórmula de Sabine té en compte l'absorció del so per l'aire en locals de gran volum:

$$TR60 = 0,161 \frac{V}{A + 4\beta V}$$

Existeixen altres alternatives a la fórmula de Sabine, basades en diferents aproximacions, però no les tractarem aquí.

5.7.5 Optimització del temps de reverberació

Quan el temps de reverberació no és adequat a la finalitat del local, la primera opció per modificar-lo és cobrir parcialment alguna superfície existent amb un altre material de coeficient d'absorció diferent (més gran que el de la superfície original si es vol disminuir el temps de reverberació, o més petit en cas contrari). La segona opció és afegir superfície absorbent extra, per exemple, amb la col·locació de panells de material absorbent. Aquesta segona opció només permet augmentar el temps de reverberació.

En qualsevol cas, cal tenir en compte l'absorció del so deguda a les persones, de manera que l'ocupació del local és rellevant per determinar el temps de reverberació. Una estratègia comuna per reduir la dependència del temps de reverberació segons el nombre de persones presents és intentar que l'absorbència dels seients buits sigui la més similar possible a la d'un seient que ocupa una persona.

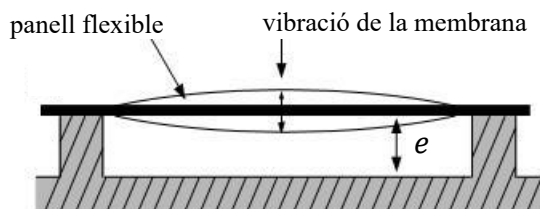
En general, la naturalesa del material de la superfície és la que determina l'absorció del so. Tanmateix, les propietats ondulatòries del so fan que qualsevol capa superficial de gruix molt inferior a la longitud d'ona no sigui eficaç per absorbir el so. Aquest efecte pot ser important per a sons de freqüències baixes. Per exemple, l'absorció de freqüències greus per materials porosos exigeix gruixos d'aquests materials de l'ordre de 4 cm o més.

L'absorció del so a freqüències baixes es pot incrementar amb la col·locació de ressonadors, que són elements que vibren a les freqüències que es volen atenuar i, al mateix temps, eliminen l'energia de les seves vibracions d'una manera molt eficient mitjançant la fricció i la viscositat. N'és un exemple l'anomenat *ressonador de membrana* (Fig. 5.13), que consisteix en un panell o membrana separat de la superfície per un petit volum d'aire tancat, on també acostuma a trobar-se material porós. En aquest cas, la membrana és la responsable de la formació d'ones estacionàries⁹ a costa de l'energia del so que hi

⁹ La formació d'ones estacionàries en una membrana o corda (un monocordi) va ser estudiada fa vint-i-sis segles pel filòsof grec Pitàgores, el mateix que donà nom al teorema de Pitàgores, que relaciona els tres costats d'un triangle rectangle.

incideix, i tant l'aire de dintre de la cavitat com el material porós proporcionen la dissipació volguda d'energia acústica.

Fig. 5.13
Ressonador de mem-
brana amb una cavitat
de gruix e .
Crèdit de la imatge: Car-
rion, A. (1998): Diseño
acústico de espacios ar-
quitectónicos. Barce-
lona: Edicions UPC



Un altre exemple és el resonador de Helmholtz,¹⁰ que consisteix en un volum d'aire gairebé tancat, però comunicat amb l'aire del local per mitjà de petites obertures. Aquestes obertures fan el paper de les llengüetes en els instruments de vent, transmetent energia acústica a la cavitat (Fig. 5.14). L'aire del resonador vibra, formant ones estacionàries, i facilita l'absorció del so per l'acció de la seva viscositat. També es pot afegir material porós absorbent a l'interior de la cavitat de Helmholtz per augmentar el grau de dissipa-

Fig. 5.14
Ressonador de Helm-
holtz amb 18 cavitats.
Crèdit de la imatge:
<https://www.gearslutz.com/board/studio-building-acoustics/630460-panel-helmholtz-resonators-studio.html>



ció de l'energia acústica.

¹⁰ Hermann von Helmholtz (1821-1894), científic alemany famós, entre d'altres aportacions, per les seves contribucions a la termodinàmica.

**Problemes resolts**

P5.1 Una ona plana harmònica de 60 Hz de freqüència es propaga a una velocitat de 32 m/s. Determineu la longitud d'ona.

Solució:

La relació entre freqüència, f ; velocitat de propagació, v , i longitud d'ona, λ , és (v. apèndix B): $\lambda = v / f$. Substituint els valors de l'enunciat, $\lambda = \frac{32}{60} = 0,53$ m.

P5.2 Determineu les freqüències dels tres primers harmònics de les ones sonores estacionàries a l'aire que es formen entre dues parets paral·leles, situades a una distància de 2,5 m l'una de l'altra.

Dada: velocitat del so = 340 m/s

Solució:

Les ones estacionàries es produeixen en un medi confinat per les dues parets, amb la condició que a totes dues parets l'amplitud de vibració és nul·la (per l'ona de desplaçament). Com s'explica a l'apèndix B, la relació entre la freqüència de les ones estacionàries, la velocitat de les ones sonores i la longitud de confinament (distància entre parets) és: $f_n = n \frac{v}{2L}$, on n pot ser qualsevol nombre natural

$n \geq 1$. Els tres primers harmònics són: $f_1 = \frac{v}{2L} = \frac{340}{22,5} = 68$ Hz, $f_2 = 2f_1 = 136$

Hz i $f_3 = 3f_1 = 204$ Hz. Totes tres freqüències corresponen a la banda de sons audibles greus, en què l'oïda és poc sensible, llevat que la intensitat sonora sigui relativament gran (Fig. 5.2).

P5.3 Una bola d'acer d'1 kg cau d'una taula d'1 m d'altura. Si tota l'energia de la bola es transforma en arribar al terra en un pols d'energia sonora de 0,1 s de durada, quin serà el nivell d'intensitat d'aquest so a una distància d'1 m del punt d'impacte?

Solució:

En caure, la bola s'accelera per l'acció de la gravetat i la seva energia potencial inicial, $E_g = mgh$, es transforma en energia cinètica. En el xoc, l'energia es transforma en energia acústica. Per tant, la potència mitjana del so generat és:

$$Pot = \frac{E_g}{\Delta t} = \frac{mgh}{\Delta t} = \frac{1 \text{ kg } 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} 1 \text{ m}}{0,1 \text{ s}} = 98,1 \text{ W, on el resultat s'expressa en watts,}$$

ja que totes les quantitats s'han introduït en les unitats del Sistema Internacional.

Per calcular la intensitat del so a 1 m de distància, hem de fer alguna hipòtesi respecte a la distribució de l'energia sonora en diferents direccions. Una hipòtesi convenient és que el so es reparteix uniformement en totes les direccions que hi

ha a l'hemisferi superior (sobre el terra). En aquest cas, en estar afectada només la meitat de la superfície d'una esfera, la intensitat és: $I = \frac{Pot}{2\pi r^2} = 15,6 \text{ W/m}^2$.

Finalment, el nivell d'intensitat és (recordeu que la intensitat s'ha d'introduir en W/m^2):

$$N = 120 + 10 \cdot \log(I) = 120 + 10 \cdot \log(15,6) = 130 \text{ dB}$$

El nivell d'intensitat resultant supera el límit del dolor.

P5.4 En una manifestació d'un miler de persones, totes es posen d'acord a cridar simultàniament i cadascuna d'elles produeix un so de 50 dB en un punt concret. Determineu el nivell d'intensitat resultant. Quin seria el nivell d'intensitat a una distància deu vegades superior a la inicial?

Solució:

Hem de sumar les intensitats dels sons deguts a cada individu. La intensitat corresponent a 50 dB, I , ve donada per:

$$50 = 120 + 10 \cdot \log(I) \Rightarrow \log(I) = -7 \Rightarrow I = 10^{-7} \text{ W/m}^2$$

El nivell d'intensitat total és: $N_1 = 120 + 10 \cdot \log(1000 \cdot 10^{-7}) = 80 \text{ dB}$.

Com s'ha vist a la secció 5.3.2, a una distància deu vegades més gran, $r_2 = 10r_1$, i la dilució geomètrica fa que el so tingui 20 dB menys que N_1 , és a dir, $N_2 = 60 \text{ dB}$.

P5.5 Si els nivells d'intensitat de dues ones sonores difereixen entre si en 33 dB:

- Quina relació existeix entre les seves intensitats?
- I entre els respectius valors de pressió eficaç acústica?

Solució:

- Restant les expressions que relacionen la intensitat amb el nivell d'intensitat, per a les dues ones tenim:

$$N_2 - N_1 = [120 + 10 \cdot \log(I_2)] - [120 + 10 \cdot \log(I_1)] = 10 \cdot \log(I_2 / I_1)$$

$$\text{Aïllant el quocient d'intensitats: } \frac{I_2}{I_1} = 10^{(N_2 - N_1)/10} = 10^{3,3} \approx 2.000$$

- La relació entre pressió eficaç acústica i intensitat és: $I = \frac{P_{\text{ef}}^2}{\rho v}$; per tant, el quocient entre les pressions eficaçes acústiques de les dues ones és:

$$\frac{P_{\text{ef},2}}{P_{\text{ef},1}} = \sqrt{\frac{I_2}{I_1}} = 45$$



P5.6 Si un tancament de totxo de 300 kg/m^2 proporciona un aïllament acústic de 32,5 dB a 77 Hz, determineu-ne el gruix necessari per obtenir una atenuació de 44,5 dB a la mateixa freqüència. Dada: densitat del totxo = 1.900 kg/m^3

Solució:

Per resoldre aquest problema, suposarem vàlida la llei de les masses. A la secció 5.2.3, hem vist que, segons aquesta llei, el coeficient de transmissió del so d'un mur és proporcional a la inversa del quadrat del gruix: $t \propto \frac{1}{e^2}$. Si tenim dos murs de gruixos e_1 i e_2 , els coeficients de transmissió corresponents estaran en la relació: $\frac{t_2}{t_1} = \left(\frac{e_1}{e_2}\right)^2$, i els índexs d'aïllament acústic satisfaran la relació següent:

$$R_1 - R_2 = 10 \cdot \log\left(\frac{t_2}{t_1}\right) = 10 \cdot \log\left[\left(\frac{e_1}{e_2}\right)^2\right] = 20 \cdot \log\left(\frac{e_1}{e_2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{e_1}{e_2} = 10^{(R_1 - R_2)/20} = 10^{0,60} = 4,0.$$

Per tant, el gruix ha de ser quatre vegades més gran que l'inicial:

$$e_1 = 4,0 e_2 = 4,0 \frac{300 \text{ kg/m}^2}{1.900 \text{ kg/m}^3} = 0,63 \text{ m}$$

De fet, aquest problema es podria haver resolt més ràpidament aplicant la regla esmentada a la secció 5.6.1 que un increment del gruix per un factor dos comporta un increment de R en 6 dB. Com que l'increment de l'índex d'aïllament acústic que es demana a l'enunciat és de 12 dB, el gruix s'ha d'incrementar dues vegades per un factor dos, és a dir, un factor quatre en total.

P5.7 Les dimensions d'una paret de totxo són: 4,0 m de longitud i 2,5 m d'altura, i conté una finestra de $0,96 \text{ m}^2$ i una porta de $1,5 \text{ m}^2$. Els corresponents índexs d'aïllament del so són: totxo = 53 dB; finestra = 25 dB; porta = 20 dB. Determineu l'índex d'aïllament acústic mitjà de la paret.

Solució:

En tractar-se d'una paret heterogènia, formada per diferents seccions amb diferents materials, el seu índex d'aïllament acústic es relaciona amb el coeficient de transmissió mitjà per: $\bar{R} = 10 \cdot \log(1/\bar{T})$.

Per la seva banda, el coeficient de transmissió mitjà s'obté com la mitjana ponderada dels coeficients de transmissió de les diferents seccions de la paret:

$$\bar{T} = \frac{1}{A} \cdot \sum_{k=1}^3 (A_k \cdot t_k)$$

A l'enunciat, es proporcionen els índexs d'aïllament de cada secció, R_k . Per obtenir els corresponents coeficients de transmissió, els hem d'aïllar de la relació $R_k = 10 \cdot \log(1/t_k) \Rightarrow t_k = 10^{(-R_k/10)}$.

Els resultats són: $t_1 = 5,02 \cdot 10^{-6}$, $t_2 = 3,16 \cdot 10^{-3}$, i $t_3 = 0,010$, respectivament, per a totxo, finestra i porta.

L'altre ingredient necessari per calcular el coeficient de transmissió mitjà és la superfície ocupada per cada secció de la paret. El totxo ocupa una superfície de la paret després de descomptar les de la finestra, $A_2 = 0,96 \text{ m}^2$, i la porta, $A_3 = 1,5 \text{ m}^2$. És a dir, ocupa una superfície: $A_1 = 10 - 0,96 - 1,5 = 7,54 \text{ m}^2$.

Ara ja podem calcular el coeficient de transmissió mitjà:

$$\bar{t} = \frac{(5,02 \cdot 10^{-6} \cdot 7,54 \text{ m}^2 + 3,16 \cdot 10^{-3} \cdot 0,96 \text{ m}^2 + 0,010 \cdot 1,5 \text{ m}^2)}{(10 \text{ m}^2)} = 0,00181$$

Finalment, l'índex d'aïllament acústic mitjà és: $\bar{R} = 10 \cdot \log(1/\bar{t}) = 27 \text{ dB}$.

- P5.8** Un local té una absorbància de 500 Sb. Si un altaveu genera una potència sonora d'1 mW, determineu-ne la intensitat i el nivell d'intensitat en condicions estacionàries.

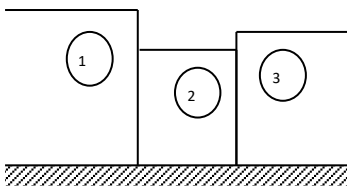
Solució:

Podem aplicar directament la relació entre intensitat del soroll, potència d'aquest

$$\text{i absorbància del local: } I_s = \frac{Pot}{\mathcal{A}} = \frac{0,001 \text{ W}}{500 \text{ Sb}} = 2 \cdot 10^{-6} \text{ W/m}^2$$

$$\text{El nivell de soroll és: } N_s = 120 + 10 \cdot \log(I_s) = 63 \text{ dB}$$

- P5.9** A l'interior de l'edifici 1 de la figura, es produeix un soroll continuat d'intensitat $2,0 \cdot 10^{-5} \text{ W/m}^2$, i a l'edifici 3, un altre soroll continuat d'intensitat $3,0 \cdot 10^{-5} \text{ W/m}^2$.



Si els coeficients d'atenuació acústica són $R_{12} = 20 \text{ dB}$ i $R_{23} = 30 \text{ dB}$, la superfície de separació entre l'edifici 1 i el 2 és de 50 m^2 i, entre l'edifici 2 i el 3, és de 100 m^2 , i l'absorbància de l'edifici 2 és de 500 Sb, determineu el nivell de soroll a l'edifici 2.

Solució:

La intensitat del soroll al local 2, I_s , és el resultat de l'equilibri entre la potència acústica que hi transmeten, respectivament, les separacions amb els locals 1 i 3, d'una banda, i l'absorció del propi local 2, de l'altra banda: $I_s = Pot / \mathcal{A}$.

La potència transmesa per a cada separació entre locals és el producte de la intensitat transmesa, $I_{t,12}$ i $I_{t,23}$, i la respectiva superfície de separació, i la potència



total transmesa n'és la suma: $Pot = (A_{f,12} \cdot I_{t,12} + A_{f,23} \cdot I_{t,23})$. Introduint els coeficient de transmissió de les superfícies de separació entre locals, $t_{12} = 10^{(-R_{12}/10)} = 10^{-2}$ i $t_{23} = 10^{(-R_{23}/10)} = 10^{-3}$, a l'expressió anterior obtenim:

$$Pot = (A_{f,12} \cdot t_{12} \cdot I_1 + A_{f,23} \cdot t_{23} \cdot I_3) = 10^{-5} + 3 \cdot 10^{-6} = 1,3 \cdot 10^{-5} \text{ W}$$

on s'han utilitzat les dades relatives a la intensitat a cada local: $I_1 = 2,0 \cdot 10^{-5} \text{ W/m}^2$ i $I_2 = 3,0 \cdot 10^{-5} \text{ W/m}^2$

Amb la potència transmesa, ja podem calcular la intensitat del soroll al local 2:

$$I_s = \frac{Pot}{A} = \frac{1,3 \cdot 10^{-5} \text{ W}}{500 \text{ Sb}} = 2,6 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2$$

Finalment, el nivell de soroll al local 2 és: $N_s = 120 + 10 \cdot \log(I_s) = 44 \text{ dB}$

P5.10 Una sala de $10 \times 6,0 \text{ m}$ de planta i $3,0 \text{ m}$ d'altura presenta el mateix coeficient d'absorció a totes les seves superfícies i té un temps de reverberació de $2,7 \text{ s}$. Quina superfície s'hauria de recobrir amb un material de coeficient d'absorció $0,30$ per aconseguir reduir el temps de reverberació a $1,5 \text{ s}$?

Solució:

En aquest problema, suposarem que la sala està buida i que l'absorbància la proporcionen exclusivament les parets, el sostre i el terra. A la configuració inicial, l'absorbància és: $\mathcal{A} = 0,161 \cdot V / TR60 = 10,73 \text{ Sb}$, on el volum és $V = 180 \text{ m}^3$ i $TR60 = 2,7 \text{ s}$. Totes les superfícies tenen el mateix coeficient d'absorció: $\alpha = \mathcal{A} / A = 0,050$, on $A = 216 \text{ m}^2$ és la superfície total de les parets, el sostre i el terra.

Com que el temps de reverberació és inversament proporcional a l'absorbància, per reduir-lo en un factor $2,7/1,5 = 1,8$, l'absorbància s'ha d'incrementar en la mateixa proporció. Per tant, la nova absorbància ha de ser $\mathcal{A}' = 19,32 \text{ Sb}$.

Després de recobrir una superfície A' amb el material de coeficient d'absorció $\alpha' = 0,30$, la superfície de coeficient $\alpha = 0,050$ que està exposada a les ones sonores passa a ser: $A - A'$, i l'absorbància canvia a:

$$\mathcal{A}' = (A - A') \cdot \alpha + A' \cdot \alpha'$$

Iguallant aquesta darrera suma a l'absorbància volguda, $19,32 \text{ Sb}$, es pot trobar la mida de la superfície que cal recobrir: $A' = 34,4 \text{ m}^2 \approx 34 \text{ m}^2$.

P5.11 L'auditori del poble de Vilamàxima de Baix té unes dimensions de $30 \times 10 \times 4,0 \text{ m}$ i un temps de reverberació de $2,0 \text{ s}$.

a) Suposant que totes les superfícies absorbents de la sala (parets, sostre i terra) tenen el mateix coeficient d'absorció α , determineu el valor de α i l'absorbància total de la sala.

L'Ajuntament de Vilamàxima de Dalt decideix fer-ne una còpia més gran, a escala 1,5:1, utilitzant els mateixos materials.

- b) Què es pot esperar del temps de reverberació del nou auditori? Valoreu els avantatges i els inconvenients de la forma geomètrica de l'auditori pel que fa a la seva qualitat acústica i la possibilitat d'ecos.

Al ple municipal, l'Ajuntament de Vilamàxima de Baix ha decidit dividir el seu auditori en dues sales iguals, de dimensions $15 \times 10 \times 4,0$ m cadascuna, mitjançant un panell de $10 \times 4,0$ m, amb un coeficient d'absorció de 0,40.

- c) Determineu el temps de reverberació de les noves sales.
d) Determineu el temps de reverberació d'una d'aquestes sales si l'ocupació és de 50 persones i cadascuna d'elles aporta una absorptància de 0,45 Sb.

Solució:

- a) En la configuració inicial, el volum de la sala és $V = 1.200 \text{ m}^3$, la superfície absorbent és $A = 2 \times (30 \times 10 + 30 \times 4,0 + 10 \times 4,0) = 920 \text{ m}^2$ i el temps de reverberació, $TR60 = 2 \text{ s}$. La fórmula de Sabine ens proporciona l'absorptància:

$$TR60 = 0,161V / A \rightarrow A = 96,6Sb \approx 97 Sb; \alpha = A / A = 0,105 \approx 0,11$$

- b) El volum augmentarà per un factor $1,5^3$ i la superfície absorbent, per un factor $1,5^2$; per tant, el temps de reverberació es multiplicarà per un factor 1,5 i serà de 3,0 s (en general, pitjor). La forma regular de la sala és acústicament pobre, atès que possibilita la formació de zones d'ombra acústica i no afavoreix la uniformitat del so a la sala. No es produiran ecos gràcies a la forma allargada del local (sostre baix) i a les seves dimensions relativament petites.
- c) El volum de cada sala serà de $V' = 600 \text{ m}^3$; la superfície de parets amb el coeficient d'absorció original $\alpha_1 = 0,105$ serà de $S_1 = 460 \text{ m}^2$, i la superfície del panell amb coeficient d'absorció $\alpha_2 = 0,40$ serà de $S_2 = 40 \text{ m}^2$. Per tant, l'absorptància de cada sala serà: $A' = \alpha_1 S_1 + \alpha_2 S_2 = 64,3 Sb$, i el nou temps de reverberació: $TR60' = 0,161V' / A' = 1,5 \text{ s}$.
- d) A l'absorptància calculada a l'apartat anterior, s'hi ha d'afegir la de les persones: $50 \times 0,45 = 22,5 Sb$, és a dir, en total, la nova absorptància serà de $A'' = 86,8 Sb$ i el temps de reverberació: $TR60'' = 1,1 \text{ s}$.

Problemes proposats

P5.12 Determineu la longitud d'ona màxima amb què es pot formar una ona sonora estacionària en una habitació de $3,5 \times 4,2 \times 2,2$ m. A quina freqüència correspon?

Dada: velocitat del so = 340 m/s

R: 12 m; 29 Hz

P5.13 Un altaveu emet ones esfèriques de 4.000 Hz de freqüència, amb una potència de 0,010 W. Les ones es propaguen per l'aire, la humitat relativa del qual és del



50 %. El coeficient d'absorció del so per l'aire a 4.000 Hz i amb un 50 % d'humitat relativa és $0,0077 \text{ m}^{-1}$. Calculeu-ne la intensitat a 10 m i a 10 km.

R: $7,4 \cdot 10^{-6} \text{ W/m}^2$; $2,9 \cdot 10^{-45} \text{ W/m}^2$

P5.14 Un altaveu emet ones esfèriques de 500 W de potència que es propaguen per l'aire. Calculeu el nivell d'intensitat a 4 m del focus (negligiu l'absorció per l'aire).

R: 124 dB

P5.15 Un altaveu emet un so de 1.000 Hz amb una potència de 0,010 W. Determineu la distància a què es deixaria de percebre aquest so si no hi hagués absorció per l'aire.

R: 28 km

P5.16 Un altaveu emet un so de 1.000 Hz de freqüència, la intensitat del qual a 20 m de distància és $0,010 \text{ W/m}^2$. Si suposem que l'energia sonora es reparteix uniformement en l'hemisferi que té davant i que no existeixen reflexions al sòl o a qualsevol altre objecte, ni absorció per l'aire:

- a) Quina és la potència acústica generada per l'altaveu?
- b) Quin és el nivell d'intensitat a 30 m de l'altaveu?

R: a) 25 W; b) 96,5 dB

P5.17 Calculeu el nivell d'intensitat d'un so de $2 \cdot 10^{-6} \text{ W/m}^2$.

R: 63 dB

P5.18 Quant canviaria el nivell d'intensitat del problema anterior si es duplicués l'amplitud de pressió del so?

R: Augmentaria en 6 dB.

P5.19 En executar una obra amb un violí en una sala de concerts, el nivell d'intensitat mesurat en un punt de la sala és de 50,0 dB. Quin seria el nivell d'intensitat en el mateix punt si tres violins idèntics executessin la mateixa peça simultàniament?

R: 54,8 dB

P5.20 Calculeu l'amplitud de pressió acústica que resulta de la superposició de dos sons de 85 dB i 87 dB a l'aire

Dades: densitat de l'aire = $1,2 \text{ kg/m}^3$; velocitat del so a l'aire = 340 m/s

R: 0,82 Pa

P5.21 Una font puntual emet ones sonores esfèriques amb una potència de 10^{-5} W . Determineu el nivell d'intensitat a 2 m de la font. Quina diferència hi ha entre el nivell d'intensitat a 2 m i a 20 m de la font?

R: 53 dB; diferència = 20 dB

P5.22 L'espectre acústic d'un so de $4,0 \cdot 10^{-6} \text{ W/m}^2$, que incideix sobre una paret de blocs de formigó buits de 20 cm, és el següent: 25 % de l'energia amb una freqüència de 125 Hz, 35 % de l'energia amb 500 Hz de freqüència, i 40 % de l'energia amb 4.000 Hz. Quin serà el nivell d'intensitat total del so transmès per la paret?

Dades: índex d'aïllament acústic de la paret a 125 Hz = 32 dB; id. a 500 Hz = 42 dB; id. a 4.000 Hz = 50 dB

R: 28,7 dB

P5.23 La paret del problema anterior compleix la llei de les freqüències? Quina n'és la desviació?

R: No, segons aquesta llei, un increment de la freqüència per un factor 2 s'hauria de traduir en un increment lineal de l'índex d'aïllament acústic en 6 dB. Si fos exacta, entre 125 Hz i 500 Hz l'índex hauria d'augmentar en 12 dB però, segons l'enunciat, només ho fa en 10 dB. Per tant, la desviació és de 2 dB. La desviació entre 500 Hz i 4.000 Hz és encara més gran: de 10 dB.

P5.24 Un estudi de gravació està separat de la sala de control mitjançant un tancament de 30 m^2 no homogeni, format per una superfície ceràmica de 20 m^2 , amb un coeficient d'atenuació sonora de 45 dB, més una pantalla vidrada de 10 m^2 .

- Calculeu el coeficient d'atenuació sonora de la pantalla vidrada per tal que a la sala de control no se superin els 50 dB quan el nivell d'intensitat a l'estudi és de 85 dB.
- Determineu el gruix de vidre necessari, sabent que el seu coeficient d'atenuació sonora varia amb el seu gruix, e , expressat en mm, segons la llei:

$$R = 13,3 \cdot \log e + 19,5 \text{ dB}.$$

R: a) 31 dB; b) 6,8 mm

P5.25 Un auditori té cabuda per a 1.000 persones. Quan està buit, té un temps de reverberació de 2,4 s i mig ple, d'1,6 s. Calculeu el temps de reverberació quan estigui ple.

Dades: absorptància d'un seient buit = 0,02 Sb; absorptància d'un seient ocupat = 0,40 Sb

R: 1,2 s

P5.26 Una sala de 900 m^3 té un temps de reverberació de 1,2 s. Determineu quant ha d'incrementar-se l'absorptància per tal que el temps de reverberació es redueixi a 0,6 s.

R: l'absorptància s'ha de duplicar.

P5.27 Una sala de 5.000 m^3 de volum presenta les següents superfícies absorbents del so: 500 m^2 de totxana, amb $\alpha = 0,03$; 600 m^2 de guix, amb $\alpha = 0,02$; 100 m^2 de panells acústics, amb $\alpha = 0,70$; 300 m^2 de catifes, amb $\alpha = 0,30$; 70 m^2 de cortines, amb $\alpha = 0,40$; 400 seients, cadascun amb una absorptància de 0,30 Sb. Determineu-ne el temps de reverberació.



R: 2,4 s

P5.28 Una catedral té un volum de 120.000 m^3 . Quan no hi ha gent, el temps de reverberació és de 9,0 s. Calculeu el nombre de persones necessari per tal que el temps de reverberació baixi fins a 6,0 s, sabent que cada persona proporciona una absorbència de 0,46 Sb. Negligiu l'absorció del so per l'aire.

R: 2.300 persones

P5.29 El temps de reverberació d'una sala de conferències de 6.500 m^3 de volum és de 2,0 s.

- a) Quina és l'absorbència de totes les superfícies de la sala?
- b) Si l'àrea total de les superfícies absorbents és de 3.700 m^2 , quin és el coeficient mitjà d'absorció?
- c) Seria possible reduir el temps de reverberació fins a 1 s recobrint part de les superfícies amb un material de coeficient d'absorció 0,2? En cas negatiu, quina actuació es podria fer amb aquest material per aconseguir un $\text{TR}_{60} = 1 \text{ s}$?

R: a) 520 Sb; b) 0,14; c) no, el que es podria fer és afegir panells per incrementar-ne la superfície absorbent.

P5.30 Es vol mesurar el temps de reverberació d'un local de 1.000 m^3 mitjançant un altaveu que produeix un so de 50 dB al centre de la sala. Es desconnecta l'altaveu i, quan ha transcorregut un temps d'1,1 s, el nivell de so enregistrat en el mateix punt és de 20 dB. Quina superfície de paret, de coeficient d'absorció inicial negligible, s'haurà de cobrir amb una cortina gruixuda de $\alpha = 0,20$, per tal que el temps de reverberació no sigui superior a 1,5 s?

R: 171 m^2

P5.31 Al local del problema anterior, es posen en funcionament simultàniament dos altaveus idèntics al que s'ha utilitzat per mesurar el temps de reverberació. Supposeu que encara no s'ha instal·lat la cortina gruixuda a què fa referència el problema anterior i calculeu el nivell d'intensitat al centre de la sala al cap de 0,30 s d'haver desconnectat els altaveus (també simultàniament).

R: 45 dB

P5.32 Un local de 350 m^3 té un temps de reverberació d'1,2 s. Una de les parets, de 24 m^2 i amb un índex d'aïllament acústic de 43 dB, dona a un carrer molt transitat.

- a) Determineu l'índex d'aïllament acústic normalitzat.
- b) Si el nivell d'intensitat al carrer és de 75 dB, determineu el nivell de soroll dins del local.

R: a) 46 dB; b) 29 dB

P5.33 L'auditori del poble de Vilamàxima de Baix, de dimensions $30 \times 10 \times 4,0$ m, té un temps de reverberació de 2,0 s. Durant una conferència, la distància entre el conferenciant i un oient situat a la primera fila de seients és de 2,0 m, mentre que la distància entre el conferenciant i un oient situat a la darrera fila és 25 m.

- a) Tot suposant que el conferenciant emet ones sonores esfèriques, determineu la diferència en dB entre el so *directe* que arriba al primer oient i a l'últim.

Un dels murs laterals de la sala, de $10 \times 4,0$ m, limita amb un carrer on el nivell d'intensitat és de 70 dB.

- b) Si es vol aconseguir que el so *transmès* pel mur a l'interior de la sala no superi els 10^{-9} W/m², determineu el valor màxim que pot tenir el coeficient de transmissió mitjà del mur i el corresponent índex d'aïllament acústic.

- c) Determineu el nivell de soroll a la sala.

R: a) 22 dB; b) $\bar{\tau} = 10^{-4}$, 40 dB; c) 26 dB

→6



Fotometria

La fotometria és la branca de la física que s'ocupa del mesurament de la llum, tenint en compte la seva capacitat per produir una sensació visual en l'ull humà. La fotometria va esdevenir una ciència de precisió a mitjan segle XIX, quan els avenços tecnològics van permetre mesurar al laboratori la resposta de l'ull a la llum –i, de fet, l'expansió de la fotografia ho va fer imprescindible. Per assolir la precisió necessària, la fotometria defineix uns conceptes propis que abasten tots els processos implicats en la visió: emissió i propagació de la llum, associada al concepte d'intensitat lluminosa; incidència de la llum sobre una superfície, associada al concepte d'il·luminació; reemissió o reflexió de la llum per part de la superfície, associada al concepte de brillantor, i arribada a l'ull i percepció. La unitat d'intensitat lluminosa, la candela, és una unitat bàsica del Sistema Internacional d'Unitats. És un cas singular, perquè és l'única unitat bàsica definida a partir de la resposta sensorial del cos humà.

La fotometria té un paper essencial en qualsevol indústria audiovisual, però també en el disseny dels espais arquitectònics. Començarem a estudiar-la repassant alguns aspectes de la naturalesa de la llum i de la seva percepció per l'ull. Basant-nos en l'eficiència de l'ull per detectar la llum, definirem la primera magnitud fotomètrica: el flux lluminós. A continuació, anirem introduint altres magnituds fotomètriques necessàries per dissenyar la il·luminació d'un espai, que anirem relacionant entre si. Finalment, veurem els aspectes d'eficiència, rendiment i contaminació en el context de la fotometria.

6.1 Naturalesa de la llum

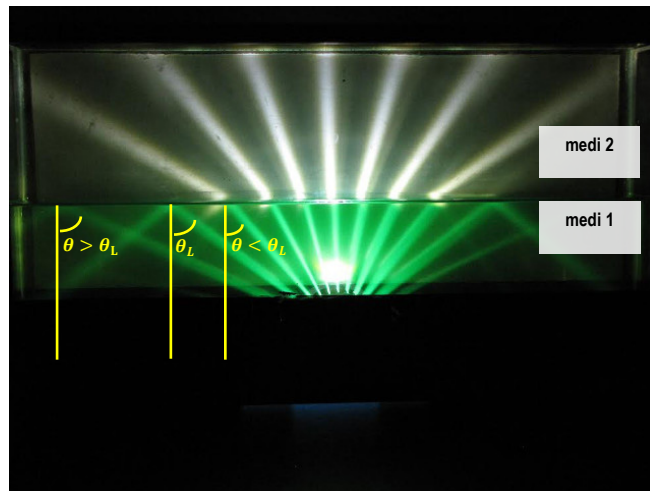
La llum (s'entén que visible per l'ull humà) consisteix en ones electromagnètiques amb una longitud d'ona compresa dintre d'un estret rang de valors: $400\text{ nm} \lesssim \lambda \lesssim 750\text{ nm}$. Els límits d'aquest rang no són precisos i poden variar entre diferents individus. En realitat, la capacitat de l'ull per percebre ones electromagnètiques no és uniforme dintre d'aquest interval de longituds d'ona, sinó que la “visibilitat” de les ones electromagnètiques es va fent més difícil progressivament a mesura que la longitud d'ona s'acosta als límits del rang de la llum visible. Els ulls d'algunes espècies animals són sensibles a intervals de longituds d'ona diferents del que per a nosaltres és llum visible. Per exemple, les abelles i alguns ocells poden veure la llum UV ($\lambda \lesssim 400\text{ nm}$).

