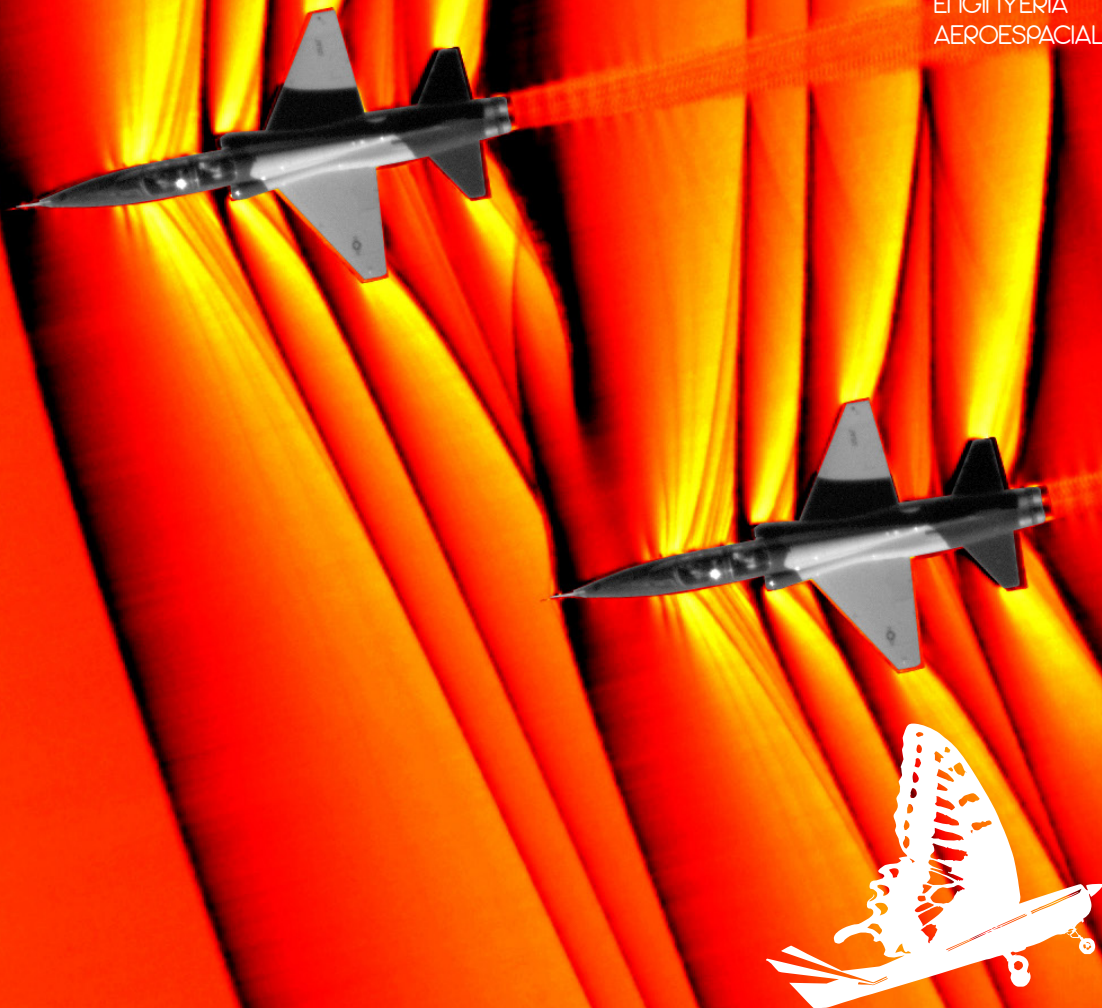




60

ENGINYERIA
AEROESPACIAL



Mecánica de fluidos. → Problemas con resolución numerica

Josep M. Bergadà Granyó
Álvaro Mañas González

MATLAB®
examples



60

ENGINYERIA
AEROESPACIAL



iniciativa
digital politècnica
Publicacions Acadèmiques UPC

→ **UPCGRAU**

Mecánica de fluidos. → Problemas con resolución numerica

Josep M. Bergadà Granyó
Álvaro Mañas González

Primera edición: abril de 2021

Imagen de cubierta: Interacción de las ondas de choque oblicuas generadas por dos aviones supersónicos T-38. Realizada por "NASA Amstrong Flight Research Center" en el 2019. Reproducida con permiso de la © NASA

- © Los autores, 2021
- © Iniciativa Digital Politècnica, 2021
Oficina de Publicacions Acadèmiques Digitals de la UPC
Jordi Girona 31,
Edifici Torre Girona, Planta 1, 08034 Barcelona
Tel.: 934 015 885
www.upc.edu/idp
E-mail: info.idp@upc.edu

ISBN: 978-84-9880-927-5

Cualquier forma de reproducción, distribución, comunicación pública o transformación de esta obra sólo puede realizarse con la autorización de sus titulares, salvo excepción prevista en la ley.



Prólogo

La mecánica de fluidos tiene sus orígenes en la hidráulica. Tanto en Mesopotamia como en Egipto, hacia el año 4000 antes de nuestra era proliferaron las obras hidráulicas, que aseguraban el regadío de vastas zonas. Posteriormente, el imperio griego, el chino y, especialmente, el romano se caracterizan por una gran profusión de las construcciones hidráulicas.

A lo largo de la historia, aparecen sucesivos inventos e investigadores que aportan mejoras sustanciales al campo que hoy se denomina *mecánica de fluidos*, algunas de las cuales son debidas a destacados científicos:

Arquímedes (287-212 a. C.) crea el tornillo helicoidal y enuncia el principio de flotación.

Leonardo da Vinci (1452-1519) muestra la aparición de vórtices en la zona de separación del flujo y describe los principios de funcionamiento de las máquinas voladoras

Blaise Pascal (1623-1662) en su estudio sobre la estática de los fluidos, define el principio que lleva su nombre.

Isaac Newton (1642-1727) lleva a cabo el análisis espectral de la luz, define la teoría de la gravitación universal, establece los principios del cálculo integral y diferencial, y enuncia la ley de la viscosidad, que lleva su nombre.

Henry Pitot (1695-1771) con el fin de medir la velocidad de un fluido, crea el tubo que lleva su nombre.

Daniel Bernoulli (1700-1782) populariza la ley que define la energía asociada al fluido a lo largo de una línea de corriente, y estudia diversos problemas sobre la estática y la dinámica de fluidos.

Leonhard Euler (1707-1783) establece la base matemática para el estudio del flujo ideal, sin viscosidad.

Giovanni Battista Venturi (1746-1822) clarifica los principios básicos del flujo a lo largo de una tobera convergente-divergente (el tubo de Venturi) y define los principios del resalto hidráulico.



Henri Navier (1785-1836), basándose en los estudios de Euler, deriva las ecuaciones de Navier, que posteriormente Stokes modifica hasta obtener las ecuaciones de Navier-Stokes, tal como se conocen actualmente.

Ludwig Hagen (1797-1884), estudiando el flujo en conductos cerrados, encuentra la zona de traspaso entre el flujo laminar y el turbulento, y observa que depende de la velocidad y de la temperatura del fluido, así como del diámetro y de la rugosidad del conducto.

Jean Leonard Marie Poiseuille (1799-1869) estudia el movimiento de la sangre en las venas y en los capilares, y determina experimentalmente la relación entre la presión y el caudal en capilares.

William Froude (1810-1879) dedica gran parte de su vida a construir barcos, y sus investigaciones son continuadas por su hijo R.E. Froude (1846-1924), que define el número adimensional que lleva su nombre y que relaciona las fuerzas inerciales con las fuerzas gravitacionales.

George Gabriel Stokes (1819-1903) logra derivar la ecuación de Navier-Stokes.

Gustav Robert Kirchhoff (1824-1887) define el coeficiente de contracción, que halla para el caso de los orificios bidimensionales.

Ernst Mach (1838-1916), en uno de sus más conocidos estudios sobre los flujos a alta velocidad, deduce el número de Mach.

Osborne Reynolds (1842-1912) clarifica el fenómeno de la cavitación, y define los regímenes laminar y turbulento y el número adimensional que los identifica. Su teoría sobre la lubricación hidrodinámica es también muy relevante.

Ludwig Prandtl (1875-1953), que observa la aparición y define la teoría de la capa límite, se considera uno de los creadores de la mecánica de fluidos moderna.

Theodore von Kármán (1881-1963) estudia los vórtices detrás de un cilindro y, define las fuerzas de arrastre y de sustentación de los cuerpos en el seno de un fluido en régimen turbulento.

Durante el siglo XX, los avances en la mecánica de fluidos fueron continuos, especialmente en los campos de la dinámica de gases, la aerodinámica y la aeronáutica, que son los que experimentaron y seguirán experimentando en el futuro un mayor desarrollo. También han despegado las técnicas no intrusivas para la medición del movimiento del fluido, que en la actualidad se aplican en cualquier campo. Durante el siglo XXI, cabe esperar que la mecánica de fluidos computacional se aplique de manera extensiva a cada vez más tipos de problemas; de hecho, gran parte de los problemas asociados a la mecánica de fluidos se resolverán utilizando técnicas computacionales.

En este libro, se introducen una serie de problemas que requieren una resolución numérica para obtener los resultados necesarios. En la resolución de los problemas de mecánica de fluidos, es muy usual que la solución venga dada en forma de una o

varias ecuaciones diferenciales. En consecuencia todos los problemas que se presentan aquí incluyen un programa que permite resolver el problema de una manera genérica y extensiva. Este libro está diseñado para que el lector no solo pueda aprender conceptos esenciales de la mecánica de fluidos, sino que además aprenda a diseñar programas que le permitan resolver problemas que, por su dificultad, deban ser resueltos numéricamente. Considerando el nivel de los problemas que se introducen aquí, se recomienda al lector que se familiarice con conceptos básicos de mecánica de fluidos antes de consultar este libro.

Los autores desean que la información que se presenta en estas páginas resulte de utilidad para ampliar conocimientos tanto de mecánica de fluidos como de programación.

Queremos agradecer a la Universitat Politècnica de Catalunya la ayuda que nos ha proporcionado para la realización de este libro.

Josep M Bergadà Granyó y Álvaro Mañas González





Índice

Problemas

Problema 1. Ecuación de continuidad	11
Problema 2. Ecuación de continuidad II.....	21
Problema 3. Ecuaciones de continuidad y energía.	32
Problema 4. Ecuación de momento cinético.....	55
Problema 5. Flujo con viscosidad dominante.	76
Problema 6. Flujo con viscosidad dominante II (Turbina).	103
Problema 7. Flujo con viscosidad dominante III (Cojinete cilíndrico).....	124
Problema 8. Flujo potencial.....	152
Problema 9. Flujo compresible.....	176
Problema 10. Flujo compresible II (Ondas de choque oblicuas y ondas de expansión).....	207

Apéndice.....

Programa del problema 1. Ecuación de continuidad	225
Programa del problema 2. Ecuación de continuidad II.....	236
Programa del problema 3. Ecuaciones de continuidad y energía.	241
Programa del problema 4. Ecuación de momento cinético.....	259
Programa del problema 5. Flujo con viscosidad dominante.....	262
Programa del problema 6. Flujo con viscosidad dominante II (Turbina).....	268
Programa del problema 7. Flujo con viscosidad dominante III (Cojinete cilíndrico).	274
Programa del problema 8. Flujo potencial.....	280
Programa del problema 9. Flujo compresible.....	289
Programa del problema 10. Flujo compresible II (Ondas de choque oblicuas y ondas de expansión).....	316

Nomenclatura	331
Bibliografía.....	337



Problemas

Problema 1

Enunciado

En el esquema de la figura 1.1, halle la ecuación diferencial que determina la variación temporal de presión en la cámara del cilindro, conocidas las ecuaciones de los caudales de fuga, Q_{L1} , Q_{L2} .

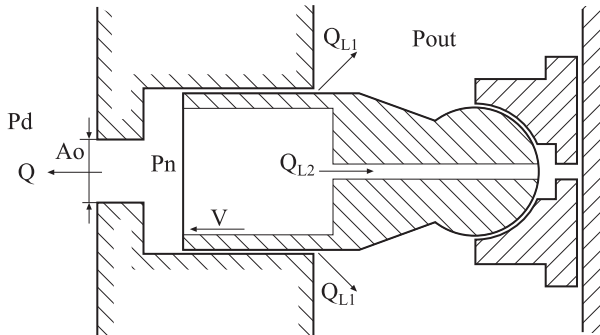


Fig. 1.1

Resolución

La ecuación de continuidad en modo integral y régimen transitorio se enuncia:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{vc} \rho dV + \oint_{sc} \rho \vec{V} d\vec{s} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{vc} \rho dV + \int_{s_0} \rho \vec{V} d\vec{s} + \int_{s_1} \rho \vec{V} d\vec{s} + \int_{s_2} \rho \vec{V} d\vec{s} = 0$$

puesto que la densidad y el volumen de control dependen del tiempo.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \int_{vc} dV + \rho \frac{\partial}{\partial t} \int_{vc} dV + \int_{s_0} \rho \vec{V} d\vec{s} + \int_{s_1} \rho \vec{V} d\vec{s} + \int_{s_2} \rho \vec{V} d\vec{s} = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} V + \rho \frac{\partial V}{\partial t} + \dot{m}_{salida 0} + \dot{m}_{salida 1} + \dot{m}_{salida 2} = 0$$

$$\beta = -V \frac{d\rho}{dV} = -\frac{V}{m} \frac{d\rho}{d\left(\frac{V}{m}\right)} = -V \frac{d\rho}{dV} = -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{d\left(\frac{1}{\rho}\right)} = \rho \frac{d\rho}{d\rho};$$

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{d\rho}{\beta}; \quad \frac{d\rho}{dt} = \frac{\rho}{\beta} \frac{d\rho}{dt};$$



$$\frac{\rho}{\beta} \nabla \frac{\partial p}{\partial t} + \rho \frac{\partial \nabla}{\partial t} + \rho Q_{\text{salida } 0} + \rho Q_{L1} + \rho Q_{L2} = 0$$

Despejando la densidad:

$$\frac{\nabla}{\beta} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial \nabla}{\partial t} + Q_{\text{outlet } 0} + Q_{L1} + Q_{L2} = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\beta}{\nabla} \left(-Q_{\text{salida } 0} - Q_{L1} - Q_{L2} - \frac{\partial \nabla}{\partial t} \right) \quad (A)$$

$$\frac{d\nabla}{dt} = S \frac{dx}{dt} = S V_{\text{velocidad}} ;$$

La variación temporal de presión en la cámara cilíndrica puede determinarse, si se conocen las ecuaciones de los caudales de fuga en función de la presión P_n , y también se necesita el valor temporal del volumen de la cámara del cilindro.

A modo de ejemplo, y para el pistón de la figura 1.2, estas ecuaciones podrían expresarse de la manera siguiente:

Suponiendo que, en $t = 0$ el pistón se halla en el punto muerto inferior (PMI), el volumen temporal de la cámara del cilindro se puede dar como:

$$\nabla = \nabla_0 + S_{\text{pistón}} R_p \tan(\alpha) (\cos(\omega t) + 1)$$

Y, por tanto:

$$\frac{d\nabla}{dt} = -S_{\text{pistón}} R_p \tan(\alpha) \sin(\omega t) \omega$$

donde:

∇_0 = el volumen del cilindro en el punto muerto superior

ω = velocidad de giro de la bomba

R_p = radio del plato inclinado

α = ángulo de inclinación del plato inclinado

El caudal de salida del fluido hacia el exterior de la bomba se da por:

$$Q_{\text{salida } 0} = \text{signo de } (P_{\text{in}} - P_d) C_d A_0 \sqrt{\frac{2}{\rho} (P_{\text{in}} - P_d)};$$

C_d = coeficiente de descarga

A_0 = área de salida.

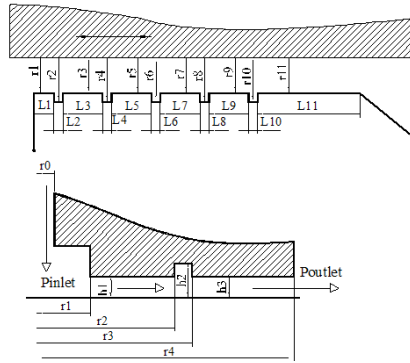


Fig. 1.2
Conjunto de
pistón y patín
deslizante

Para el pistón de la figura 1.2, el caudal de fugas temporal viene dado por la ecuación:

$$Q_{L1} = \pi D \left[\frac{h_1 R_p \tan \alpha (-\sin(\omega t)) \omega}{2} \right] +$$

$$\frac{\pi D}{12} \left[\frac{P_{\text{Tank}} - P_{\text{in}} - 6 R_p \tan \alpha (-\sin(\omega t)) \omega \mu \left[\frac{h_{10} - h_1}{h_{10}^3} \right] (l_2 + l_4 + l_6 + l_8 + l_{10})}{\frac{\mu}{h_{11}^3} \left(l_1 + l_2 + l_3 + \dots + l_{11} - \frac{0.0195}{2} R_p \tan \alpha \cos(\omega t) \right) + \mu \left[\left(\frac{1}{h_2^3} - \frac{1}{h_1^3} \right) (l_2 + l_4 + l_6 + l_8 + l_{10}) \right]} \right]$$

Obsérvese que el caudal depende de la velocidad temporal del pistón y de la longitud del pistón en el interior del cilindro.

Para el patín deslizante de la figura 1.2, y considerando que el patín se desliza paralelo al plato inclinado, el caudal de fugas vendrá dado por:

$$Q_{L2} = \frac{\pi}{6\mu} \frac{P_{\text{in}} - P_{\text{Tank}}}{\frac{1}{h_1^3} \ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right) + \frac{1}{h_2^3} \ln \left(\frac{r_3}{r_2} \right) + \frac{1}{h_3^3} \ln \left(\frac{r_4}{r_3} \right)}$$

La integración de la ecuación diferencial (A), con las correspondientes ecuaciones asociadas, da lugar a la variación de presión en la cámara del pistón, en función del tiempo. Esta ecuación no es posible integrarla mediante métodos analíticos, por lo cual se recurrirá a la integración numérica utilizando el método de Runge-Kutta de orden 2-3 de forma explícita. Para hallar la gráfica correspondiente a la presión en función del tiempo, es necesario definir la geometría y las condiciones de contorno.

Geometría: (v. figura 1.2).

$$l_1 = 0.002 \text{ m ;}$$

$$l_2 = l_4 = l_6 = l_8 = l_{10} = 0.0007 \text{ m ;}$$

$$l_3 = l_5 = l_7 = l_9 = 0.004 \text{ m ;}$$

$$l_{11} = 0.019 \text{ m ;}$$

$$h_1 = h_3 = h_5 = h_7 = h_9 = h_{11} = 2 \cdot 10^{-6} \text{ m ;}$$

$$D = 0.014 \text{ m ;}$$



$D_{ip} = 0.008 \text{ m}$ (diámetro de la zona hueca del pistón);

$$S_{piston} = \pi \left(\frac{D}{2} \right)^2 \text{ m}^2; \quad S_{ip} = \pi \left(\frac{D_{ip}}{2} \right)^2 \text{ m}^2 \text{ (sección de la zona hueca del pistón);}$$

$R_p = 0.060 \text{ m};$

$D_0 = 0.006 \text{ m};$

$$A_0 = \pi \left(\frac{D_0}{2} \right)^2 \text{ m}^2;$$

$h_y = 0.0005 \text{ m};$

$r_1 = 0.005 \text{ m};$

$r_2 = 0.0075 \text{ m};$

$r_3 = 0.008 \text{ m};$

$r_4 = 0.010 \text{ m};$

$hs_1 = hs_3 = 10^{-5} \text{ m};$

$hs_2 = 0.4 \cdot 10^{-3} + hs_1 = 0.41 \cdot 10^{-3} \text{ m};$

Condiciones de contorno y propiedades físicas del aceite.

$$\omega = 2000 \text{ rpm} = 209.44 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$\alpha = 20^\circ = 0.349 \text{ rad};$

$C_d = 0.6;$

$\beta = 1.8 \cdot 10^9 \text{ Pa};$

$\rho = 857 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ (se considera que la densidad es constante);

$\mu = 0.0274 \text{ Pa} \cdot \text{s};$

$P_{\text{tank}} = 10^5 \text{ Pa};$

Para la resolución de la ecuación diferencial, cabe distinguir dos casos:

- 1) En $t = 0$, el pistón se halla en el punto muerto inferior
- 2) En $t = 0$, el pistón se halla en el punto muerto superior

Para el caso 1, las condiciones iniciales son:

$$P(0) = 300 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

$$P_d = 300 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

$$\forall_0 = S_{ip} \cdot 0.04 + S_{piston} \cdot h_y = 2.0876 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3$$

El volumen a lo largo del tiempo está definido, en este caso por la expresión siguiente:

$$\forall(t) = \forall_0 + S_{piston} \cdot R_p \cdot \tan(\alpha) \cdot (\cos(\omega t) + 1)$$

Para el caso 2, las condiciones iniciales son:

$$P(0) = 10^5 \text{ Pa}$$

$$P_d = 10^5 \text{ Pa}$$

$$\forall_0 = S_{ip} \cdot 0.04 + S_{piston} \cdot h_y = 2.0876 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3$$

El volumen a lo largo del tiempo está definido, en este caso por la expresión siguiente:

$$\forall(t) = \forall_0 + S_{piston} \cdot R_p \cdot \tan(\alpha) \cdot (1 - \cos(\omega t))$$

En ambos casos, el tiempo final está determinado por el tiempo necesario para que el pistón se desplace del punto muerto superior al inferior, es decir, para que realice media vuelta en torno al eje central del plato por el cual se desliza, un plato inclinado. Por tanto, el tiempo final se calcula de la manera siguiente:

$$t_{final} = \frac{\pi}{\omega} = 0.015 \text{ s}$$

Integración de la ecuación en cada uno de los casos utilizando el método de Runge-Kutta de orden 2-3.

CASO 1:

Pistón ascendente

En la figura 1.3, se representa la presión en función del tiempo en el supuesto de que haya fugas y, en el supuesto de que no las haya.