La llum natural (llum solar filtrada per l'atmosfera de la Terra) és un conjunt de radiacions electromagnètiques en què estan presents totes les longituds d'ona de la banda visible. En general, qualsevol font de llum (bombeta, fluorescent, flama, el Sol, etc.) pot emetre tot un continu de longituds d'ona o bé unes quantes longituds d'ona aïllades. La distribució de potència entre les diferents longituds d'ona de la banda visible s'anomena espectre de la llum.

Algunes propietats de la llum són comunes a qualsevol tipus d'ones (apèndix B), per exemple:

- La reflexió i la refracció de la llum, quan canvien les propietats del medi pel qual es propaga. Els angles d'incidència i de reflexió, mesurats entre la direcció normal a la superfície de canvi de medi i les direccions respectives de propagació de la llum incident i reflectida, són iguals.
- La reflexió total de la llum, quan aquesta passa d'un medi 1 a un medi 2 en què la llum viatja més ràpidament, $v_2 > v_1$, i l'angle d'incidència supera un valor límit, θ_L , que depèn d'ambdós medis, $\sin \theta_L = \frac{v_1}{v_2}$. En el cas de la fibra òptica, $\theta_L = 36^\circ$ i, en el cas del diamant, $\theta_L = 24^\circ$.

Fig. 6.1
Condicció per reflexió total (sempre en passar d'un medi on la llum és més lenta a un medi on és més ràpida): $\theta \geq \theta_L$, on θ_L val:
 $\sin \theta_L = v_1/v_2$.
Crèdit de la imatge:
Purdue University, Department of Physics and Astronomy



En canvi, altres propietats són distintives de les ones electromagnètiques:

- La llum es pot propagar indistintament en el buit o en medis materials, però la velocitat de la llum sempre és màxima en el buit.
- La velocitat de la llum en el buit és una constant universal (independent de l'observador i de la longitud d'ona), usualment representada per la lletra c i de valor:
$$c = 299.792,46 \frac{\text{km}}{\text{s}} \cong 300.000 \frac{\text{km}}{\text{s}}.$$
- La velocitat de la llum en medis materials, inclòs l'aire, varia amb la longitud d'ona i amb les propietats elèctriques i magnètiques del material.

6.2 Percepció de la llum: eficiència de la visió i corba de sensibilitat espectral

L'ull forma les imatges a la retina gràcies a l'acció de dos tipus de cèl·lules que poden interaccionar amb la llum: els cons i els bastons. La interacció es vehicula a través d'una reacció química, possible gràcies a l'absorció de l'energia de la llum en aquestes cèl·lules. Per exemple, en els bastons, una substància anomenada *rodopsina*¹ es transforma en una altra, la *retinina*, i origina un estímul al cervell (a continuació, la rodopsina és regenerada gràcies a la *vitamina A*). Els cons són les cèl·lules més importants de la retina, ja que proporcionen la visió en condicions diürnes o de bona il·luminació. En total, a la retina hi ha uns sis milions de cons, cadascun dels quals ocupa una àrea aproximadament circular de 2,8 μm de diàmetre. Els bastons són més petits, però n'hi ha més: en total, sumen uns 120 milions. Cons i bastons es troben distribuïts de forma desigual a la retina: mentre que *els cons estan molt concentrats en una zona anomenada fòvea* (també coneguda com taca groga o màcula), els bastons es reparteixen més uniformement, però amb màxims de concentració a uns 5 mm a banda i banda de la fòvea (Fig. 6.2). La terminació nerviosa del nervi òptic defineix a la retina una regió privada de cons i bastons, el punt cec, en la qual no es pot formar cap imatge.

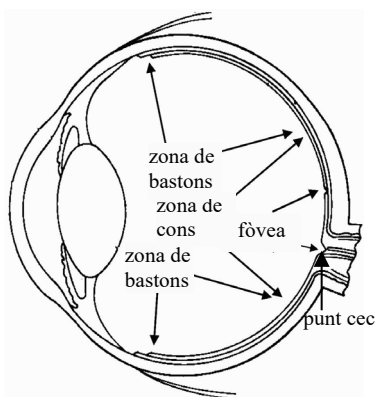


Fig. 6.2
Secció de l'ull humà
amb indicació de les
zones ocupades per
cons i bastons

Distingim entre dos tipus de visió, en funció de la naturalesa de les cèl·lules que hi intervenen:

- *Visió fotòpica* (del grec $\psi\omega\tau\omicron\varsigma$ = “llum”). En condicions de bona il·luminació (típicament diürna), l'ull enfoca la visió a la fòvea, on actuen els cons. La visió és en colors.
- *Visió escotòpica* (del grec $\Sigma\kappa\omicron\tau\omicron\varsigma$ = “foscor”, o el nom del déu que la personificava). En condicions d'il·luminació insuficient per activar els cons (típicament de

¹ Com a curiositat, la rodopsina podria haver estat una de les substàncies químiques més influents en l'evolució de la Terra i de la vida que hi habita, atès que podria haver ajudat alguns organismes primitius a absorbir l'energia de la radiació solar. Fins i tot s'ha proposat que la rodopsina, també coneguda com a “púrpura visual”, podria deixar una empremta en la imatge d'un planeta que albergués vida primitiva, i podria fer-se servir per buscar vida extraterrestre.

² L'arrel d'aquesta paraula grega també apareix en algun altre mot, com ara *escotoma*, que és la zona fosca que queda en una regió de la retina després d'haver estat observant durant massa temps un punt brillant. Les cèl·lules de la retina on s'havia format la imatge d'aquest punt queden saturades i, durant uns segons, no poden tornar a detectar l'arribada de llum, cosa que produeix una zona de ceguesa parcial i temporal.

nit), la visió es deu als bastons. Els bastons són més sensibles a la llum que els cons, però només proporcionen imatges en blanc i negre.

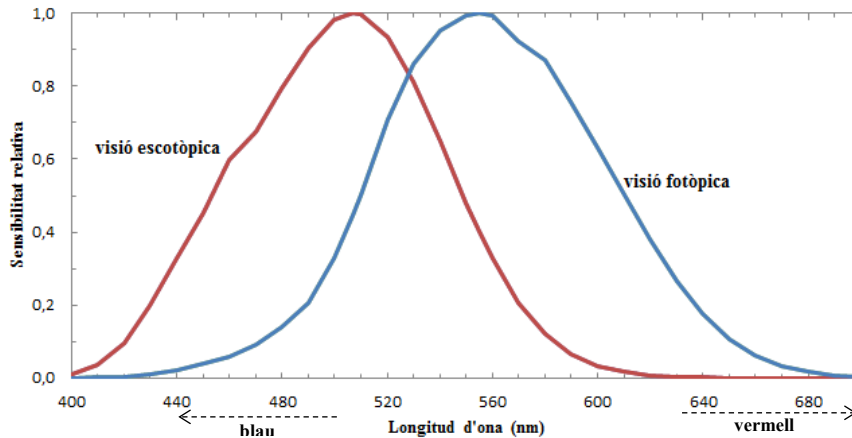
També es parla de *visió mesòpica* quan el nivell d'il·luminació és intermedi entre els dos anteriors i hi actuen cons i bastons.

6.2.1 Eficiència de la visió

Quan un raig de llum incideix sobre un con o un bastó, no sempre és absorbit ni es produeix una reacció química, amb la consegüent informació per al cervell. La detecció és un procés aleatori en què la probabilitat varia amb la longitud d'ona de la llum. L'eficiència de la visió és la mesura de la probabilitat de detecció. *La fotometria defineix les seves magnituds tenint en compte l'eficiència de la visió fotòpica –per tant, dels cons.*

Anomenem *corba de sensibilitat espectral* la representació gràfica de l'esmentada probabilitat de detecció, normalitzada de tal manera que al màxim li correspon un valor unitari. Un valor zero en una altra longitud d'ona implica que aquesta és indetectable. La sensibilitat espectral fotòpica va ser estandarditzada per la Comissió Internacional d'Il·luminació (CIE, *Commission Internationale de l'Eclairage*) l'any 1924, i l'escotòpica ho va ser el 1951. La figura 6.3 mostra les corbes de sensibilitat espectral corresponents a cons (visió fotòpica) i bastons (visió escotòpica). La magnitud representada a l'eix d'ordenades s'anomena *sensibilitat relativa*, *sensació lluminosa relativa* o *factor de visibilitat*, es representa pel símbol $V(\lambda)$, per indicar que el seu valor depèn de la longitud d'ona, i està acotada entre $0 \leq V(\lambda) \leq 1$. La taula 6.1 mostra la mateixa informació.

Fig. 6.3
Corbes de sensibilitat espectral per a les visions fotòpica (corba blava) i escotòpica (corba vermella), en funció de la longitud d'ona de la radiació electromagnètica



Com es pot veure, els cons tenen màxima sensibilitat, $V(\lambda) = 1$, per a una longitud d'ona de 555 nm, corresponent a un color verd groguenc. La sensibilitat cau ràpidament a mesura que la longitud d'ona s'allunya d'aquest valor –per exemple, $V(\lambda) = 0,5$, és a dir, la meitat de sensibilitat, per a longituds d'ona de 510 nm i 610 nm (verd i taronja, respectivament). A 400 nm (color violeta), la sensibilitat és només $V(\lambda) = 0,0004$, és a dir, 2.500 vegades menor que al màxim, mentre que a 750 nm (vermell) la sensibilitat és

8.000 vegades inferior a la del màxim. Els bastons presenten la màxima sensibilitat a una longitud d'ona de 507 nm.

Taula 6.1
Sensibilitat espectral
relativa

	Longitud d'ona (nm)	Sensibilitat relativa fotòpica, $V(\lambda)$	Sensibilitat relativa escotòpica
violeta	380	0,000039	0,000589
	390	0,000120	0,00221
	400	0,000396	0,00929
	410	0,00121	0,0348
	420	0,00400	0,0966
	430	0,0116	0,200
blau	440	0,0230	0,328
	450	0,0380	0,455
	460	0,0600	0,597
	470	0,0910	0,676
	480	0,139	0,793
	490	0,208	0,904
verd	500	0,327	0,982
	507	0,445	1
	510	0,503	0,997
	520	0,710	0,935
	530	0,862	0,811
	540	0,954	0,650
	550	0,995	0,481
	555	1	0,402
groc	560	0,995	0,329
	570	0,925	0,208
	580	0,870	0,121
	590	0,757	0,0655
taronja	600	0,631	0,0332
	610	0,503	0,0159
	620	0,381	0,00737
vermell	630	0,265	0,00334
	640	0,175	0,00150
	650	0,107	0,000677
	660	0,0610	0,000313
	670	0,0320	0,000148
	680	0,0170	0,0000715
	690	0,00821	0,0000353
	700	0,00410	0,0000178
	710	0,00209	0,00000914
	720	0,00105	0,00000478
	730	0,000520	0,00000255
infraroig	740	0,000249	0,00000138
	750	0,000120	0,000000760
	760	0,000060	0,000000425
	770	0,000030	0,000000241

El fet que cons i bastons presentin diferent sensibilitat a la llum en funció de la seva longitud d'ona, és a dir, al color, dona lloc a alguns efectes curiosos, com l'efecte

Purkinje.³ L'efecte Purkinje es produeix quan hi ha un canvi ràpid del nivell d'il·luminació en una escena en la qual hi ha objectes de diferents colors. A baixa il·luminació, els bastons s'encarreguen de formar la imatge i són més sensibles als objectes de colors entre blau i verd-blavós. En canvi, a il·luminació normal, actuen els cons, que són més sensibles als objectes verd-groguencs i vermells. Això fa que la percepció de quins objectes de l'escena són més brillants depengui del nivell d'il·luminació.

6.3 Flux lluminós i rendiment lluminós

El flux lluminós d'una radiació electromagnètica és la primera magnitud fotomètrica que definirem, i ho farem de tal manera que tingui en compte la capacitat de la radiació per produir una sensació visual en l'ull humà. Amb aquesta finalitat, es pondera la potència transportada per la radiació amb el factor de visibilitat, $V(\lambda)$, corresponent a la seva longitud d'ona, d'acord amb la corba de sensibilitat espectral fotòpica.

Per començar, una qüestió de nomenclatura: en el context de la fotometria, la potència d'una radiació electromagnètica s'anomena *flux radiant* i es representa amb el símbol Φ_{rad} . La seva unitat és el watt (W), com la de qualsevol altre tipus de potència.

6.3.1 Flux lluminós

El *flux lluminós* es representa pel símbol Φ (sense el subíndex “rad”) i la seva unitat s'anomena *lumen* (lm). Per concretar la definició de flux lluminós, considerem per separat tres possibles espectres de la radiació electromagnètica:

- *Radiació monocromàtica*, és a dir, quan només hi ha una longitud d'ona, λ . En definim el flux lluminós mitjançant l'expressió:

$$\Phi = 683 \cdot V(\lambda) \cdot \Phi_{\text{rad}} \quad (6.1a)$$

- *Superposició de N radiacions monocromàtiques* de longituds d'ona λ_k , amb $k = 1, \dots, N$. En definim el flux lluminós mitjançant l'expressió:

$$\Phi = 683 \cdot \sum_{k=1}^N [V(\lambda_k) \cdot \Phi_{\text{rad},k}] = \sum_{k=1}^N \Phi_k \quad (6.1b)$$

- *Espectre continu*. En definim el flux lluminós mitjançant la integral:

$$\Phi = 683 \cdot \int V(\lambda) \cdot \frac{d\Phi_{\text{rad}}}{d\lambda} \cdot d\lambda \quad (6.1c)$$

En la darrera expressió (equació 6.1.c), la quantitat $\frac{d\Phi_{\text{rad}}}{d\lambda}$ representa la rapidesa amb què varia, per a una llum concreta, el flux radiant en funció de la longitud d'ona.

Un lumen és el flux lluminós d'una radiació electromagnètica monocromàtica (equació 6.1a) de longitud d'ona 555 nm, el flux radiant de la qual sigui de 1/683 W (recordem que $V(555 \text{ nm}) = 1$). El factor 683 que apareix a les equacions 6.1 té orígens històrics, atès que el lumen no és la unitat bàsica de fotometria, com veurem a la secció 6.5. El factor 683 és vàlid per a la visió fotòpica, però prendria un valor diferent si estiguéssim

³ Jan Evangelista Purkinje (1787-1869), fisiòleg xec pioner en el camp de la psicologia experimental.

interessats a analitzar la visió escotòpica. Aquí, ens limitarem a estudiar les magnituds fotomètriques en condicions de visió fotòpica.

El flux lluminós és una magnitud associada a la radiació electromagnètica. Tanmateix, per extensió, també es parla del flux lluminós de les fonts de llum, que és el flux lluminós de la radiació que emeten. Els valors usuals per a les bombetes comercials es troben entre 1.000-2.000 lúmens.

Exemple 6.1

Calculeu el flux lluminós d'una font que emet dues longituds d'ona: $\lambda_1 = 555 \text{ nm}$, amb 0,824 W de potència, i $\lambda_2 = 610 \text{ nm}$, amb 1,237 W de potència.

Solució. D'acord amb l'enunciat, el flux radiant emès a cada longitud d'ona és: $\Phi_{\text{rad},1} = 0,824 \text{ W}$ i $\Phi_{\text{rad},2} = 1,237 \text{ W}$.

La sensibilitat de l'ull a cada longitud d'ona, la llegim a la columna de sensibilitats fotòpiques de la taula 6.1: $V(\lambda_1) = V(555 \text{ nm}) = 1$ (valor exacte), i $V(\lambda_2) = V(610 \text{ nm}) = 0,503$.

Finalment, apliquem l'equació 6.1b:

$$\Phi = 683 \cdot [V(\lambda_1) \cdot \Phi_{\text{rad},1} + V(\lambda_2) \cdot \Phi_{\text{rad},2}] = 683 \cdot (0,824 + 0,503 \cdot 1,237) = 985 \text{ lm}$$

Per tant, la resposta és 985 lm.

6.3.2 Rendiment lluminós

El *rendiment lluminós*, η , d'una radiació electromagnètica (i, per extensió, també de la font de llum que l'emeten) és la relació entre el seu flux lluminós i el flux radiant:

$$\eta = \Phi / \Phi_{\text{rad}} \quad (6.2)$$

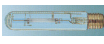
Per tant, és una mesura de l'eficiència global de la radiació per originar una sensació visual. La unitat de η és el lm/W.

El valor màxim possible del rendiment lluminós és: $\eta_{\text{màx}} = 683 \text{ lm/W}$, que només es dona per a una radiació monocromàtica de $\lambda = 555 \text{ nm}$, és a dir, al màxim de la corba de sensibilitat espectral fotòpica. El rang de valors possibles del rendiment lluminós és $0 \leq \eta \leq 683 \text{ lm/W}$.

El valor del rendiment lluminós ve determinat per l'espectre de la llum. Com més concentrat estigui el flux radiant en longituds d'ona properes al màxim de la corba de sensibilitat espectral, major serà el rendiment lluminós (vegeu, per exemple, a la figura 6.4, l'espectre emès pel vapor de sodi de baixa pressió). En canvi, un espectre continu amb una part important de flux radiant associada a altres longituds d'ona de la banda visible, com és el cas de les bombetes d'incandescència, fa que el rendiment lluminós sigui pobre.

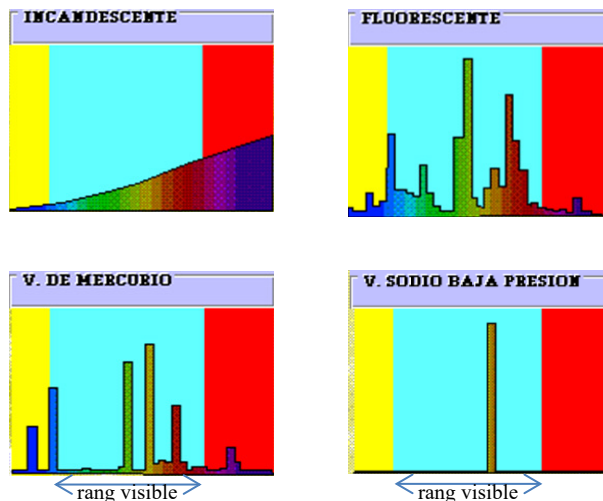
La llum natural és una combinació de colors que comprèn tant aquells pels quals l'ull té màxima sensibilitat com la resta de longituds d'ona de la banda visible, amb el resultat que el seu rendiment lluminós és de “només” uns 100 lm/W. Els sistemes d'il·luminació disponibles avui dia tenen entre 10 lm/W i 150 lm/W. A la taula 6.2, es poden veure alguns valors del rendiment lluminós per a bombetes comunes.

Taula 6.2.
Valors típics dels paràmetres que caracteritzen diferents tipus de fonts de llum (v. secció 6.11.2 per al significat del rendiment de color)

		Temperatura de color (K)	Índex de rendiment de color	Rendiment lluminós (lm/W)
incandescent estàndard		2.100 – 2.700	100	7,5 – 20
incandescent halògena		~ 3.000	100	25 – 30
fluorescent		3.000 – 6.500	75 – 98	50 – 100
vapor de mercuri		3.500 – 4.200	50	60
halogenurs metàl·lics		3.000 – 6.000	65 – 95	~ 100
vapor de sodi a alta pressió		~ 2.100	20	45 – 150
inducció magnètica		3.500 – 4.100	80	66 – 88
LED		2.700 – 5.700	70 – 90	80 – 100

La *temperatura de color* és una mesura de la tonalitat de la llum i es defineix com la temperatura d'un cos negre la radiació del qual proporcionés la mateixa sensació de color (recordeu la llei de Wien, que hem estudiat al capítol 2).

Fig. 6.4
Espectre d'emissió de diferents tipus de fonts de llum. La banda visible es representa amb fons blau clar; la infraroja, amb fons vermell, i la ultraviolada, amb fons groc.
Crèdit de la imatge:
<http://www.iac.es/ad-juntos/otpc/lamp.gif>



6.4 Il·luminació d'una superfície

Considerem ara una superfície il·luminada. Podem esperar que, com més gran és la superfície, més quantitat de llum hi incidirà. Anomenem *il·luminació* (o *il·luminància*), E , de la superfície la relació entre el flux lluminós que hi incideix (des de qualsevol direcció, des de qualsevol font de llum) i la dimensió de la superfície, A :

$$E = \Phi / A \quad (6.3)$$

La unitat d'il·luminació és el lux (lx), que correspon a un flux lluminós d'1 lm que incideix sobre una superfície d'1 m²: 1 lx = 1 lm/m².

A continuació, teniu alguns valors característics de la il·luminació:

- Nit sense lluna: 0,001 lx
- Lluna plena: 0,2 lx
- Llum solar: ~1.000 – 100.000 lx

La il·luminació mínima en diferents entorns es regula per la normativa adient. Així, la il·luminació d'un carrer a la nit ha de ser normalment entre 1 i 10 lx. En una aula, la il·luminació mínima ha de ser de 300 lx.

Exemple 6.2

Es pretén il·luminar una pista quadrada de 10×10 m² per aconseguir una il·luminació mitjana de 720 lx. El rendiment lluminós de les bombetes és de 12 lm/W. Determineu la potència que s'hi ha d'instal·lar si només el 40 % del flux lluminós total emès per les làmpades il·lumina la pista.

Solució. D'acord amb la definició d'il·luminació (equació 6.3) i amb les dades de l'enunciat, el flux lluminós incident sobre la pista de 100 m² ha de ser: $\Phi = A \cdot E = 100 \cdot 720 = 72.000$ lm. El flux lluminós emès per les làmpades ha de ser més gran, perquè només se n'aprofita el 40%:

$$\Phi = 0,40 \cdot \Phi_{\text{emès}} \Rightarrow \Phi_{\text{emès}} = \frac{\Phi}{0,40} = 180.000 \text{ lm}$$

Finalment, d'acord amb el rendiment lluminós, η , proporcionat a l'enunciat, el flux radiant que s'ha d'emetre (potència a instal·lar, equació 6.2) és $\Phi_{\text{rad}} = \frac{\Phi_{\text{emès}}}{\eta} = \frac{180.000}{12} = 15.000 \text{ W}$.

Per tant, la resposta és 15 kW.

6.5 Intensitat lluminosa d'una radiació

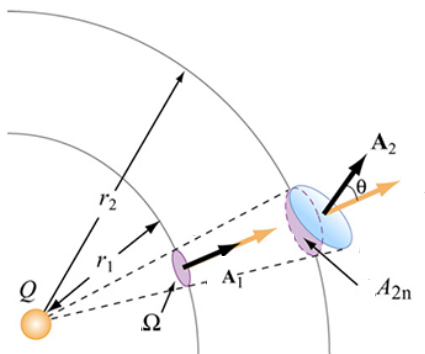
El flux lluminós d'una radiació mesura la llum emesa en qualsevol direcció. Si volem ser capaços de predir quina serà la il·luminació que una font de llum produirà sobre una superfície en una localització determinada, hem de preocupar-nos de la quantitat de llum emesa concretament en direcció a aquella superfície. La intensitat lluminosa és la magnitud fotomètrica que compleix aquesta finalitat. Però, abans de definir la intensitat lluminosa, hem de parlar del concepte d'angle sòlid.

6.5.1 Angle sòlid

L'angle sòlid és un concepte matemàtic que serveix per mesurar l'amplitud d'un conjunt de direccions en l'espai tridimensional, de manera anàloga a com l'angle pla serveix per mesurar el conjunt de direccions que es troba limitat per dues rectes convergents en un punt (i, per tant, compreses en un pla).

Considerem un punt, Q , del qual surten totes les direccions interiors a un contorn, com es pot veure a la figura 6.5. En aquesta figura, el contorn és una superfície cònica, delimitada per les superfícies A_1 i A_2 , i un vèrtex a Q . El punt Q , que també és el centre de les superfícies esfèriques que es mostren a la figura, representa, per a nosaltres, la posició d'un focus de llum puntual. L'angle sòlid, Ω , es defineix com: $\Omega = A_1 / r_1^2$, essent A_1 la superfície d'intersecció del volum cònic amb l'esfera de radi r_1 .

Fig. 6.5
Esquema de la definició d'angle sòlid



En cas que la superfície formi un cert angle, θ , amb l'esfera, com és el cas de A_2 , situada a una distància r_2 del centre,⁴ l'àrea s'ha de projectar sobre l'esfera multiplicant per $\cos \theta$:

$$\Omega = A_2 \cdot \cos \theta / r_2^2 \quad (6.4)$$

La unitat d'angle sòlid és l'estereoradian (str), definit com l'angle sòlid que descriu una superfície $A_1 = 1 \text{ m}^2$ sobre una esfera de radi $r_1 = 1 \text{ m}$. Un estereoradian correspon, aproximadament, a l'angle sòlid definit per un con de semiangle 33° . El màxim valor possible de l'angle sòlid és $\Omega_{\max} = 4\pi \text{ str}$, i correspon a totes les direccions de l'espai tridimensional (atès que la superfície d'una esfera de radi r és $4\pi r^2$).

⁴ Observeu que diferents punts de la superfície A_2 es troben a distàncies no exactament iguals del centre de l'esfera. No obstant això, per simplificar adoptarem com a distància la del centre de A_2 . Aquesta aproximació serà vàlida sempre que l'àrea de A_2 no sigui massa gran.

6.5.2 Intensitat lluminosa

La *intensitat lluminosa* d'una radiació electromagnètica (i, per extensió, de la font emissora) fa referència a la *concentració de flux lluminós en una direcció determinada*. Aquesta direcció la podem prendre com la direcció que va des de la font fins a la superfície que es vol il·luminar.

Per definició, la *intensitat lluminosa*, I , d'una radiació electromagnètica en una direcció és el flux lluminós transportat dintre d'un angle sòlid unitari al voltant d'aquesta direcció. Formalment, la definició de la intensitat lluminosa és una derivada:

$$I = \frac{d\Phi}{d\Omega}$$

La intensitat lluminosa mitjana en un angle sòlid Ω és el quocient entre el flux lluminós total que s'hi emet i l'angle sòlid:

$$I = \Phi / \Omega \quad (6.5)$$

La unitat d'intensitat lluminosa és la *candela (cd)*, que forma part del conjunt d'unitats bàsiques del Sistema Internacional d'Unitats, $1 \text{ cd} = 1 \text{ lm/str}$. La magnitud d'una candela correspon, aproximadament, a la intensitat lluminosa emesa per la flama d'una espelma: d'aquí ve el seu nom. La *definició actual de candela* és la següent: una candela és la intensitat lluminosa d'una font que emet una radiació monocromàtica de 540 THz ($1 \text{ THz} = 10^{12} \text{ Hz}$) de freqüència, tal que el flux radiant emès dintre d'un angle sòlid d'1 str sigui de $\Phi_{\text{rad}} = 1/683 \text{ W}$. La freqüència de 540 THz correspon, en el buit i pràcticament a l'aire, a la longitud d'ona del màxim de la corba de sensibilitat espectral, 555 nm.

6.6 Relació entre intensitat lluminosa i il·luminació

La il·luminació que una font lluminosa produeix sobre una superfície depèn de la intensitat lluminosa que emet en direcció a la superfície. Concretament, la *il·luminació sobre una superfície situada a una distància r* és:

$$E = I \cdot \frac{\cos \theta}{r^2} \quad (6.6)$$

on θ és l'angle entre la direcció normal a la superfície i la direcció de la llum.

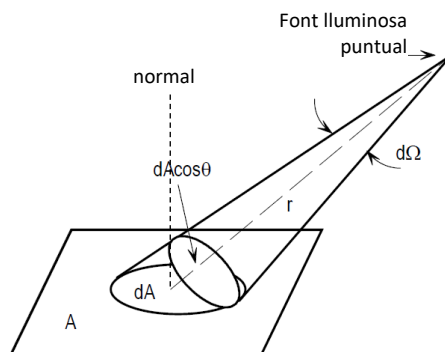


Fig. 6.6
Esquema de l'emissió de llum des d'una font lluminosa cap a una superfície dA, mostrant l'angle sòlid subtendit, $d\Omega$

La figura 6.6 mostra un esquema de la situació. Una font lluminosa, que se suposa puntual o quasi, emet llum en direcció a una petita superfície dA . La direcció del raig de llum, la prenem des de la font cap al centre de dA , però hi ha un petit ventall de direccions al voltant d'ella que també incideixen sobre dA , definint un angle sòlid (equació 6.4): $d\Omega = dA \cdot \cos \theta / r^2$, on r és la distància de la font a la superfície i θ és l'angle entre la direcció de la llum i la direcció normal a dA . Per simplificar, en endavant suposem que la superfície total, A , és prou petita per poder considerar que la distància r i l'angle θ no varien d'un punt a un altre de la superfície, de manera que la superfície total defineix un angle sòlid: $\Omega = A \cdot \cos \theta / r^2$. El flux lluminós emès dintre d'aquest angle sòlid és: $\Phi = I \cdot \Omega = I \cdot A \cdot \cos \theta / r^2$ (equació 6.5) i, finalment, la il·luminació és el quocient entre aquest flux lluminós i l'àrea de la superfície (equació 6.3):

$$E = \frac{\Phi}{A} = I \cdot \frac{\cos \theta}{r^2} \text{ (qed).}$$

Exemple 6.3

Determineu la il·luminació que un focus de 1.250 cd produeix sobre una superfície horitzontal situada a 2,5 m de distància i directament a sota del focus (a la mateixa vertical).

Solució. L'angle $\theta = 0^\circ$, ja que la llum hi incideix en direcció vertical, que coincideix amb la direcció normal a la superfície. La il·luminació, la calculem tot aplicant l'equació 6.6 amb una distància $r = 2,5$ m: $E = I \cdot \frac{\cos \theta}{r^2} = 1.250 \cdot \frac{1}{2,5^2} = 200$ lx

Per tant, la resposta és 200 lx.

Exemple 6.4

Determineu la il·luminació que el mateix focus de l'exemple 6.3 produeix sobre la mateixa superfície, si aquesta es gira 30° . La distància entre el focus i la superfície no ha canviat.



Solució. Ara, l'angle $\theta = 30^\circ$. Tornem a aplicar l'equació 6.6: $E = 1.250 \cdot \frac{\cos 30^\circ}{2,5^2} = 173$ lx.

Per tant, la resposta és 170 lx.

6.7 Relació entre intensitat lluminosa i flux lluminós

La relació entre el flux lluminós total emès per una font i la intensitat lluminosa depèn de com es reparteix la llum entre totes les direccions d'emissió. Un paràmetre que es fa servir per especificar si la llum s'emet igualment en totes direccions o, per contra, s'envia cap a alguna direcció preferent és l'anomenat *angle de concentració* o *angle d'obertura*, θ_c . Es defineix com el doble de l'angle entre la direcció a la qual la intensitat lluminosa és màxima i la direcció a la qual la intensitat lluminosa és la meitat de la màxima.

En principi, les fonts lluminoses poden repartir la llum de formes molt diverses; només cal col·locar una pantalla per canviar la distribució de la llum, però existeixen dos models teòrics molt senzills i representatius de la realitat en un ampli ventall de condicions. Comencem estudiant aquests dos models ideals, la font isòtropa i el difusor perfecte, i després veurem la manera d'especificar la intensitat lluminosa en un cas més general, mitjançant les corbes polars.

6.7.1 Font isòtropa

Una font isòtropa és una font lluminosa que emet la mateixa intensitat lluminosa en totes direccions. En aquest cas, l'angle sòlid total a l'equació 6.5 és 4π str, i la intensitat lluminosa d'una font isòtropa és:

$$I = \frac{\Phi}{4\pi} \quad (6.7)$$

El model de font isòtropa es correspon, en una molt bona aproximació, amb el cas d'una font puntual, una bombeta d'incandescència o similar. L'angle de concentració no està definit per una font isòtropa, ja que la il·luminació és màxima (i mínima) en qualsevol direcció.

Exemple 6.5

Determineu la intensitat lluminosa d'una bombeta de 1.800 lm que emet uniformement en totes direccions.

Solució. L'equació 6.7 proporciona directament la intensitat lluminosa:

$$I = \frac{\Phi}{4\pi} = \frac{1.800}{4\pi} = 143,2 \text{ cd}$$

Per tant, la resposta és 143,2 cd.

En el cas d'una font puntual encastada en un sostre, la llum es repartiria només en un hemisferi (a sota del sostre). En aquest cas, si suposem emissió isòtropa només a l'hemisferi inferior, la relació entre el flux lluminós i la intensitat lluminosa seria:

$$I = \frac{\Phi}{2\pi}$$

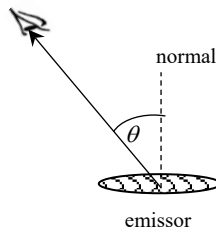
6.7.2 Difusor perfecte: la llei de Lambert

La *lleï de Lambert* (Johann Heinrich Lambert, 1728-1777) descriu la variació de la intensitat lluminosa emesa pels anomenats “*difusors perfectes*” (per exemple, una superfície mat reflectant), en funció de la direcció d'emissió. Segons aquesta llei, *la intensitat lluminosa en una direcció θ* (angle entre la direcció d'emissió i la direcció normal a la superfície emissora), I_θ , és proporcional al cos θ . Ho podem expressar mitjançant la relació:

$$I_\theta = I_0 \cdot \cos \theta \quad (6.8)$$

on I_0 és la intensitat lluminosa màxima, emesa a la direcció normal a la superfície, $\theta = 0^\circ$. A $\theta = 90^\circ$, emissió rasant a la superfície emissora, la intensitat lluminosa és nul·la, $I_{90^\circ} = 0$. Per tant, *al contrari de la font isòtropa*, la intensitat lluminosa emesa per un difusor perfecte varia amb la direcció. L'angle de concentració d'un difusor perfecte és de 120° (ja que $\cos 60^\circ = 1/2$).

Fig. 6.7
Esquema de la definició de l'angle entre la direcció d'observació i la direcció normal a la superfície emissora



El flux lluminós total emès per un difusor perfecte en totes direccions, a l'hemisferi que té al davant, és (apèndix F):

$$\Phi = \pi I_0 \quad (6.9)$$

Una forma alternativa d'expressar la llei de Lambert, amb el concurs del flux lluminós, és:

$$I_\theta = \frac{\Phi}{\pi} \cdot \cos \theta$$

Una superfície reflectant que actuï com un difusor perfecte compleix la llei de la reflexió de la llum (igualtat entre l'angle d'incidència i el de reflexió, v. secció 6.1) localment, a petita escala, però la superfície és irregular, de manera que la direcció normal a ella canvia d'un punt a un altre i la llum acaba essent reflectida globalment en totes direccions.