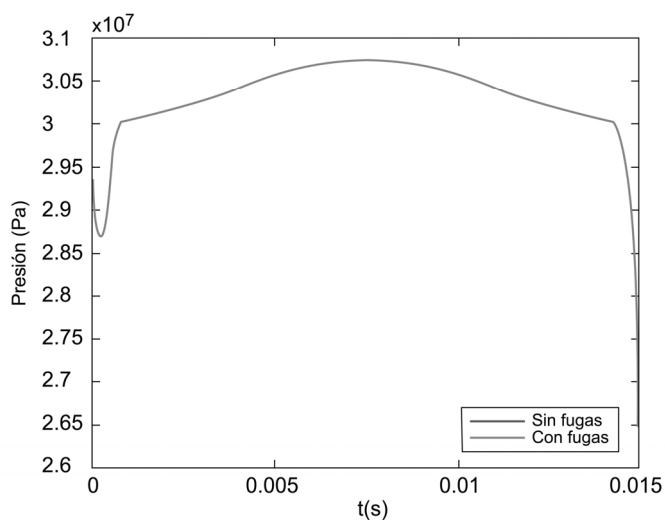


Fig. 1.3
Presión dentro
de la cámara,
con y sin fugas



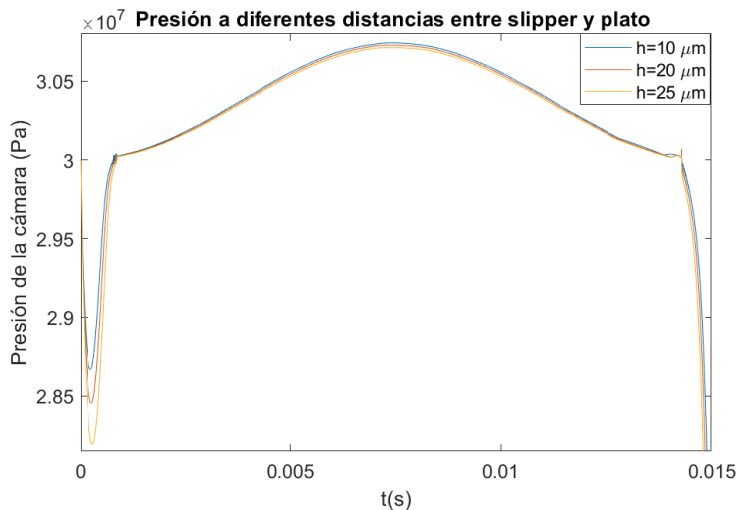
La disminución del volumen de la cámara del pistón provoca que el aceite salga por la superficie A_0 . La caída de presión que se observa cuando el pistón está alrededor de los puntos muertos inferior y superior, se debe, en mayor medida, al efecto de considerar el coeficiente de descarga como constante e igual a 0.6. Véase que, en realidad, el coeficiente de descarga es función del número de Reynolds y que dicho coeficiente tiende a cero en los puntos muertos inferior y superior.

A partir de un cierto instante para el cual la velocidad del pistón es suficientemente grande, la presión en la cámara va aumentando hasta llegar a un máximo, que se corresponde con la máxima variación de volumen en ese instante de tiempo, concretamente para $t = 7.5$ ms. A partir de este máximo, la presión empieza a disminuir, dado que la velocidad el pistón también lo hace. La caída de presión tan pronunciada que se produce cuando el pistón está cerca del punto muerto superior, es debida a que el volumen de la cámara es muy pequeño y la salida de una pequeña porción de aceite, básicamente entre el *slipper* y el plato inclinado, provoca una mayor disminución de la presión.

El hecho de que la figura 1.3 muestre una caída de presión en este punto es debido a que se ha considerado que, para todos los instantes de tiempo, el coeficiente de descarga C_d es 0.6 cuando realmente en los instantes iniciales es casi nulo. Es decir, la caída de presión en los instantes iniciales no es debida a fugas, sino al flujo que sale de la cámara a través de la sección A_0 , y a que se ha considerado constante el valor del coeficiente de descarga.

En la figura 1.4, se representa la presión en función del tiempo para diferentes distancias entre el *slipper* y el plato inclinado, es decir, variando h_{s1} , cuanto mayor es esta distancia, mayores son las fugas. Recuérdese, además que variar h_{s1} implica que h_{s2} y h_{s3} también varían, de acuerdo con las relaciones geométricas ya especificadas.

Fig. 1.4
Presión
dentro de la
cámara para
diferentes h_s



Obsérvese que, a medida que la distancia entre el *slipper* y el plato inclinado aumenta, la caída de presión es mayor para los instantes iniciales y finales y, en consecuencia, la presión mínima alcanzada es menor.

En la figura 1.5, se representa el caudal QL1 en función del tiempo en la primera gráfica y, en la siguiente, se representa el caudal QL2 también en función del tiempo. La distancia entre el *slipper* y el plato inclinado se mantiene en 10 micras y la distancia entre el pistón y el cilindro es de 2 micras.

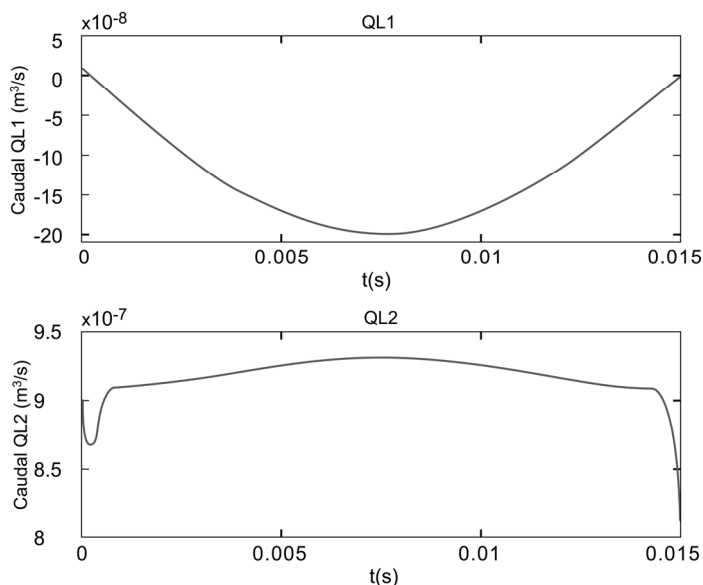


Fig. 1.5
Caudales QL1
y QL2 en el
intervalo de
tiempo
estudiado

El caudal de fugas QL1 depende de la diferencia de presiones entre la cámara y el tanque y, además, depende de la velocidad del pistón respecto del cilindro. En el instante inicial, $t = 0$, la velocidad del pistón es 0 y, por tanto, el caudal entre el cilindro y el pistón viene determinado por la diferencia de presiones antes mencionada. El tipo de flujo asociado a la diferencia de presiones se denomina *flujo de Poiseuille* y, para el instante inicial, es el que predomina. Por este motivo, en los instantes iniciales, concretamente en el intervalo de $[0, 0.000135]$ segundos, el caudal de fugas sería positivo, es decir, habría una pequeña porción de aceite que saldría de la cámara del pistón. A medida que la velocidad del pistón aumenta, la diferencia de presiones no tiene tanta influencia y el flujo asociado a la velocidad relativa entre las dos superficies del intersticio por el cual circula el caudal de fugas, denominado *flujo de Couette*, es el más relevante. Por esta razón, a partir de los 0.000135 segundos, el caudal QL1 es negativo, es decir, entra aceite en la cámara del pistón. El sentido del caudal circulante coincide con el sentido de la velocidad del pistón y la máxima entrada de aceite por esta zona se produce cuando la velocidad del pistón es máxima, es decir, a los 7.5 ms. A partir de los 7.5 ms, el caudal circulante en esta zona disminuye en módulo, al igual que la velocidad del pistón. Cabe destacar que, para tiempos cercanos a 15 ms, el



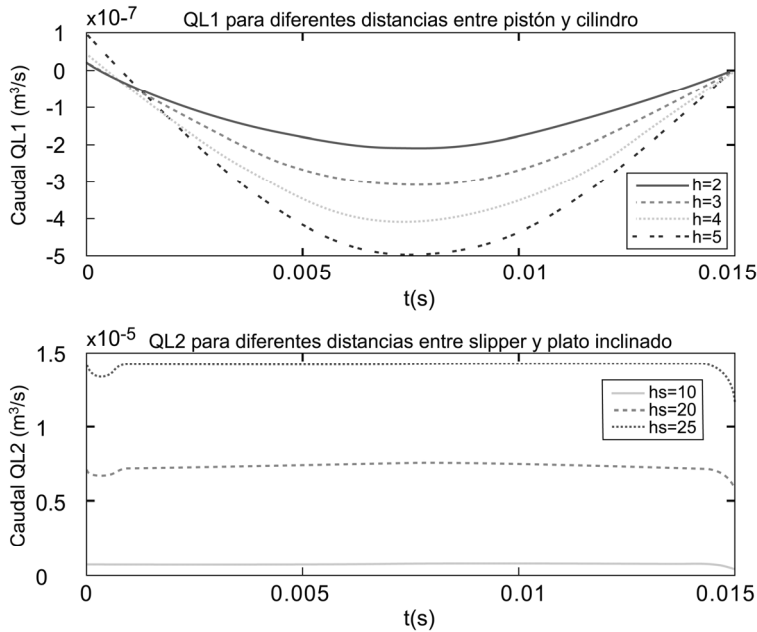
caudal circulante no es 0, tal como la figura parece reflejar.* Cuando el pistón vuelve a tener velocidades pequeñas, cercanas a 0, en tiempos cercanos a 15 ms, el caudal de fugas QL1 vuelve a ser positivo. Ello indica que el caudal de fugas vuelve a ser de salida, y es la diferencia de presiones lo que genera esta salida de flujo de aceite.

* Para $t = 15 \text{ ms}$, el caudal $QL1 = 5.745 \cdot 10^{-10} \text{ m}^3/\text{s}$

El caudal de fugas QL2 depende únicamente de la diferencia de presiones entre la cámara y el tanque. En consecuencia, la curva representada tiene la misma forma que la curva de la gráfica de la figura 1.3, que caracteriza la distribución temporal de presiones dentro de la cámara del pistón.

Por último, en este caso 1, se representan los caudales QL1 y QL2 para diferentes distancias entre el *slipper* y el plato inclinado, así como entre el pistón y el cilindro.

Fig. 1.6
Caudales QL1
y QL2 para
diferentes
distancias
intersticiales
*Las distancias
mostradas en la
leyenda de
cada figura
están en micras



En primer lugar, con respecto al caudal de fugas QL1, se observa que una mayor distancia entre el pistón y el cilindro implica que la superficie a través de la cual pasa el flujo de aceite es mayor y, en consecuencia, mayor es el caudal. A continuación, se muestran los caudales para las diferentes distancias entre el pistón y el cilindro, en el instante inicial y en el instante donde la velocidad del pistón es máxima y coincide con el máximo caudal que entra por esta zona:

En $t = 0 \text{ s}$:

- Si $h = 2 \text{ micras}$, $QL1 = 5.907 \cdot 10^{-9} \text{ m}^3/\text{s}$
- Si $h = 3 \text{ micras}$, $QL1 = 1.994 \cdot 10^{-8} \text{ m}^3/\text{s}$
- Si $h = 4 \text{ micras}$, $QL1 = 4.726 \cdot 10^{-8} \text{ m}^3/\text{s}$
- Si $h = 5 \text{ micras}$, $QL1 = 9.230 \cdot 10^{-9} \text{ m}^3/\text{s}$

El signo positivo de QL1 indica, según el convenio de signos adoptado, que el flujo sale de la cámara del pistón.

En $t = 0.0075 \text{ s}$:

- Si $h = 2 \text{ micras}$, $QL1 = -2.000 \cdot 10^{-7} \text{ m}^3/\text{s}$
- Si $h = 3 \text{ micras}$, $QL1 = -2.977 \cdot 10^{-7} \text{ m}^3/\text{s}$
- Si $h = 4 \text{ micras}$, $QL1 = -3.927 \cdot 10^{-7} \text{ m}^3/\text{s}$
- Si $h = 5 \text{ micras}$, $QL1 = -4.841 \cdot 10^{-7} \text{ m}^3/\text{s}$

El signo negativo de QL1 indica que, según el convenio de signos adoptado, el flujo entra hacia la cámara del pistón.

En segundo lugar, con respecto al caudal de fugas QL2, una mayor distancia entre el *slipper* y el plato inclinado también implica que el caudal circulante entre las superficies es mayor. Como el caudal depende de la diferencia de presiones entre la cámara y el tanque, una mayor caída de presión en los instantes iniciales indica una disminución de dicho caudal. Por este motivo, se aprecia mayor curvatura en los instantes iniciales para distancias mayores. En instantes posteriores, las curvas a diferentes distancias se asemejan a una recta, porque la gráfica está a mayor escala. Si la escala fuese igual que en la figura 1.5, la curva perteneciente a una distancia de 10 micras tendría una forma similar.

CASO 2:

Pistón descendente

Con las condiciones iniciales presentadas se obtiene la gráfica de la figura 1.7:

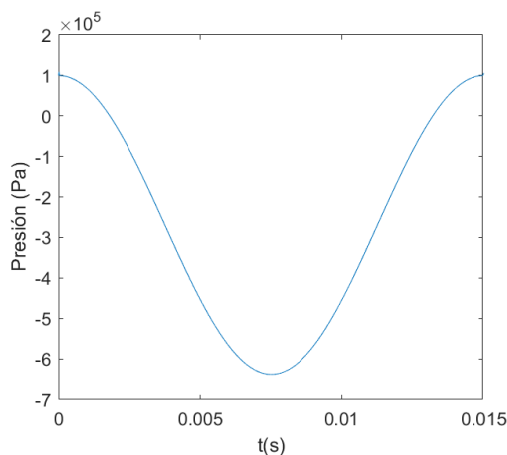
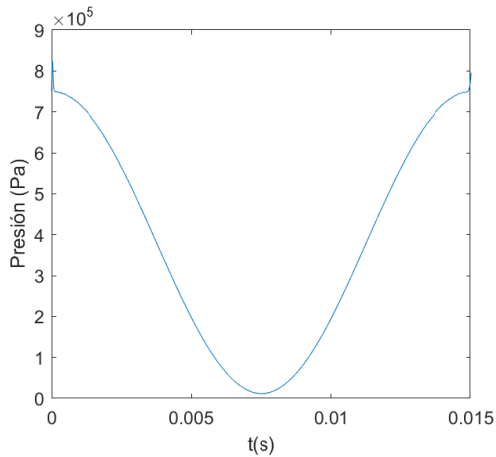


Fig. 1.7
Presión en la
cámara del
pistón cuando
este va en
sentido
descendente



Obsérvese que, para una presión a la entrada de la cámara del pistón o, presión de aspiración de 1 bar, aparecen presiones negativas dentro de la cámara del pistón, (v. figura 1.7). Estas presiones negativas originan el fenómeno de la cavitación. De hecho, presiones relativas negativas inferiores a 1 bar son imposibles físicamente, con lo cual este resultado ha de entenderse como meramente matemático. Para evitarlo, es necesario alimentar la cámara de forma que esta región de presión negativa pase a ser positiva. Con una presión a la entrada de 7.5 bar, se obtiene la siguiente evolución de la presión a lo largo del tiempo, (v. figura 1.8):

Fig. 1.8
Presión en la
cámara del
pistón cuando
este va en
sentido
descendiente y
para una
presión de
aspiración de
7.5 bar



La caída de presión que se observa para los instantes iniciales y finales es debida al caudal de fugas, puesto que ahora la presión en la cámara del pistón es mayor que la de tanque.



Problema 2

Enunciado

El esquema que se muestra a continuación representa un pistón que impulsa fluido hacia un acumulador. Para el estado inicial, se conocen tanto la posición del pistón como la del émbolo del acumulador, sus secciones $S_{\text{pistón}}$; $S_{\text{émbolo}}$, así como las condiciones iniciales de los dos fluidos:

$$P_0; T_0; \rho_0; h_0; \quad P_{N_2 0}; T_{N_2 0}; \rho_{N_2 0}; \forall_{N_2 0}$$

La velocidad de desplazamiento temporal del pistón se puede expresar como $V = K \text{ seno}(t)$, donde K es una constante por determinar. La variación temporal del volumen del cilindro inferior se representa: $\forall = \frac{S_{\text{pistón}} h_0}{2} (1 + \cos(t))$, donde h_0 es la longitud inicial de la cámara del pistón.

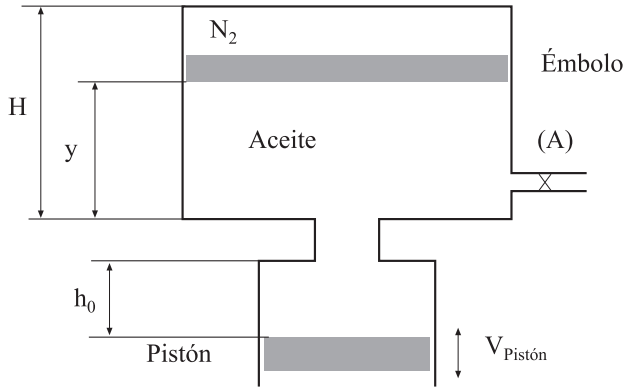
Se pide:

1. Hallar la ecuación diferencial que caracteriza la variación temporal de la presión en la cámara del pistón, sabiendo que la válvula (A) situada en el acumulador está abierta y permite que pequeñas cantidades de fluido fluyan hacia la atmósfera. Considérese que este caudal de fugas es pequeño, comparado con el flujo proveniente del pistón, y que el émbolo que separa el nitrógeno del aceite está bloqueado y no puede moverse. Determinar la constante K .
2. Si la válvula (A) está cerrada, suponiendo que el émbolo que separa el aceite y el nitrógeno esté inmóvil, determinar la ecuación que caracteriza la variación temporal de presión en el sistema.
3. Determinar cómo varían la posición del émbolo y la presión del nitrógeno con el tiempo, si se tiene en cuenta que el aceite puede considerarse incompresible. La válvula A está cerrada.
4. Si el émbolo del acumulador tiene nitrógeno a presión en la parte superior, la válvula (A) está cerrada y dicho émbolo puede moverse libremente, determinar el conjunto de ecuaciones diferenciales que caracteriza el desplazamiento temporal del émbolo. Considerar el aceite como un fluido compresible.

Cabe recordar que el fluido (N_2) es un gas ideal.



Fig. 2.1
Conjunto
de pistón y
acumulador



Resolución

1. La ecuación de continuidad en modo integral establece:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} \rho \cdot dV + \oint_{sc} \rho \cdot \vec{v} \cdot d\vec{S} = 0$$

Según el enunciado, el volumen de la parte superior se considera constante:

$$\forall \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \cdot S_{\text{pistón}} \cdot \frac{\partial h_{\text{pistón}}}{\partial t} + \rho \cdot V_s \cdot S_s = 0$$

$$(\forall_{\text{émbolo}} + \forall_{\text{pistón}}) \cdot \frac{d\rho}{dt} + \rho \cdot S_{\text{pistón}} \cdot V_{\text{pistón}} + \rho \cdot V_s \cdot S_s = 0$$

Considerando que el fluido que atraviesa la válvula mantiene su densidad constante, la velocidad del fluido al atravesar la válvula puede expresarse en función del gradiente de presiones entre los extremos de esta.

$$\frac{d\rho}{dt} = \left[-\rho \cdot S_{\text{pistón}} \cdot V_{\text{pistón}} - \rho \cdot S_{\text{salida}} \sqrt{\frac{2 \cdot (P_{\text{aceite}} - P_{\text{ext}})}{\rho}} \right] \cdot \frac{1}{(\forall_{\text{émbolo}} + \forall_{\text{pistón}})}$$

La relación entre la variación de densidad y la variación de presión viene dada en función del módulo de compresibilidad volumétrico, de donde

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\rho}{\beta} \cdot \frac{dP}{dt}$$

$$\frac{dP_{\text{aceite}}}{dt} = \left[-S_{\text{pistón}} \cdot K \cdot \text{sen}(t) - S_{\text{salida}} \sqrt{\frac{2 \cdot (P_{\text{aceite}} - P_{\text{ext}})}{\rho}} \right] \cdot \frac{\beta}{(\forall_{\text{émbolo}} + \forall_{\text{pistón}})}$$

Esta es la ecuación diferencial que da la presión del aceite en función del tiempo. Se ha considerado que, a través de la válvula, el flujo es siempre saliente.



A priori, en esta ecuación, la densidad del aceite se considera la inicial y constante, aunque la mejor manera de afrontar el tema es conocer la ecuación que determina la variación de densidad con la presión.

Véase también que, según el enunciado $\forall_{\text{pistón}} = \frac{S_{\text{pistón}} \cdot h_o}{2} \cdot (1 + \cos(t))$

El valor de la constante K se puede determinar:

$$\frac{\partial \forall_{\text{pistón}}}{\partial t} = \frac{S_{\text{pistón}} \partial h}{\partial t} = S_{\text{pistón}} V_{\text{pistón}};$$

Por otro lado:

$$\frac{\partial \forall_{\text{pistón}}}{\partial t} = \frac{S_{\text{pistón}} h_o}{2} (-\sin(t));$$

$$\frac{S_{\text{pistón}} h_o}{2} (-\sin(t)) = S_{\text{pistón}} K \sin(t); \quad K = -\frac{h_o}{2}$$

2. Cuando la válvula (A) está cerrada y el émbolo se mantiene estático, la presión temporal del aceite es:

$$\forall \frac{\partial p}{\partial t} + \rho \cdot \frac{\partial}{\partial t} \cdot (\forall_{\text{émbolo}} + \forall_{\text{pistón}}) = 0$$

$$\forall \frac{\partial p}{\partial t} + \rho \cdot S_{\text{pistón}} \cdot \frac{\partial h}{\partial t} = 0$$

$$(\forall_{\text{émbolo}} + \forall_{\text{pistón}}) \cdot \frac{dP}{dt} \cdot \frac{\rho}{\beta} + \rho \cdot S_{\text{pistón}} \cdot V_{\text{pistón}} = 0$$

$$\frac{dP}{dt} = - \frac{S_{\text{pistón}} \cdot K \cdot \sin(t) \cdot \beta}{\forall_{\text{émbolo}} + \frac{S_{\text{pistón}} \cdot h_o}{2} \cdot (1 + \cos(t))}$$

Ecuación diferencial del tipo:

$$C = S_{\text{pistón}} \cdot K \cdot \beta$$

$$\frac{dP}{dt} = - \frac{C \cdot \sin(t)}{A + B \cdot \cos(t)}$$

donde:

$$A = \forall_{\text{émbolo}} + \frac{S_{\text{pistón}} \cdot h_o}{2}$$

$$B = \frac{S_{\text{pistón}} \cdot h_o}{2}$$

$$\int_{P_{\text{in}}}^P P = \int_{t=0}^t - \frac{C \cdot \sin(t)}{A + B \cdot \cos(t)} \longrightarrow P - P_{\text{inicial}} = \frac{C}{B} \cdot \ln(A + B \cdot \cos(t))_0^t =$$

$$= \frac{C}{B} \cdot \ln\left(\frac{A + B \cdot \cos(t)}{A + B}\right)$$



Variación temporal de la presión:

$$P = P_{\text{inicial}} + \frac{C}{B} \cdot \ln \left(\frac{A + B \cdot \cos(t)}{A + B} \right)$$