6.7.3 Corbes polars

La corba polar és la funció que dona la distribució de la intensitat lluminosa d'una font en funció de la direcció d'emissió, usualment proporcionada en forma de gràfica (Fig. 6.8). La direcció d'emissió es codifica a través de l'angle que forma amb una direcció de

referència que, típicament, és un eix de simetria de la làmpada (l'eix de la coberta cilíndrica, en el cas de la lluminària de la figura 6.8).

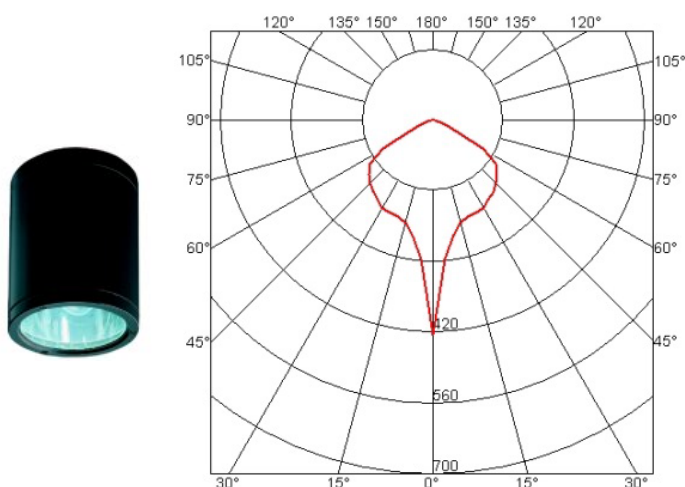


Fig. 6.8
Una lluminària i la
seva corba polar

Les circumferències concèntriques tenen retolat el valor del seu radi (420, 560, 700, en aquest exemple). Aquests valors del radi no es corresponen amb cap unitat de distància, sinó que són una manera de codificar la intensitat lluminosa. Les circumferències es dibuixen a intervals iguals de radi (cosa que, a la figura 6.8, ens permet deduir uns valors de 280 i 140 a les dues corbes més interiors, el valor de les quals no està retolat). La línia de color vermell és la que representa l'emissió de la lluminària.

Per trobar la intensitat lluminosa, I_θ , en una direcció concreta, cal determinar el radi, r , a què es troba la corba vermella en la direcció volguda i fer l'operació següent:

$$I_\theta = \Phi r / 1.000 \quad (6.10)$$

Si expressem Φ , que és el flux lluminós total emès per la lluminària, en lúmens, la I_θ donada per l'equació anterior està expressada en candeles.

Exemple 6.6

Determineu la intensitat lluminosa de la lluminària de la figura 6.8 per als angles de 0° i 15°, sabent que emet un flux lluminós total de 600 lm.

Solució. Per a un angle de 0°, la corba vermella es troba a un radi $r = 420$. Aplicant-hi l'equació 6.10, amb $\Phi = 600$ lm, obtenim: $I_\theta = 252$ cd.

Per a un angle de 15°, el radi és, aproximadament, la mitjana dels radis de les dues circumferències més interiors, és a dir $r = 210$. Tornant a aplicar l'equació 6.10, obtenim: $I_\theta = 126$ cd. L'angle de concentració de la lluminària és d'uns 30°.

Per tant, la resposta és 250 cd a 0° i 130 cd a 15°; no es pot donar amb més precisió.

6.8 Brillantor d'una font extensa

Amb les relacions entre el flux lluminós i la intensitat lluminosa, i entre aquesta última i la il·luminació, és possible determinar les condicions d'il·luminació que resulten de l'ús d'una lluminària determinada. Però, *per determinar la sensació visual* (o, en general, el resultat sobre qualsevol sistema òptic d'enfocament, com l'ull), *cal introduir una nova magnitud, la brillantor*. Recordem que els cons no són punts a la retina, sinó que hi ocupen una petita superfície de $2,8 \mu\text{m}$ de diàmetre, raó per la qual cadascun d'ells sub-tendeix des de l'iris de l'ull un angle sòlid d'aproximadament $\Omega_{\text{con}} \approx 10^{-8}$ str (apèndix F). Això significa que tota la llum que penetri a l'ull dintre d'aquest angle sòlid va a parar a un únic con i es percep al cervell com un punt de la imatge (que seria un píxel en una càmera moderna). Aquest angle sòlid correspondria, per exemple, a una persona vista des d'una distància d'uns 10 km. Per tant, cada con percep la llum emesa per una superfície de dimensió variable en funció de la distància a què es trobi. La situació és similar a la representada a la figura 6.6, però intercanviant els papers d'emissor de llum (ara seria la superfície) i receptor (un punt a l'iris de l'ull, que ara seria el punt de partida del volum cònic), amb un angle sòlid de 10^{-8} str.

La brillantor (o luminància), B , mesura la intensitat lluminosa emesa per la unitat de superfície aparent i és la magnitud més rellevant per estimar la visibilitat d'aquesta superfície. La superfície aparent és la superfície projectada en direcció normal a la d'emissió de la llum (v. Fig. 6.5 i 6.6). Per tant, si representem l'àrea real de la superfície emissora per A i l'angle entre la direcció d'emissió de la llum i la direcció normal a la superfície per θ , la brillantor és:

$$B = I / (A \cdot \cos \theta) \quad (6.11)$$

De la mateixa manera, podem dir que la intensitat lluminosa d'una superfície A , la brillantor de la qual és B , és:

$$I = B \cdot A \cdot \cos \theta \quad (6.12)$$

La unitat de brillantor és el nit (Nt), $1 \text{ Nt} = 1 \text{ cd/m}^2$, tot i que també és molt usual designar-la simplement cd/m^2 .

Exemple 6.7

Determineu la intensitat lluminosa que una superfície brillant emet en direcció 30° respecte a la normal a la superfície. La superfície és de 30 cm^2 i la brillantor en la direcció esmentada és de 400 Nt.

Solució. L'equació 6.12 proporciona la intensitat lluminosa:

$$I = B \cdot A \cdot \cos \theta = 400 \cdot 0,0030 \cdot \cos 30^\circ = 1,04 \text{ cd}$$

Observeu que hem utilitzat el valor de la superfície en m^2 aplicant la relació: $1 \text{ cm}^2 = 10^{-4} \text{ m}^2$.

Per tant, la resposta és 1,0 cd.

Com ja s'ha dit, la brillantor és la magnitud més rellevant per la sensació visual. I, per aquest motiu, tant els límits entre els diversos tipus de visió com altres efectes produïts en l'ull es calibren en funció de la brillantor:

- *Visió escotòpica*, si $B \lesssim 0,25 \text{ Nt}$
- *Visió fotòpica*, si $B \gtrsim 3 \text{ Nt}$
- *Enlluernament*, si $B \gtrsim 7.500 \text{ Nt}$

Veiem alguns valors més de brillantors en el nostre món:

- Cel blau, $B \approx 3.200 \text{ Nt}$
- Filament d'una bombeta d'incandescència, $B \approx 10^7 \text{ Nt}$
- Sol, $B \approx 2 \cdot 10^9 \text{ Nt}$

És a dir, el filament d'una bombeta d'incandescència enlluerna i el Sol fins i tot pot arribar a produir danys irreversibles a la retina, si es mira directament.

6.8.1 Brillantor d'un difusor perfecte

Una conseqüència de la llei de Lambert és que la brillantor d'un difusor perfecte és independent de la direcció d'observació: $B = I_o / A$, independent de θ , i el flux lluminós total emès pel difusor perfecte és:

$$\Phi = \pi B A \quad (6.13)$$

Considerem ara dos casos en què la brillantor d'un difusor perfecte és deguda a la llum que rep des d'una font lluminosa.

1. *Superfície translúcida com, per exemple, una pantalla que tapi la làmpada d'una lluminària.* La transmitància, τ , d'una superfície translúcida es defineix com la inversa del quocient entre el flux lluminós que hi incideix per un costat (el costat que dóna a la làmpada), Φ_{inc} , i el flux lluminós transmès a l'altre costat de la superfície, Φ : $\tau = \Phi / \Phi_{\text{inc}}$. Combinant aquesta definició amb les equacions 6.3 i 6.13, es pot trobar la relació entre la brillantor de la superfície translúcida i la il·luminació que rep de la làmpada:



$$B = \tau E / \pi \quad (6.14)$$

2. *Superfície reflectant.* La reflectància,⁵ ρ , d'una superfície reflectant es defineix com el quocient entre el flux lluminós reflectit, Φ , i el flux lluminós que hi incideix, Φ_{inc} : $\rho = \Phi / \Phi_{\text{inc}}$. Actuant de manera similar al cas anterior, podem deduir la *relació entre la brillantor de la superfície i la seva il·luminació*:

$$B = \rho E / \pi \quad (6.15)$$

6.9 Il·luminació natural

La font de llum més important al nostre entorn és el Sol. Juntament amb l'esfera celeste, que és la font aparent de la llum solar refractada per l'atmosfera, són fonts de llum natural.

6.9.1 Llum solar directa

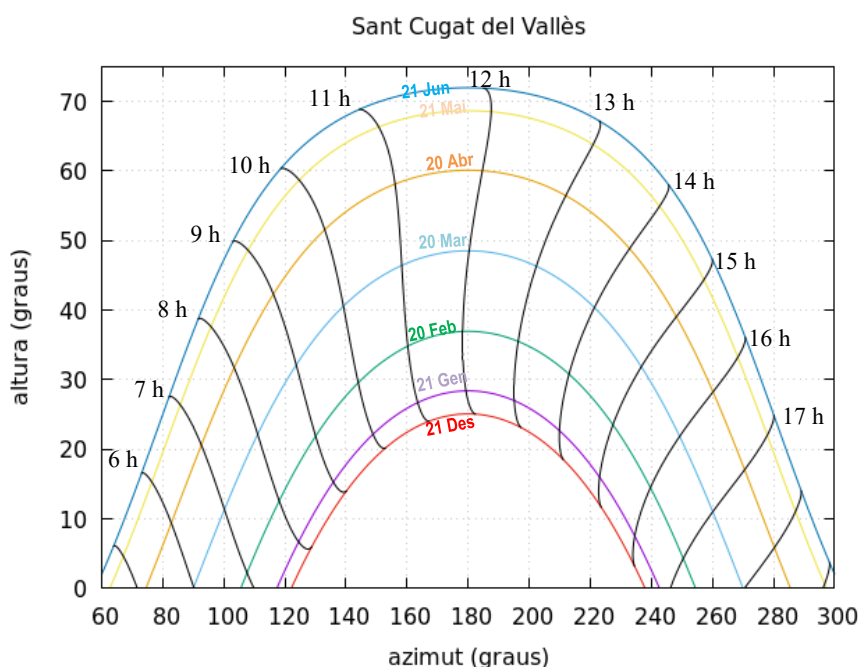
La llum solar que arriba directament de la posició del Sol incideix a la superfície de la Terra després de travessar l'atmosfera i patir un cert grau d'absorció. Perquè un punt determinat del terra sigui il·luminat directament pel Sol, cal que cap objecte opac s'interposi a la direcció dels raigs de llum, circumstància que depèn de la posició del Sol al cel.

La trajectòria del Sol a l'esfera celestial, vista des d'un emplaçament concret a la superfície terrestre, està determinada per les coordenades geogràfiques d'aquest emplaçament –latitud i longitud–, pel moviment de rotació de la Terra al voltant del seu eix i per l'òrbita el·líptica de la Terra al voltant del centre de masses del sistema solar, que gairebé coincideix amb la posició del Sol. L'equador terrestre està inclinat, aproximadament, un angle de $23,4^\circ$ respecte al pla de l'eclíptica, cosa que origina les estacions. En un lloc de l'hemisferi nord de latitud $\varphi > 23,4^\circ$, el Sol arriba a una altura màxima sobre l'horitzó de $90^\circ - (\varphi - 23,4^\circ)$, durant el solstici d'estiu. Per exemple, a Sant Cugat del Vallès, $\varphi = 41^\circ 28' 00''$, per tant, l'altura màxima del Sol sobre l'horitzó és de $71,9^\circ$. En canvi,

⁵ Tant la reflectància com la transmissió són funcions de la longitud d'ona de la llum, per a la majoria dels objectes. En aquest llibre, per simplificar, considerem només el cas en què ρ i τ són independents de λ .

el Sol arriba a una altura màxima de $90^\circ - (\varphi + 23,4^\circ)$ durant el solstici d'hivern, que a

Fig. 6.9
Diagrama solar per a una latitud de $41^\circ 28' 00''$ i una longitud de $2^\circ 04' 60''$. Les línies de colors mostren la trajectòria solar pels dies assenyalats. Les línies negres connecten els punts que corresponen a una hora concreta. En aquest diagrama, el temps està expressat en UTC (temps universal coordinat), que difereix en una o dues hores de l'hora oficial, segons si és d'aplicació l'horari d'estiu o el d'hivern.



Sant Cugat és igual a $25,1^\circ$.

Per estimar les hores d'insolació d'un lloc concret, tenint en compte les altituds dels obstacles del seu entorn, es pot fer servir un diagrama solar com el de la figura 6.9, que és vàlid per a les coordenades geogràfiques de Sant Cugat del Vallès.⁶ Per fer servir el diagrama solar, cal prendre tots els angles amb centre a la localització de la qual es volen conèixer les hores d'insolació, que podem representar per la lletra O. L'angle d'azimut es defineix com l'angle entre un pla vertical que passa per O i la direcció nord. Per al Sol, el pla vertical que s'ha de considerar és el pla que passa pel centre del disc solar. Per a un obstacle qualsevol, el pla vertical serà el que passa per aquell punt i per O, etc. Per la seva banda, l'altura és l'angle entre el pla horitzontal que passa per O i la línia que va des de O al Sol, o a l'obstacle, etc. Una vegada determinats l'azimut i l'altura dels punts del perímetre de l'obstacle, simplement cal traslladar els resultats al diagrama polar i llegir les hores a què arribarà al punt O la llum solar directa. El resultat és aproximat, atès que la rotació terrestre experimenta algunes petites variacions que no s'han incorporat en el gràfic. A més, el diagrama no té en compte la durada major dels anys de traspàs.

⁶ Les hores de sortida i posta del Sol (orto i ocàs) són aquelles en què es talla l'eix d'abscisses de la figura 6.9 en una data concreta. La refracció i la reflexió atmosfèrica de la llum solar fan que el crepuscle comenci abans de l'orto, quan el Sol és uns 19° sota l'horitzó (crepuscle astronòmic). Aquest fet ja va ser estudiat l'any 1021 per l'astrònom àrab Ibn al-Haytham (Alhazen), que fins i tot va calcular el gruix que havia de tenir l'atmosfera terrestre per produir aquest efecte: uns 52.000 passos, equivalents a 79 km (per comparació, l'estimació actual de la dimensió de l'atmosfera és d'uns 80-100 km).

Com ja s'ha mencionat a la secció 6.4, la il·luminació solar directa *sobre una superfície normal als raigs de llum* pot arribar a ser de l'ordre de 100.000 lx. Aquest valor varia fortament amb les condicions climàtiques, la composició de l'atmosfera i el grau de contaminació.

6.9.2 Llum diürna difusa

La difusió de la llum solar per l'atmosfera canvia la direcció dels raigs de llum i permet que ens arribi llum diürna difusa des de totes les direccions per sobre de l'horitzó. Cada parcel·la de cel actua com un emissor de brillantor B_{cel} . La il·luminació total sobre una superfície horitzontal deguda a aquesta llum difusa, E_{dif} , depèn de com varia la brillantor d'un punt del cel a un altre.

Un model senzill però útil és el de la brillantor uniforme. En aquest model, s'assumeix que la brillantor és igual a tot el cel i el resultat és una il·luminació difusa que depèn de l'altura del Sol: $E_{\text{dif}} = \frac{9}{7}(300 + 21.000 \cdot \sin h_{\text{Sol}})$ lx, on h_{Sol} és l'altura del Sol, mesurada en graus (que es pot llegir al diagrama solar en funció de la data).

Un altre model d'aplicació molt generalitzada s'aplica al cas d'un cel completament coberts de núvols. En una reunió de la CIE a Viena l'any 1931, es va definir la brillantor del cel cobert, que varia en funció de l'altura de la parcel·la de cel sobre l'horitzó,

$$h_{\text{cel}} : B_{\text{cel}} = B_{\text{zenit}} \cdot \frac{(1 + 2 \cdot \sin h_{\text{cel}})}{3}, \text{ on } B_{\text{zenit}} \text{ és la brillantor del cel al zenit } (h_{\text{cel}} = 90^\circ).$$

Actualment, aquest model ha estat substituït per l'estàndard ISO 15469:2004 (<https://www.iso.org>).

6.10 Mesurant la llum

Amb algunes excepcions, quan observem algun objecte el que veiem és la llum que reflecteix. Les propietats superficials de l'objecte i la manera com interacciona amb la llum que hi incideix determinen les característiques de la llum reflectida (brillantor, color), però l'ingredient bàsic és la quantitat de llum que arriba a l'objecte. Abans hem vist que la mesura de la quantitat de llum incident en una superfície és la il·luminació, E . Per aquest motiu, la normativa estableix valors mínims per a la il·luminació en diferents circumstàncies (v. secció 6.4). L'instrument que permet mesurar la il·luminació sobre una

Fig. 6.10
Instruments de mesura-
ment de la llum: (a) luxí-
metre; (b) mesurador de la
brillantor.
Imatges:
(a) <http://en.benetechno.com/en/products/product-type14.html>
(b) <http://www.gossenmetrawattusa.com/products/photo/luminance/MaVoMonitor.html>



superfície és el luxímetre (en podeu veure un exemple a la figura 6.10.a). La zona sensible del luxímetre s'ha de situar a la posició de la superfície de la qual es vol mesurar la il·luminació i amb la mateixa orientació. L'aparell mesura la radiació incident i la transforma en lux, tenint en compte la sensibilitat espectral de l'ull humà.

Les excepcions a què hem fet referència abans són les superfícies emissores de llum pròpia: pantalles d'ordinador, de mòbil, del televisor, etc. El mateix es pot dir de les fonts de llum naturals, com una flama, un objecte incandescent, o el Sol (però no els planetes o la Lluna). Aquestes superfícies es caracteritzen per la seva brillantor, B . Per mesurar la brillantor, es pot utilitzar un instrument com el que es mostra a la figura 6.10.b, en el qual la part cilíndrica s'ha de posar en contacte amb la pantalla de la qual es vol mesurar la brillantor. En aquests instruments, la brillantor també té en compte la resposta sensitiva de l'ull humà a la radiació electromagnètica.

6.11 Eficiència i contaminació

Un cop definides les magnituds fotomètriques, veurem ara dues quantitats relacionades amb l'eficiència de la il·luminació i, després, en què consisteix la contaminació lumínica.

6.11.1 Valor d'eficiència energètica

El *valor d'eficiència energètica d'una instal·lació d'il·luminació* (VEEI) és un concepte que es fa servir en la reglamentació per avaluar, com el seu nom indica, el grau d'aprofitament de l'energia elèctrica consumida per una instal·lació d'il·luminació. L'aprofitament es quantifica a partir de la il·luminació produïda sobre una superfície concreta, la que interessa il·luminar. El VEEI es calcula amb la fórmula següent:

$$VEEI = 100 \frac{Pot}{E \cdot A}$$

on E és la il·luminació mitjana, en lx, sobre la superfície d'interès, A , el valor de la qual s'ha d'introduir en m^2 , i Pot és la potència consumida per l'equip d'il·luminació, en W. La unitat de VEEI és: $W/m^2 \cdot 100 \text{ lx}$.

A continuació, podeu veure alguns exemples dels valors de VEEI permesos per la reglamentació vigent. Cal tenir present que, per la seva definició, *com més petit és el VEEI més eficient és la instal·lació*.

- Oficines: $VEEI \leq 3 \text{ W/m}^2 \cdot 100 \text{ lx}$
- Aules: $VEEI \leq 3,5 \text{ W/m}^2 \cdot 100 \text{ lx}$
- Edificis religiosos: $VEEI \leq 8 \text{ W/m}^2 \cdot 100 \text{ lx}$
- Hotels: $VEEI \leq 10 \text{ W/m}^2 \cdot 100 \text{ lx}$

Per optimitzar el VEEI, es pot actuar en tres direccions:

1. *Reduir la potència dissipada a la instal·lació elèctrica* que no acaba traduint-se en flux radiant (per exemple, escalfament de transformadors, cablatge, etc.).
2. *Millorar el rendiment lluminós* de la llum emesa per les làmpades de la instal·lació, és a dir, millorar la relació entre el flux lluminós i el flux radiant de la llum emesa.

3. *Enfocar la llum cap a la superfície d'interès, tot minimitzant l'emissió de llum en direccions on no és útil.*

6.11.2 Rendiment de color

El *rendiment de color* és una propietat de la llum emesa per una lluminària que mesura la seva capacitat per reproduir els colors naturals dels objectes que il·lumina. En aquest context, s'entén per color natural el que es percebria observant l'objecte amb llum natural, la combinació de llum solar directe i difosa per l'atmosfera. *El rendiment de color s'expressa en una escala que va de 0 a 100 i és adimensional. Com més gran és el rendiment de color, millor és la reproducció dels colors naturals.* La normativa estableix alguns valors recomanables en diferents tipus d'espais, per exemple, el rendiment de color mínim desitjable en un local comercial és 80.

El rendiment de color ve determinat per l'espectre de la llum. Quan la llum incideix sobre un objecte, aquest absorbeix algunes longituds d'ona, en funció de la seva composició, i en reflecteix la resta (v. apèndix H). És a dir, la llum reflectida pot tenir “menys varietat de colors” que la incident, però mai al revés. A la taula 6.2, es dona el valor del rendiment de color d'alguns tipus de làmpades, i a la figura 6.4 es poden veure exemples de l'espectre de la llum emesa. En general, una llum amb un espectre d'emissió continu (per exemple, una bombeta d'incandescència, un fluorescent) té un rendiment de color bo, mentre que les llums formades per uns pocs pics d'emissió a unes poques longituds d'ona (vapor de mercuri, vapor de sodi) tenen un rendiment de color dolent.

6.11.3 Contaminació lumínica

Un enllumenament excessiu respecte de les necessitats reals d'il·luminació, o defectuós, que no aprofita eficientment la llum emesa per cobrir les necessitats d'il·luminació, constitueix una forma de contaminació. De fet, així ho reconeix la Llei d'ordenació ambiental de l'enllumenament per a la protecció del medi nocturn (el preàmbul de la qual podeu veure a continuació), aprovada el 31 de maig de 2001 pel Parlament de Catalunya i

Fig. 6.11
Extracte de la Llei d'ordenació ambiental del Parlament de Catalunya

LLEI D'ORDENACIÓ AMBIENTAL DE L'ENLLUMENAMENT PER A LA PROTECCIÓ DEL MEDI NOCTURN

TRAM. 200-00028/06

PREÀMBUL

L'enllumenament artificial durant la nit és un dels requisits imprescindibles per a l'habitabilitat de les zones urbanes modernes i, en menor mesura, de les zones rurals, i és també necessari per a la realització d'un gran nombre d'activitats lúdiques, comercials o productives. No obstant això, un disseny o un ús inadequats de les instal·lacions d'enllumenament té conseqüències perjudicials per a la biodiversitat i el medi ambient, en la mesura que s'estiguin alterant, d'una manera desordenada, les condicions naturals de foscor que són pròpies de les hores nocturnes.

D'altra banda, un enllumenament nocturn excessiu o defectuós constitueix una forma de contaminació, en tant que afecta la visió del cel, el qual forma part del paisatge natural i ha d'ésser protegit, tant perquè es tracta d'un patrimoni comú de tots els ciutadans com per la necessitat de possibilitar-ne l'estudi científic.

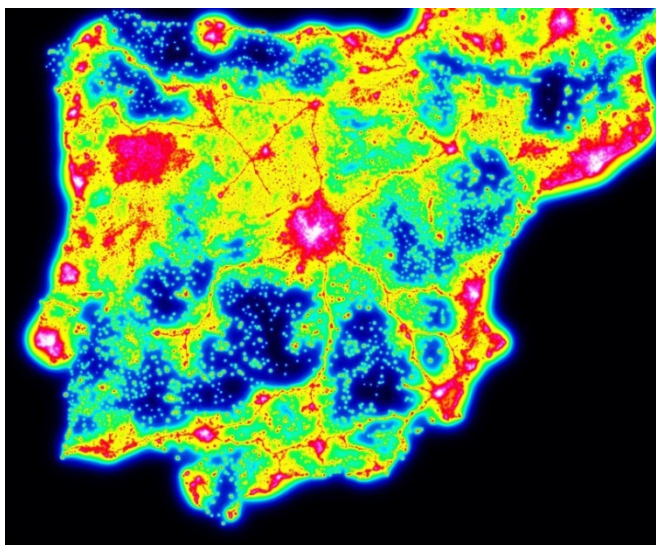
Finalment, un enllumenament nocturn que respongui a criteris coherents i racionals té una incidència directa i immediata en el consum de les fonts d'energia i fa possible un notable estalvi energètic. En aquest sentit, cal tenir en compte que l'ús eficient dels recursos és un dels principis bàsics de desenvolupament sostenible a què aspira Catalunya.

desenvolupada pel Decret 190/2015, de 25 d'agost.

Aquest Decret regula les característiques de la il·luminació exterior en funció de la tipologia de les zones afectades, limitant-ne diverses magnituds, com la intensitat lluminosa, la brillantor, etc.

A la figura 6.12, podeu veure un mapa de la contaminació lumínica a la península Ibèrica. El color indica la capacitat per veure objectes celestes de nit: des del negre, que indica que quasi no hi ha contaminació lumínica, fins al blanc, que indica que no es poden veure més enllà d'unes poques estrelles al cel nocturn.

Fig. 6.12
Mapa de la contaminació lumínica a la península Ibèrica. Font i més informació: https://www.avex-asso.org/dossiers/wordpress/fr_FR/tutoriels-logiciels/archives-cartes-europeennes/avexs-map-light-pollution-of-europe

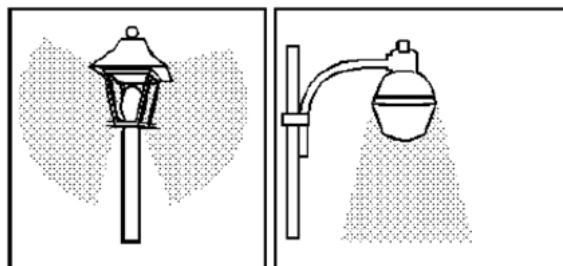


Es poden identificar dues causes principals de la contaminació lumínica:

1. *La direcció inadequada de la llum.* Podem classificar el flux lluminós en funció de la direcció en:
 - a. *Flux útil*, és el que incideix en la superfície que es vol il·luminar.
 - b. *Flux perdut*, és el que no il·lumina la superfície.
 - c. *Flux contaminant*, és el que s'emet per sobre d'un pla horitzontal.

El Decret 190/2015 posa límits al flux contaminant, que no pot superar un valor d'entre l'1% i el 15% del flux lluminós total emès, en funció de la tipologia de la zona (amb algunes excepcions).

Fig. 6.13
Dos exemples de focalització de la llum: a l'esquerra, un disseny inadequat; a la dreta, un sistema que evita la contaminació lumínica





La lluminària emprada i la localització de la làmpada al seu interior determinen la direcció de la llum emesa, com es pot veure a la figura 6.13.

2. L'emissió de llum amb baix rendiment lluminós i/o l'emissió d'un percentatge important de flux a les bandes IR o UV.

El Decret 190/2015 també determina els límits de flux radiant que es pot emetre fora de la banda visible. Per exemple, l'emissió a l'UV (que pot afectar tant les observacions astronòmiques com el cicle vital d'algunes espècies animals, per exemple les abelles) es limita entre un màxim del 2 % al 15 % de tota la radiació emesa a la banda visible, en funció de la tipologia de la zona.

Problemes resolts

P6.1 Una habitació ha de ser il·luminada amb un flux lluminós total de 18 klm. Dispossem de bombetes de 60 W i un rendiment lluminós de 12 lm/W.

- Quantes bombetes es requeriran?
- Quants kW·h es consumiran en 12 hores?
- Quants kW·h es consumirien en el mateix període si la il·luminació es fes amb tubs fluorescents de rendiment 60 lm/W?

Solució:

- Cada bombeta emet un flux lluminós: $\Phi = \eta \cdot \Phi_{\text{rad}} = 12 \cdot 60 = 720$ lm. Per aconseguir un flux lluminós de 18.000 lm, necessitem un total de:

$$\frac{18.000}{720} = 25 \text{ bombetes}$$

- El consum, en kW·h, vindrà donat pel producte del temps, en hores; pel nombre de bombetes, i per la potència individual de cada bombeta, en kW:

$$12 \times 25 \times 0,060 = 18 \text{ kW}\cdot\text{h}$$

- Com que el rendiment és 5 vegades més gran, el consum serà 5 vegades més petit, és a dir, 3,6 kW·h.

P6.2 Una font de llum puntual i isòtropa emet 90 cd uniformement en totes direccions i consumeix 17 W (és a dir, el seu flux radiant és de 17 W).

- Determineu-ne el rendiment lluminós.

Amb aquesta font, es pretén il·luminar una superfície que es troba dintre d'un angle sòlid d'1 str des de la font.

- Discutiu com es podria millorar l'eficiència energètica.

Suposeu ara que la font de llum és monocromàtica, és a dir, que emet una única longitud d'ona.

- D'acord amb el rendiment lluminós determinat anteriorment i amb l'ajut de la corba de sensibilitat, justifiqueu quin podria ser el color de la llum.

Solució:

- El rendiment lluminós, η , és el quocient entre el flux lluminós, Φ , i el flux radiant, $\Phi_{\text{rad}} = 17$ W. El flux lluminós el podem obtenir a partir de la intensitat lluminosa, $I = 90$ cd, sabent que la font és puntual i isòtropa (equació 6.7):

$$\Phi = 4\pi I = 360\pi \text{ lm. Per tant, } \eta = \frac{\Phi}{\Phi_{\text{rad}}} = 67 \text{ lm/W.}$$

- Es podria millorar el rendiment lluminós, però l'actuació més important seria focalitzar la llum per tal que s'emetés tota dintre de l'angle d'1 str que delimita la superfície que es vol il·luminar, en comptes d'emetre en totes direccions (4π str).



- c) Amb l'equació 6.1a i els valors de Φ i Φ_{rad} determinats a l'apartat a, podem deduir que la sensibilitat relativa és $V(\lambda) = 0,097$. A la taula 6.1, aquesta sensibilitat relativa fotòpica correspon a un color vermell de longitud d'ona $\lambda \sim 650$ nm, o bé a un de blau amb $\lambda \sim 470$ nm.

P6.3 Una petita làmpada, A, proporciona la mateixa il·luminació sobre una superfície a $r_A = 50$ cm de distància que una altra petita làmpada, B, sobre la mateixa superfície situada a $r_B = 65$ cm. Sabent que la intensitat lluminosa de la làmpada A és $I_A = 70$ cd, determineu la intensitat lluminosa de B.

Solució:

L'equació 6.6 proporciona la relació entre il·luminació i intensitat lluminosa. Suposant que l'angle θ és el mateix per a les dues situacions descrites, per tal que la il·luminació proporcionada sigui la mateixa cal que es compleixi:

$$\frac{I_A}{r_A^2} = \frac{I_B}{r_B^2} \rightarrow I_B = 118,3 \text{ cd} \approx 120 \text{ cd}$$

P6.4 Calculeu la il·luminació produïda pel Sol al terra i en una paret vertical en el moment en què el Sol es troba a 60° sobre l'horitzó, sabent que la il·luminació màxima sobre qualsevol superfície és $E_{\text{màx}} = 80.000$ lx. Suposeu que la normal a la paret pertany al pla vertical que passa pel Sol.

Solució:

El Sol es troba a la mateixa distància de totes les superfícies considerades i la intensitat lluminosa de la llum solar és la mateixa. Així doncs, les variacions d'il·luminació es deuen exclusivament a diferents valors de l'angle θ , entre la direcció de la llum i la direcció normal a cada superfície:

$$E = \frac{I}{r^2} \cdot \cos \theta = E_{\text{màx}} \cdot \cos \theta$$

(La il·luminació màxima, 80.000 lx, s'obté quan l'angle $\theta = 0^\circ$.)

L'angle entre la direcció normal a la paret (direcció horitzontal) i la direcció de la llum solar és l'altura del Sol sobre l'horitzó:

$$\theta_{\text{paret}} = 60^\circ \Rightarrow E_{\text{paret}} = E_{\text{màx}} \cdot \cos 60^\circ = 40.000 \text{ lx}$$

En el cas del terra, l'angle entre la direcció normal (que coincideix amb la vertical) i la direcció de la llum solar és el complementari de θ_{paret} :

$$\theta_{\text{terra}} = 30^\circ \Rightarrow E_{\text{terra}} = 69.000 \text{ lx}$$

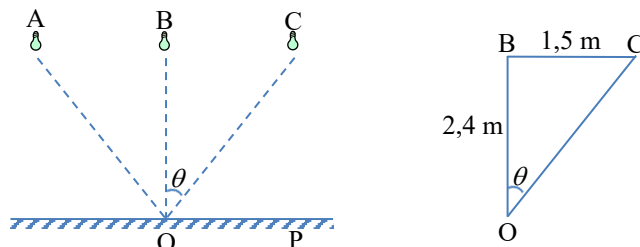
P6.5 Per tal d'il·luminar un passadís de $4,5 \times 6,0$ m, pintat de negre, es col·loquen a 2,4 m d'altura tres làmpades de 25 cd cadascuna, situades en una línia central al passadís i separades 1,5 m entre si.

a) Calculeu la il·luminació just a sota de la làmpada central.

- b) Calculeu la il·luminació just a sota d'una de les làmpades dels extrems.
- c) Suposant que el sostre sigui transparent i considerant nit de pleniluni, que proporciona una il·luminació al passadís de 0,25 lx quan la Lluna es troba al zenit, determineu la intensitat lluminosa de la llum que ens arriba del nostre satèl·lit.
- d) Quin angle sòlid determina la superfície del passadís vista des de la Lluna?

Dada: distància Terra-Lluna = 385.000 km

Solució:



- a) Els tres focus es troben en un mateix pla vertical i amb les distàncies que s'indiquen a la figura. El punt O està just a sota de la làmpada central, B, i hi arriba llum dels tres focus. Per tant, la il·luminació total a O serà la suma de la dels tres focus.