3. Si el aceite se considerase como un fluido incompresible:

$$\rho \cdot \frac{\partial \forall_{\text{émbolo}}}{\partial t} + \rho \cdot \frac{\partial \forall_{\text{pistón}}}{\partial t} = 0$$

$$\rho \cdot \frac{\partial \forall_{\text{émbolo}}}{\partial t} + \rho \cdot S_{\text{pistón}} \cdot V_{\text{pistón}} = 0$$

$$\rho S_{\text{émbolo}} \frac{dy}{dt} + \rho S_{\text{pistón}} K \sin t = 0$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{-S_{\text{pistón}} K \sin t}{S_{\text{émbolo}}}$$

$$\int_{Y_{\text{inicial}}}^{Y_{\text{final}}} dy = \int_{t=0}^t \frac{-S_{\text{pistón}} K \sin t}{S_{\text{émbolo}}} dt$$

$$Y_{\text{final}} - Y_{\text{inicial}} = \frac{S_{\text{pistón}} K}{S_{\text{émbolo}}} [\cos t - 1]$$

Puesto que el nitrógeno es un gas ideal, se tiene:

$$\left(\frac{\forall_{N_2}}{\forall_{N_2 \text{ inicial}}} \right)^\gamma = \frac{P_{N_2 \text{ inicial}}}{P_{N_2}}$$

$$\forall_{N_2} = \left(\frac{P_{N_2 \text{ inicial}}}{P_{N_2}} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \cdot \forall_{N_2 \text{ inicial}}$$

Teniendo presente que

$$\frac{\partial \forall_{\text{émbolo}}}{\partial t} = - \frac{\partial \forall_{N_2}}{\partial t}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\forall_{N_2}}{dt} &= - \frac{d\forall_{\text{émbolo}}}{dt} = -S_{\text{émbolo}} \frac{dy_{\text{émbolo}}}{dt} = S_{\text{pistón}} \frac{dh_{\text{pistón}}}{dt} = S_{\text{pistón}} V_{\text{pistón}} = \\ &= -\forall_{N_2 \text{ inici}} \cdot \frac{1}{\gamma} \cdot \left(\frac{P_{N_2 \text{ inicial}}}{P_{N_2}} \right)^{\left(\frac{1}{\gamma} - 1 \right)} \cdot \frac{P_{N_2 \text{ inicial}}}{P_{N_2}^2} \cdot \frac{dP_{N_2}}{dt} \end{aligned}$$



$$-\forall_{N_2 \text{ inicial}} \cdot \frac{1}{\gamma} \cdot \left(P_{N_2 \text{ inicial}}\right)^{\left(\frac{1}{\gamma}\right)} \cdot \frac{1}{P_{N_2}^{\left(\frac{1}{\gamma}+1\right)}} \cdot \frac{dP_{N_2}}{dt} = S_{\text{pistón}} \cdot V_{\text{pistón}} = S_{\text{pistón}} \cdot K \cdot \sin(t)$$

$$-\forall_{N_2 \text{ inicial}} \frac{1}{\gamma} \cdot \left(P_{N_2 \text{ inicial}}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \cdot \int_{P_{N_2 \text{ inicial}}}^{P_{N_2}} \frac{dP_{N_2}}{P_{N_2}^{\left(\frac{1}{\gamma}+1\right)}} = S_{\text{pistón}} \cdot K \cdot \int_{t=0}^t \sin(t) \cdot dt$$

$$-\forall_{N_2 \text{ inicial}} \frac{1}{\gamma} \left(P_{N_2 \text{ inicial}}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \left[\frac{P_{N_2}^{-\left(\frac{1}{\gamma}+1\right)+1}}{-\left(\frac{1}{\gamma}+1\right)+1} \right]_{P_{N_2 \text{ inicial}}}^{P_{N_2}} = S_{\text{pistón}} K [-\cos t]_0^t$$

$$-\forall_{N_2 \text{ inicial}} \frac{1}{\gamma} \left(P_{N_2 \text{ inicial}}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \frac{P_{N_2}^{-\left(\frac{1}{\gamma}\right)} - P_{N_2 \text{ inicial}}^{-\left(\frac{1}{\gamma}\right)}}{-\frac{1}{\gamma}} = -S_{\text{pistón}} K [\cos t - 1]$$

$$P_{N_2}^{-\left(\frac{1}{\gamma}\right)} = \frac{-S_{\text{pistón}} K [\cos t - 1]}{\forall_{N_2 \text{ inicial}} \left(P_{N_2 \text{ inicial}}\right)^{\frac{1}{\gamma}}} + P_{N_2 \text{ inicial}}^{-\left(\frac{1}{\gamma}\right)}$$

Reordenando, se obtiene:

$$P_{N_2}^{\left(\frac{1}{\gamma}\right)} = \frac{P_{N_2 \text{ inicial}}^{\left(\frac{1}{\gamma}\right)}}{1 - \frac{S_{\text{pistón}} K [\cos t - 1]}{\forall_{N_2 \text{ inicial}}}}$$

ecuación que relaciona la variación de la presión del nitrógeno con el tiempo.

4. Puesto que ahora, al igual que en el caso anterior, el émbolo superior se desplaza libremente, y el aceite se considera como compresible, de la ecuación de continuidad se obtiene:

$$\forall_{(e+p)} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \cdot \frac{\partial}{\partial t} (\forall_{\text{émbolo}} + \forall_{\text{pistón}}) = 0$$

$$(\forall_{\text{émbolo}} + \forall_{\text{pistón}}) \cdot \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \cdot \frac{\partial \forall_{\text{émbolo}}}{\partial t} + \rho \cdot \frac{\partial \forall_{\text{pistón}}}{\partial t} = 0$$

$$(\forall_{\text{émbolo}} + \forall_{\text{pistón}}) \cdot \frac{dP}{dt} \cdot \frac{\rho}{\beta} + \rho \cdot S_{\text{émbolo}} \cdot \frac{dy}{dt} + \rho \cdot S_{\text{pistón}} \cdot V_{\text{pistón}} = 0$$



$$\frac{dP}{dt} = \left[-S_{\text{pistón}} \cdot V_{\text{pistón}} - S_{\text{émbolo}} \cdot \frac{dy_{\text{émbolo}}}{dt} \right] \left(\frac{\beta}{S_{\text{émbolo}} \cdot y_{\text{émbolo}} + \frac{S_{\text{pistón}} \cdot h_o}{2} \cdot (1 + \cos(t))} \right)$$

donde:

$$S_{\text{émbolo}} \cdot \frac{dy_{\text{émbolo}}}{dt} = \frac{\partial \forall_{\text{émbolo}}}{\partial t}$$

Las variables en este caso son: presión del aceite, presión del N_2 , $y_{\text{émbolo}}$, t .

Para un proceso adiabático, la relación presión-volumen del nitrógeno será:

$$P_{N_2} = P_{N_2 \text{ inicial}} \cdot \left(\frac{\forall_{N_2 \text{ inicial}}}{\forall_{N_2}} \right)^\gamma$$

$$\forall_{N_2} = \forall_{N_2 \text{ inicial}} \cdot \left(\frac{P_{N_2 \text{ inicial}}}{P_{N_2}} \right)^{\frac{1}{\gamma}}$$

$$S_{\text{émbolo}} (H - y) = \forall_{N_2 \text{ inicial}} \cdot \left(\frac{P_{N_2 \text{ inicial}}}{P_{N_2}} \right)^{\frac{1}{\gamma}}$$

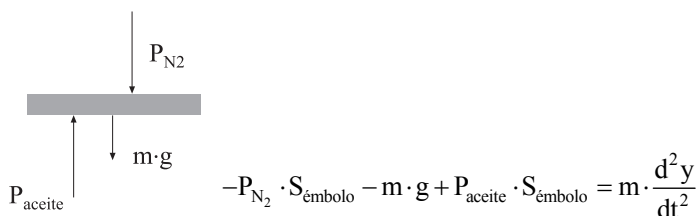
Diferenciando esta ecuación respecto al tiempo, se tiene:

$$\frac{d\forall_{N_2}}{dt} = -S_{\text{émbolo}} \frac{dy}{dt} = -\forall_{N_2 \text{ inicial}} \cdot \frac{1}{\gamma} \cdot \left(\frac{P_{N_2 \text{ inicial}}}{P_{N_2}} \right)^{\frac{1}{\gamma}-1} \cdot \frac{P_{N_2 \text{ inicial}}}{P_{N_2}^2} \cdot \frac{dP_{N_2}}{dt}$$

$$\frac{d\forall_{N_2}}{dt} = S_{\text{émbolo}} \frac{dy}{dt} = \forall_{N_2 \text{ inicial}} \cdot \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{(P_{N_2 \text{ inicial}})^{\frac{1}{\gamma}}}{(P_{N_2})^{\frac{1}{\gamma}+1}} \cdot \frac{dP_{N_2}}{dt}$$

El balance de fuerzas en el émbolo se enuncia del modo siguiente: considérese que el émbolo tiene una masa m .

Fig. 2.2
Diagrama
de fuerzas
del émbolo



sistema de ecuaciones que ha de resolverse conjuntamente y numéricamente.

A continuación, se va a resolver numéricamente el sistema de ecuaciones hallado. Dicho sistema consta de las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales:



$$\frac{dP}{dt} = \left[-S_{\text{pistón}} \cdot V_{\text{pistón}} - S_{\text{émbolo}} \cdot \frac{dy}{dt} \right] \frac{\beta}{\left(S_{\text{émbolo}} \cdot y_{\text{émbolo}} + \frac{S_{\text{pistón}} \cdot h_o}{2} \cdot (1 + \cos(t)) \right)}$$

$$\frac{dP_{N_2}}{dt} = S_{\text{émbolo}} \cdot \frac{dy}{dt} \cdot \left(\frac{1}{\gamma} \cdot \frac{(P_{N_2 \text{ inicial}})^{\frac{1}{\gamma}}}{(P_{N_2})^{\frac{1}{\gamma}+1}} \right)^{-1} \cdot \frac{1}{V_{N_2 \text{ inicial}}}$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = (-P_{N_2} \cdot S_{\text{émbolo}} - m \cdot g + P_{\text{aceite}} \cdot S_{\text{émbolo}}) \cdot m^{-1}$$