La il·luminació produïda per B sobre O és: $E_{BO} = \frac{I}{r^2} \cos \theta$, amb $I = 25 \text{ cd}$,

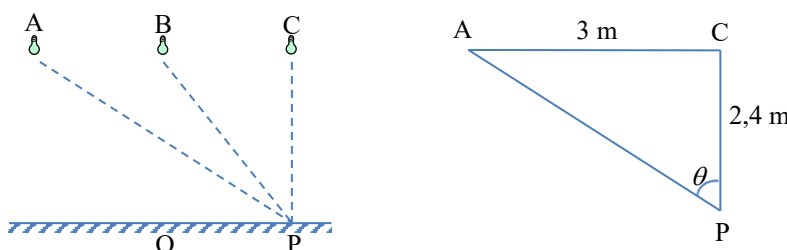
$r = 2,4 \text{ m}$ i $\theta = 0^\circ$, amb el resultat: $E_{BO} = 4,34 \text{ lx}$. La il·luminació produïda per C sobre O ve donada per la mateixa fórmula i intensitat lluminosa, però amb

$r = \sqrt{2,4^2 + 1,5^2} = 2,83 \text{ m}$, i $\cos \theta = \frac{2,4}{2,83} = 0,848$, amb el resultat que

$E_{CO} = 2,65 \text{ lx}$. La il·luminació produïda per A sobre O val exactament el mateix que aquest darrer valor, atès que la geometria des de A és la mateixa que des de C, $E_{AO} = E_{CO} = 2,65 \text{ lx}$.

Finalment, la il·luminació total sobre O és la suma de la deguda a cada focus per separat: $E_O = E_{AO} + E_{BO} + E_{CO} = 9,6 \text{ lx}$.

- b) La il·luminació al punt P, a sota de la làmpada C, és la suma de les il·luminacions degudes als tres focus.





Per similituds geomètriques, la il·luminació a P deguda a C, E_{CP} , és idèntica a la il·luminació a O deguda a B, E_{BO} , calculada a l'apartat anterior, $E_{CP} = E_{BO} = 4,34$ lx. De la mateixa manera, la il·luminació a P deguda a B, E_{BP} , és igual a la il·luminació a O deguda a A, E_{AO} , també calculada a l'apartat anterior, $E_{BP} = E_{AO} = 2,65$ lx. Per calcular la il·luminació a P deguda al focus

A, cal aplicar de nou la fórmula: $E_{AP} = \frac{I}{r^2} \cos \theta$, amb el valor de $r = \sqrt{2,4^2 + 3^2} = 3,84$ m i $\cos \theta = \frac{2,4}{3,84} = 0,625$. El resultat és $E_{AP} = 1,06$ lx.

Finalment, la il·luminació total sobre P és la suma de la deguda a cada focus per separat: $E_p = E_{AP} + E_{BP} + E_{CP} = 8,0$ lx.

- c) En aquest apartat, considerem que la llum de la Lluna incideix perpendicularment sobre el terra del passadís, perquè la Lluna es troba al zenit. Per tant, l'angle $\theta = 0^\circ$. Per calcular la intensitat lluminosa de la llum de la Lluna, partim del resultat de la il·luminació, $E = 0,25$ lx, i de la fórmula $E = \frac{I}{r^2} \cos \theta$, amb $r = 3,85 \cdot 10^8$ m, la distància de la Terra a la Lluna. Resolent per a la intensitat lluminosa: $I = 3,7 \cdot 10^{16}$ cd.

- d) Per la definició d'angle sòlid, $\Omega = A / r^2$, on r continua essent la distància Terra-Lluna, i $A = 4,5 \times 6,0 = 27$ m² és la superfície del passadís. Finalment, $\Omega = 1,8 \cdot 10^{-16}$ str.

P6.6 Una bombeta de 1.200 lm, puntual i isòtropa, es troba a 40 cm d'un mirall de reflectància 0,92. Determineu-ne la il·luminació màxima a la paret oposada, paral·lela al mirall i a 3,0 m d'aquest.

Solució:

La il·luminació màxima es donarà on la llum incideixi en direcció normal sobre la paret oposada, és a dir, amb $\theta = 0^\circ$, posició en la qual la distància recorreguda per la llum també serà mínima. La il·luminació total, E , serà la suma de la deguda a la llum que hi arriba directament des de la bombeta, E_{dir} , i la que arriba després de reflectir-se en el mirall, E_{ref} . Per determinar aquestes dues il·luminacions, necessitem, en primer lloc, conèixer la intensitat lluminosa de la bombeta:

$$I = \frac{\Phi}{4\pi} = \frac{300}{\pi} \text{ cd.}$$

La distància de la bombeta a la paret és: $r_{dir} = 3 \text{ m} - 40 \text{ cm} = 2,60$ m. Per tant, la

il·luminació directa és: $E_{dir} = \frac{I}{r_{dir}^2} \cos 0^\circ = 14,1$ lx.

Pel que fa a la il·luminació indirecta deguda a la reflexió de la llum al mirall, la distància recorreguda per la llum des de la bombeta fins que arriba a la paret oposada al mirall és: $r_{\text{ref}} = 3\text{ m} + 40\text{ cm} = 3,40$ (suma de la distància entre la bombeta i el mirall, més la distància entre el mirall i la paret oposada). A més, la intensitat lluminosa de la llum reflectida és inferior a la de la bombeta en un factor 0,92. Per

tant, la il·luminació indirecta és: $E_{\text{ref}} = \frac{0,92 \cdot I}{r_{\text{ref}}^2} \cdot \cos 0^\circ = 7,6\text{ lx}$.

Finalment, la suma d'ambdós valors ens proporciona la il·luminació total: $E = 22\text{ lx}$.

- P6.7** La candela es definia fins a l'any 1948 com la intensitat lluminosa emesa en direcció normal per una superfície d' $1/60\text{ cm}^2$ d'un cos negre a la temperatura de fusió del platí, $T = 2.046\text{ K}$. Suposeu que l'emissió segueix la llei de Lambert i determineu-ne el rendiment lluminós corresponent.

Solució:

Per determinar el rendiment lluminós, necessitem el flux lluminós total emès per la superfície i el flux radiant, i aplicar l'equació 6.2.

Pel que fa al flux lluminós, l'equació 6.9 proporciona la relació amb la intensitat lluminosa emesa en direcció normal per un difusor perfecte: $\Phi = \pi I_0 = \pi\text{ lm}$, ja que, per la definició de candela fins al 1948, tenim que $I_0 = 1\text{ cd}$.

El flux radiant, el podem obtenir a partir de les propietats del cos negre (v. capítol 2), concretament la llei de Stefan-Boltzmann: $\Phi_{\text{rad}} = A \cdot \sigma \cdot T^4$, amb $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8}$

$\text{W/m}^2 \cdot \text{K}^4$ i la superfície $A = \frac{1}{60}\text{ cm}^2$. En resulta $\Phi_{\text{rad}} = 1,66\text{ W}$ (després de passar la superfície a m^2).

El rendiment lluminós del cos negre a la temperatura de fusió del platí és, doncs, $\eta = 1,9\text{ lm/W}$.

- P6.8** Una bombeta d'incandescència de 100 W té un rendiment lluminós de 15 lm/W . Per evitar que enlluerni en mirar-la directament, es posa dintre d'un forat semiesfèric, la superfície interior del qual és reflectant al 100% , i està tancat per un plafó circular de transmissió $\tau = 1,0$. Determineu el mínim diàmetre del plafó per tal que no es produeixi enlluernament, suposant que es comporta com un difusor perfecte.

Solució:

La condició d'enlluernament es dona quan la brillantor de la superfície, en aquest cas el plafó circular, supera els 7.500 Nt ; per tant, aquesta serà la brillantor màxima que pot tenir el plafó. La brillantor d'una superfície translúcida que es comporta com un difusor perfecte ve donada per l'equació 6.14, $B = \tau E / \pi$. Per tant, la il·luminació que rep el plafó de la bombeta no ha de sobrepassar:

$$E_{\text{max}} = \frac{B_{\text{max}} \cdot \pi}{\tau} = 7.500 \cdot \pi\text{ lx}$$



Aquesta il·luminació és deguda a la incidència de tota la llum emesa per la bombeta, el flux lluminós de la qual és: $\Phi = \eta \cdot \Phi_{rad} = 1.500 \text{ lm}$, sobre la superfície del plafó, de diàmetre d : $A = \pi d^2 / 4$.

Igualant amb la il·luminació màxima: $E = 7.500\pi = \frac{\Phi}{A} = \frac{1500}{\pi d^2 / 4} \rightarrow d = 28 \text{ cm}$ com a mínim.

P6.9 Una taula plana i horitzontal és il·luminada per una lluminària plana, de la mateixa mida, penjada del sostre i que es comporta com un difusor perfecte de brillantor 100 Nt. Determineu la il·luminació a la taula.

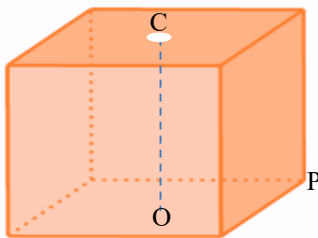
Solució:

Per simplificar, farem la hipòtesi que la il·luminació a la taula és uniforme, és a dir, igual a tots els punts de la taula. Aquesta pot ser una bona aproximació de la situació real sempre que la mida de la lluminària sigui molt més gran que la distància a la taula. Amb aquestes condicions, el flux lluminós emès per la lluminària, $\Phi = \pi BA$, és pràcticament igual al flux incident sobre la taula (suposem que no hi ha pèrdues significatives de llum) i la il·luminació és: $E = \frac{\Phi}{A} = \pi B = 100\pi \text{ lx}$.

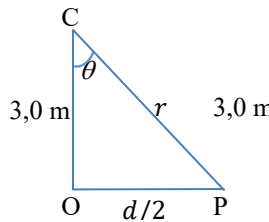
P6.10 Determineu la superfície que ha de tenir una claraboia situada al centre del sostre d'una sala rectangular, de planta $4,0 \times 3,0 \text{ m}$ i $3,0 \text{ m}$ d'altura, per tal d'obtenir una il·luminació mínima de 20 lx al terra. Negligiu la llum reflectida i suposeu que la claraboia és un difusor perfecte de 6.000 Nt .

Solució:

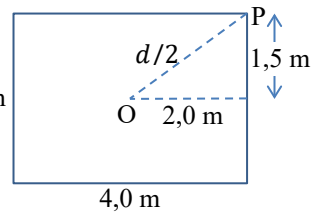
Per resoldre aquest problema, considerarem una claraboia petita, de manera que les distàncies es puguin prendre des del seu centre, C. La mínima il·luminació sobre el terra es donarà en una cantonada, per exemple el punt P, ja que és el punt del terra més allunyat de la claraboia i, al mateix temps, on la llum que entra per la claraboia arriba amb un angle θ més gran.



Vista en 3D de la sala, amb la claraboia, C, el centre del terra, O, i una cantonada, P.



Pla vertical definit per la claraboia i els punts O i P.



Pla del terra, que permet calcular la semidiagonal OP.

La intensitat lluminosa de la llum procedent de la claraboia en direcció al punt P ve donada per: $I = B \cdot A \cdot \cos \theta$, on $B = 6.000 \text{ Nt}$ i A és la superfície de la claraboia, per determinar. D'altra banda, la il·luminació al punt P es pot calcular en

funció de la intensitat lluminosa: $E = \frac{I}{r^2} \cdot \cos \theta$, on r és la distància entre C i P, i l'angle θ és el mateix que apareix a la relació entre I i B , ja que les dues superfícies, la de la claraboia i la del terra, són paral·leles. Combinant ambdues equacions, tenim: $E = \frac{B \cdot A}{r^2} \cdot \cos^2 \theta \Rightarrow A = \frac{E \cdot r^2}{B \cdot \cos^2 \theta}$.

Per poder trobar el valor de A , necessitem conèixer la distància r i l'angle θ . A partir de l'esquema del pla del terra, podem començar per calcular el valor de la semidiagonal, $d/2$, que també és la distància del centre del terra, O, a la cantonada, P, $\frac{d}{2} = \sqrt{2,0^2 + 1,5^2} = 2,5$ m. El triangle rectangle COP (figura central) ens proporciona la distància entre la claraboia i el punt P:

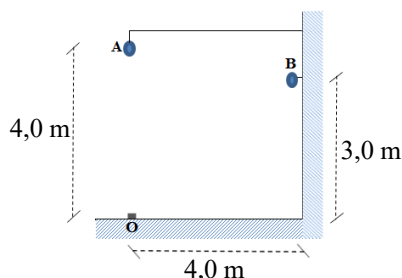
$$r = \sqrt{3,0^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2} = 3,91 \text{ m, i també: } \cos \theta = \frac{3,0}{r} = 0,768.$$

Finalment, adoptant la il·luminació mínima del terra que demana l'enunciat,

$$E = 20 \text{ lx, la superfície de la claraboia ha de ser: } A = \frac{E \cdot r^2}{B \cdot \cos^2 \theta} = 0,086 \text{ m}^2. \text{ Si,}$$

per exemple, la claraboia fos circular, el seu radi hauria de ser de 17 cm, cosa que justifica la hipòtesi inicial que la mida de la claraboia és petita (comparada amb les dimensions de la sala).

- P6.11** Al poble d'Óssamajor, s'han de revisar les instal·lacions d'il·luminació de la via pública per complir amb una nova normativa que demana un mínim de 12 lx sobre el terra. Un tècnic col·loca un luxímetre al terra del carrer de la Via Làctia, al punt O, just a sota d'un fanal (A) i prop d'un altre fanal (B). Els dos fanals consumeixen la mateixa potència però tenen diferent rendiment lluminós, i es pot considerar que tots dos són fonts isòtropes. Amb B encès i A apagat, la il·luminació a O és cinc vegades més gran que amb A encès i B apagat.



- Quin dels dos fanals té més rendiment lluminós i quantes vegades és més gran que el de l'altre fanal?
- El tècnic mesura la il·luminació a O amb A encès i B apagat, amb un resultat de 3,0 lx. Es compleix la normativa municipal amb els dos llums encesos?
- Si el terra es comporta com un difusor perfecte de reflectància 0,25, determineu la brillantor del terra a O si A està encès i B, apagat.



La tipologia de les bombetes utilitzades als fanals és: vapor de sodi de baixa pressió a B, incandescent a A.

- d) Tenint en compte l'espectre d'emissió d'aquests tipus de bombetes (Fig. 6.4) i la brillantor calculada a l'apartat anterior, discutiu si es podrà veure el terra en colors quan A estigui encès i B, apagat. I quan B està encès i A, apagat?
- e) Valoreu la contaminació lumínica deguda a la instal·lació d'il·luminació.

Nota: A tot el problema, considereu només la llum directa que va dels fanals als detectors, sense reflexions a les parets o al terra.

Solució:

Per referir-nos a les magnituds fotomètriques al punt O amb els fanals A = on i B = off, farem servir un subíndex "A". Per indicar el cas contrari, B = on i A = off, utilitzarem un subíndex "B". La distància entre A i el punt O és $d_A = 4,0$ m, i entre B i el mateix punt, $d_B = 5,0$ m.

- a) Els dos fanals consumeixen la mateixa potència i emeten llum uniformement en totes direccions; per tant, la seva intensitat lluminosa és proporcional al rendiment lluminós. Com que la il·luminació proporcionada pel més llunyà, E_B , és més gran que la del més pròxim, E_A , es dedueix que el rendiment lluminós de B és més gran.

Per trobar el quocient entre els dos rendiments lluminosos, primer els relacionem amb les intensitats lluminoses respectives:

$$\eta_A = \frac{\phi_A}{\phi_{\text{rad}}} = \frac{4\pi I_A}{\phi_{\text{rad}}}; \eta_B = \frac{\phi_B}{\phi_{\text{rad}}} = \frac{4\pi I_B}{\phi_{\text{rad}}} \Rightarrow \frac{\eta_B}{\eta_A} = \frac{I_B}{I_A}$$

on ϕ_{rad} és el flux radiant, igual per als dos fanals.

A continuació, relacionem les intensitats lluminoses amb les il·luminacions:

$$E_A = \frac{I_A}{d_A^2}; E_B = \frac{I_B \cdot \cos \theta}{d_B^2}$$

on θ és l'angle entre la direcció de la llum procedent de B i la normal al terra a O (és a dir, la vertical): $\cos \theta = 0,60$. Operant, obtenim:

$$\frac{\eta_B}{\eta_A} = 13$$

- b) La dada que tenim és que $E_A = 3,0$ lx. Amb els dos llums encesos, les il·luminacions se sumen, $E = E_A + E_B = E_A + 5E_A = 18$ lx. Per tant, sí que es compleix la normativa, tot i que el tècnic faria bé de comprovar que l'altra bombeta no està fosa.
- c) La brillantor d'un difusor perfecte és: $B = \frac{\rho E_A}{\pi} = 0,24$ Nt
- d) No es podrà veure el terra a O en colors en cap cas. Amb A = on i B = off, perquè la brillantor és massa petita per a la visió amb cons, visió fotòpica, i

amb A = off i B = on, perquè l'espectre de la llum emesa pel fanal és monocromàtic, i la llum reflectida pel terra també ho serà (es veurà un únic color).

- e) La instal·lació és molt contaminant, atès que les bombetes emeten llum en totes direccions (són isòtropses), fins i tot per sobre de l'horitzontal.

Problemes proposats

P6.12 Calculeu el flux lluminós d'una font que emet dues longituds d'ona: $\lambda_1=550$ nm, amb 0,013 W de potència, i $\lambda_2=610$ nm, amb 0,091 W de potència.

R: 40 lm

P6.13 Determineu el rendiment lluminós de la font del problema 6.12.

R: 390 lm/W

P6.14 En determinades circumstàncies, la Lluna produeix una il·luminació de 0,25 lx sobre el terra. Determineu a quina distància cal situar una làmpada de 100 cd perquè doni la mateixa il·luminació.

R: 20 m

P6.15 La bombeta de l'exemple 6.5 es penja a 3,0 m del terra.

- Determineu la màxima il·luminació sobre el terra.
- Determineu la il·luminació en un punt del terra situat a 2,0 m de la vertical de la bombeta.

R: a) 16 lx; b) 9,2 lx

P6.16 Una habitació està il·luminada per tres làmpades de 50 cd penjades del sostre, a 2,4 m d'altura, i alineades entre si. La distància entre làmpades consecutives és d'1,5 m. Determineu la il·luminació directa al terra, a la vertical d'una de les làmpades dels extrems.

R: 16 lx

P6.17 Determineu la distància a què cal col·locar tres focus puntuals i isòtrops, idèntics i alineats, tots tres situats a la mateixa altura, 60 cm, per tal que la il·luminació al terra, a la vertical del focus central, sigui el doble de la d'un punt del terra equidistant del centre i els extrems (i que pertanyi al mateix pla vertical que passa pels tres focus).

R: 1,4 m

P6.18 Calculeu la màxima il·luminació que pot proporcionar una bombeta d'incandescència de 100 cd als extrems d'una taula circular horitzontal de 70 cm de radi. Supposeu que la bombeta es comporta com una font puntual isòtropa situada a una altura h directament a sobre del centre de la taula.

Nota: Podeu calcular la il·luminació per diferents valors de l'altura h i deduir a quina altura s'obté la màxima il·luminació. Alternativament, es pot deduir una funció matemàtica que ens proporioni la il·luminació, $E = f(h)$, i determinar el

màxim d'aquesta funció com la solució de: $\frac{dE}{dh} = 0$.



R: 79 lx

P6.19 L'àrea de treball d'un joier està il·luminada per una bombeta, que podem suposar puntual i isòtropa, situada a 40 cm de distància, i per un reflector. El reflector serveix per doblar la quantitat de llum que arriba a l'àrea de treball directament des de la bombeta. Tenim disponibles bombetes de 120, 300, 600, 900, 1.200 i 1.800 lm. Determineu la bombeta de menys potència que permet que la il·luminació de l'àrea de treball sigui de 1.000 lx.

R: bombeta de 1.200 lm

P6.20 Supposeu que l'àrea de treball del problema anterior té una dimensió de 500 cm² i està il·luminada uniformement amb 1.000 lx. Determineu el mínim rendiment lluminós de la bombeta necessari per tal que el VEEI sigui inferior o igual a 10 W/m²·100 lx. És assolible el resultat obtingut? Com es podria modificar el sistema d'enllumenat per millorar-ne l'eficiència?

R: 200 lm/W

P6.21 Un llibre rep la llum directa d'una bombeta, puntual i isòtropa, situada a 1,0 m de distància i la llum reflectida per un mirall, pla i paral·lel a la línia que va del llibre a la bombeta. El mirall es troba a 0,50 m del llibre i de la bombeta. Suposant que el mirall absorbeixi el 15 % de la llum que li arriba de la bombeta, determineu la intensitat lluminosa de la bombeta per tal que la il·luminació total del llibre sigui de 10 lx.

R: 7,7 cd

P6.22 Una bombeta de 300 lm emet llum uniformement en totes direccions (isòtropa). Quant val la il·luminació sobre un full DIN A4 situat a 2,5 m de la bombeta i orientat a 45° respecte a la direcció de la llum? Quant val el flux lluminós total incident sobre el full?

Dada: dimensions d'un full DIN A4 = 297×210 mm

R: 2,7 lx; 0,17 lm

P6.23 Dues fonts de llum idèntiques de 500 lm es pengen al sostre, a 2,7 m sobre el terra i separades 4,5 m entre si. La corba polar que subministra el fabricant ens proporciona les dades següents de la distribució de la intensitat lluminosa normalitzada a 1.000 lm, en funció de l'angle amb la vertical:

Angle (°)	0	10	20	30	40	50	60	70	80
I (cd)	98,0	91,0	85,0	82,0	80,0	72,0	51,0	30,0	8,0

Determineu la il·luminació al terra, en el punt equidistant de les dues fonts i que es troba en el mateix pla vertical.

R: 5,0 lx

P6.24 Un fabricant de làmpades ens proporciona la corba polar de la figura 6.8, normalitzada a 1.000 lm. Sabem que la làmpada té un flux radiant de 15 W i un rendiment lluminós de 80 lm/W. Determineu la intensitat lluminosa corresponent als angles de 0° i 60°.

R: 500 cd i 170 cd

P6.25 Es vol il·luminar un paper de 0,80 de reflectància, amb una bombeta de 30 lm/W de rendiment lluminós. El paper es comporta com un difusor perfecte. Si la bombeta té una potència nominal de 100 W i emet la mateixa intensitat lluminosa en totes direccions, determineu la distància a què cal situar-la, en la direcció normal al paper ($\theta = 0^\circ$), per aconseguir que la brillantor d'aquest últim sigui 10,0 Nt.

R: 2,5 m

P6.26 Un full de mida DIN-A6 (10,5×14,8 cm) brilla amb 10,0 Nt i es comporta com un difusor perfecte. Quina és la intensitat lluminosa de la llum que emet en direcció normal al paper? I en una direcció que formi un angle de 30° amb la superfície del paper?

R: 0,155 cd; 0,0777 cd

P6.27 Se substitueix la lluminària del problema 6.9 per una distribució de bombetes puntuals que emeten uniformement a l'hemisferi inferior (és a dir, des del sostre cap a baix). Si s'instal·len cinc bombetes per cada m² de sostre, determineu la intensitat lluminosa de les bombetes per tal d'obtenir la mateixa il·luminació sobre la taula que al problema 6.9.

R: 10 cd

P6.28 Una superfície de 0,25 m² i reflectància 0,75 està il·luminada uniformement amb 20 lx.

- Suposant que es comporta com un difusor perfecte, calculeu-ne la brillantor.
- Determineu la il·luminació deguda al llum reflectit per la superfície esmentada sobre una altra superfície de 0,10 m², paral·lela a la primera i a 3,0 m de distància. Supposeu que la llum arriba a la segona superfície en direcció normal a aquesta.

R: a) 4,8 Nt; b) 0,13 lx

P6.29 Un disc circular de paper blanc de 5 cm de radi es troba a 2 m d'una làmpada que l'il·lumina uniformement amb 500 lx. El pla del disc és perpendicular a la recta que uneix la làmpada amb el centre del disc (és a dir, l'angle $\theta = 0^\circ$). El disc té una reflectància de 0,80 i es comporta com un difusor perfecte.

- Determineu la intensitat lluminosa de la làmpada en la direcció del disc.
- Determineu el flux lluminós total que incideix sobre el disc.
- Determineu la brillantor del disc des de diferents angles de visió. Enlluernarà?
- Determineu la intensitat lluminosa que presenta el disc en una direcció que forma un angle de 30° amb la normal al disc. I si l'angle és de 60° ?

R: a) 2.000 cd; b) 4 lm; c) 130 Nt, igual en totes direccions, i no enlluernarà; d) 0,87 cd; 0,50 cd

P6.30 Amb referència a la instal·lació descrita a l'enunciat de l'exemple 6.2:

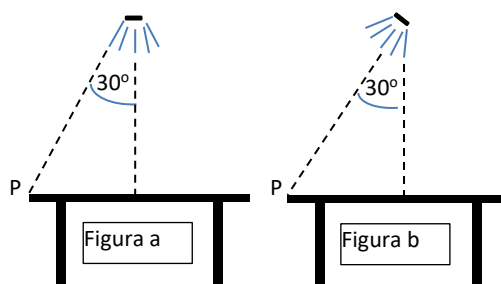
- Determineu la potència necessària si es fan servir fluorescents en comptes de bombetes, sabent que el rendiment lluminós dels fluorescents és de 60 lm/W.



- b) Determineu el VEEI de la instal·lació (suposeu que no hi ha pèrdues de potència a la instal·lació elèctrica, és a dir, que tota la potència consumida s'emet com a flux radiant) i valoreu-ne el resultat.

R: a) 3,0 kW; b) $4,2 \text{ W/m}^2 \cdot 100 \text{ lx}$

P6.31 Una làmpada determinada consisteix en una petita superfície horitzontal que emet com un difusor perfecte.



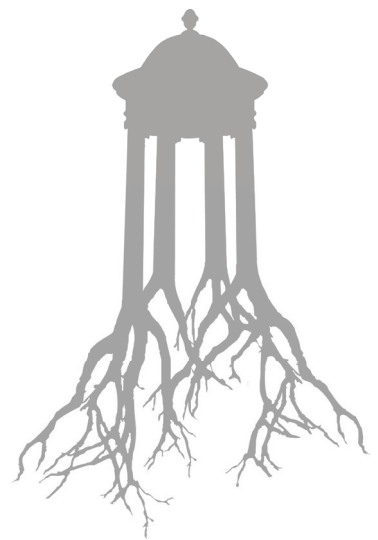
Aquesta làmpada està col·locada just a sobre del centre geomètric d'una taula circular horitzontal (v. figura a).

- a) Determineu quantes vegades és més gran la intensitat lluminosa que arriba al centre de la taula en relació amb la que arriba a un punt del perímetre, punt P.
b) Feu el mateix, però pel que fa a la il·luminació als mateixos punts.

A continuació, s'inclina la làmpada un angle de 30° , com es pot veure a la figura b.

- c) La il·luminació a P augmenta, disminueix o queda igual?

R: a) $1/\cos(30^\circ) = 1,2$ vegades; b) $1/[\cos(30^\circ)]^4 = 1,8$ vegades; c) Augmenta per un factor 1,2



→7



Corrent altern

El corrent altern és la principal font d'energia a l'abast del consumidor, tant familiar com industrial, des del començament del segle XX. El predomini del corrent altern sobre el corrent continu es va anar forjant des del 1878 fins a final del segle XIX, gràcies a les aportacions de molts investigadors i emprenedors: Tesla, Siemens, Ferraris, Westinghouse, Thomson i molts altres. Molts d'aquests noms no són desconeguts del gran públic d'avui.

Des del punt de vista de l'arquitectura, el corrent altern és una de les instal·lacions bàsiques en qualsevol edifici modern, juntament amb les instal·lacions de fluids, com aigua i gas, i les de telefonia. L'objectiu d'aquest capítol és introduir els conceptes fonamentals del corrent altern, començant per la seva pròpia definició i acabant per l'explicació del corrent altern trifàsic, que és la forma en què és distribuït al consumidor final. Amb aquesta finalitat, ens concentrarem en l'estudi dels circuits de corrent altern, que caracteritzarem amb una propietat anomenada *impedància*. Aquesta magnitud es representa amb un nombre complex, motiu pel qual hem inclòs un apèndix per introduir els aspectes més bàsics dels nombres complexos (apèndix A). A l'apèndix C, hem fet un recull de conceptes i relacions d'electricitat i magnetisme. Seguint la línia dels capítols anteriors, dedicarem una atenció especial a l'eficiència energètica en el transport i al disseny de circuits de corrent altern.

7.1 Corrent altern

Per definició, el *corrent altern* (en endavant, CA) és un *corrent elèctric que canvia de sentit periòdicament*.¹ i ² Més endavant, concretarem més la manera com el CA varia amb el temps. Els *avantatges del CA* sobre el corrent continu són:

¹ El sentit del corrent elèctric s'identifica amb el del moviment net de les càrregues positives, fins i tot quan els únics portadors de càrrega mòbils són de càrrega negativa, com és el cas dels metalls conductors.

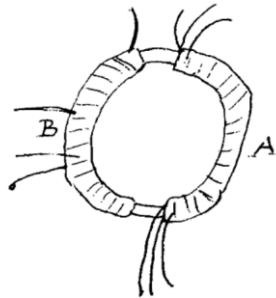
² L'assignació de signes oposats als dos tipus de càrregues elèctriques es remunta al segle XVIII. El polifacètic americà Benjamin Franklin (1706-1790) va interpretar, erròniament, que només hi havia un tipus de partícula carregada elèctricament i que existia un valor de referència, una quantitat de partícules determinada per cada objecte, pel qual es comportava com un cos neutre. Quan l'objecte guanyava partícules de càrrega, quedava

- Generació més fàcil.
- Eficiència en el transport a grans distàncies.
- Possibilitat de modular-lo amb resistències, condensadors i bobines.

La generació de CA es pot aconseguir mitjançant un conjunt d'espines de material conductor girant a l'interior d'un camp magnètic. La rotació de les espines és el resultat de l'acció del vent sobre un molí (energia eòlica), la caiguda d'aigua en una pressa (energia hidroelèctrica), l'acció d'unes turbines en una central tèrmica o nuclear, etc.

El físic anglès Michael Faraday (1791-1867) va descobrir experimentalment el 29 d'agost de 1831 que les variacions de corrent elèctric en un circuit podien induir un corrent secundari en un altre circuit proper, encara que no tinguessin cap connexió entre ells. A la figura 7.1, es pot veure una reproducció del dibuix que va fer al seu diari de treball i que es conserva actualment a la Royal Institution of Great Britain, a Londres. Faraday va enrotllar dos bobinatges independents al voltant d'un anell de ferro dolç de 15 cm de diàmetre exterior i 2,2 cm de gruix. Va comprovar que s'indueïa un corrent en el secundari, tant en el moment en què començava a passar corrent pel primari, connectat a una bateria, com quan aquest corrent s'aturava. Faraday va experimentar amb corrent continu, però en el cas del corrent altern la intensitat varia contínuament amb el temps, sense necessitat d'obrir o tancar el circuit primari, de manera que el corrent induït també és forçat contínuament. La tensió que provoca el corrent secundari rep el nom de força electromotriu induïda (f.e.m.).

Fig. 7.1
Reproducció del dibuix del diari de Faraday, que mostra el muntatge experimental que va fer servir per estudiar la inducció de corrent elèctric en un circuit secundari, A, quan connectava o desconnectava el primari, B.
Font: Gamow, G. (1961): Biography of Physics. Nova York: Harper & Brothers Publishers



7.1.1 Intensitat d'un corrent elèctric i tensió

La *intensitat del corrent*, I , en un circuit es defineix mitjançant:

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

on dQ és la quantitat de càrrega elèctrica (unitat: coulomb, C) que passa per un punt del circuit durant l'interval de temps dt . La unitat d'intensitat de corrent és l'ampere (A). Com es pot deduir de la seva definició, la intensitat està associada a un punt concret del circuit.

carregat positivament i, quan les perdia, la seva càrrega era negativa. Abans de Franklin, les càrregues positiva i negativa es coneixien com la càrrega vítria i la càrrega resinosa, respectivament.

La *tensió*, el voltatge o la diferència de potencial *entre dos punts d'un circuit*, V , és l'energia necessària per transportar una càrrega unitària entre aquests dos punts. La *unitat de tensió és el volt* (V). La tensió proporcionada per un generador de corrent és la *força electromotriu*, ε , i la seva unitat també és el volt. La tensió, com l'energia, és additiva: si considerem dos punts, A i B, separats per un punt C, la tensió total, V_{AB} , és la suma de la que hi ha entre A i C més la que hi ha entre C i B: $V_{AB} = V_{AC} + V_{CB}$.

Com a conseqüència de les definicions anteriors, la *potència* desenvolupada en un circuit és:

$$Pot = V \cdot I \quad (7.1)$$

7.1.2 Intensitat i tensió en CA

En el CA, la *intensitat i la tensió varien harmònicament amb el temps*, t , és a dir, a través d'una funció sinus o cosinus, com es pot veure a la figura 7.2. Per exemple, per a la intensitat:

$$I = I_0 \cdot \cos(\omega t - \varphi) \quad (7.2)$$

on I_0 és la *intensitat màxima* del CA; ω és la *pulsació del CA*, mesurada en rad/s, i φ és l'*angle de desfasament*, mesurat en rad. En format exponencial complex (la intensitat real seria la part real de l'exponencial complexa):

$$I = I_0 \cdot e^{i(\omega t - \varphi)} \quad (7.3)$$

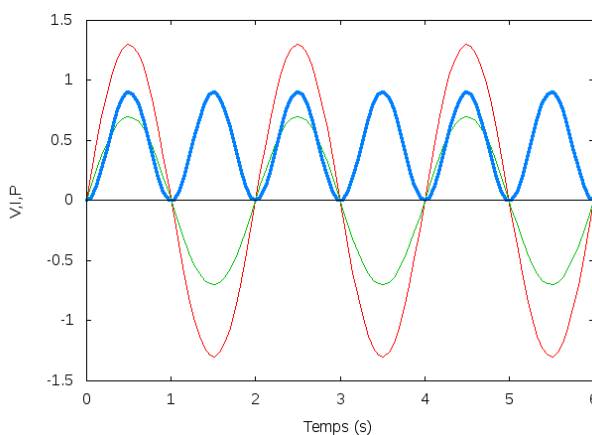


Fig. 7.2
Tensió, V (en vermell);
intensitat, I (en verd), i
potència, Pot (en
blau, v. equació 7.1),
en CA. Els valors de I_0
i V_0 són arbitraris, i el
valor de l'angle de
desfasament s'ha triat
com $\varphi = 0$

Per a la tensió, tindriem una expressió similar, amb un valor màxim de la tensió, V_0 , i la mateixa pulsació del CA que la intensitat:

$$V = V_0 \cdot \cos(\omega t) \quad (7.4)$$

O, en notació exponencial complexa, de forma similar a la intensitat:

$$V = V_0 \cdot e^{i\omega t} \quad (7.5)$$

La pulsació del CA ve determinada per la xarxa de distribució. A Europa, la freqüència del CA és $f = 50$ Hz i, recordant la relació entre pulsació i freqüència que hem vist a la secció 5.1, $\omega = 2\pi f = 100\pi$ rad/s. En altres paraules, el període del CA és petit: només de 0,02 s.