Para resolver el sistema establecido, es necesario reducir las ecuaciones a sus homólogas de primer orden para posteriormente integrarlas. Para realizar este proceso, se asigna la derivada de la posición respecto del tiempo como una nueva variable. Esta nueva variable es la velocidad del émbolo:

$$\frac{dy}{dt} = u$$

De esta manera, las ecuaciones que se integrarán serán las siguientes:

$$\frac{dP}{dt} = \left[-S_{\text{pistón}} \cdot V_{\text{pistón}} - S_{\text{émbolo}} \cdot u \right] \frac{\beta}{\left(S_{\text{émbolo}} \cdot y_{\text{émbolo}} + S_{\text{pistón}} \cdot \frac{h_o}{2} \cdot (1 + \cos(t)) \right)}$$

$$\frac{dP_{N_2}}{dt} = S_{\text{émbolo}} \cdot u \cdot \left(\frac{1}{\gamma} \cdot \frac{(P_{N_2 \text{ inicial}})^{\frac{1}{\gamma}}}{(P_{N_2})^{\frac{1}{\gamma}+1}} \right)^{-1} \cdot \frac{1}{V_{N_2 \text{ inicial}}}$$

$$\frac{du}{dt} = (-P_{N_2} \cdot S_{\text{émbolo}} - m \cdot g + P_{\text{aceite}} \cdot S_{\text{émbolo}}) \cdot m^{-1}$$

$$\frac{dy}{dt} = u$$

Además de realizar este cambio de variable con el objetivo de reducir el orden de las ecuaciones diferenciales, la integración numérica requiere definir los valores de cada una de las constantes que componen el sistema. A continuación, se muestran los datos necesarios:

$$h_o = 0.200 \text{ m};$$

$$D_{\text{émbolo}} = 0.120 \text{ m};$$

$$S_{\text{émbolo}} = 0.0113 \text{ m}^2;$$

$$D_{\text{pistón}} = 0.055 \text{ m};$$



$$S_{\text{pistón}} = 0.0024 \text{ m}^2 ;$$

$$V_{\text{pistón}} = -\frac{h_o}{2} \cdot \sin(t) ;$$

$$m = 5 \text{ kg} ;$$

$$g = 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} ;$$

$$\gamma = 1.4$$

$$V_{N_2 \text{ inicial}} = 0.00113 \text{ m}^3$$

Las condiciones iniciales constituyen el punto de partida del sistema analizado. Para un tiempo $t = 0 \text{ s}$, el sistema está en reposo; por tanto, la presión inicial del aceite viene determinada aplicando la segunda ley de Newton en el eje vertical, asumiendo la condición de equilibrio:

$$P_{N_2 \text{ inicial}} \cdot S_{\text{émbolo}} + m \cdot g = P_{\text{aceite inicial}} \cdot S_{\text{émbolo}}$$

La presión inicial del aceite viene determinada por la expresión siguiente:

$$P_{\text{aceite inicial}} = \frac{P_{N_2 \text{ inicial}} \cdot S_{\text{émbolo}} + m \cdot g}{S_{\text{émbolo}}}$$

La presión inicial del nitrógeno es conocida (10 bar) y las demás constantes ya se han definido anteriormente. Sustituyendo los términos por sus valores, se obtiene el valor de la presión del aceite inicial:

$$P_{\text{aceite inicial}} = 10.043 \text{ bar}$$

Además de definir la presión inicial del aceite conociendo previamente la presión inicial del nitrógeno, para integrar correctamente el sistema de ecuaciones diferenciales, también es necesario conocer el valor inicial de la posición y la velocidad del émbolo:

$$y_{\text{inicial}} = 0.65 \text{ m} ; \quad u_{\text{inicial}} = 0 \frac{\text{m}}{\text{s}} . \quad \text{En } t = 0, \text{ el pistón está en reposo.}$$

Una vez definidos todos los datos y las condiciones iniciales, mediante el método de Runge-Kutta de orden 2-3 de forma explícita es posible calcular el valor de cada una de las cuatro variables durante todo el ciclo, es decir, desde $t = 0$ hasta un tiempo final para el cual el émbolo vuelve a la posición inicial y a las mismas condiciones iniciales. Este tiempo final se calcula teniendo en cuenta que la frecuencia angular del pistón es de 1 rad/s . En consecuencia, el período viene determinado por: $T = 2\pi f = 6.28 \text{ s}$.

Si se quiere hacer el cálculo de dos ciclos, el tiempo final será dos veces el período.

Finalmente, se integra el sistema entre el instante inicial $t = 0$ y un tiempo final igual a dos veces el período. Representando las variables, se obtiene la siguiente figura donde se representa la evolución de cada una de las variables a lo largo del tiempo:

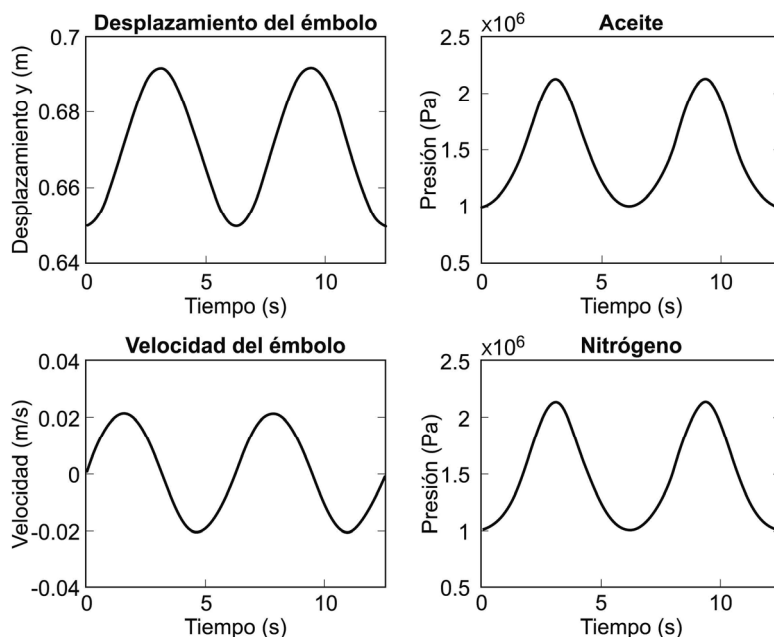


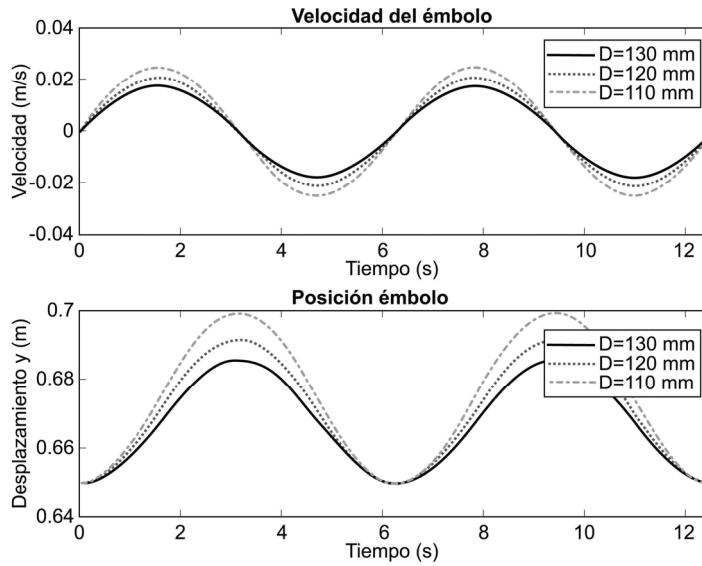
Fig. 2.3
Representación
de las cuatro
variables en
función del
tiempo

Inicialmente, el émbolo se encuentra en posición de reposo y su velocidad es nula. Como consecuencia de la ascensión del pistón, la presión que ejerce el aceite sobre el émbolo aumenta y, por tanto, el volumen de la cámara de nitrógeno disminuye y ello hace incrementar la presión del nitrógeno. Durante el intervalo de tiempo en el que la presión en las dos cámaras aumenta, la velocidad de ascensión del émbolo, que parte del reposo, alcanza un máximo. Este punto se da cuando el desplazamiento es igual a la mitad del recorrido que desarrolla el émbolo desde la posición inicial en que la velocidad es nula y las presiones son mínimas (extremo inferior) hasta otra posición en que la velocidad también es cero pero las presiones son máximas (extremo superior). Una vez alcanzado este extremo, el pistón empieza a descender y, a partir de aquí, el volumen de la cámara de aceite aumenta y, en consecuencia, la presión del aceite disminuye. Esta disminución de la presión del aceite provoca que el émbolo descienda y que la cámara de nitrógeno aumente el volumen, con lo cual disminuye su presión. Durante el descenso, el módulo de la velocidad vuelve a alcanzar un máximo en la misma posición que durante la ascensión.

Después de analizar las variables para un diámetro concreto del émbolo (120 mm), se realizan dos integraciones más de las cuatro variables para un diámetro superior (130 mm) y para un diámetro inferior (110 mm). En la figura 2.4, se visualizan las curvas de velocidad y posición del émbolo para los tres diámetros evaluados.



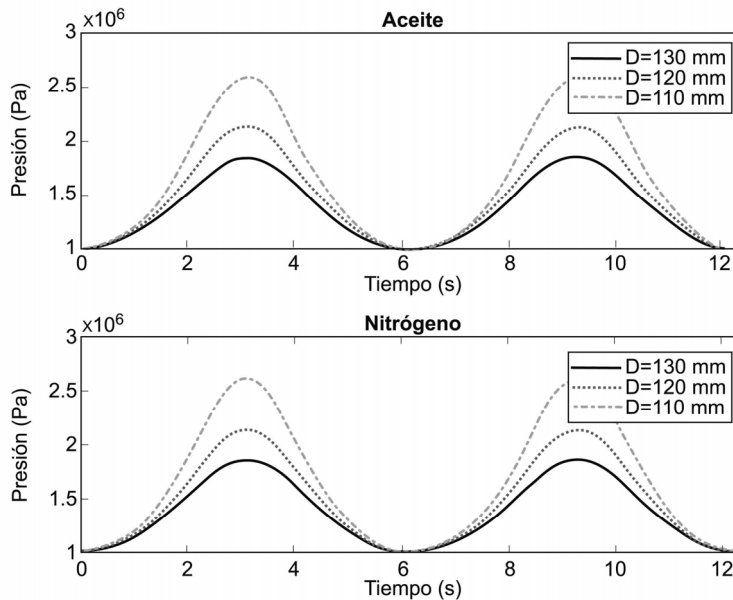
Fig. 2.4
Comparativa de
la velocidad y
la posición del
émbolo en
función del
tiempo para
distintos
diámetros del
émbolo



Obsérvese que la disminución del diámetro provoca que los máximos de velocidad, tanto de ascensión como de descenso, sean mayores y que el desplazamiento máximo alcanzado también sea mayor.

En la figura 2.5, se muestran las tres curvas de presión del aceite y de presión del nitrógeno para cada uno de los tres diámetros estudiados, durante el intervalo de tiempo asignado.

Fig. 2.5
Comparativa de
la presión del
aceite y del
nitrógeno en
función del
tiempo para
distintos
diámetros del
émbolo



La disminución del diámetro del émbolo, hace aumentar la presión, tanto en la cámara de nitrógeno como en la de aceite. A continuación, se indica la presión máxima alcanzada por el nitrógeno y por el aceite para los distintos diámetros del émbolo analizados:

- Si el $D_{\text{émbolo}} = 110 \text{ mm}$, $P_{N_2\text{máx}} = 25.86 \text{ bar}$, $P_{\text{aceite máx}} = 25.91 \text{ bar}$
- Si el $D_{\text{émbolo}} = 120 \text{ mm}$, $P_{N_2\text{máx}} = 21.18 \text{ bar}$, $P_{\text{aceite máx}} = 21.23 \text{ bar}$
- Si el $D_{\text{émbolo}} = 130 \text{ mm}$, $P_{N_2\text{máx}} = 18.44 \text{ bar}$, $P_{\text{aceite máx}} = 18.48 \text{ bar}$



Problema 3

Enunciado

En el esquema de la figura, se muestra la configuración de una suspensión monotubo genérica compuesta por tres cámaras: dos cámaras de aceite (cámara inferior e intermedia) y una cámara de nitrógeno (cámara superior).

Las cámaras de aceite están separadas por un plato cilíndrico fijo con N agujeros cilíndricos, a través de los cuales el aceite circula durante los ciclos de compresión y expansión. El flujo de aceite en estos orificios se considera incompresible y sin cavitación. El coeficiente de descarga necesario para determinar el caudal real circulante se considera variable, en función del número de Reynolds Re . Para este tipo de orificio, este coeficiente viene definido por la siguiente ecuación [1]:

$$C_d = \left(\frac{1}{C_{du}} + \frac{20}{Re_h} \left(1 + 2.25 \frac{e}{D_{ag}} \right) - \frac{0.005 \frac{e}{D_{ag}}}{1 + 7.5 (\log 0.00015 Re_h)^2} \right)^{-1} \quad \text{cuando } 10 \leq Re_h \leq 2 \cdot 10^4$$

$$C_d = C_{du} \quad \text{para } Re_h > 2 \cdot 10^4$$

donde:

$$C_{du} = 0.827 - 0.0085 \frac{e}{D_{ag}}$$

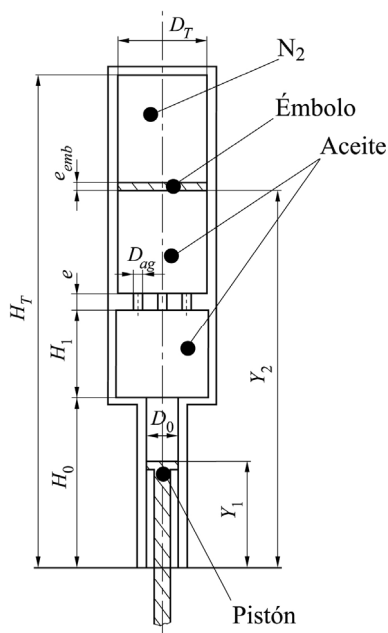
$$Re_h = \frac{\left(1 - \left(\frac{D_{ag}}{D_T} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}}{C_d} Re$$

La cámara superior, en que hay nitrógeno, está separada de la cámara intermedia a través de un émbolo móvil. No se considera la fricción entre el émbolo y el cilindro.

Debajo de la cámara inferior de aceite, hay un pistón cuya velocidad está definida por $V_p = K \sin(\omega t)$, donde K es una constante por determinar y $\omega = 2 \pi f$ es la frecuencia angular de la oscilación. Se considera que la fricción entre el pistón y el cilindro viene dada por el siguiente modelo [2]:

$$F_f = F_C + (F_S - F_C) e^{-\left(\frac{V_p}{V_s} \right)^n} + F_v V_p$$

donde F_C es la fuerza de fricción de Coulomb, F_s es la fuerza de fricción estática, V_s es la velocidad de Stribeck, V_p es la velocidad del pistón, F_v es el coeficiente de fricción viscosa y n es un parámetro de ajuste empírico. Estas constantes son conocidas.



D_0 (m):	Diámetro del pistón
$D_T = D_{emb}$ (m)	Diámetro del émbolo
D_{ag} (m):	Diámetro del agujero
H_0 (m):	Longitud de la cámara del pistón
H_1 (m):	Longitud de la cámara inferior de aceite
H_T (m):	Longitud total del amortiguador
e (m):	Grosor de separación entre las cámaras de aceite
e_{emb} (m):	Grosor del émbolo en suspensión
Y_1 (m):	Posición del pistón, en el instante inicial
Y_2 (m):	Posición del émbolo, en el instante inicial

Fig. 3.1
Esquema de la amortiguación con las variables geométricas asociadas

Se pide:

1. Determinar las ecuaciones que describen la posición del pistón Y_1 , la posición del émbolo Y_2 , la velocidad del émbolo $\dot{Y}_2$, la densidad del aceite en la cámara inferior ρ_1 e intermedia ρ_2 y la presión en las tres cámaras a lo largo del tiempo. Considérese el aceite un fluido compresible con módulo de compresibilidad β .
2. Determinar la expresión que define la fuerza de amortiguamiento realizada por el amortiguador, es decir, la fuerza de oposición al movimiento del pistón. Expresar esta fuerza en función del tiempo o bien, en función de las magnitudes halladas en el apartado anterior.
3. Resolver numéricamente el sistema de ecuaciones diferenciales y representar gráficamente la fuerza de amortiguamiento en función del tiempo y de la velocidad del pistón. Las condiciones iniciales, la geometría y las condiciones de contorno son conocidas, (v. tablas 1, 2 y 3).
4. Para diferentes diámetros del pistón, describir sus consecuencias sobre la fuerza de amortiguamiento.



Comente los resultados obtenidos y grafique las variables necesarias para explicar el comportamiento del sistema.

TABLA 1	
Geometría	
D_0 (m)	0.035
$D_T = D_{emb}$ (m)	0.055
D_{ag} (m)	0.005
H_0 (m)	0.105
H_1 (m)	0.055
H_T (m)	0.310
e (m)	0.010
E_{emb} (m)	0.050
Número de agujeros	7

TABLA 2	
Condiciones de contorno	
g (N/kg)	9.81
$m_2 = m_{emb}$ (kg)	0.1
γ	1.4
β (Pa)	$1.8 \cdot 10^9$
T (K)	298
ρ (kg / m ³) a 298 K	870
μ (Pa · s)	0.0365
K (m/s)	0.0159
$f = \omega / (2\pi)$ (Hz)	20
F_S (N)	20
F_C (N)	10
V_s (m/s)	0.1
n	2

TABLA 3	
Condiciones iniciales	
Y_{1in} (m)	0.040
Y_{2in} (m)	0.230
V_{1in} (m/s)	0
V_{2in} (m/s)	0
P_{1in} (Pa)	$5.0041 \cdot 10^5$
P_{2in} (Pa)	$5.0041 \cdot 10^5$
P_{N2in} (Pa)	$5 \cdot 10^5$
$\forall_{N2in}$ (m ³)	$1.78 \cdot 10^4$

Resolución

Las hipótesis establecidas son:

- Las paredes de la suspensión se establecen como adiabáticas, es decir, no hay transferencia de calor entre el fluido y la pared.
- El nitrógeno (N₂) se considera un gas ideal.
- El aceite se considera compresible.
- El flujo a través de los agujeros existentes entre las cámaras de aceite se considera incompresible y sin cavitación.



- En cada volumen de control, para un instante determinado de tiempo, la densidad en todos los puntos del volumen de control es la misma.
- No se consideran fugas de fluido entre el pistón y el cilindro, ni entre el émbolo y el cilindro.
- La densidad del aceite en cada una de las cámaras es distinta.
- La densidad asociada al caudal másico circulante a través de cada uno de los orificios que unen las dos cámaras de aceite, es igual a la densidad asociada a la masa de aceite de la que procede.

1) Ecuaciones que escriben la posición del pistón Y_1 , la posición del émbolo Y_2 , la velocidad del émbolo V_2 , la densidad del aceite en la cámara inferior ρ_1 e intermedia ρ_2 y la presión en las tres cámaras a lo largo del tiempo.

La posición del pistón puede obtenerse integrando la velocidad V_p entre un instante

inicial y un instante t genérico, ya que $V_p = \frac{dY_1}{dt}$

Si se introduce esta igualdad en la expresión de la velocidad y se integra, se obtiene lo siguiente:

$$\int_{Y_{1in}}^{Y_1} dY_1 = \int_0^t K \sin(\omega t) dt$$

Integrando y aislando Y_1 :

$$Y_1 = \frac{K}{\omega} (1 - \cos(\omega t)) + Y_{1in} \quad (1)$$

Si se fija la altura máxima a la que llega el pistón, Y_{1max} , que será cuando $\omega t = \pi$, es posible hallar el valor de K . Introduciendo estos valores en la ecuación (1), elaborándola y aislando K :

$$K = \frac{Y_{1max} - Y_{1in}}{2} \omega \quad (2)$$

donde $\frac{Y_{1max} - Y_{1in}}{2}$ es la amplitud de la oscilación que se define como A . La constante

K se puede dar como:

$$K = A \omega$$



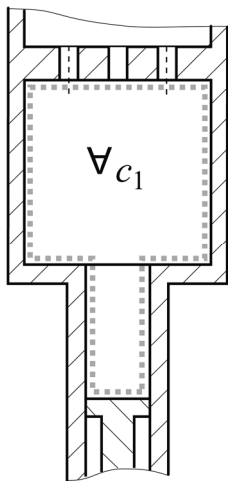
Sustituyendo esta constante en las expresiones que determinan la posición y la velocidad del pistón, estas pueden expresarse del modo siguiente:

$$Y_1 = A(1 - \cos(\omega t)) + Y_{lin} \quad (3)$$

$$V_p = A \omega \sin(\omega t) \quad (4)$$

Aplicando ahora la ecuación de conservación de la masa al volumen de control ∇_{c_1} , (v. figura 3.2), se tiene:

Fig. 3.2
Volumen de control
1 seleccionado



$$0 = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\nabla_{c_1}} \rho \, d\nabla + \oint_{S_c} \rho \, \vec{V} \, d\vec{s}$$

El volumen de control ∇_{c_1} se define como deformable. Bajo la hipótesis de compresibilidad del aceite, el primer término debe tener en cuenta la variación de la densidad del aceite a lo largo del tiempo. Además, aceptando que la densidad del aceite es la misma en cualquiera de los puntos del volumen de control en un instante de tiempo determinado, el primer término de la ecuación se desarrolla de la siguiente manera:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\nabla_{c_1}} \rho \, d\nabla = \frac{\partial}{\partial t} (\rho \nabla) = \nabla_{c_1} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial \nabla_{c_1}}{\partial t}$$

La variación de la densidad a lo largo del tiempo se define partiendo de la definición del módulo de compresibilidad β :

$$\beta = -\nabla \frac{dP}{d\nabla} = -\left(\frac{\nabla}{m}\right) \frac{dP}{d\left(\frac{\nabla}{m}\right)} = -\left(\frac{1}{\rho}\right) \frac{dP}{d\left(\frac{1}{\rho}\right)} = \rho \frac{dP}{d\rho} \quad (5)$$

Reordenado la expresión, se obtiene:

$$\frac{1}{\rho} d\rho = \frac{1}{\beta} dP \quad (6)$$

Mediante el método de variables separables, es posible integrar la ecuación 6 de forma algebraica. Los límites de integración son los siguientes:

- $\rho \in [\rho_0, \rho(t)]$, donde ρ_0 es una densidad inicial y $\rho(t)$ es la densidad en un instante genérico de tiempo.
- $P \in [P_0, P(t)]$, donde P_0 es una presión inicial y $P(t)$ es la presión en un instante genérico de tiempo.

Integrando la ecuación 6:

$$\int_{\rho_0}^{\rho(t)} \frac{1}{\rho} d\rho = \int_{P_0}^{P(t)} \frac{1}{\beta} dP$$

Elaborando la integral:

$$\ln\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right) = \frac{1}{\beta} (P(t) - P_0)$$

Y aislando la densidad para un instante de tiempo genérico:

$$\rho(t) = \rho_0 e^{\frac{1}{\beta}(P(t)-P_0)} \quad (7)$$

La variación de la densidad a lo largo del tiempo se puede obtener diferenciando respecto del tiempo la ecuación 6:

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{\beta} \frac{dP}{dt}$$

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\rho}{\beta} \frac{dP}{dt}$$

O bien derivando respecto del tiempo la expresión 7:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\rho_0}{\beta} e^{\frac{1}{\beta}(P(t)-P_0)} \frac{\partial P}{\partial t}$$

donde $\rho(t) = \rho_0 e^{\frac{1}{\beta}(P(t)-P_0)}$: por tanto:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\rho}{\beta} \frac{\partial P}{\partial t} \quad (8)$$



Se comprueba que las dos maneras son equivalentes. A la densidad y a la presión, se le añade el subíndice 1 para indicar que hacen referencia al volumen de control 1.