El valor de la freqüència del CA no és uniforme arreu. Per exemple, als Estats Units, la freqüència és de 60 Hz. D'altra banda, la majoria dels sistemes de les aeronaus funcionen amb CA de 400 Hz.

7.1.3 Tensió eficaç i intensitat eficaç

Com es pot apreciar a la figura 7.2, tant la mitjana de la intensitat com la de la tensió en un període són nul·les (els valors positius i els negatius es compensen exactament). Com a valor representatiu d'una magnitud que varia de forma sinusoidal amb el temps, es pren el valor eficaç, de forma similar a com s'ha definit la pressió eficaç acústica a partir de la màxima amb l'equació 5.2:

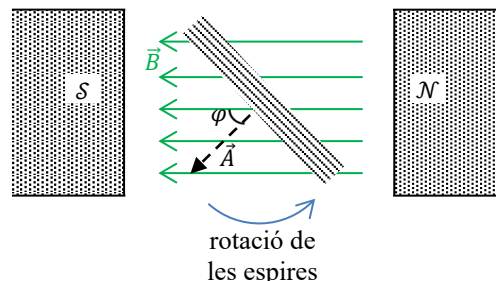
- La *intensitat eficaç*, I_e , es defineix com: $I_e = I_0 / \sqrt{2}$. La unitat també és l'ampere.
- La *tensió eficaç*, V_e , es defineix com: $V_e = V_0 / \sqrt{2}$. La unitat és el volt.

En CA, els valors eficaços es corresponen amb la mitjana del quadrat de la magnitud (per evitar valors negatius), per exemple, $V_e = \sqrt{\langle V^2 \rangle}$, on el símbol " $\langle \rangle$ " indica una mitjana temporal corresponent a un període. En les instal·lacions domèstiques, la tensió eficaç és $V_e = 220$ V; per tant, la tensió màxima distribuïda en aquestes instal·lacions és de $V_0 = V_e \sqrt{2} = 311$ V.

7.1.4 Generació de corrent altern

Considerem un conjunt de N espires de conductor, cadascuna d'elles de superfície A , immerses en un camp magnètic uniforme, $\vec{B}$, generat per dos pols magnètics (Fig. 7.3).

Fig. 7.3
Esquema de la generació de CA mitjançant la rotació d'un conjunt d'espores en el si d'un camp magnètic uniforme i constant, entre dos pols magnètics. El pla de les espores i l'eix de rotació són perpendiculars al pla del dibuix



El flux del camp magnètic a través d'una espira és (apèndix C):

$$\phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{A} = B \cdot A \cdot \cos \varphi \quad (7.6)$$

El flux total a través del bobinatge és N vegades més gran: $\phi_{B,\text{total}} = N \cdot \phi_B$.

Si el conjunt d'espores es fa girar a una velocitat angular uniforme, ω , l'angle varia amb el temps d'acord amb: $\varphi = \omega t + \varphi_0$, i el flux del camp magnètic també serà funció del temps. Per a cada espira, el flux serà:

$$\phi_B = B \cdot A \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$$

La llei de Faraday-Lenz diu que la força electromotriu induïda al circuit connectat a les espores és igual a la derivada temporal del flux del camp magnètic, canviada de signe:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= -\frac{d\phi_{B,\text{total}}}{dt} = -N \cdot \frac{d\phi_B}{dt} = \\ &= B \cdot N \cdot A \cdot \omega \sin(\omega t + \varphi_0) \end{aligned} \quad (7.7)$$

Per tant, es genera una f.e.m. sinusoidal, que varia de sentit periòdicament amb el temps, d'amplitud: $\varepsilon_{\text{màx}} = B \cdot N \cdot A \cdot \omega$ i freqüència: $f = \omega / 2\pi$.

7.1.5 Transformador

Els transformadors tenen la funció de canviar la tensió eficaç subministrada per un generador de CA a un valor diferent, més adient per al transport de CA o per al funcionament de qualsevol aparell que s'hi hagi de connectar. El principi de funcionament dels transformadors es basa en els anomenats *circuits magnètics*, formats per un nucli de material ferromagnètic (per exemple, acer) en forma d'anell o rectangular (similar a la Fig. 7.1). Aquests circuits magnètics tenen la propietat de conservar el valor del flux de camp magnètic al seu interior, de forma similar a com un circuit elèctric conserva les càrregues elèctriques que s'hi mouen en resposta a una diferència de potencial. En els transformadors, dos o més bobinatges de filferro conductor aïllat, amb diferents nombres d'espores, s'enrotllen al voltant del nucli ferromagnètic. En el cas de dos bobinatges, aquell pel qual s'envia el corrent al transformador s'anomena *primari* i el receptor s'anomena *secundari*.

En un transformador ideal, en què no hi hagués pèrdues d'energia ni fugues de línies de camp magnètic fora del nucli ferromagnètic, la potència alimentada pel circuit primari hauria de ser la mateixa que la recollida al circuit secundari. Per tant, si identifiquem les magnituds referides al primari amb un subíndex 1 i les del secundari amb un subíndex 2, tindriem la relació següent entre tensions i intensitats en els dos circuits: $V_1 \cdot I_1 = V_2 \cdot I_2$.

L'equació del transformador ideal relaciona les tensions en els dos circuits amb el nombre d'espores que tenen: $V_1 / N_1 = V_2 / N_2$, essent N_1 i N_2 el nombre d'espores del primari i del secundari, respectivament. Aquesta relació implica que, com més petit sigui el nombre d'espores del secundari en relació amb el nombre d'espores del primari, més petita serà la diferència de potencial que s'hi indueix, i viceversa. L'equació del transformador ideal es pot deduir fàcilment tenint en compte la conservació del flux del camp magnètic a través del nucli:

$$\phi_{B,1} = \phi_{B,2} \Rightarrow \frac{d\phi_{B,1}}{dt} = \frac{d\phi_{B,2}}{dt}$$



I, aplicant la llei de Faraday-Lenz (equació 7.7) als dos bobinatges:

$$V_i = -N_i \frac{d\phi_{B,i}}{dt} \Rightarrow V_1 / N_1 = V_2 / N_2 \quad (7.8)$$

Els transformadors reals presenten pèrdues tant d'energia, per efecte Joule, com de flux magnètic, ja que es produeixen fuites de camp fora del nucli ferromagnètic. Amb un disseny adequat, els efectes d'aquestes pèrdues es poden minimitzar.

7.2 Energia en un circuit de CA

En un circuit de CA, l'energia electromagnètica es genera, es dissipa en les resistències (s'elimina del circuit, transformant-se en calor) i s'emmagatzema temporalment en condensadors (energia elèctrica) i també en bobines (energia magnètica). Vegem com hi intervenen aquests diferents elements.

1. *Generador de CA.* És un element del circuit (o un endoll) que proporciona una f.e.m. sinusoidal variable amb el temps, és a dir, que aporta energia al circuit. El símbol que representa el generador de CA és .
2. *Resistència* d'un conductor entre dos punts, R . Es defineix com la relació entre la tensió entre els mateixos punts, V_R , i la intensitat que hi circula:

$$R = \frac{V_R}{I} \Rightarrow V_R = I \cdot R \quad (7.9)$$

La unitat de resistència és l'ohm (Ω), $1 \Omega = 1 \text{ V/A}$. Encara que qualsevol part d'un circuit té resistència, molt sovint la major part de la resistència està concentrada en una zona concreta del circuit. El símbol de la resistència és: .

Les resistències dissipen energia electromagnètica, transformant-la en calor per l'efecte Joule.

Exemple 7.1

El reglament de baixa tensió estableix un valor màxim de 50 V per a la tensió de seguretat en un local sec. Calculeu la màxima resistència que pot tenir el terra en una instal·lació que disposa d'un interruptor diferencial de 300 mA.

Solució. La funció de l'interruptor diferencial és garantir que la intensitat no supera el valor límit de $I_{\text{lim}} = 300 \text{ mA} = 0,300 \text{ A}$. La resistència del terra ha de proveir un camí fàcil per al corrent no volgut que es pugui generar a la instal·lació. Per aquest motiu, la resistència no pot superar un valor màxim, que es pot calcular mitjançant l'equació 7.9:

$$R_{\text{màx}} = \frac{V_R}{I_{\text{lim}}} = \frac{50}{0,300} = 166 \Omega.$$

Amb aquest valor de la resistència del terra, la tensió entre qualsevol de les parts del circuit de terra no superarà, en cap cas, els 50 V. Tenint en compte que la resistència elèctrica del cos humà és d'uns 2,5 k Ω , es considera que la intensitat que hi circularia en cas de fer de pont amb el terra no seria letal.

Per tant, la resposta és que la resistència del terra no pot superar els 160 Ω .

3. *Condensador o capacítància.* És un element del circuit que manté en equilibri electrostàtic, i separades, càrregues de magnitud igual i signe oposat, emmagatzemant energia electrostàtica a l'espai entre les càrregues (Fig. 7.4, esquerra). En moltes instal·lacions, aquesta circumstància es dona espontàniament, per exemple a causa d'una soldadura defectuosa. En CA, un condensador emmagatzema i allibera l'energia elèctrica successivament, actuant de forma similar a un ressort elàstic en un sistema mecànic.

Un condensador es pot construir amb un got o una ampolla, recobrint-ne tant la superfície interior com l'exterior amb pa de plata (una versió casolana de l'ampolla de Leyden) i carregant elèctricament la plata. A la figura 7.4 (dreta), podeu veure un condensador industrial amb una geometria exterior que recorda la d'una ampolla.

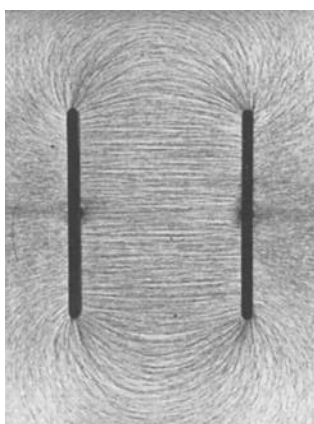


Fig. 7.4
Esquerra: Visualització del camp elèctric en un condensador format per dues plaques conductores planes i paral·leles (perpendiculars al pla de la imatge). S'hi poden veure petites llimadures de ferro, que s'alineen amb les línies de camp.
Crèdit de la imatge: <http://www.physics.byu.edu/faculty/christensen/>
Dreta: Un condensador industrial de 16 µF.
Crèdit de la imatge: <https://capacitor-shop.co.uk/>

Es defineix la *capacitat*, C , d'un condensador com la relació entre la càrrega i la tensió que suporta:

$$C = \frac{Q}{V_C} \Rightarrow Q = C V_C \quad (7.10)$$

La unitat de capacitat és el farad (F), $1 \text{ F} = 1 \text{ C/V}$. El farad és una unitat excessivament gran, atès que els valors usals de la capacitat van des del pF (10^{-12} F) fins al µF (10^{-6} F). El símbol que representa la capacítància o el condensador és:

—|—

A partir de la definició de capacitat, podem trobar la *relació entre la intensitat i la tensió en un condensador*. Primer, veiem com queda la derivada temporal de V en notació exponencial complexa (equació 7.5):

$$\dot{V} = \frac{dV}{dt} = V_0 \cdot \frac{d(e^{i\omega t})}{dt} = V_0 \cdot i\omega e^{i\omega t} \Rightarrow \dot{V} = i\omega V$$

A continuació, derivem l'equació 7.10 respecte del temps, assumint que la capacitat és constant, i substituïm la relació anterior (recordem que la inversa de la unitat imaginària és $-i$) i la definició d'intensitat:



$$I = i\omega CV_c \Rightarrow V_c = -iI \cdot X_c \quad (7.11)$$

on hem emprat la definició:

$$X_c = 1 / C\omega \quad (7.12)$$

que s'anomena *reactància capacitiva* i es mesura en *ohms*.

Exemple 7.2

Calculeu la reactància capacitiva d'un condensador d'1,93 μF connectat a la xarxa domèstica de 220 V i 50 Hz.

Solució. La capacitat val: $C = 1,93 \times 10^{-6}$ F; la pulsació del CA: $\omega = 2\pi f = 100\pi$ rad/s, i la reactància capacitiva: $X_c = \frac{1}{C\omega} = \frac{1}{1,93 \times 10^{-6} \times 100\pi} = 1.649 \Omega$.

Per tant, la resposta és 1,6 k Ω .

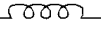
4. *Bobina*, solenoide o inductància. És un element del circuit que interacciona amb el corrent que hi circula, aportant una f.e.m. autoinduída i emmagatzemant energia magnètica. La funció de les bobines en un circuit de CA és proporcionar inèrcia davant de les variacions d'intensitat. Molts circuits domèstics presenten inductàncies no volgudes.

Es defineix la *inductància* o el coeficient d'autoinducció, L , d'una bobina com la relació entre el flux del camp magnètic a través de la bobina, ϕ_B , i la intensitat del corrent responsable del camp magnètic:

$$L = \phi_B / I \quad (7.13)$$

La llei de Faraday-Lenz permet relacionar la tensió induïda a la bobina amb les variacions d'intensitat. Suposant que la inductància es manté constant amb el temps:

$$V_L = L \cdot \frac{dI}{dt}$$

La unitat d'inductància és el *henry* (H), $1 \text{ H} = 1 \text{ V} \cdot \text{s/A}$. El símbol que representa una bobina o inductància és: .

A partir de la relació anterior entre tensió, inductància i derivada temporal de la intensitat, tenint en compte novament la forma que adopta la derivada temporal en la notació exponencial complexa, $\dot{I} = i\omega I$, podem trobar la *relació entre intensitat i tensió en una bobina*:

$$V_L = i\omega LI \Rightarrow V_L = iI \cdot X_L \quad (7.14)$$

en què hem emprat la definició:

$$X_L = L\omega \quad (7.15)$$

que s'anomena *reactància inductiva* i es mesura en ohms.

Exemple 7.3

Calculeu la reactància inductiva d'una bobina de 0,98 H connectada a la xarxa domèstica de 220 V i 50 Hz.

Solució. La inductància és: $L = 0,98$ H; la pulsació del CA: $\omega = 2\pi f = 100\pi$ rad/s, i la reactància inductiva: $X_L = L\omega = 0,98 \cdot 100 \cdot \pi = 307,8 \Omega$.

Per tant, la resposta és 310 Ω .

7.3 Impedància, resistència i reactància

La *impedància* d'un circuit de CA és la magnitud que el caracteritza, i es defineix com la relació entre la tensió alimentada al circuit i la intensitat que hi circula. Adoptant la notació complexa per intensitat i tensió, la impedància, Z , també és un nombre complex, definit per:

$$Z = V / I \quad (7.16)$$

La unitat d'impedància és l'ohm. Tenint en compte les notacions exponencials complexes per a V i per a I (equacions 7.3 i 7.5), podem escriure:

$$Z = \frac{V_e}{I_e} e^{j\varphi}$$

on s'ha tingut en compte que el quocient entre V_e i I_e és el mateix que entre els valors màxims, V_0 i I_0 . El mòdul de la impedància, Z , és:

$$Z = V_e / I_e \quad (7.17)$$

que és una relació entre tres nombres reals. L'angle φ és l'*angle de desfasament* entre la intensitat i la tensió, definit a la secció 7.1.2, el significat del qual es pot extreure de la comparació de les equacions 7.2 i 7.4.

El mòdul de la impedància, Z ; la part real, $\text{Re}(Z)$, i la part imaginària, $\text{Im}(Z)$, defineixen un triangle rectangle:

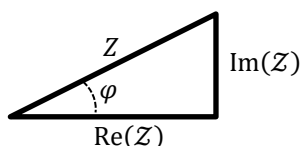


Fig.7.5
La impedància en el pla complex



Aquest triangle ens proporciona les relacions entre l'angle de desfasament i la impedància:

$$\left. \begin{aligned} \cos \varphi &= \operatorname{Re}(\mathcal{Z}) / Z \\ \sin \varphi &= \operatorname{Im}(\mathcal{Z}) / Z \\ \tan \varphi &= \operatorname{Im}(\mathcal{Z}) / \operatorname{Re}(\mathcal{Z}) \end{aligned} \right\} \quad (7.18)$$

Exemple 7.4

Un circuit connectat a la xarxa domèstica (220 V i 50 Hz) té una impedància complexa: $\mathcal{Z} = 51,2 - 1.341i \, \Omega$. Calculeu la intensitat màxima que hi circula.

Solució. La tensió de 220 V de la xarxa és una tensió eficaç: $V_e = 220 \, \text{V}$. L'equació 7.17 proporciona la relació entre les magnituds eficaçes i el mòdul de la impedància. Aquest últim és (v. Fig. 7.5):

$$Z = \sqrt{51,2^2 + 1.341^2} = 1.342 \, \Omega$$

Finalment, $I_e = V_e / Z = 0,164 \, \text{A}$. Aquest és el valor eficaç de la intensitat, relacionat amb el valor màxim per l'equació $I_0 = I_e \sqrt{2} = 0,232 \, \text{A}$.

Per tant, la resposta és 0,232 A.

7.3.1 Impedància d'una resistència

A partir de la definició d'impedància (equació 7.16), i substituint la relació entre el voltatge i la intensitat en una resistència (equació 7.9), es pot comprovar que *la impedància d'una resistència, $\mathcal{Z}_R$, és igual a la pròpia resistència*:

$$\mathcal{Z}_R = R \quad (7.19)$$

És a dir, la impedància d'una resistència no té part imaginària: *és un nombre real pur*.

7.3.2 Impedància d'un condensador o capacítància

A partir de la definició d'impedància (equació 7.16), i substituint la relació entre el voltatge i la intensitat (equació 7.11), es pot comprovar que *la impedància d'un condensador o capacítància, $\mathcal{Z}_C$, és*:

$$\mathcal{Z}_C = -iX_C = -i \frac{1}{C\omega} \quad (7.20)$$

És a dir, la impedància d'una capacítància no té part real: *és un nombre imaginari pur, negatiu, i de mòdul igual a la reactància capacitiva*:

$$Z_C = X_C$$

7.3.3 Impedància d'una bobina o inductància

A partir de la definició d'impedància (equació 7.16), i substituint la relació entre el voltatge i la intensitat (equació 7.14), es pot comprovar que la *impedància d'una bobina o inductància*, Z_L , és:

$$Z_L = iX_L = iL\omega \quad (7.21)$$

És a dir, la impedància d'una inductància no té part real: *és un nombre imaginari pur, positiu, i de mòdul igual a la reactància inductiva*:

$$Z_L = X_L$$

Com acabem de veure, les impedàncies dels condensadors i de les bobines sempre tenen signes oposats: la primera sempre és negativa i la segona sempre és positiva. Per aquest motiu, *un circuit caracteritzat per una impedància amb la part imaginària negativa s'anomena circuit capacitiu*, mentre que *un circuit caracteritzat per una impedància amb la part imaginària positiva s'anomena circuit inductiu*.

7.4 Associació d'impedàncies en sèrie i en paral·lel

Mitjançant la connexió d'impedàncies (resistències, bobines i/o condensadors), es poden construir circuits complexos. La connexió d'impedàncies es coneix amb el nom genèric d'*associació d'impedàncies*. Hi ha dues maneres elementals d'associar impedàncies:

- *Associació d'impedàncies en sèrie*: els elements comparteixen la mateixa intensitat, mentre que la tensió es divideix entre ells.
- *Associació d'impedàncies en paral·lel*: els elements comparteixen la mateixa tensió, mentre que la intensitat es divideix entre ells.

7.4.1 Circuit RLC sèrie

Una associació en sèrie d'una resistència, una bobina i un condensador es coneix amb el nom de *circuit RLC sèrie* (Fig. 7.6).

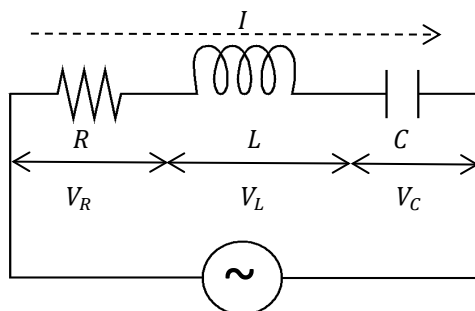


Fig.7.6
Circuit RLC sèrie

Per la propietat additiva, la tensió total en el circuit és la suma de les de cada element:

$$V = V_R + V_L + V_C = (Z_R + Z_L + Z_C) \cdot I$$



i la *impedància del circuit RLC*, $\mathcal{Z}$, és la suma de les impedàncies dels tres elements que el componen:

$$\mathcal{Z} \equiv \frac{V}{I} = \mathcal{Z}_R + \mathcal{Z}_L + \mathcal{Z}_C \Rightarrow \mathcal{Z} = R + i \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \quad (7.22)$$

La part imaginària de la impedància és la reactància del circuit, X :

$$\mathcal{Z} = R + iX \Rightarrow X = \omega L - \frac{1}{\omega C} \quad (7.23)$$

Finalment, el *mòdul de la impedància* i l'*angle de desfasament* vénen donats per:

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2} \quad (7.24)$$

$$\tan \varphi = \frac{X}{R} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \quad (7.25)$$

Exemple 7.5

Un circuit RLC sèrie connectat a la xarxa domèstica (220 V i 50 Hz) té una resistència de 51,2 Ω , una inductància de 980 mH i una capacitat de 1,93 μF . Calculeu la reactància, la impedància i l'angle de desfasament entre la tensió i el corrent.

Solució. La impedància de la resistència és: $\mathcal{Z}_R = R = 51,2 \ \Omega$, la del condensador (exemple 7.2): $\mathcal{Z}_C = -iX_C = -1.649i \ \Omega$ i la de la bobina (exemple 7.3): $\mathcal{Z}_L = iX_L = 308i \ \Omega$.

La impedància de l'associació en sèrie n'és la suma:

$$\mathcal{Z} = \mathcal{Z}_R + \mathcal{Z}_C + \mathcal{Z}_L = 51,2 - 1.341i \ \Omega$$

La reactància és la part imaginària:

$$X = 1.341 \ \Omega$$

i l'angle de desfasament ve donat per l'equació 7.18:

$$\tan \varphi = \frac{\text{Im}(\mathcal{Z})}{\text{Re}(\mathcal{Z})} = \frac{-1.341}{51,2} = -26,2 \Rightarrow \varphi = -87,8^\circ = -1,53 \text{ rad}$$

Per tant, les respostes són: reactància = 1,3 k Ω ; impedància = 51,2 – 1.300i Ω , el mòdul de la qual és 1,3 k Ω ; i l'angle de desfasament = –1,53 rad. La precisió amb què es coneix la freqüència de la xarxa limita el nombre de xifres significatives de reactància i impedància.

7.4.2 Associació d'impedàncies en sèrie

L'associació d'impedàncies en sèrie és una generalització del que acabem de veure per al circuit RLC sèrie. Ara considerarem la connexió en sèrie d'un nombre arbitrari d'impedàncies, Z_k , cadascuna de les quals amb una part real i una part imaginària (Fig. 7.7).

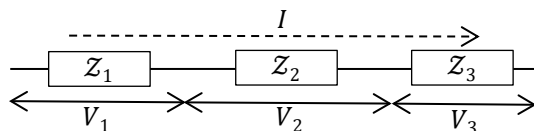


Fig.7.7
Associació d'impedàncies en sèrie

Cada impedància pot correspondre, en realitat, a un subcircuit més o menys complicat, però per a nosaltres l'únic rellevant ara és el valor de la seva impedància complexa, i no quina és la seva composició. Pels mateixos motius que en el circuit RLC sèrie, en aquest cas la impedància total, Z_{eq} també és la suma complexa de les impedàncies associades:

$$Z_{eq} = Z_1 + Z_2 + Z_3 + \dots \quad (7.26)$$

Cal tenir present que aquesta és una suma de nombres complexos i que *no es pot aplicar la mateixa relació als mòduls de les impedàncies*. És a dir, en general:

$$Z_{eq} \neq Z_1 + Z_2 + Z_3 + \dots$$

7.4.3 Associació d'impedàncies en paral·lel

En una associació d'impedàncies en paral·lel (Fig. 7.8), representem per Z_k la impedància de la branca k .

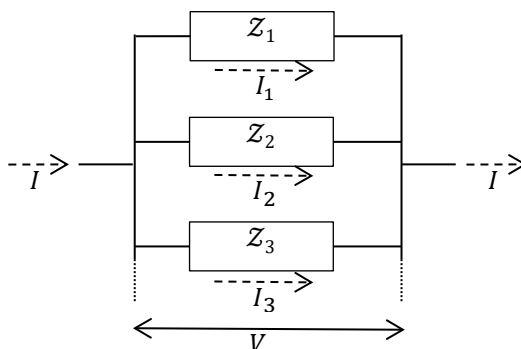


Fig.7.8
Associació d'impedàncies en paral·lel

Totes les branques estan a la mateixa tensió V , mentre que la intensitat total, I , que arriba a l'associació es divideix entre les diverses branques:

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + \dots$$

Substituint aquesta relació a la definició d'impedància (equació 7.16), aplicada al conjunt de l'associació en paral·lel, la impedància de l'associació, Z_{eq} , és:

$$\frac{1}{Z_{eq}} = \frac{I}{V} = \frac{I_1}{V} + \frac{I_2}{V} + \frac{I_3}{V} + \dots$$



i, recordant de nou la definició d'impedància d'una branca, $Z_k = V / I_k$, n'obtenim la llei d'associació d'impedàncies en paral·lel:

$$\frac{1}{Z_{eq}} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} + \dots \quad (7.27)$$

Si només hi ha dues branques, l'equació 7.27 es pot reescriure d'una forma més convenient:

$$Z_{eq} = \frac{Z_1 \cdot Z_2}{Z_1 + Z_2} \quad (7.28)$$

Recalquem, de nou, que tant l'equació 7.27 com la 7.28 són relacions entre nombres complexos i que, en general, *no* es compleixen equacions anàlogues entre els mòduls de les impedàncies:

$$\frac{1}{Z_{eq}} \neq \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} + \dots$$

$$Z_{eq} \neq \frac{Z_1 \cdot Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

Exemple 7.6

Volem connectar en paral·lel un calefactor elèctric i un tub fluorescent a la xarxa de 220 V i 50 Hz. El calefactor elèctric té una resistència de 60Ω , i el tub fluorescent és equivalent a una resistència de 30Ω en sèrie amb una inductància de $0,80$ H. Determineu la impedància equivalent de l'associació en paral·lel.

Solució. La impedància del calefactor és: $Z_1 = 60 \Omega$. Pel que fa al fluorescent, la reactància inductiva és: $X_L = L\omega = 0,80 \times 100\pi = 80\pi \Omega$, i la impedància: $Z_2 = 30 + 80\pi i \Omega$.

Com que només hi ha dues impedàncies en paral·lel, la impedància total de l'associació es pot calcular amb l'equació 7.28 (si fossin més, s'hauria d'emprar l'equació 7.27):

$$Z_{eq} = \frac{Z_1 \cdot Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{60 \cdot (30 + 80\pi i)}{60 + 30 + 80\pi i} = \frac{1.800 + 4.800\pi i}{90 + 80\pi i} = \frac{180 + 480\pi i}{9,0 + 8,0\pi i} \Omega$$

Per resoldre la divisió de dos complexos, primer multipliquem i dividim pel complex conjugat del denominador, en aquest cas, $9,0 - 8,0\pi i$. Recordem que el producte d'un nombre complex pel seu conjugat sempre és igual a la suma dels quadrats de la part real i la part imaginària (en calcular el quadrat de la part imaginària, tingueu compte de no incloure-hi el nombre i !):

$$\begin{aligned} Z_{eq} &= \frac{(180 + 480\pi i)(9,0 - 8,0\pi i)}{(9,0 + 8,0\pi i)(9,0 - 8,0\pi i)} = \frac{(180 \times 9,0 + 480\pi \cdot 8,0\pi) - (180 \cdot 8,0\pi - 9,0 \cdot 480\pi)i}{9,0^2 + (8,0\pi)^2} \\ &= \frac{39.519 + 9.048i}{712,7} \Omega \end{aligned}$$

$$Z_{eq} = 55,4 + 12,7i \Omega$$

Per tant, la impedància total és $55 + 13i \Omega$, i el seu mòdul és 57Ω .

7.5 Potència en CA

La potència instantània en qualsevol circuit elèctric ve donada pel producte de la tensió i la intensitat, també instantànies: $Pot = V \cdot I$.

Exemple 7.7

Calculeu la intensitat que circula per una bombeta de 60 W quan s'alimenta a 240 V.

Solució. Apliquem la relació fonamental entre potència, tensió i intensitat: $Pot = V \cdot I$ en què, en aquest exemple, $Pot = 60$ W i $V = 240$ V. La intensitat que circula per la bombeta és:

$$I = \frac{Pot}{V} = 0,25 \text{ A.}$$

Per tant, la resposta és 0,25 A.

7.5.1 Potència activa d'un circuit de CA

En CA, la tensió i la intensitat són variables amb el temps, de manera que la potència també ho és. La potència mitjana del CA durant un període s'anomena potència activa, P_{ac} . En funció dels valors eficaços de la tensió i la intensitat, la potència activa és:

$$P_{ac} = \mathcal{F} \cdot V_e \cdot I_e \quad (7.29)$$

El factor de proporcionalitat, $\mathcal{F}$, s'anomena *factor de potència* i és una quantitat *adimensional* acotada en l'interval: $0 \leq \mathcal{F} \leq 1$. El factor de potència juga un paper important en l'eficiència energètica del circuit de CA. El seu valor ve determinat per l'angle de desfase, φ , com veurem tot seguit.

7.5.2 Factor de potència

En un circuit de CA, la tensió i la intensitat instantànies es poden escriure com (equacions 7.2 i 7.4): $V = V_0 \cdot \cos(\omega t)$; $I = I_0 \cdot \cos(\omega t - \varphi)$ i, per tant, la potència instantània és:

$$Pot = V_0 \cdot I_0 \cdot \cos(\omega t) \cdot \cos(\omega t - \varphi)$$

La potència activa, P_{ac} , és la mitjana temporal durant un període, T , de la potència instantània:

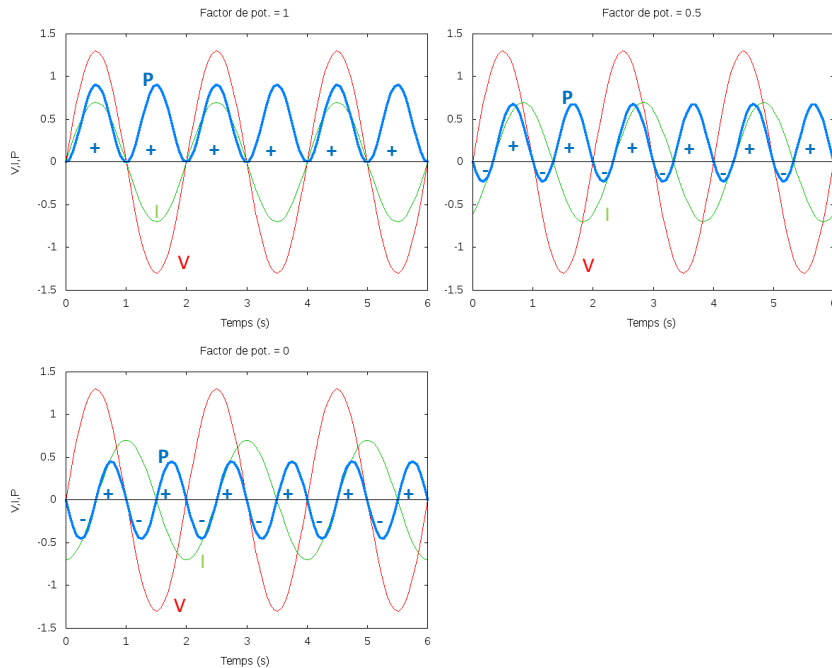
$$P_{ac} = \frac{1}{T} \int_0^T Pot \cdot dt = \frac{1}{T} \int_0^T V \cdot I \cdot dt = \frac{V_0 \cdot I_0}{T} \int_0^T \cos(\omega t) \cdot \cos(\omega t - \varphi) dt$$

L'última integral es pot simplificar aplicant la relació trigonomètrica següent:

$$\cos(A) \cdot \cos(B) = \frac{1}{2} [\cos(A+B) + \cos(A-B)],$$

Fig. 7.9

Evolució amb el temps de la tensió (línies vermelles), la intensitat (línies verdes) i la potència instantània (línies blaves) per a tres supòsits sobre l'angle de desfasament entre la tensió i la intensitat: $\varphi = 0 \rightarrow \mathcal{F} = 1$ (a dalt a l'esquerra); $\varphi = 60^\circ \rightarrow \mathcal{F} = 0,5$ (a dalt a la dreta), i $\varphi = 90^\circ \rightarrow \mathcal{F} = 0$ (a baix). En aquest exemple, $V_0 = 1,3 \text{ V}$, $I_0 = 0,7 \text{ A}$, i el període del CA és 2 s; per tant, la freqüència és $f = 0,5 \text{ Hz}$ (no s'ha de confondre amb el factor de potència, $\mathcal{F}$, que és adimensional). A cada gràfic s'indica amb signes + o - els intervals de temps en què la potència instantània és positiva o negativa.



tot identificant: $A = \omega t$, i: $B = \omega t - \varphi$,

$$P_{ac} = \frac{V_0 \cdot I_0}{2T} \left[\int_0^T \cos(2\omega t - \varphi) \cdot dt + \cos(\varphi) \cdot \int_0^T dt \right]$$

La primera integral, la mitjana d'un cosinus durant un període, és nul·la, i la segona integral és la diferència entre els límits d'integració, és a dir, T .

Finalment,

$$P_{ac} = \frac{V_0 \cdot I_0}{2} \cos(\varphi) = V_e \cdot I_e \cdot \cos(\varphi) \quad (7.30)$$

Per tant, *el factor de potència coincideix amb el cosinus de l'angle de desfasament*:

$$\mathcal{F} = \cos(\varphi) \quad (7.31)$$

7.5.3 Potència aparent i potència reactiva

Les xarxes de distribució d'electricitat proporcionen al consumidor una tensió i una intensitat. La *potència aparent subministrada*, P_{ap} , és el producte de la tensió i la intensitat eficaçes, és a dir, la potència activa que es consumiria realment si el factor de potència tingués el valor òptim, $\mathcal{F} = 1$:

$$P_{ap} = V_e \cdot I_e \quad (7.32)$$

En el cas més general que el factor de potència sigui inferior a la unitat, la potència aparent no és la potència consumida realment pel circuit. Per aquest motiu, tot i que formalment la potència aparent es podria mesurar en watt, la unitat que s'utilitza és el voltampere ($V \cdot A$): $1 V \cdot A = 1 V \cdot 1 A$. Nominalment, $1 V \cdot A = 1 W$.

També es defineix la potència reactiva, P_{re} , igualment mesurada en voltamperes, amb l'expressió següent:

$$P_{re} = V_e \cdot I_e \cdot \sin(\varphi) \quad (7.33)$$

Les tres potències (activa, aparent i reactiva) defineixen un triangle rectangle:

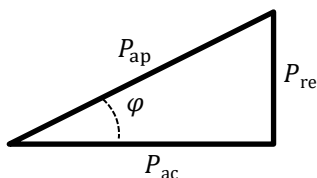


Fig.7.10
Descomposició de la potència aparent en potència activa i potència reactiva

del qual es pot deduir:

$$P_{ap} = \sqrt{P_{ac}^2 + P_{re}^2}$$

Exemple 7.8

Calculeu les potències activa i reactiva de l'associació en paral·lel del calefactor elèctric i el tub fluorescent de l'exemple 7.6.

Solució. Comencem per calcular la intensitat eficaç total que circula per l'associació, tot recordant el valor de la impedància total obtingut a l'exemple 7.6, $Z = 56,8 \Omega$ (deixem l'arrodoniment per al resultat final). La intensitat eficaç és, doncs: $I_e = \frac{V_e}{Z} = \frac{220}{56,8} = 3,87 A$.

D'altra banda, el factor de potència, el podem calcular a partir de la impedància complexa: $Z = 55,4 + 12,7i \Omega$, mitjançant l'equació 7.18:

$$\cos \varphi = \frac{\operatorname{Re}(Z)}{Z} = \frac{55,4}{56,8} = 0,975$$

Ara, ja podem calcular directament la potència activa, aplicant l'equació 7.29:

$$P_{ac} = V_e \cdot I_e \cdot \cos \varphi = 220 \cdot 3,87 \cdot 0,975 = 830 W$$

i la reactiva, aplicant l'equació 7.33:

$$P_{re} = V_e \cdot I_e \cdot \sin(\varphi) = 220 \cdot 3,87 \cdot \sqrt{1 - 0,975^2} = 189 \text{ voltamperes}$$

Per tant, les respostes són: potència activa = 830 W; potència reactiva = 190 voltamperes

7.5.4 Eficiència energètica en el transport de CA

Tret de comptades instal·lacions *in situ* d'energia solar fotovoltaica, la major part de l'energia elèctrica es genera a grans distàncies dels consumidors (familiars o empresarials). En conseqüència, l'eficiència energètica en el transport de CA és un tema de preocupació generalitzada en el context de la sostenibilitat de l'economia. S'ha de tenir present que *el corrent es transporta* a través de materials de resistència elèctrica, cosa que sempre comporta que hi hagi unes pèrdues d'energia elèctrica per l'efecte Joule, en forma de calor.

En el transport de CA, hem de considerar dues potències:

- La potència subministrada al consumidor, que és la potència aparent, $P_{ap} = V_e \cdot I_e$. Aquesta és la potència que la xarxa de distribució posa a disposició del consumidor.
- La potència perduda per l'efecte Joule en el transport del corrent a grans distàncies, $P_{Joule} = R \cdot I_e^2$, en què R és la resistència dels conductors que s'utilitzen en el transport. La caiguda de tensió en els conductors que transporten el corrent és: $R \cdot I_e$, que no s'ha de confondre amb la tensió efectiva subministrada al consumidor, V_e .

L'eficiència energètica en el transport implica reduir tant com sigui possible P_{Joule} , cosa que requereix que la intensitat eficaç transportada sigui la mínima possible, $I_e \downarrow$. D'altra banda, per garantir la potència subministrada contractada, P_{ap} , amb una intensitat eficaç mínima, cal que la tensió aplicada durant el transport sigui màxima, $V_e \uparrow$. Per aquest motiu, el transport d'electricitat acostuma a utilitzar tensions molt altes, d'entre uns 5.000 V a les xarxes locals i uns 400 kV a les xarxes que connecten les centrals de producció amb les centrals de distribució. Posteriorment, aquestes tensions són reduïdes amb uns transformadors fins als valors usats en les instal·lacions de consum, de 220 V o 380 V eficaços.

7.5.5 Correcció del factor de potència

La necessitat de minimitzar la intensitat eficaç del transport del CA té implicacions en el disseny de les instal·lacions de consum. El funcionament adequat de les màquines que s'alimenten d'energia elèctrica requereix *dues condicions*:

1. un valor determinat de potència consumida, P_{ac} , i
2. una tensió eficaç determinada, V_e .

Com que ambdues estan relacionades per l'equació 7.29, $P_{ac} = \text{ef} \cdot I_e \cdot V_e$, podem concloure que *el producte $\text{ef} \cdot I_e$ està predeterminat*. En altres paraules, si la I_e s'ha de minimitzar, necessàriament *el factor de potència ha de ser el més gran possible*, idealment $\cos \varphi = 1$, tot mantenint la tensió aplicada al circuit.

Imaginem que tenim un circuit de consum caracteritzat per una impedància complexa: $Z = Z \cdot e^{i\varphi} = Z(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, amb $\sin \varphi > 0$, és a dir, un circuit inductiu (és el cas més freqüent a la pràctica). En general, $\cos \varphi \neq 1$, i la *correcció del factor de potència* consistirà a alterar el circuit original tot *afegint-hi un condensador en paral·lel* (per no alterar

la tensió aplicada al circuit original) que faci que la nova impedància, $\mathcal{Z}'$, sigui purament real, és a dir, que el nou factor de potència sigui: $\phi' = \cos \varphi' = 1$.

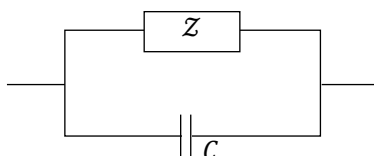


Fig. 7.11
Correcció del factor de potència d'un circuit inductiu d'impedància Z , connectant en paral·lel un condensador de capacitat C

Disseminem la capacitat del condensador que es vol afegir amb C i la seva reactància amb $X_C = 1/(C\omega)$. La impedància del circuit final segueix la llei de les associacions en paral·lel:

$$\frac{1}{\mathcal{Z}'} = \frac{1}{Z} + \frac{1}{-iX_C} = \frac{1}{Z} e^{-i\varphi} + \frac{i}{X_C} = \frac{\cos \varphi}{Z} + i \left(\frac{1}{X_C} - \frac{\sin \varphi}{Z} \right)$$

on hem utilitzat les propietats d'exponencials i nombres complexos: $1/e^{i\varphi} = e^{-i\varphi} = \cos \varphi - i \sin \varphi$.

Per tal que la nova impedància, $\mathcal{Z}'$, no tingui part imaginària, cal que la quantitat entre parèntesis sigui nul·la:

$$\frac{1}{X_C} = \frac{\sin \varphi}{Z} \Rightarrow C = \frac{\sin \varphi}{Z \cdot \omega} \quad (7.34)$$

L'última expressió ens dona la *capacitat del condensador que cal connectar en paral·lel per corregir el factor de potència*. Observeu que aquest resultat només té sentit si $\sin \varphi > 0$, és a dir, si el circuit original és inductiu o, el que és el mateix, la part imaginària de Z és positiva. Aquest és el cas comú, però quan no és així la correcció del factor de potència no es pot aconseguir mitjançant la connexió en paral·lel d'un condensador.

Exemple 7.9

Calculeu la capacitat del condensador que s'ha de connectar en paral·lel per corregir el factor de potència d'un circuit RLC sèrie, amb $R = 30 \, \Omega$, $L = 253 \, \text{mH}$, $C = 200 \, \mu\text{F}$, que es troba connectat a la xarxa de 220 V i 50 Hz.

Solució. Comencem per comprovar que el circuit és inductiu, condició necessària per poder corregir el factor de potència connectant un condensador en paral·lel. A aquest efecte, calculem la impedància del circuit (com hem fet a l'exemple 7.5):

$$\mathcal{Z} = \mathcal{Z}_R + \mathcal{Z}_C + \mathcal{Z}_L = 30 - i \frac{1}{100\pi \times 200 \times 10^{-6}} + i100\pi \times 0,253 = 30 + 63,6i \, \Omega$$

El signe positiu de la part imaginària de $\mathcal{Z}$ ens permet afirmar que es tracta d'un circuit inductiu.

Calculem la capacitat del condensador a connectar en paral·lel per corregir el factor de potència mitjançant l'equació 7.34:

$$C = \frac{\sin \varphi}{Z \cdot \omega} = \frac{0,905}{70,3 \cdot 100\pi} = 4,1 \times 10^{-5} \text{ F}$$

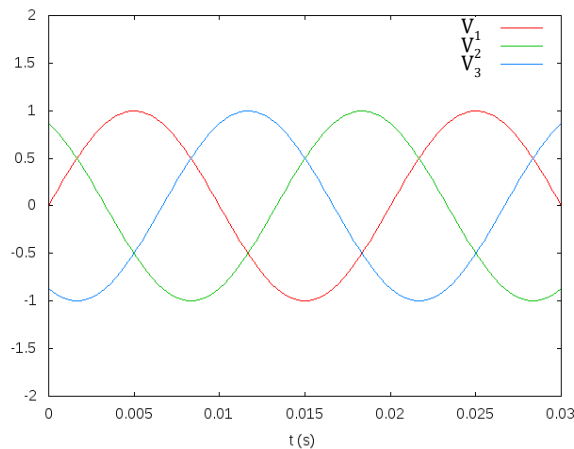
on el mòdul de la impedància és $Z = \sqrt{30^2 + 63,6^2} = 70,3 \text{ } \Omega$, i el sinus de l'angle de desfase-ment es calcula per l'equació 7.18: $\sin \varphi = \frac{\text{Im}(Z)}{Z} = \frac{63,6}{70,3} = 0,905$.

Per tant, la resposta és 41 μF .

7.6 CA trifàsic

El CA trifàsic consisteix en tres CA que se subministren independentment, amb la mateixa tensió eficaç però amb diferències de fase relatives de 120° , i que es poden combi-

Fig.7.12
Les tres tensions del
CA trifàsic en funció
del temps. En aquesta
figura, s'ha suposat
 $V_0 = 1 \text{ V}$



nar entre si per modificar-ne la tensió subministrada. A la figura 7.12, podeu veure un exemple de l'evolució temporal de les tres tensions.

Les equacions que proporcionen les tres tensions en funció del temps són les següents:

$$\begin{aligned} V_1 &= V_0 \sin(\omega t) \\ V_2 &= V_0 \sin(\omega t + 120^\circ) \\ V_3 &= V_0 \sin(\omega t + 240^\circ) \end{aligned}$$

En principi, els tres CA requeririen sis cables, dos per a cada CA, però a la pràctica els cables de retorn s'unifiquen en un únic cable a través del qual retorna a la central de distribució tota la intensitat subministrada. Aquest únic cable de retorn és el neutre. Els tres cables restants, un per a cada CA, són les fases.

Els circuits de consum, les impedàncies dels quals simbolitzarem com C_1 , C_2 i C_3 , es poden connectar entre una fase i el neutre (connexió en estrella) o entre dues fases (connexió en triangle).

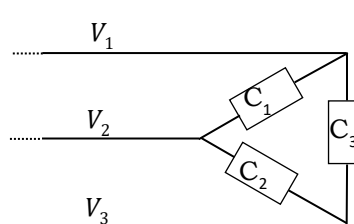
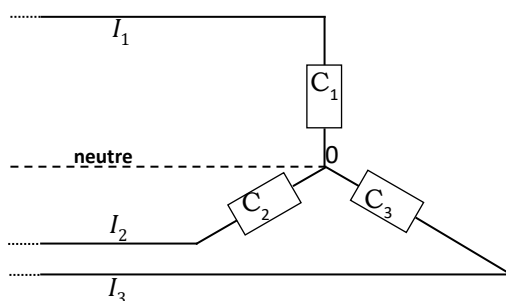


Fig. 7.13
Càrrega dels circuits
de consum en estrella
(esquerra) i en triangle
(dreta)

A la connexió en estrella, si les tres impedàncies són iguals, $C_1 = C_2 = C_3 = C$, la intensitat que circula pel neutre és nul·la:

$$I_1 + I_2 + I_3 = \frac{V_1 + V_2 + V_3}{C} = 0$$

i es diu que el circuit es troba equilibrat (Fig. 7.14, corba magenta).

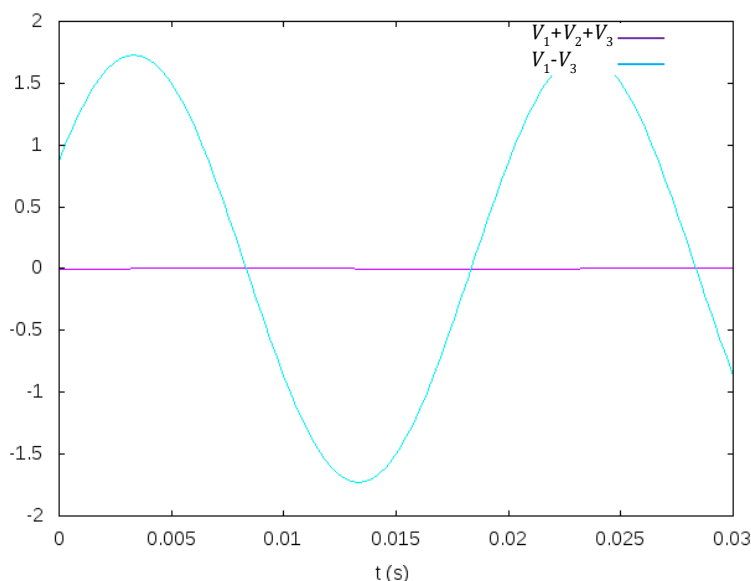


Fig.7.14.
Suma de les tres tensions del corrent trifàsic (corba magenta) i diferència entre dues tensions (corba cian). Com a la figura 7.12, s'ha suposat $V_0=1V$

Amb la connexió en triangle, s'aconsegueix una tensió superior a la de cada línia per un factor $\sqrt{3}$, com es pot comprovar comparant el màxim de les tensions a la figura 7.12, $V_0 = 1$, i el màxim de la corba cian a la figura 7.14, $(V_1 - V_3)_{\max} \cong 1,7 \cong \sqrt{3}$. Aquest factor $\sqrt{3}$ permet alimentar les instal·lacions familiars, amb una tensió efectiva de 220 V, i les instal·lacions de grans consumidors que utilitzin motors trifàsics potents, normalment treballant a $380 V = 220 \cdot \sqrt{3} V$, amb una mateixa xarxa de distribució.

7.7 Parallamps

La normativa de seguretat imposa la instal·lació de parallamps en determinades edificacions i altres indrets, segons les seves característiques i en funció d'uns paràmetres que avaluen el risc de danys que podria provocar la caiguda d'un llamp. Bàsicament, un parallamps és un conductor de baixa impedància que proporciona un camí perquè les càrregues elèctriques es desplacin entre el terra, que es pot considerar un repositori d'electrons, i les zones més elevades de l'edificació. Quan els núvols estan carregats i la tempesta és imminent, existeix una diferència de potencial elèctric entre els núvols i el terra. Aquest potencial fa que les càrregues es moguin del terra a la punta del parallamps i el dotin d'una càrrega neta de signe contrari a la dels núvols. Quan la diferència de potencial és prou gran, l'aire es converteix en conductor durant una fracció de segon: és el que s'anomena *ruptura elèctrica* (apèndix C). Les càrregues lliures que es mouen per l'aire durant la ruptura es veuen atretes per les càrregues del parallamps i afavoreixen que la descàrrega es faci en aquest. Finalment, la càrrega del llamp viatja pel parallamps fins al terra, on es neutralitza.

Un dels elements principals del parallamps és la seva terminació en punta. Com es pot veure a la imatge esquerra de la figura 7.4, el camp elèctric és més intens a prop de les punxes dels elements conductors (les línies de camp s'hi fan més denses) i les càrregues hi senten una atracció/repulsió més forta. L'altre element que caracteritza un parallamps és la connexió amb el terra, que ha de ser de molt poca resistència, típicament de l'ordre de $10\ \Omega$ o menys.

Alguns parallamps que s'utilitzen avui són de tipus actiu. Aquests incorporen un encebador a prop de la punta del parallamps. La funció de l'encebador és iniciar un camp elèctric més intens quan s'apropa una tempesta, ionitzant l'aire del voltant per facilitar que els llamps descarreguin en el parallamps.

Problemes resolts

P7.1 Un calefactor elèctric escalfa 136 litres d'aigua amb una resistència de 15Ω , que treballa a 240 V. Calculeu el temps necessari per augmentar la temperatura de l'aigua de 5°C a 55°C , suposant que no hi ha pèrdues d'energia.

Solució:

Si no hi ha pèrdues d'energia, la potència calefactora és la dissipada a la resistència per efecte Joule: $Pot = V \cdot I = V^2 / R = 240^2 / 15 = 3.840 \text{ W}$.

La calor sensible necessària per augmentar la temperatura de 136 kg d'aigua en 50°C és: $Q_s = m \cdot c_e \cdot \Delta T = 136 \text{ kg} \cdot 1 \frac{\text{cal}}{\text{g} \cdot ^\circ\text{C}} \cdot 50^\circ\text{C} = 6,8 \text{ Mcal}$, en què hem tingut en

compte la conversió de kg a g, i que la densitat de l'aigua és 1 kg/litre.

Per poder comparar aquesta calor sensible amb la potència calculada anteriorment, hem de transformar les calories a joules: $Q_s = 28,5 \text{ MJ}$.

Finalment, el temps en s ve donat pel quocient entre la calor i la potència:

$$t = \frac{Q_s}{Pot} = 7.413 \text{ s} \approx 2,1 \text{ hores}$$

P7.2 Un cable d'alumini i un cable de coure de la mateixa longitud tenen la mateixa resistència a 20°C . Si els dos conductors són cilíndrics i el diàmetre del cable de coure és de 2,0 mm, quin és el calibre del cable d'alumini?

Dades: resistivitat del coure a 20°C , $\rho_{\text{Cu}} = 1,68 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$; resistivitat de l'alumini a 20°C , $\rho_{\text{Al}} = 2,65 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$

Solució:

La resistència d'un conductor ve donada per l'equació (apèndix C): $R = \rho L / A$, on ρ és la resistivitat del material, L és la longitud del conductor i A és la seva secció recta. Per a un conductor cilíndric de diàmetre d , la secció recta és:

$$A = \pi \frac{d^2}{4}.$$

Igualant les dues resistències, la del coure i la de l'alumini, i tenint en compte que, com diu l'enunciat, les longituds de tots dos són iguals, $L_{\text{Al}} = L_{\text{Cu}}$, s'arriba al resultat següent per al diàmetre del cable d'alumini:

$$\frac{\rho_{\text{Cu}} \cdot L_{\text{Cu}}}{d_{\text{Cu}}^2} = \frac{\rho_{\text{Al}} \cdot L_{\text{Al}}}{d_{\text{Al}}^2} \Rightarrow d_{\text{Al}} = d_{\text{Cu}} \sqrt{\frac{\rho_{\text{Al}}}{\rho_{\text{Cu}}}} = 2,5 \text{ mm}$$

P7.3 Una torradora té una resistència de 15Ω i està dissenyada per treballar connectada a 220 V.

a) Quina potència consumeix?



- b) Amb quina intensitat?
 c) Quina potència consumiria si es connectés a 127 V? Com afectaria el seu funcionament?
 d) Quina potència consumiria si es connectés a 380 V? Com afectaria el seu funcionament?

Solució:

- a) La potència dissipada en la resistència és:

$$Pot = V^2 / R = 220^2 / 15 = 3,2 \text{ kW}$$

- b) La intensitat que hi circula és:

$$I = \frac{V}{R} = 14,7 \text{ A} \approx 15 \text{ A}$$

- c) Basta substituir la tensió de referència de 220 V pel valor indicat en aquest apartat:

$$Pot = V^2 / R = 127^2 / 15 = 1,1 \text{ kW},$$

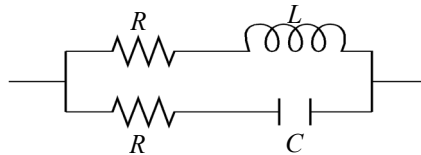
potència insuficient perquè la torradora sigui eficaç.

- d) En aquest apartat:

$$Pot = V^2 / R = 380^2 / 15 = 9,6 \text{ kW}$$

potència excessiva, que probablement faria saltar els fusibles o el diferencial.

P7.4 S'aplica una diferència de potencial $V(t) = 311 \cdot \sin(314 \cdot t) \text{ V}$ al circuit de la figura.



Calculeu la intensitat efectiva a cada branca i la total.

Dades: $R = 50,0 \text{ } \Omega$, $L = 100 \text{ mH}$, $C = 10,0 \text{ } \mu\text{F}$

Solució:

Comencem per identificar els valors de la tensió efectiva i la pulsació del CA, a partir de l'expressió de la diferència de potencial. El valor de la tensió màxima és:

$V_0 = 311 \text{ V}$; per tant, la tensió eficaç és: $V_e = \frac{V_0}{\sqrt{2}} = 220 \text{ V}$. La pulsació és la quan-

titat que multiplica el temps dins l'argument de la funció sinus: $\omega = 314 \text{ rad/s}$.

A continuació, calculem la impedància complexa de la branca superior, Z_s , i la de la branca inferior, Z_i , i els mòduls respectius:

$$Z_s = R + iL\omega = 50,0 + 31,4i \text{ } \Omega \Rightarrow Z_s = \sqrt{50,0^2 + 31,4^2} = 59,0 \text{ } \Omega,$$

$$Z_i = R - i \frac{1}{C\omega} = 50,0 - 318,5i \, \Omega \Rightarrow Z_i = \sqrt{50,0^2 + 318,5^2} = 322,4 \, \Omega$$

En l'associació en paral·lel, totes les branques estan sotmeses a la mateixa tensió. Per tant, la intensitat efectiva que hi circula ve donada per:

$$I_{e,s} = \frac{V_e}{Z_s} = 3,73 \, \text{A}; \quad I_{e,i} = \frac{V_e}{Z_i} = 0,682 \, \text{A}$$

Per calcular la intensitat efectiva total, cal obtenir primer la impedància de l'associació en paral·lel:

$$Z_{eq} = \frac{Z_s \cdot Z_i}{Z_s + Z_i}$$

Reproduïm ara el procediment detallat a l'exemple 7.6 per tal d'obtenir el resultat d'aquesta operació:

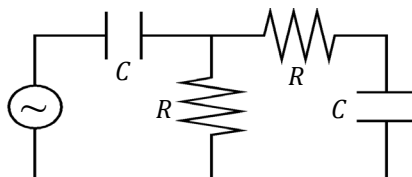
$$\begin{aligned} Z_{eq} &= \frac{(50,0 + 31,4i)(50,0 - 318,5i)}{100,0 - 287,1i} = \frac{12.500 - 14.355i}{100,0 - 287,1i} \\ &= \frac{(12.500 - 14.355i)(100,0 + 287,1i)}{(100,0 - 287,1i)(100,0 + 287,1i)} = \frac{5.371.320 + 2.153.250i}{100,0^2 + 287,1^2} = 58,1 + 23,3i \, \Omega \end{aligned}$$

i el mòdul: $Z_{eq} = 62,6 \, \Omega$. Com abans, la intensitat efectiva total, la calculem com

el quocient de la tensió eficaç i el mòdul de la impedància: $I_e = \frac{V_e}{Z_{eq}} = 3,50 \, \text{A}$.

Observeu que, a diferència del que passa amb el corrent continu, la intensitat eficaç total no és la suma de les intensitats eficaçes a cada branca. Això és degut al fet que la intensitat eficaç és una mitjana temporal i que tant el valor com el signe de les intensitats instantànies a cada branca canvia contínuament amb el temps.

P7.5 Determineu la impedància equivalent del circuit de la figura i la intensitat que hi circula.



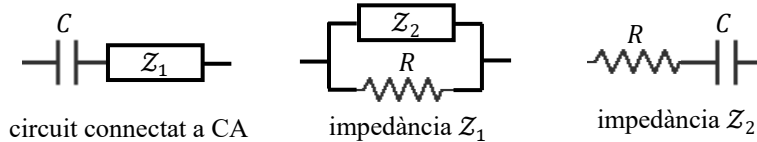
Dades: $V_e = 220 \, \text{V}$, $f = 50 \, \text{Hz}$, $R = 800 \, \Omega$, $C = 300 \, \text{nF}$

Solució:

El circuit connectat a la font de CA està format per l'associació en sèrie d'una capacítància C i una impedància Z_1 . Aquesta darrera impedància és el resultat de



L'associació en paral·lel d'una resistència R i una impedància Z_2 , la qual correspon a la branca formada per una resistència R i una capacitança C connectades en sèrie.



Per trobar-ne la impedància total, anirem resolent les associacions de dreta a esquerra, segons la seva aparició a l'esquema anterior.

Primer, la impedància Z_2 , que val:

$$Z_2 = R - i \frac{1}{C\omega} = 800 - 10.610i \, \Omega$$

A continuació, la impedància Z_1 :

$$Z_1 = \frac{R \cdot Z_2}{R + Z_2} = 800 \cdot \frac{800 - 10.610i}{1.600 - 10.610i} = 791 - 59,0i \, \Omega$$

I, finalment, la impedància equivalent total:

$$Z = Z_1 - i \frac{1}{C\omega} = 791 - 59,0i - 10.610i = 791 - 10.669i \, \Omega$$

Després de calcular el mòdul de la impedància, $Z = 10,7 \, \text{k}\Omega$, podem estimar la intensitat total que hi circula, que és:

$$I_e = \frac{V_e}{Z} = \frac{220}{10.698} = 0,021 \, \text{A}$$

P7.6 En una instal·lació de CA, es mesuren els valors eficaços següents: $V_e = 220 \, \text{V}$, $I_e = 0,25 \, \text{A}$, i un factor de potència de 0,33. Determineu el condensador que cal col·locar en paral·lel per tal de corregir el factor de potència. Supposeu que la freqüència del CA és de 50 Hz i que el circuit és inductiu.

Solució:

La capacitat del condensador necessari per corregir el factor de potència és:

$$C = \frac{\sin \varphi}{Z\omega}$$

En aquest problema, no coneixem la composició ni el valor de la impedància complexa de la instal·lació, però podem obtenir el mòdul de la impedància a partir de la tensió i la intensitat eficaços: $Z = \frac{V_e}{I_e} = \frac{220}{0,25} = 880 \, \Omega$.

La dada del factor de potència ens permet calcular el sinus de l'angle de desfasament: $\cos(\varphi) = 0,33 \Rightarrow \sin \varphi = 0,944$.

$$\text{Finalment, } C = \frac{\sin \varphi}{Z\omega} = \frac{0,944}{880 \cdot 100\pi} = 3,41 \cdot 10^{-6} \text{ F} \approx 3,4 \text{ } \mu\text{F}.$$

P7.7 Una instal·lació elèctrica presenta una impedància complexa de $33+107i \text{ } \Omega$ i es connecta a una xarxa elèctrica de 280 V de tensió eficaç.

- Es pot determinar l'angle de desfasament entre la intensitat i la tensió només amb aquesta informació?
- Es tracta d'un circuit inductiu o capacitiu?
- Determineu-ne el factor de potència, la potència activa i la reactiva.
- Determineu, fent les hipòtesis raonables que siguin necessàries, la correcció del factor de potència.

Solució:

- Sí, es pot determinar. Per calcular l'angle de desfasament, basta conèixer les parts real ($R = 33 \text{ } \Omega$) i imaginària ($X = 107 \text{ } \Omega$) de la impedància:

$$\tan \varphi = \frac{X}{R} = 3,24 \Rightarrow \varphi = 1,3 \text{ rad} = 73^\circ$$

- És un circuit inductiu, ja que $X > 0$.

- Factor de potència: $\cos \varphi = 0,29$

$$\text{Potència activa: } P_{ac} = V_e I_e \cos \varphi = 210 \text{ W}$$

$$\text{Potència reactiva: } P_{re} = V_e I_e \sin \varphi = 670 \text{ voltamperes}$$

En el càlcul de les potències, s'ha tingut en compte que $V_e = 280 \text{ V}$ i que

$$I_e = V_e / Z = 2,5 \text{ A, on } Z = \sqrt{33^2 + 107^2} = 112 \text{ } \Omega.$$

- Per corregir el factor de potència, cal connectar en paral·lel un condensador de capacitat: $C = \frac{\sin \varphi}{Z\omega}$. Si suposem, per exemple, que la freqüència de la xarxa és de 50 Hz, el condensador seria de $C = 27 \text{ } \mu\text{F}$.

Problemes proposats

P7.8 Una bateria pot generar un corrent de 2 mA durant 8 hores. Quina és la càrrega total que passa per un dels seus borns?

R: 60 C

P7.9 Quina és la resistència d'una bombeta de 40 W i 220 V, quan està encesa? I la d'una bombeta de 100 W i 220 V?

R: 1,2 k Ω ; 484 Ω



P7.10 Un cable té una resistència de $0,08 \Omega$, i condueix un corrent de 10 A . Determineu la potència perduda en el cable per l'efecte Joule i l'energia total dissipada en 24 hores.

R: 8 W ; $0,7 \text{ MJ}$

P7.11 Dues resistències, de 100Ω i 200Ω , es troben connectades en sèrie a una bateria de 120 V . Determineu la intensitat que hi circula i la caiguda de tensió a cada resistència.

R: $0,40 \text{ A}$; 40 V i 80 V , respectivament

P7.12 Les dues resistències del problema anterior es connecten en paral·lel entre si, i el conjunt es connecta a la mateixa bateria. Determineu la intensitat que circula per cada resistència.

R: $1,20 \text{ A}$ i $0,60 \text{ A}$, respectivament

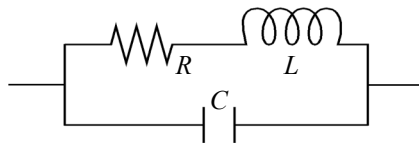
P7.13 Una resistència de $100 \text{ k}\Omega$ i una altra resistència de valor desconegut es connecten en sèrie a una bateria de 450 V . La caiguda de tensió a la primera resistència és de 25 V . Determineu el valor de la segona resistència.

R: $1,7 \text{ M}\Omega$

P7.14 Quantes bombetes de 60 W es poden connectar en paral·lel a un endoll de 220 V abans que saltin uns fusibles de 3 A en encendre-les?

R: 11 bombetes

P7.15 Al circuit de la figura, es mesura una diferència de potencial eficaç de 100 V entre els extrems de la resistència. Calculeu la intensitat eficaç que circula per la branca superior.



Dades: $f = 50 \text{ Hz}$, $R = 100 \Omega$, $L = 200 \text{ mH}$, $C = 5 \mu\text{F}$

R: $1,00 \text{ A}$

P7.16 Calculeu la diferència de potencial aplicada al circuit del problema 7.15.

R: 120 V

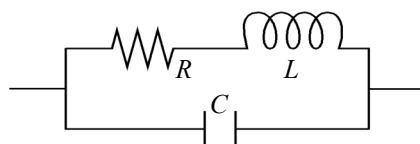
P7.17 Calculeu la intensitat eficaç total al circuit del problema 7.15.

R: $0,91 \text{ A}$

P7.18 Determineu la impedància equivalent del circuit del problema 7.5 i la intensitat que hi circula, amb les mateixes dades excepte la freqüència, que ara és de 100 Hz . Quina conclusió traieu de la importància de la freqüència del CA?

R: $767 - 5,420i \Omega$, de mòdul $5,47 \text{ k}\Omega$; $40,2 \text{ mA}$

P7.19 El circuit de la figura es connecta a la xarxa de 220 V i 50 Hz. Quina intensitat total hi circularà i amb quin desfasament respecte a la tensió?



Dades: $R = 5,0 \text{ k}\Omega$, $L = 3,0 \text{ H}$, $C = 0,30 \text{ }\mu\text{F}$

R: 0,050 A; -19°

P7.20 En una instal·lació de CA, es mesuren els valors eficaços següents: $V_e = 220 \text{ V}$, $I_e = 0,35 \text{ A}$, i un factor de potència de 0,705. Determineu el condensador que cal col·locar en paral·lel per tal de corregir el factor de potència. Suposeu que la freqüència del CA és de 50 Hz i que el circuit és inductiu.

R: $3,6 \text{ }\mu\text{F}$

P7.21 Una resistència de $27 \text{ }\Omega$, un condensador de $12 \text{ }\mu\text{F}$ i una bobina de resistència de $14 \text{ }\Omega$ i autoinductància de $0,15 \text{ H}$ (per tant, d'impedància: $Z_{\text{bob}} = 14 + 0,15\omega i \text{ }\Omega$), es connecten en sèrie a la xarxa de 220 V i 50 Hz. Calculeu:

- El mòdul de la impedància del circuit
- El desfasament entre la intensitat i la tensió
- La intensitat eficaç que hi circula
- La caiguda de potencial en cadascun dels components del circuit
- El factor de potència del circuit
- La potència dissipada en forma de calor

R: a) $220 \text{ }\Omega$; b) -79° ; c) $0,99 \text{ A}$; d) 27 V a la resistència, 49 V a la bobina i 260 V al condensador, totes eficaçes; e) $0,18$; f) 40 W

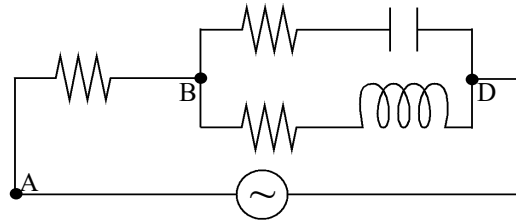
P7.22 Una bobina de $0,050 \text{ H}$ i $40 \text{ }\Omega$ es connecta en paral·lel a una altra bobina de $0,100 \text{ H}$ i $10 \text{ }\Omega$, i ambdues es connecten a una xarxa de 220 V i 50 Hz. Determineu-ne la impedància total, la intensitat eficaç, el factor de potència i les potències activa, reactiva i aparent.

R: $21 \text{ }\Omega$; 11 A ; $0,64$; activa = $1,5 \text{ kW}$; reactiva = $1.800 \text{ voltamperes}$; aparent = $2.300 \text{ voltamperes}$

P7.23 Es disposa d'un calefactor elèctric, format per una resistència de $60 \text{ }\Omega$, i d'un tub fluorescent de $30 \text{ }\Omega$, que presenta, a més, una inductància de $0,80 \text{ H}$. Es volen connectar ambdós a la xarxa de 220 V i 50 Hz. Determineu-ne les potències activa i reactiva, si es connecten en sèrie.

R: Activa = 61 W ; reactiva = 170 voltamperes

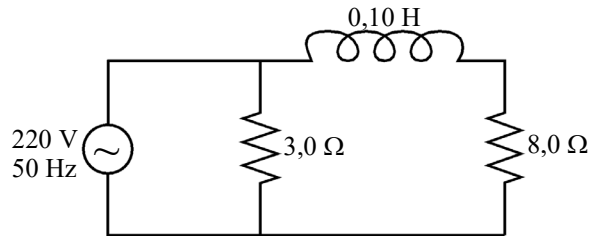
P7.24 Al circuit de la figura, cadascuna de les tres resistències val $100 \text{ }\Omega$, la bobina és de 300 mH i el condensador, de $30 \text{ }\mu\text{F}$. El generador proporciona un CA amb una tensió eficaç de 220 V i una freqüència de 50 Hz.



- Determineu la impedància equivalent a l'associació en paral·lel entre els punts B i D.
- Determineu la impedància equivalent total entre A i D.
- Determineu la intensitat eficaç a la resistència entre A i B i la diferència de potencial corresponent. Quant val la intensitat màxima en aquesta mateixa resistència?
- Determineu la intensitat eficaç a la branca superior entre B i D (branca formada per una resistència i el condensador). Feu el mateix per a la branca inferior entre B i D.

R: a) 100Ω ; b) 200Ω ; c) intensitat i tensió eficaces: 1,1 A i 110 V, intensitat màxima: 1,6 A; d) 0,75 A a la branca superior, 0,80 A a la branca inferior

P7.25 Per al circuit de corrent altern de la figura, calculeu:



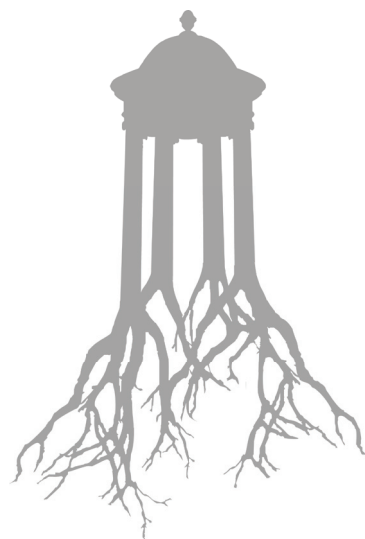
- Impedància total equivalent del circuit
- Intensitat eficaç total
- Potències aparent, activa i reactiva del circuit
- Valor que hauria de tenir un condensador connectat en paral·lel per corregir el factor de potència

R: a) $2,9 + 0,26i \Omega$, de mòdul $2,9 \Omega$; b) 75 A; c) aparent: 17 kilovoltamperes, activa: 17 kW, reactiva: 1,5 kilovoltamperes; d) $97 \mu\text{F}$

P7.26 Una resistència de 16Ω es connecta en paral·lel a una inductància de $0,10 \text{ H}$, i el conjunt es connecta a la xarxa pública de 220 V de tensió eficaç i 50 Hz. Determineu:

- La impedància equivalent del circuit
- La intensitat eficaç i el factor de potència del circuit
- La seva potència aparent, activa i reactiva

R: a) $13 + 6,5i \Omega$, de mòdul 14Ω ; b) 15 A, 0,89; c) aparent: 3,4 kilovoltamperes, activa: 3,0 kW, reactiva: 1,5 kilovoltamperes







Apèndix A. Fonaments dels nombres complexos

Un nombre complex, $\mathbb{r}$, és un ens matemàtic que queda especificat per dues xifres: la primera és l'anomenada *part real*, x , i la segona, la *part imaginària*, y . Tanmateix, és comú representar gràficament un nombre complex com un punt en un pla, localitzat per dues coordenades que es corresponen amb la seva part real (eix d'abscisses) i la seva part imaginària (eix d'ordenades), com es pot veure a la figura A.1. La distància a l'origen de coordenades, r , és, llavors, *el mòdul del nombre complex*, és a dir, la magnitud que mesura la seva grandària i que, en física, s'expressa en les unitats adients. El mòdul i l'angle que forma amb l'eix d'abscisses, φ , constitueixen una altra forma, la forma polar, d'especificar un nombre complex (sempre utilitzant dues xifres).

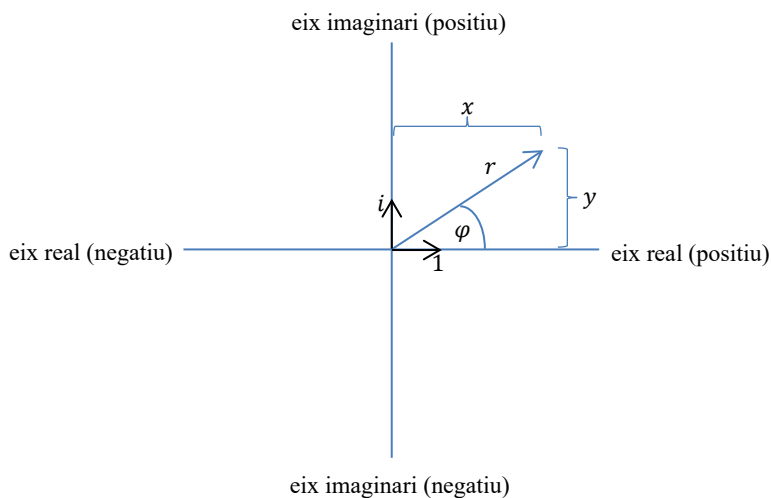


Fig. A.1.
El pla complex: un nombre complex pot ser especificat per les seves coordenades real i imaginària, x i y , o pel seu mòdul, r , i l'angle φ . També s'hi mostren la unitat real, 1, i la unitat imaginària, i .



Vegem alguns conceptes associats als nombres complexos:

- *Unitat imaginària, i* . Per definició és: $i = \sqrt{-1}$. Se'n dedueixen fàcilment les propietats següents: $i^2 = -1$; $1/i = -i$. El mòdul de la unitat imaginària és 1 i l'angle: $\varphi = 90^\circ$.
- *Nombre complex: $\mathbb{r} = x + iy$, o, en forma polar: $\mathbb{r} = r \cdot \cos \varphi + i \cdot r \cdot \sin \varphi$* . La identitat entre ambdues formes d'expressar un nombre complex ens porta a les relacions següents: $x = r \cdot \cos \varphi$; $y = r \cdot \sin \varphi$. El mòdul del nombre complex $\mathbb{r}$ es pot escriure com a r o com a $|\mathbb{r}|$.
- *Representació exponencial complexa*. També es pot representar un nombre complex mitjançant la identitat matemàtica següent: $\mathbb{r} = r \cdot e^{i\varphi} = r \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi)$.
- *Complex conjugat*, és el que s'obté canviant el signe de la part imaginària: és a dir, el complex conjugat de $(x + iy)$ és $(x - iy)$. A la representació en el pla complex, el complex conjugat de $\mathbb{r}$ correspon a la seva imatge especular respecte a l'eix real.

Operacions amb complexos. Suposem dos nombres complexos donats: $\mathbb{r}_1 = a + ib$;

$$\mathbb{r}_2 = c + id.$$

- *Suma/resta: $\mathbb{r}_1 \pm \mathbb{r}_2 = (a \pm c) + i(b \pm d)$*
- *Multiplicació: $\mathbb{r}_1 \cdot \mathbb{r}_2 = (ac - bd) + i(bc + ad)$*
- *Divisió: $\frac{\mathbb{r}_1}{\mathbb{r}_2} = \frac{a + ib}{c + id} = \frac{a + ib}{c + id} \times \frac{c - id}{c - id} = \frac{(a + ib)(c - id)}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + i \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}$*
- *Derivada d'un nombre complex respecte al seu angle, φ : $\frac{d\mathbb{r}}{d\varphi} = \frac{d(r \cdot e^{i\varphi})}{d\varphi} = i \cdot \mathbb{r}$*

La notació exponencial complexa proporciona una forma alternativa de multiplicar o dividir els nombres complexos. Si expressem $\mathbb{R}_1 = r_1 \cdot e^{i\varphi_1}$, i $\mathbb{R}_2 = r_2 \cdot e^{i\varphi_2}$, i tenint en compte que el producte de dues exponencials és igual a l'exponencial de la suma dels exponents, el producte queda de la manera següent:

$$\mathbb{R}_1 \cdot \mathbb{R}_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

És a dir, el resultat del producte de dos nombres complexos és un altre nombre complex, de mòdul igual al producte dels mòduls, $|\mathbb{R}_1 \cdot \mathbb{R}_2| = r_1 \cdot r_2$, i angle igual a la suma dels angles, $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$. Per exemple, si $\mathbb{R}_1 = \mathbb{R}_2 = i$, els mòduls són $r_1 = r_2 = 1$, i l'angle, $\varphi = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$, i comprovem que $i^2 = -1$.

Vegem ara alguns exemples d'operacions amb nombres complexos:



a) Calculem-ne el producte: $(2+3i)(5-i)$

Utilitzant la mateixa notació que abans, $a = 2$, $b = 3$, $c = 5$, $d = -1$. Operant:

$$(2+3i)(5-i) = (ac-bd) + i(bc+ad) =$$

$$(2 \cdot 5 - 3 \cdot (-1)) + i(3 \cdot 5 + 2 \cdot (-1)) = 13 + 13i.$$

b) Calculem-ne el quocient: $(2+3i)/(5-i)$

Els valors de les parts real i imaginària de cada nombre complex és el mateix que a l'exemple anterior: $a = 2$, $b = 3$, $c = 5$, $d = -1$. Apliquem-hi el procediment per fer una divisió complexa:

$$\frac{2+3i}{5-i} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + i \frac{bc-ad}{c^2+d^2} = \frac{2 \cdot 5 + 3 \cdot (-1)}{5^2 + (-1)^2} + i \frac{3 \cdot 5 - 2 \cdot (-1)}{5^2 + (-1)^2} = \frac{7+17i}{26}$$





Apèndix B. Fonaments d'ones

En aquest apèndix, es recullen alguns conceptes generals relatius a les ones, als quals es fa referència en un o més capítols.

En general, anomenem *ona* una *pertorbació* de les propietats d'un medi, que es propaga transmetent energia i quantitat de moviment sense transportar matèria. La propagació de l'ona implica que, passat un temps, el medi torna al seu estat anterior, llevat que l'ona tingui una durada infinita.

Anomenem *front d'ones* la figura geomètrica formada pel conjunt de punts que tenen el mateix estat de pertorbació. Per defecte, aquest estat és el que correspon a la màxima pertorbació en una regió determinada.

Un tipus particularment important d'ones són les *ones harmòniques*. Si, de moment, ens limitem a la propagació d'ones en una dimensió, les ones harmòniques són, per definició, aquelles ones en què es pot descriure la pertorbació, y , per a qualsevol temps, t , i posició, x , mitjançant la igualtat següent, anomenada *funció d'ones harmònica*:

$$y = A \cdot \sin \left[\omega \left(t \pm \frac{x}{v} \right) \right] \quad (\text{B.1})$$

on v és la velocitat de propagació de les ones, A és l'*amplitud* o màxim valor de la pertorbació, que té les mateixes unitats que y , i ω és la pulsació, en rad/s. El signe davant de la variable x s'ha de triar com a positiu si l'ona es propaga en el sentit de les x creixents, o negatiu en cas contrari.

Per pertorbacions que es propaguen en l'espai tridimensional, la funció de les ones harmòniques és més complexa i pren la forma següent:

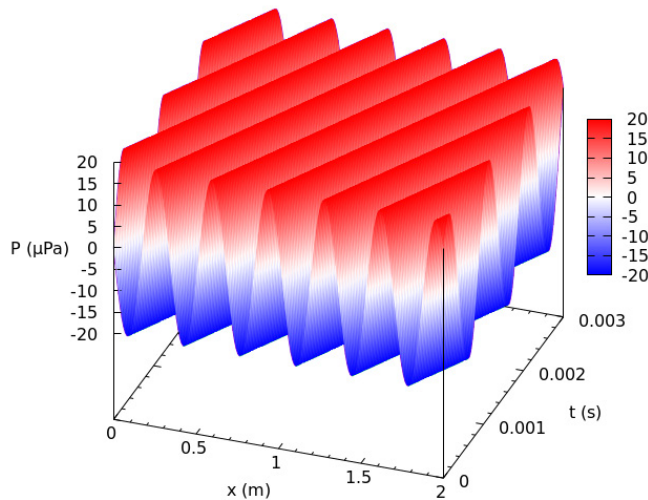
$$y = A \cdot \sin \left(\omega t \pm \vec{k} \cdot \vec{r} \right)$$

En aquesta darrera equació, $\vec{r}$ és un vector de posició que posiciona el punt de l'espai on es mesura la pertorbació y , i $\vec{k}$ és un vector anomenat *nombre d'ones*, que es relaciona amb la direcció de propagació i amb la velocitat de propagació (o amb la longitud d'ona, definida més endavant).

Altres magnituds relatives a les ones harmòniques:

- f és la *frequència* (unitat: $\text{Hz} = 1 \text{ s}^{-1}$), $f = \omega / 2\pi$
- T és el període (unitat: s), $T = 1 / f$
- λ és la *longitud d'ona* (unitat: m), $\lambda = vT = v / f$

Fig. B.1
Una ona harmònica unidimensional que es propaga en la direcció de l'eix x . La pertorbació afecta la pressió ambiental; P és el canvi de pressió, d'amplitud $20 \mu\text{Pa}$ en aquest exemple. El color vermell correspon a increments de pressió; el blau, a decrements de pressió, i el blanc identifica les zones (espai, temps) en què la pressió no experimenta cap pertorbació. La freqüència és de 1.000 Hz i la velocitat de propagació, de 340 m/s



A la figura B.1, es pot veure un exemple de la propagació d'una ona sonora unidimensional. Concretament, es representa la pertorbació de la pressió ambiental. Un temps determinat s'identifica amb un pla perpendicular a l'eix temporal com, per exemple, el pla frontal de la figura. En aquest pla, la pertorbació varia periòdicament amb la coordenada x , i es repeteix cada 34 cm (en aquest exemple, la longitud d'ona és:

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{340 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{1.000 \text{ Hz}} = 0,34 \text{ m}). \text{ En un punt determinat, identificat amb un pla perpendicular a l'eix } x \text{ com, per exemple, el pla dret de la figura, la pertorbació varia periòdicament amb el temps, i es repeteix cada } 0,001 \text{ s (en aquest exemple, el període és:}$$

$T = \frac{1}{f} = 0,001 \text{ s})$.

$$T = \frac{1}{f} = 0,001 \text{ s}).$$

Vegem ara alguns fenòmens ondulatoris:

- Reflexió d'una ona. Es dona quan l'ona canvia de medi de propagació o, simplement, quan el medi de propagació no és homogeni, és a dir, les seves propietats varien contínuament o discontinuament. Es genera una ona reflectida que viatja pel medi en sentit contrari a l'ona original. L'angle d'incidència i el de reflexió, mesurats entre la direcció normal a la superfície de canvi de medi i les direccions respectives de propagació de la llum incident i reflectida, són iguals.
- Reflexió total. Es tracta d'una reflexió en què la velocitat de propagació de l'ona és més gran en el segon medi, $v_2 > v_1$, i l'angle d'incidència (respecte a la normal a la

superfície de separació dels dos medis) és més gran que un determinat angle límit, θ_L . El valor de l'angle límit depèn de les velocitats de propagació: $\sin \theta_L = v_1 / v_2$. Per exemple, quan un so que viatja per l'aire incideix sobre aigua el valor de θ_L és tan sols 13°; per tant, es produeix un aïllament acústic eficient entre l'aire i l'aigua.

- Refracció. Es dona en les mateixes condicions que la reflexió, sempre que no es produeixi una reflexió total. Es genera una ona refractada o transmesa, que viatja pel segon medi com a continuació de l'ona original, però amb menys energia i una direcció diferent.
- Difracció. Capacitat de les ones per “regenerar-se” a partir d'una petita porció d'un front d'ones i que les *permet vorejar obstacles*. La condició perquè es produeixi una difracció eficaç és que la mida de l'obstacle o escaleta sigui petita, comparada amb la longitud d'ona. Per exemple, les ones sonores audibles poden vorejar fàcilment obstacles de mides entre alguns mm i uns pocs m (a més freqüència del so, l'obstacle ha de ser més petit).
- Ones estacionàries. Són ones aparentment no viatgeres, formades per la superposició de dues ones harmòniques de la mateixa freqüència que viatgen en sentits oposats. Es caracteritzen perquè l'amplitud de l'ona estacionària és diferent a cada punt, de manera que en alguns punts és nul·la, anomenats nodes, i en altres és màxima, anomenats *ventres*. Típicament, les ones estacionàries es formen com a conseqüència de les reflexions successives d'una ona als extrems d'un medi confinat (limitat). Hi ha dos casos particularment interessants:
 - Ones sonores generades *per* la vibració d'una corda de guitarra, piano, etc. En aquests instruments, els dos extrems de la corda estan fixats i no poden vibrar; per tant, són nodes. La condició de formació d'una ona estacionària o ressonància és que la longitud de la corda, L , sigui un nombre sencer de semilongituds d'ona:

$$L = n \frac{\lambda}{2}.$$
 Aquesta condició es pot interpretar com una selecció de les freqüències possibles de les ones estacionàries: $f_n = n \frac{v}{2L}$, on n pot assolir qualsevol valor sencer, $n = 1, 2, 3, \dots$, i v és la velocitat de les ones a la corda.
 - Ones sonores estacionàries *en* un tub d'aire (orgue, trompeta, etc.). Els extrems del tub poden correspondre al mateix estat vibratori, per exemple, amb els dos extrems oberts, i en aquest cas les freqüències de ressonància vénen donades per les mateixes expressions del cas anterior (cordes). Alternativament, els extrems del tub poden correspondre a diferents estats vibratoris, per exemple, amb un extrem obert i l'altre tancat, i en aquest cas la condició de ressonància canvia:

$$L = (2n - 1) \frac{\lambda}{4}.$$
 La selecció corresponent de les freqüències possibles de les ones estacionàries s'escriu: $f_n = (2n - 1) \frac{v}{4L}$. La velocitat que apareix a les equacions que proporcionen les freqüències possibles en un tub d'aire, v , és la velocitat del so a l'aire.





Apèndix C. Fonaments de l'electricitat i del magnetisme

Conceptes bàsics d'electricitat

Càrrega, camp i potencial elèctric

- Unitat de càrrega elèctrica, Q : coulomb, C (càrrega d'un electró = $1,6 \times 10^{-19}$ C)
- Camp elèctric, E : magnitud vectorial que indica la força que actuaria en un punt de l'espai sobre una càrrega unitària (càrrega de prova). El camp elèctric es defineix independentment que aquesta càrrega de prova hi sigui efectivament o no. Unitat: N/C = V/m (newton per coulomb o volt per metre)

	E (V/m)
Cables elèctrics domèstics	10^{-2}
Ones de ràdio	10^{-1}
Atmosfera	10^2
Llum solar	10^3
Llamp	10^4
Tub de raigs X	10^6
Òrbita electrònica en un àtom d'hidrogen	5×10^{11}
Superfície d'un nucli d'urani	2×10^{21}

Taula C.1
Valors típics de la intensitat del camp elèctric

- Potencial elèctric, V : també s'anomena *diferència de potencial o tensió*; sempre fa referència a dos punts de l'espai, i es tracta d'una magnitud escalar igual a l'energia que guanyaria una càrrega d'1 C en canviar de posició entre aquests dos punts. Unitat: volt, $V \rightarrow 1V = 1 \text{ J/1 C}$ (joule per coulomb)

Conductors i dielèctrics

- Conductor: material que té un gran nombre de càrregues mòbils que, si s'hi aplica un camp elèctric, es mouen en la direcció del camp. El camp elèctric és nul a l'interior d'un conductor ideal en equilibri electrostàtic.



- Dielèctric: material aïllant elèctric, que no té càrregues mòbils. Un camp elèctric molt gran pot ocasionar la *ruptura elèctrica* del dielèctric i produir una guspira.

Resistència dielèctrica d'un aïllant: també conegut com a *camp de ruptura*, és el màxim camp que pot suportar abans que es produeixi la ruptura elèctrica.

Taula C.2
Resistència dielèctrica
d'alguns aïllants co-
muns

Resistència dielèctrica (V/m)	
Aire	$(0.8-3) \times 10^6$
Tefló	60×10^6
Ambre	90×10^6
Baquelita	$(11-24) \times 10^6$
Porcellana	$(4-6) \times 10^6$

Exemple: un aïllament de vuit micres de tefló podria suportar una tensió de 440 V, és a dir, un camp de $440 \text{ V} / 8 \times 10^{-6} \text{ m} = 55 \times 10^6 \text{ V/m} < \text{resistència dielèctrica}$.

Condensador. És un element tecnològic, format per dos conductors en influència total (totes les línies de camp que surten d'un acaben a l'altre), separats per un dielèctric. Cada conductor, anomenat *placa o armadura*, té càrregues iguals i oposades. La funció dels condensadors és emmagatzemar energia elèctrica en el camp entre plaques.

Es defineix la *capacitat*, C , d'un condensador com la relació entre la càrrega de cada placa i la seva diferència de potencial, $C = Q / V$. Unitat: farad, $F \rightarrow 1 \text{ F} = 1 \text{ C} / 1 \text{ V}$. Ordres de magnitud usuals: microfarad, $1 \mu\text{F} = 10^{-6} \text{ F}$; nanofarad, $1 \text{ nF} = 10^{-9} \text{ F}$; picofarad, $1 \text{ pF} = 10^{-12} \text{ F}$.

Corrent elèctric

- Intensitat de corrent elèctric: és la càrrega que travessa una superfície en una unitat de temps. Intensitat instantània: $I = dQ / dt$. Unitat: ampere, $A \rightarrow 1 \text{ A} = 1 \text{ C} / 1 \text{ s}$

Per conveni, es pren el sentit del corrent igual al de moviment de càrregues positives o el contrari al de moviment de càrregues negatives.

- *Resistència* d'un conductor: la resistència, R , entre dos punts entre els quals hi ha una diferència de potencial V , és el quocient entre la diferència de potencial i la intensitat que hi circula, $R = V / I$. Unitat: ohm, $\Omega \rightarrow 1 \Omega = 1 \text{ V} / 1 \text{ A}$

Llei d'Ohm: R és independent de V . Els materials que la compleixen s'anomenen *materials òhmics*, que són els conductors d'ús més corrent.

La resistència d'un conductor filiforme depèn de:

- Longitud, L , i àrea de la secció transversal del conductor, A (en general, la resistència és inversament proporcional a l'àrea: $A \uparrow \rightarrow R \downarrow$)
- Material del conductor
- Temperatura. En metalls: $T \uparrow \rightarrow R \uparrow$; en semiconductors: $T \uparrow \rightarrow R \downarrow$

Exemple: la resistència d'una bombeta d'incandescència encesa (a una temperatura d'uns 2.500°C) és unes 14 vegades més gran que quan està freda.



Si el conductor té forma cilíndrica, de longitud L i secció transversal A , la seva resistència és: $R = \rho L / A$, on ρ és la resistivitat del material, expressada en ohms per metre, $\Omega \cdot m$.

Resistivitat a 20°C	
	($\Omega \cdot m$)
Plata	$1,6 \times 10^{-8}$
Coure	$1,7 \times 10^{-8}$
Alumini	$2,8 \times 10^{-8}$
Ferro	$1,0 \times 10^{-7}$
Carboni	$3,5 \times 10^{-5}$
Germani	0,45
Silici	640
Fusta	$10^8 - 10^{14}$

Taula C.3
Resistivitat d'alguns
materials comuns

Circuits elèctrics

- Nomenclatura:
 - *Nus*: punt on s'uneixen tres conductors o més i en el qual el corrent es pot dividir.
 - *Branca*: part d'un circuit compresa entre dos nusos consecutius $\rightarrow$ per a tots els elements d'una branca, hi circula la mateixa intensitat.
 - *Malla*: qualsevol recorregut tancat que es pot fer per un circuit sense passar dues vegades per la mateixa branca.
- Associació de N resistències:
 - *En sèrie*: totes les resistències formen part d'una mateixa branca. La resistència equivalent a l'associació val: $R_{eq} = \sum_{i=1}^N R_i$. En una associació en sèrie, circula la mateixa intensitat per a totes les resistències. En canvi, la tensió total de l'associació es distribueix entre les resistències i, a cada resistència, la caiguda de tensió és proporcional a la resistència.
 - *En paral·lel*: formada per un nombre, N , de branques, totes elles entre els mateixos dos nusos. La resistència equivalent ve donada per: $\frac{1}{R_{eq}} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{R_i}$, on R_i és la resistència de la branca i . En una associació en paral·lel, la tensió a totes les branques és la mateixa. En canvi, la intensitat es distribueix entre les branques, de forma inversament proporcional a la seva resistència.

Energia i corrent elèctric

- *Potència transportada* per un corrent d'intensitat I que travessa una diferència de potencial V : $Pot = V \cdot I$.
- *Potència subministrada* per un generador de corrent ideal (sense resistència interna), de força electromotriu ε : $Pot = \varepsilon \cdot I$.

- Potència dissipada en una resistència (efecte Joule $\rightarrow$ transformació d'energia elèctrica en calor): $Pot = I^2 \cdot R = V^2 / R$. Aplicacions de l'efecte Joule: calefactores, cuines, forns elèctrics, etc. Inconvenients de l'efecte Joule: sobreescalfament (necessitat de ventiladors als ordinadors), pèrdues d'energia elèctrica no volgudes (per exemple, en els transformadors d'algunes bombetes de baix consum), perill d'incendi.

Conceptes bàsics de magnetisme

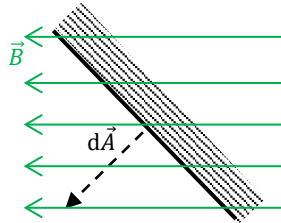
Camp magnètic

- Camp magnètic, B : magnitud vectorial que es manifesta per les forces entre els corrents elèctrics i els imants. Unitat: tesla, T
- Flux del camp magnètic, ϕ_B , a través d'una superfície A (Fig. C.1):

$$\phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{A} = \int B \cdot \cos \varphi \cdot dA$$

on φ és l'angle que formen el vector camp magnètic i el vector $d\vec{A}$. La unitat de flux del camp magnètic és el weber, Wb $\rightarrow 1 \text{ Wb} = 1 \text{ T} \cdot \text{m}^2$.

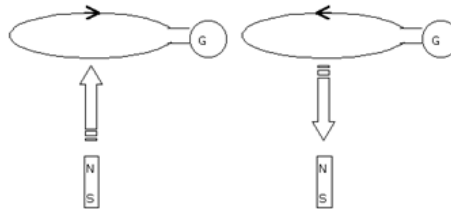
Fig. C.1
Flux d'un camp magnètic, representat per les línies de color verd, a través d'una superfície, representada pel vector $d\vec{A}$. El flux augmenta quan les línies de camp estan alineades amb el vector $d\vec{A}$.



Inducció electromagnètica

- Experiment de Faraday: un camp magnètic variable en el temps pot generar una força electromotriu induïda i, per tant, un corrent elèctric. El sentit del corrent elèctric varia segons si el flux del camp magnètic augmenta (Fig. C.2, esquerra) o disminueix (Fig. C.2, dreta).

Fig. C.2
Esquema de l'experiment de Faraday: un imant es mou apropant-se o allunyant-se d'un circuit elèctric, fent variar el camp magnètic i el seu flux al circuit.



minueix (Fig. C.2, dreta).

- Llei de Faraday-Lenz: la força electromotriu, $\mathcal{E}$, induïda en un circuit és igual a la variació temporal del flux del camp magnètic, ϕ_B , i s'oposa a la seva variació:



$$\varepsilon = -\frac{d\phi_B}{dt}$$

Bobina o solenoide. És un element tecnològic format per un conductor que presenta una gran superfície al camp magnètic, cosa que en magnifica la força electromotriu induïda. Al mateix temps, el corrent que circula per una bobina genera eficientment un camp magnètic considerable, de manera que, si el corrent és variable, canvia el flux del camp magnètic i es dona el fenomen de l'*autoinducció*. La funció de les bobines és emmagatzemar energia magnètica, tot i que a vegades hi ha parts d'un circuit en què es produeix una autoinducció no volguda.

Es defineix la *inductància o coeficient d'autoinducció*, L , d'una bobina com la relació entre el flux del camp magnètic a través de la bobina i la intensitat que hi circula, $L = \phi_B / I$. Unitat: henry, $H \rightarrow 1 H = 1 \text{ Wb}/1 \text{ A}$. Si la inductància és constant, la força

electromotriu autoinduída és $\varepsilon = -L \frac{dI}{dt}$.





Apèndix D. Radiació solar absorbida

En aquest apèndix, justifiquem l'equació 3.13 per la potència de la radiació solar absorbida per superfícies no transparents d'un edifici, $\dot{q}_{\text{sol},a}$, i que intervé en el seu balanç energètic.

Considerem una superfície exterior que rep radiació solar, a la qual presenta una àrea efectiva: $A_{\text{eff},a} = A_a \cdot \cos \theta$, on A_a és l'àrea física de la superfície il·luminada pel Sol i θ és l'angle entre la direcció dels raigs solars i la direcció normal a la superfície. Si la intensitat de la radiació solar és I i l'absorbància de la superfície és α , la potència absorbida per la superfície és:

$$\dot{q}_{\text{sup}} = \alpha \cdot A_{\text{eff},a} \cdot I$$

Tanmateix, aquesta potència absorbida per la superfície no és la que arriba a l'aire interior, $\dot{q}_{\text{sol},a}$, que és la que ens interessa determinar. En altres paraules, l'absorció de radiació solar fa que l'equació 3.5 només sigui vàlida entre l'aire interior i la superfície exterior, en què el valor de la constant és el mateix a totes les capes. En canvi, el valor del quocient que apareix a l'equació 3.5 és diferent quan es tracta de la transmissió de calor entre la superfície exterior i l'aire exterior.

En condicions estacionàries, la potència total rebuda per la superfície exterior és la suma de la que transmet el mur (a través de la resistència tèrmica del mur, excepte la resistència tèrmica superficial exterior), diguem-ne $\dot{q}$, i la que absorbeix de la radiació solar, $\dot{q}_{\text{sup}}$, i ha de ser igual a la potència que evacua cap a l'aire exterior (a través de la resistència tèrmica superficial exterior), diguem-ne $\dot{q}_{\text{se}}$:

$$\dot{q}_{\text{se}} = \dot{q} + \alpha \cdot A_{\text{eff},a} \cdot I$$

Les dependències de les potències respecte de les temperatures són les següents:

$$\dot{q} = A \cdot \frac{T_{\text{ai}} - T_{\text{se}}}{R - R_{\text{se}}}; \dot{q}_{\text{se}} = A \cdot \frac{T_{\text{se}} - T_{\text{ae}}}{R_{\text{se}}}$$



Ara, podem escriure:

$$\begin{aligned} A \cdot \frac{T_{ai} - T_{ac}}{R} &= A \cdot \frac{T_{ai} - T_{se}}{R} + A \cdot \frac{T_{se} - T_{ac}}{R} = \\ &= \dot{q} \cdot \frac{R - R_{se}}{R} + \dot{q}_{se} \cdot \frac{R_{se}}{R} = \\ &= \dot{q} \cdot \frac{R - R_{se}}{R} + (\dot{q} + \alpha \cdot A_{eff,a} \cdot I) \cdot \frac{R_{se}}{R} \end{aligned}$$

I, simplificant l'últim membre:

$$A \cdot \frac{T_{ai} - T_{ac}}{R} = \dot{q} + \alpha \cdot A_{eff,a} \cdot I \cdot \frac{R_{se}}{R}$$

Veiem que la potència calorífica transmesa pel mur, $\dot{q}$, és igual a la donada per l'equació 3.1, en funció de les temperatures T_{ai} i T_{ac} , menys una quantitat $\dot{q}_{sol,a}$ igual a:

$$\dot{q}_{sol,a} = \alpha \cdot A_{eff,a} \cdot I \cdot \frac{R_{se}}{R}$$

El factor R_{se} / R reflecteix l'increment de la temperatura superficial exterior en relació amb el salt tèrmic total entre T_{ai} i T_{ac} .

En resum, i per conveniència, el flux de calor transmès a través del mur es continua calculant amb l'equació 3.1, i l'efecte de la radiació solar absorbida s'incorpora a l'equació de balanç energètic de l'edifici a través del terme $\dot{q}_{sol}$.



Apèndix E. Fòrmula de Sabine

Per deduir la fórmula de Sabine, procedim en cinc passos:

- Determinem la intensitat sonora que incideix en un element diferencial de la superfície del tancament, dA , com a conseqüència de l'emissió de l'energia sonora continguda en un volum diferencial de l'aire del local, dV .
- Determinem la intensitat al mateix dA resultant de la superposició de les emissions d'un conjunt de dV que es trobin formant un anell.
- Determinem la intensitat total (integrada) al mateix dA .
- Determinem l'energia acústica absorbida per totes les superfícies del tancament (tots els dA) en un interval de temps infinitesimal dt .
- Integrem l'equació diferencial obtinguda i arribem a la fórmula de Sabine.

Els tres primers passos parteixen de considerar que l'energia acústica emesa en direcció a dA pel volum d'una closca semiesfèrica de radi r i gruix $dr = v \cdot dt$ incideix sobre la superfície dA quasi simultàniament (durant un interval de temps dt). En tot moment, suposarem que l'energia acústica, E , està repartida uniformement per tot el local i que la propagació del so és isotropa.

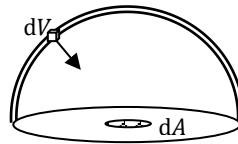


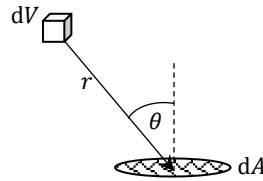
Fig. E.1
Una closca semiesfèrica de radi r i gruix dr emet energia sonora en direcció a una superfície receptora, dA .

- Intensitat en dA , com a conseqüència de l'energia sonora d'un volum dV contingut a la closca semiesfèrica: és el resultat de dividir l'energia acústica que arriba de dV a dA per la mida de la pròpia superfície, dA , i per la durada de l'interval de temps, dt .



Fig. E.2

Un volum infinitesimal, dV , emet energia sonora en direcció a una superfície receptora, dA , a una distància r



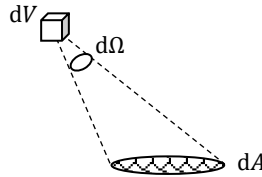
L'energia acústica que arriba a dA és una fracció de la que hi ha a dV : $dE = E_v \cdot dV$; concretament, la fracció que correspon a l'angle sòlid, $d\Omega$, subtendit per dA des de la posició de dV , i dividit pel valor de l'angle sòlid en què s'emeteix el so des de dV : 4π (emissió isòtropa a totes les direccions de l'espai tridimensional):

$$\frac{d\Omega}{4\pi} = dA \cdot \cos \theta / (4\pi r^2)$$

i la intensitat que hi arriba, amb origen a dV , és el valor de dE per unitat d'àrea i unitat de temps:

Fig. E.3

Angle sòlid $d\Omega$ subtendit per la superfície dA des del volum dV



$$dI = (E_v \cdot dV) \left(\frac{dA \cdot \cos \theta}{4\pi r^2} \right) \left(\frac{1}{dA} \right) \left(\frac{1}{dt} \right)$$

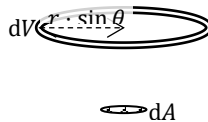
- b. Si canviem de dV dintre de la closca semiesfèrica, l'únic que canvia en el segon membre de l'equació anterior és l'angle θ .

Si, de moment, ens limitem al volum d'un anell dintre de la closca, format pels dV que presenten el mateix valor de θ , hem de substituir:

$$dV = [2\pi(r \cdot \sin \theta)](dr)(r \cdot d\theta).$$

Fig. E.4

Un anell de volum dV i radi $r \cdot \sin \theta$, i centrat en la normal al centre de la base dA



- c. La intensitat total que arriba a dA des de tots els anells que conformen la closca semiesfèrica s'obté integrant l'expressió anterior per dI , tenint en compte tots els angles d'incidència possibles ($0 \leq \theta \leq \pi/2$):

$$I = \int dI = \int_{\theta=0}^{\pi/2} (E_v \cdot 2\pi \cdot r \cdot \sin \theta \cdot dr \cdot r \cdot d\theta) \left(\frac{dA \cdot \cos \theta}{4\pi r^2} \right) \left(\frac{1}{dA} \right) \left(\frac{1}{dt} \right)$$



Després de simplificar dintre de la integral (r^2 , dA , 2π), substituir la densitat d'energia en funció de l'energia acústica total al local: $E_v = E/V$, substituir: $dr = v \cdot dt$, i simplificar dt del numerador i el denominador, queda:

$$I = \frac{E \cdot v}{2V} \int_{\theta=0}^{\pi/2} \sin \theta \cdot \cos \theta \cdot d\theta = \frac{E \cdot v}{4V}$$

on la integral val $1/2$ (es pot comprovar en qualsevol col·lecció de taules d'integració, o es pot resoldre tot substituint: $\cos \theta \cdot d\theta = d \sin \theta$, i definint: $x = \sin \theta$, amb la qual cosa queda la integral: $\int_0^1 x \cdot dx = 1/2$).

- d. L'energia acústica absorbida per totes les parets en un interval de temps dt és proporcional a la potència que arriba a cada superfície, $dPot = I \cdot dA$, a la durada de l'interval de temps, dt , i al coeficient d'absorció, α . Tenint en compte que hi pot haver superfícies amb coeficients d'absorció diferents, utilitzem el coeficient d'absorció mitjà, $\bar{\alpha}$, i la superfície absorbent total, A . El decrement d'energia acústica degut a l'absorció en les reflexions és, doncs:

$$dE = -I \cdot \bar{\alpha} \cdot A \cdot dt = -E \cdot \left(\frac{v \cdot \bar{\alpha} \cdot A}{4V} \right) \cdot dt$$

- e. La integració de l'equació diferencial anterior és senzilla, atès que la quantitat entre parèntesis al darrer membre és constant, és a dir, no depèn ni del valor de E ni del de t , que són les dues variables que s'han d'integrar. La solució matemàtica de l'equació és:

$$E = E_0 \cdot \exp \left(- \frac{v \cdot \bar{\alpha} \cdot A}{4V} \cdot t \right)$$

on E_0 és l'energia acústica en el moment en què s'apaga la font sonora, $t = 0$. Atesa la proporcionalitat entre la intensitat i l'energia acústica (resultant del punt c), la mateixa equació és aplicable a I .

Expressant la intensitat en decibels, és a dir, calculant el nivell d'intensitat, s'obté:

$$N = N_0 - 10 \cdot \log \left[\exp \left(- \frac{v \cdot \bar{\alpha} \cdot A}{4V} \cdot t \right) \right] \Rightarrow N = N_0 - 372,4 \frac{\bar{\alpha} \cdot A}{V} \cdot t$$

En la derivació de la darrera expressió, s'ha tingut en compte que el logaritme i l'exponencial són operands que es cancel·len, i que el logaritme decimal del nombre 'e' val 0,434. També s'ha substituït un valor aproximat per la velocitat del so a l'aire: $v = 343$ m/s.

Finalment, el temps de reverberació, TR_{60} , s'obté aïllant t i substituint un decrement del nivell d'intensitat: $N - N_0 = -60$ dB:

$$TR_{60} = 0,161 \frac{V}{A \cdot \bar{\alpha}}$$





Apèndix F. Flux lluminós d'un difusor perfecte

Considerem una superfície receptora, dA , que es troba tota ella a la mateixa distància, r , i amb la mateixa orientació, θ , respecte a la normal a una font plana de llum (emissor).

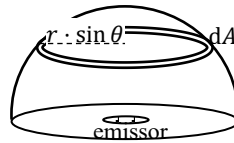


Fig. F.1
Una superfície, dA , de radi $r \cdot \sin \theta$, i centrada en la normal al centre de la font (representada per una superfície ratllada)

El flux lluminós emès en direcció a la superfície dA , amb intensitat lluminosa I_θ , és:

$$d\Phi = I_\theta \cdot d\Omega = I_\theta \cdot \frac{dA}{r^2}$$

La mida de dA és el producte del perímetre de la circumferència, de radi $r \cdot \sin \theta$, per l'amplada de la superfície, $r \cdot d\theta$:

$$dA = 2\pi r^2 \cdot \sin \theta \cdot d\theta$$

Substituint aquesta expressió i la llei de Lambert (equació 6.8) a l'equació per $d\Phi$:

$$d\Phi = 2\pi I_0 \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta \cdot d\theta$$

El flux lluminós total correspon a la suma (integració) d'aquesta expressió per a totes les direccions possibles, és a dir, per a un angle θ comprès entre 0 i $\pi/2$:

$$\Phi = 2\pi I_0 \cdot \int_{\theta=0}^{\pi/2} \sin \theta \cdot \cos \theta \cdot d\theta = 2\pi I_0 \cdot \int_{\theta=0}^{\pi/2} \sin \theta \cdot d(\sin \theta)$$

La integral val 1/2 i el flux lluminós total emès pel difusor perfecte és: $\Phi = \pi I_0$.





Apèndix G. Brillantor i ull humà

L'enlluernament es produeix quan s'observa un objecte la brillantor del qual supera un valor límit d'uns 7.500 Nt, independentment de la distància a què es trobi. De la mateixa manera, el límit entre la visió diürna, o fotòpica, i la visió nocturna, o escotòpica, se situa al voltant d'1 Nt, independentment de la distància a l'emissor de llum. En aquest apèndix, intentarem entendre per què basta conèixer-ne la brillantor per determinar si una superfície serà visible en condicions adequades.

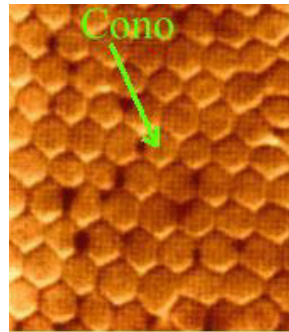


Fig. G.1
Imatge de la taca groga de la retina, on la concentració de cons és màxima. La superfície de cada con és similar a la d'un cercle d'unes 2,8 micres de diàmetre

Per concretar, analitzem el procés pel qual l'ull humà percep una superfície brillant. Considerem el cas en què la detecció de la llum es fa als cons. La capacitat de produir una sensació visual per part d'un sol con està relacionada amb la il·luminació que aquest rep. La superfície útil d'un con per capturar la llum és similar a la d'un cercle d'unes 2,8 micres de diàmetre (Fig. G.1): $A_{\text{con}} \approx 6 \cdot 10^{-8} \text{ cm}^2$. Com que el diàmetre del globus ocular és, aproximadament: $d_{\text{ull}} \approx 2,5 \text{ cm}$, que és la distància aproximada entre l'iris i la retina (Fig. G.2), l'angle sòlid, Ω_{con} , del feix de llum que entra per l'iris i acaba incident en un sol con és, aproximadament:

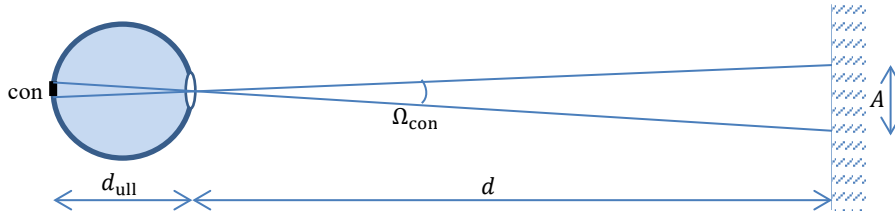
$$\Omega_{\text{con}} = A_{\text{con}} / d_{\text{ull}}^2 \approx 610^{-8} / 2,5^2 \approx 10^{-8} \text{ str}$$

que és una magnitud característica de l'ull humà.

Per tant, quan s'observa una superfície de brillantor B , suposada uniforme, a una distància d de l'ull, la porció d'aquesta superfície que es projecta sobre un únic con és:

$$A = \Omega_{\text{con}} \cdot d^2$$

Fig. G.2
Tota la llum que entra a l'ull i ha estat emesa per una superfície A , situada a una distància d de l'ull, incideix sobre un únic con si l'angle sòlid determinat per la superfície i el centre de l'iris és inferior o igual a Ω_{con} .



En realitat, la llum que parteix de la superfície A i acaba incidint sobre el con en qüestió pot passar pel centre de la còrnia, com s'exemplifica a la figura G.2, o pot incidir sobre qualsevol altre punt de l'iris, i el sistema d'enfocament de l'ull ja s'encarrega que aquests últims raigs vagin a parar al mateix con que s'ha dibuixat a la figura. Així doncs, la quantitat de llum total que rep aquest con depèn de l'obertura de l'iris, la superfície del qual representem per A_{iris} (equació 6.3):

$$\Phi_{\text{con}} = E_{\text{iris}} \cdot A_{\text{iris}},$$

mentre que la il·luminació de l'iris deguda a la llum emesa per A és (per combinació de les equacions 6.6 i 6.12, amb $\theta = 0^\circ$):

$$E_{\text{iris}} = B \cdot \frac{A}{d^2}$$

Substituint les relacions anteriors, queda:

$$\Phi_{\text{con}} = B \cdot \Omega_{\text{con}} \cdot A_{\text{iris}}$$

Per tant, la quantitat de llum que arriba a un con només depèn de la brillantor de la superfície i de la geometria del propi ull. En altres paraules, el resultat és independent de la distància entre l'ull i la superfície observada.



Apèndix H. Nocions de colorimetria

La colorimetria és la part de la fotometria que s'encarrega de mesurar i especificar els colors. Es basa en la resposta fisiològica de l'ull humà a les diferents longituds d'ona de la llum.

Bases fisiològiques de la colorimetria

Recordem que els receptors de la retina que permeten detectar el color de la llum són els cons. A la retina humana, hi ha tres tipus diferents de cons, els anomenats *cons S*, els *cons M* i els *cons L*. Cadascun d'ells conté una variant de la rodopsina (secció 6.2), capaç d'absorbir la llum amb diferents sensibilitats, en funció de la longitud d'ona. Així, els cons S són més sensibles a la llum blava (B, amb la màxima sensibilitat a uns 430 nm), els cons M ho són a la llum verda (G, de l'anglès *green*, amb la màxima sensibilitat a uns 530 nm) i els cons L, a la llum vermella (R, de l'anglès *red*, per bé que la seva màxima sensibilitat es dona al groc, a uns 560 nm, però s'anomenen R perquè són els més sensibles als colors vermells). Insistim que tots els tipus de cons són capaços d'interaccionar amb tota la gamma de longituds d'ona de l'arc de Sant Martí, però el que els diferencia és la intensitat de la interacció amb cada color. La combinació dels senyals que tots tres tipus de cons envien al nervi òptic és el que permet la percepció fisiològica del color. Al cervell, també hi intervenen factors psicofísics, que acaben de configurar la percepció subjectiva que cada individu té del color.

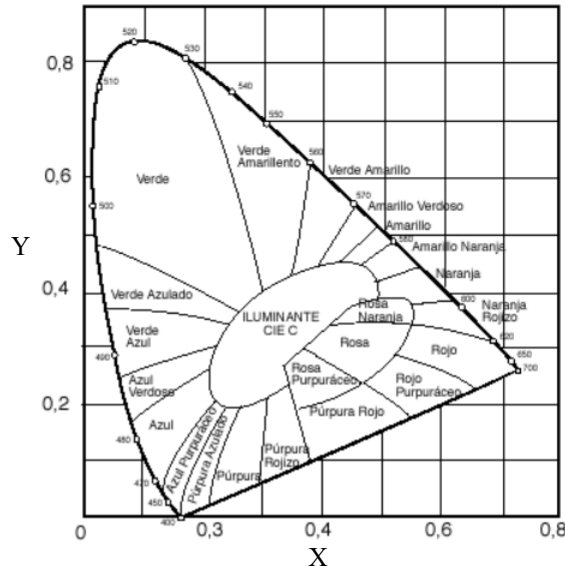
El daltonisme¹ és una deficiència de la visió causada per la manca o la inoperativitat d'un o més tipus de cons, cosa que fa canviar totalment la percepció dels colors. Per exemple, la manca de cons R fa gairebé impossible distingir un color groc-taronja d'un de vermell. Per facilitar l'accessibilitat a les persones que pateixen daltonisme, és convenient que els missatges públics no depenguin críticament de la distinció entre colors similars. Per exemple, molts semàfors per a vianants no es limiten a distingir els senyals amb un cercle de color, sinó que hi incorporen també diferències gràfiques (per exemple, una persona

¹ Anomenat així amb referència a John Dalton, físic britànic (1766-1844) que també va investigar les propietats dels gasos, camp en què va donar nom a la llei de Dalton sobre la suma de les pressions parcials en una barreja de gasos (v. secció 4.3).

quieta o caminant), que indiquen per si soles el missatge que es vol transmetre. El lector interessat pot consultar la pàgina de Viquipèdia:

<https://es.wikipedia.org/wiki/Daltonismo>, en què podrà trobar una sèrie de referències molt completa.

Fig. H.1
Diagrama de cromati-
citat.
Crèdit de la imatge:
Agoston, G. A. (1979):
Color Theory and Its
Application in Art and
Design. Berlin:
Springer



Teoria tricromàtica

La teoria tricromàtica fou desenvolupada a principi del segle XIX, principalment per Young² i altres col·legues, per explicar per què és possible sintetitzar qualsevol color a partir de tres colors primaris: blau (B), verd (G) i vermell (R). Al llarg del segle XX, va experimentar un impuls en poder-se mesurar la resposta dels tres tipus de cons, S, M i L. Tot i que avui dia ha estat superada (o, més ben dit, ha estat absorbida per altres teories més complexes, que l'incorporen parcialment), encara es fa servir en moltes aplicacions industrials per generar colors arbitraris a partir dels anomenats *colors primaris*, com ara pantalles, pintures, impressores, etc.

Una forma moderna d'exposar la teoria tricromàtica seria dir que qualsevol llum de color, dintre de la gamma de longituds d'ona visibles per l'ull humà, es pot considerar la barreja de tres llums de colors primaris. D'altra banda, aquesta barreja de tres colors primaris es pot especificar com un sistema de tres coordenades, és a dir, bastarien tres paràmetres per especificar totalment una llum de color arbitrari. De fet, un d'aquests paràmetres podria ser la brillantor total, de manera que el color en si mateix només requeriria dos paràmetres addicionals per quedar determinat totalment. La CIE ha determinat un sistema de dues coordenades estàndard per especificar el color, mitjançant l'anomenat *diagrama de cromaticitat* (Fig. H.1).

² Thomas Young (1773-1829), físic britànic famós també per l'experiment de la doble escletxa, en què va demostrar la formació d'interferències i el caràcter ondulatori de la llum, i pels seus estudis sobre l'elasticitat dels sòlids. El mòdul d'elasticitat de Young és una de les propietats més importants dels materials de construcció en el càlcul d'estructures.



L'HSV és un sistema alternatiu d'especificació de la llum de color que es basa en el seu to o matís, que és el color primari dominant i es representa per una H (*hue*, en anglès); la saturació, que correspon al grau de barreja del color primari amb llum blanca i es representa per una S, i el valor, que és la brillantor de la llum i es representa per una V.

Mescles de colors

Un dels avantatges del diagrama de cromaticitat és que permet predir el resultat de la mescla de dos colors. Si els colors originals es troben en dos punts concrets del diagrama, com ara P_1 i P_2 , el resultat de la barreja sempre es troba en la línia recta que uneix aquests dos punts, tant més a prop de P_1 com més proporció d'aquest color s'hagi utilitzat en la mescla (aquest resultat és una de les anomenades *lleis de Grassmann*).³

Les mescles de colors poden ser additives o sostractives. Les mescles additives corresponen a la superposició de dos o més llums de colors. N'és un exemple el monitor d'un ordinador (o la pantalla d'un mòbil o d'un televisor). En aquests casos, la llum és emesa directament per l'objecte observat. L'espai de colors RGB és el resultat de mesclar, en qualsevol proporció, els tres colors primaris: vermell, verd i blau. D'acord amb la llei de Grassmann esmentada, el color resultant sempre es troba dintre del triangle definit pels tres colors primaris dins el diagrama de cromaticitat. Per tant, els colors que queden fora del triangle són inaccessibles per mescla additiva de RGB (Fig. H.2).

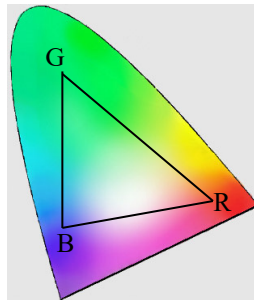


Fig. H.2
Espai de colors RGB.
La gamma de colors accessibles depèn de la posició precisa dels tres primaris, R, G i B. El color groc es pot obtenir barrejant verd i vermell; el color magenta, barrejant blau i vermell, i el color cian, barrejant blau i verd

La mescla sostractiva s'aplica quan la llum es percep després de reflectir-se a la superfície d'un objecte o després de travessar un material transparent però capaç d'absorbir determinats colors. Mitjançant l'aplicació de diferents tintures, es pot seleccionar quines longituds d'ona són reflectides i quines són absorbides.

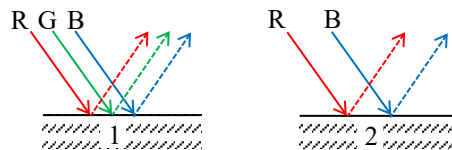


Fig. H.3
Reflexió de la llum per una superfície acabada amb pintura blanca

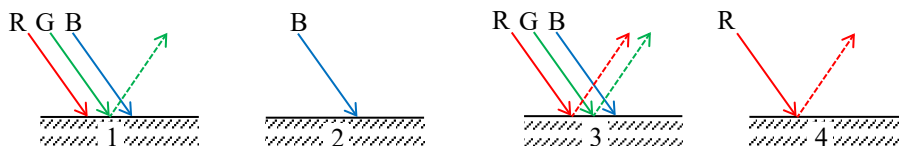
La figura H.3 mostra el comportament d'una superfície reflectant acabada amb pintura blanca. Si és il·luminada amb llum blanca, on són presents tots els colors, els reflecteix tots i la superfície es veu blanca (cas 1). Però, si és il·luminada amb llum de color, per

³ Hermann Grassmann (1809-1877), científic i humanista alemany.

exemple, amb una barreja de blau i vermell (cas 2), també reflectirà tots els colors que hi incideixen i es veurà del mateix color que aquesta llum, que a l'exemple seria un to magenta.

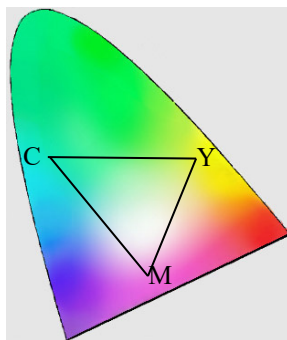
D'altra banda, una superfície acabada amb pintura de color només reflecteix aquell color i n'absorbeix la resta. Com es pot veure a la figura H.4, si la pintura és verda i la llum amb què s'il·lumina la superfície és blanca, la superfície es veurà de color verd (cas 1). Però, si la llum que es fa servir per il·luminar la superfície és de color blau, la superfície no la reflectirà i apareixerà negra (cas 2). A la mateixa figura, se'n pot veure un altre exemple: una superfície acabada amb pintura groga reflecteix el verd i el vermell si és il·luminada amb llum blanca (cas 3, es percep com a groga), però apareix vermella si és il·luminada només amb llum vermella (cas 4). En definitiva, quan hi intervé la reflexió, el color aparent d'un objecte resulta tant de les propietats del propi objecte com de les de la llum que es fa servir per il·luminar-lo.

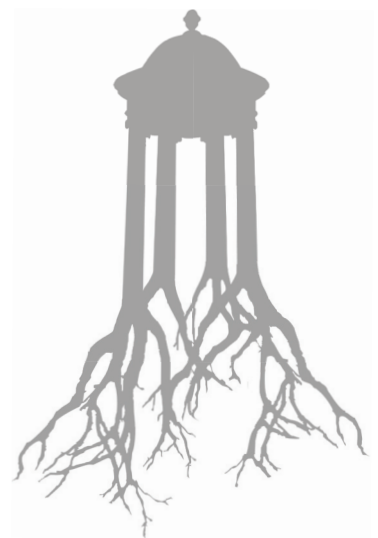
Fig. H.4
Reflexió de la llum per una superfície acabada amb pintura verda (casos 1 i 2) i per una d'acabada amb pintura groga (casos 3 i 4)



Remarquem que, en la mescla sostractiva de colors, si hi ha presents diferents capes, cada tintura absorbeix un o diversos colors, de manera que el resultat final és que només són reflectits i percebuts els colors que no són absorbits per cap capa de tintura. En les impressions, es fan servir mescles sostractives de colors que són complementaris dels RGB: són els colors cian (C, complementari del vermell), magenta (M, complementari del verd) i groc (Y, de l'anglès *yellow*, complementari del blau). L'espai de colors CMY està format pel conjunt de colors accessibles com a mescla d'aquests tres colors bàsics, que a la figura H.5 es correspon amb l'interior del triangle. Com es pot veure, en funció de les coordenades precises dels tres colors C, M i Y, el conjunt de colors accessibles pot quedar molt limitat. Actualment, l'espai de colors de les impressores s'acostuma a complementar amb el negre (K), millorant l'espai de colors accessibles, que es coneix com a espai CMYK.

Fig. H.5
Espai de colors CMY.
La gamma de colors accessibles depèn de la posició precisa dels tres primaris, C, M, i Y.
El color blau es pot obtenir barrejant cian i magenta; el color vermell, barrejant groc i magenta, i el color verd, barrejant cian i groc









Bibliografia

- CARRIÓN, A. (1998): *Diseño acústico de espacios arquitectónicos*. Barcelona: Edicions UPC.
- COLLIE, A. M.; POWNEY, D. J. (1977): *Propiedades mecánicas y térmicas de los materiales*. Barcelona: Reverté.
- GAMOW, G. (1961): *Biography of Physics*. Nova York: Harper & Brothers Publishers.
- ISALGUÉ, A. (1996): *Física del so i la llum*. Barcelona: Edicions UPC.
- ISALGUÉ, A. (1997): *L'energia viatja als edificis. Introducció a la física del transport d'energia*. Barcelona: Edicions UPC.
- MCMULLAN, R. (2017): *Environmental Science in Building*. Londres: McMillan.
- PINTERIC, M. (2017): *Building Physics: From physical principles to international standards*. Luxemburg: Springer.
- SALU, Y. (2004): *Physics for Architects*. Infinity Publishing.
- TIPLER, P. A.; MOSCA, G. (2011): *Física per a la ciència i la tecnologia*. Vol. 1 i 2. 6a ed. Barcelona: Reverté.
- WOODSON, W. E. (1954): *Human Engineering Guide for Equipment Designers*. Los Angeles: University of California Press.





Índex alfabètic

àbac psicromètric	117	calor específica.....	26
absorbància	57, 164, 170	calor latent.....	25
absorció per l'aire	158	calor sensible.....	25
adiabàtica	25	calor total	25, 119
admitància tèrmica	50	caloria	24, 27
aïllament acústic.....	162	camp magnètic	226
aïllant tèrmic	50, 86	candela	195
aire humit	112	canvi de fase.....	28
aire sec	112	capacitància.....	229
albedo.....	59	capacitat	229
altura	203	capacitat calorífica	27
angle d'incidència	6, 186	capacitat calorífica de l'aire	96
angle de desfasament	225, 231	capil·laritat	129
angle sòlid.....	193	cavall de vapor	25
assecament d'aire	120	cèl·lules convectives	67
associació d'impedàncies en paral·lel	233	Celsius.....	17
associació d'impedàncies en sèrie	233	circuit capacitiu	233
associació de resistències tèrmiques en sèrie	84	circuit inductiu	233, 240
atmosfera.....	16	circuit RLC sèrie	233
azimut	203	coeficient convectiu	68
balanç de vapor	121	coeficient d'absorció	152
balanç energètic d'un edifici	90	coeficient d'absorció del so per l'aire ...	151
banda visible	208	coeficient d'absorció mitjà.....	171
bar	16	coeficient d'atenuació sonora.....	162
barrera de vapor	128	coeficient de dilatació lineal d'un sòlid...	20
bastons	187	coeficient de dilatació superficial d'un sòlid	22
Bobina.....	230	coeficient de reducció sonora.....	162
bomba tèrmica.....	32	coeficient de transmissió	153
brillantor.....	200, 205	coeficient de transmissió del so mitjà....	164
CA trifàsic.....	242	coeficient global de pèrdues.....	97
calefacció	91	coeficient radiatiu.....	63
calor	24	condensació.....	28, 114
calor de transformació.....	28	condensacions intersticials	124



condensador	229	espectre electromagnètic	54
conducció tèrmica	48	estat estacionari	121
conductivitat tèrmica	49	estereoradiant	194
connexió en estrella	242	factor de potència	237
connexió en triangle	242	factor de resistència a la difusió del vapor	123
cons	187	factor de temperatura de la superfície	90
constant solar	59	interior	90
contaminació lumínica	207	factor de visió	65
convecció	67	farad	229
corba de sensibilitat espectral	188	flux contaminant	207
corba de Wegel	149	flux de vapor	121, 122
corba polar	198	flux del camp magnètic	226
corbes isofòniques	160	flux lluminós	190
correcció del factor de potència	240	flux perdut	207
corrent altern	223	flux útil	207
cos negre	55	font isòtropa	197
cos selectiu càlid	58	força electromotriu	225
cos selectiu fred	58	força electromotriu induïda	224
decibel	154	fórmula de Sabine	170
decibels A	160	fotó	53
degradació de l'energia	36	freqüència	54, 147, 226
deposició	28	fusió	28
diagrama de Glaser	127	gas ideal	112
diagrama solar	203	generació de CA	224
diferència de potencial	225	generació de vapor	121
difusió del vapor	121	generador de CA	228
difusivitat tèrmica	50	gradient tèrmic	48, 162
difusor perfecte	198	graus·dia	98
dilatació anòmala	23	grossària equivalent d'aire	123
dilatació tèrmica	20	hectopascal	16
dilució geomètrica	150, 158	henry	230
ebullició	29	higroscòpia	130
eco	166	hivernacle	60
efecte hivernacle	61	humitat absoluta	112
efecte Joule	228, 240	humitat específica	112
efecte Purkinje	190	humitat relativa	117
eficiència d'una bomba tèrmica	33	il·luminació	193
eficiència d'una màquina frigorífica	33	il·luminància	193
eficiència energètica	237	impacte	162
efusivitat tèrmica	50	impedància	231
embolcall tèrmic	92	índex d'aïllament acústic	162
emissivitat	57	índex d'aïllament acústic normalitzat	165
emitància	54	índex de renovació de l'aire	96, 121
energia no utilitzable	36	inductància	230
energia tèrmica	16	inèrcia tèrmica	30, 50
enlluernament	201	Infraroig	55
entalpia	26	infraroig mitjà	61
entalpia específica	118	infraroig pròxim	60
entropia	30, 34	Infrasons	148
equació del transformador ideal	227	intensitat d'una ona sonora	149
equilibri tèrmic	17	Intensitat d'una radiació	54
equilibri termodinàmic	17	intensitat de corrent	224
escala centígrada	17	Intensitat eficaç	226
escala de temperatura	17	intensitat lluminosa	195
espectre de la llum	186, 191, 206		



irreversibilitat.....	36	potència calorífica mitjana	24
joule	24	potència reactiva	239
Kelvin	18	potència subministrada.....	240
lleis de Dalton.....	113	pressió	15, 112
lleis de Fick	122	pressió acústica	146
lleis de Fourier.....	48	pressió atmosfèrica.....	118
lleis de Kirchhoff.....	57	pressió de saturació	114
lleis de Lambert.....	198	pressió de vapor	113
lleis de les freqüències.....	153	pressió eficaç acústica.....	148
lleis de les masses	153	pressió parcial	113
lleis de Newton.....	68	primari.....	227
lleis de Stefan-Boltzmann.....	56	Primer Principi de la Termodinàmica	25
lleis de Weber-Fechner	159	propietat termomètrica	18
lleis de Wien	57, 192	propietats macroscòpiques	17
lindar d'audibilitat.....	154	pulsació	225
lindar de dolor.....	154	qualitat acústica.....	166
llum diürna difusa	204	qualitats del so.....	146
llum natural	202	radiació solar.....	58, 91
llum visible	185	radiació tèrmica.....	54
longitud d'ona	54	radiació terrestre.....	62
lumen	190	reactància capacitiva	230
lux	193	reactància inductiva.....	231
luxímetre	205	reflectància	202
màquina frigorífica.....	32	reflexió i refracció de la llum	186
màquina tèrmica.....	31	refredament per polvorització	120
massa molar	113	regla de reciprocitat.....	65
massa per unitat d'àrea.....	163	rendiment de color	206
medi dissipatiu	151	rendiment lluminós	191
mòdul de la impedància	231	resistència.....	228
neu carbònica	112	resistència a la difusió del vapor	124
nit	200	resistència tèrmica.....	50
nivell d'intensitat	154	resistència tèrmica d'un mur	84
nivell de pressió acústica.....	155	resistència tèrmica d'una cambra d'aire..	71
nivell de soroll.....	162, 164	resistència tèrmica superficial	68
nombre de fons.....	160	resistència tèrmica superficial exterior....	69
ohm	228	resistència tèrmica superficial interior....	69
ona longitudinal	145	resistivitat a la difusió del vapor	123
ones e.m.	53	resistivitat tèrmica.....	50
ones estacionàries.....	172	ressonador de Helmholtz.....	173
ones mecàniques de pressió, densitat i desplaçament	145	ressonador de membrana.....	172
ones sonores esfèriques.....	150	reverberació.....	166
ones sonores harmòniques.....	147	risc de condensacions superficials.....	120
ones sonores planes.....	149	rodopsina.....	187
parallamps.....	244	saturació	114
pascal	16	secundari	227
perfil de vapor.....	125	Segon Principi de la Termodinàmica	30
perfil tèrmic.....	87	so	145
permeabilitat	122	solenoid.....	230
pont acústic	162	solidificació.....	28
pont tèrmic	90, 94, 120	sonòmetre.....	161
potència.....	24, 149, 225	sons audibles	148
potència activa	237	sublimació.....	28
potència aparent	238	sumador de decibels	156
potència calorífica instantània.....	24	temperatura	16
		temperatura absoluta	18



temperatura crítica	112	transmitància tèrmica	50
temperatura de color	192	transmitància tèrmica global	94
temperatura de rosada	117, 119	transport de CA	240
temps de reverberació	169	ultrasons	148
tensió	225	ultraviolat	55
tensió eficaç	226	vapor d'aigua	112
tensió màxima	226	vaporització	28
termistor	19	vatamperi	239
termòmetre	17	VEEI	205
termòmetre d'infrarojos	19, 66	velocitat de la llum	186
termòmetre de gas a volum constant	19	velocitat de les ones sonores	146
termòmetre de mercuri	19	ventilació	121
termòmetre de resistència	19	visible	54
termoscopi	18	visió escotòpica	187, 201
torr	16	visió fotòpica	187, 201
transformador	227	volum específic	118
transmissió aèria	162	watt	25
transmitància	61, 201		