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} = \frac{\rho_1}{\beta} \frac{\partial P_1}{\partial t}$$

$$\rho_1 = \rho_0 e^{\frac{1}{\beta}(P_1 - P_0)}$$

A continuación, se analiza el término que tiene que ver con la variación del volumen de control a lo largo del tiempo, $\frac{\partial \forall_{c_1}}{\partial t}$. Si $\forall_{c_1} = S_0(H_0 - Y_1) + S_T H_1$, su variación respecto del tiempo es:

$$\frac{\partial \forall_{c_1}}{\partial t} = -S_0 \frac{\partial Y_1}{\partial t}$$

La variación de Y_1 respecto del tiempo, es la velocidad del pistón V_p definida en la ecuación 4:

$$\frac{\partial Y_1}{\partial t} = A \omega \sin(\omega t)$$

En consecuencia, el primer término de la ecuación de continuidad queda de la siguiente manera:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\forall_{c_1}} \rho d\forall = \forall_{c_1} \frac{\rho_1}{\beta} \frac{\partial P_1}{\partial t} - \rho_1 S_0 A \omega \sin(\omega t)$$

donde:

$$\forall_{c_1} = S_0(H_0 - Y_1) + S_T H_1$$

$$\rho_1 = \rho_0 e^{\frac{1}{\beta}(P_1 - P_0)}$$

El segundo término de la ecuación de continuidad refleja los flujos de salida o entrada de masa en el volumen de control a través de las respectivas superficies donde exista flujo. En el volumen de control estudiado, las superficies de entrada o de salida de flujo son las definidas por los agujeros. En la carrera de compresión, los flujos de masa son de salida. En cambio, en la carrera de expansión, los flujos de masa son de entrada. Analizando la carrera de compresión y teniendo en cuenta que la densidad no depende del diferencial de superficie escogido en las superficies de salida, el segundo término de la ecuación de continuidad resulta:



$$\oint_{S_c} \rho \vec{V} d\vec{s} = \rho \int_{S_s} V ds$$

Teniendo en cuenta que la integral a lo largo de las superficies de salida de $V ds$ hace referencia al caudal total circulante a través de todos los agujeros, este segundo término se puede expresar como:

$$\rho \int_{S_s} V ds = \rho N Q_{ag}$$

donde N es el número de agujeros que hay en el plato cilíndrico y Q_{ag} es el caudal que pasaría a través de uno de los agujeros.

En este caso, se analiza todo el movimiento completo: subida y bajada. El signo del término de flujo dependerá de la diferencia de presiones que haya entre las cámaras 1 y 2. Por ello, se define la función siguiente, que fijará este signo:

$$\text{sgn}_1(\Delta P) = \begin{cases} 1 & \text{si } P_1 - P_2 > 0 \\ -1 & \text{si } P_1 - P_2 < 0 \end{cases}$$

Entonces:

$$\oint_{S_c} \rho \vec{V} d\vec{s} = \text{sgn}_1(\Delta P) \rho_i N Q_{ag}$$

Además, cabe destacar que, para este término de flujo de salida o entrada, la densidad será igual a la de la cámara de la cual procede el flujo másico. Por tanto, el subíndice i se define como:

$$i = \begin{cases} 1 & \text{si } P_1 - P_2 > 0 \\ 2 & \text{si } P_1 - P_2 < 0 \end{cases}$$

Incorporando los términos analizados en la ecuación de continuidad, también denominada *ecuación de la conservación de la masa*, se obtiene la siguiente ecuación diferencial:

$$0 = (S_0 (H_0 - Y_1) + S_T H_1) \frac{\rho_1}{\beta} \frac{\partial P_1}{\partial t} - \rho_1 S_0 A \omega \sin(\omega t) + \text{sgn}_1(\Delta P) \rho_i N Q_{ag} \quad (9)$$

donde:

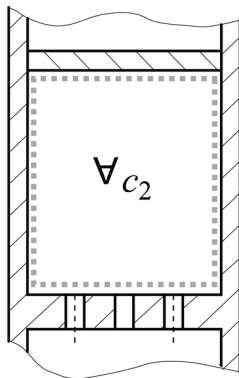
$$\rho_i = \begin{cases} \rho_1 & \text{si } P_1 - P_2 > 0 \\ \rho_2 & \text{si } P_1 - P_2 < 0 \end{cases}$$



La ecuación diferencial 9 no está completamente definida, porque tanto la presión P_1 como el caudal Q_{ag} son incógnitas. Este caudal depende de la diferencia de presiones entre ambas cámaras, es decir, es función de la presión en las cámaras 1 y 2. Posteriormente, se determinará la expresión que lo defina. Antes, se pretende encontrar una relación entre las presiones de los dos volúmenes de control que contienen aceite.

De nuevo, aplicando la ecuación de conservación de la masa al volumen de control $\forall_{c_2}$, (v.fig. 3.3), se obtiene:

Fig. 3.3
Volumen de control
2 seleccionado.
(cámara
intermedia)



$$0 = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_{c_2}} \rho \, dV + \oint_{S_c} \rho \, \vec{V} \, ds$$

El primer término se desarrolla de la misma manera que en el volumen de control 1 de este mismo apartado.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_{c_2}} \rho \, dV = V_{c_2} \frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \rho_2 \frac{\partial V_{c_2}}{\partial t}$$

donde:

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial t} = \frac{\rho_2}{\beta} \frac{\partial P_2}{\partial t}$$

$$\rho_2 = \rho_0 e^{\frac{1}{\beta}(P_2 - P_0)}$$

$$V_{c_2} = S_T (Y_2 - (H_0 + H_1 + e))$$

$$\frac{\partial V_{c_2}}{\partial t} = S_T \frac{\partial Y_2}{\partial t}$$



El segundo término de la ecuación de continuidad corresponde al flujo másico de aceite entrante al volumen de control. Si solo se analizara la subida del pistón, este término tendría signo negativo ya que el caudal sería entrante:

$$\oint_{S_c} \rho \vec{V} d\vec{s} = - \rho_1 N Q_{ag}$$

Si se analiza todo el movimiento completo, de subida y de bajada, entonces el signo del término de los flujos dependerá de la diferencia de presiones que haya entre la cámara 1 y la 2. Por tanto, en el volumen de control 2, también se define la función siguiente que fijará este signo:

$$\text{sgn}_2(\Delta P) = \begin{cases} 1 & \text{si } P_1 - P_2 < 0 \\ -1 & \text{si } P_1 - P_2 > 0 \end{cases}$$

de donde:

$$\oint_{S_c} \rho \vec{V} d\vec{s} = \text{sgn}_2(\Delta P) \rho_i N Q_{ag}$$

Introduciendo los términos analizados en la ecuación de continuidad se obtiene la siguiente ecuación diferencial:

$$0 = S_T (Y_2 - (H_0 + H_1 + e)) \frac{\rho_2}{\beta} \frac{\partial P_2}{\partial t} + \rho_2 S_T \frac{\partial Y_2}{\partial t} + \text{sgn}_2(\Delta P) \rho_i N Q_{ag} \quad (10)$$

donde:

$$\rho_i = \begin{cases} \rho_1 & \text{si } P_1 - P_2 > 0 \\ \rho_2 & \text{si } P_1 - P_2 < 0 \end{cases}$$

El paso siguiente consistirá en definir el caudal circulante entre las dos cámaras, Q_{ag} .

Se aplica la ecuación de la energía en su forma más elemental, eso es, la ecuación de Bernouilli, entre los puntos 1 y 2, y a lo largo de uno de los agujeros que separan las dos cámaras de aceite, (v. figuras 3.1 y 3.4).

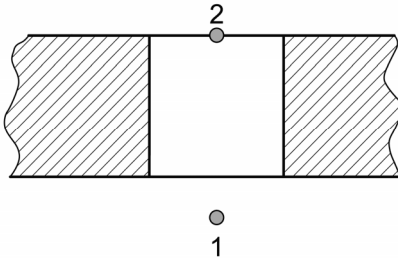


Fig. 3.4
Agujero seccionado
con los puntos de
estudio a través del
cual pasa un caudal

$$\frac{P_1}{\rho_1} + \frac{V_1^2}{2} + g z_1 + u_1 = \frac{P_2}{\rho_{2s}} + \frac{V_2^2}{2} + g z_2 + u_2 \quad (11)$$



- V_1 : velocidad del fluido justo antes de la entrada, en que la sección es $\pi \frac{D_T^2}{4}$.
- V_2 : velocidad del fluido justo en la salida en que la sección es $\pi \frac{D_{ag}^2}{4}$.
- P_1, P_2 : presiones de las cámaras 1 y 2 de aceite.
- $gz_1 \cong gz_2$. La diferencia de energía potencial debida a las alturas se considera despreciable.
- $u_1 = u_2$. La diferencia de energías internas es nula, porque se considera que las dos cámaras están a la misma temperatura.
- ρ_1 : densidad del fluido en la entrada del agujero. Será igual a la densidad del aceite en la cámara 1.
- ρ_{2s} : densidad del fluido justo en el punto de salida del agujero, en la hipótesis de que el flujo de salida del agujero, o al mismo tiempo, el flujo de entrada en la cámara 2 de aceite, tiene la misma densidad que la masa de aceite de la cámara del cual procede. Se establece que $\rho_{2s} = \rho_1$

Mediante la aplicación de la ecuación de continuidad en régimen permanente, entre los puntos 1 y 2 de la figura 3.4, se establece:

$$\frac{\rho_1 V_1 \pi D_T^2}{4} = N \frac{\rho_1 V_2 \pi D_{ag}^2}{4}$$

$$V_1 = \frac{D_{ag}^2}{D_T^2} N V_2$$

donde N es el número de agujeros

Introduciendo estos términos en la ecuación 11, queda:

$$\frac{P_1}{\rho_1} + \frac{\left(\frac{D_{ag}}{D_T}\right)^4 N^2 V_2^2}{2} = \frac{P_2}{\rho_1} + \frac{V_2^2}{2}$$

Aislado V_2 :

$$V_2 = \sqrt{\frac{2(P_1 - P_2)}{\rho_1 \left(1 - N^2 \left(\frac{D_{ag}}{D_T}\right)^4\right)}}$$



La velocidad V_2 es teórica. Si esta velocidad se multiplica por la sección, se obtiene el caudal teórico que fluye a través de cada agujero:

$$Q_{\text{teorico}} = S_{\text{ag}} \sqrt{\frac{2(P_1 - P_2)}{\rho_1 \left(1 - N^2 \left(\frac{D_{\text{ag}}}{D_T} \right)^4 \right)}}$$

Por ello, se debe multiplicar por el coeficiente de descarga, C_d . De este modo, se obtiene el caudal real circulante a través de cada orificio:

$$Q_{\text{ag}} = C_d S_{\text{ag}} \sqrt{\frac{2(P_1 - P_2)}{\rho_1 \left(1 - N^2 \left(\frac{D_{\text{ag}}}{D_T} \right)^4 \right)}}$$

Esta expresión del caudal, que incluye una densidad ρ_1 , es válida si el pistón sube. Por este motivo, para que la expresión sea correcta en todo el movimiento del pistón, se introduce el subíndice i , que tiene el mismo significado que el de las ecuaciones 9 y 10. Cabe destacar también que, en la bajada, la diferencia de presión viene definida por $(P_2 - P_1)$; por tanto, se introduce la función $\text{sgn}_1(\Delta P)$, definida anteriormente.

Finalmente, la expresión que define el caudal se da como:

$$Q_{\text{ag}} = C_d S_{\text{ag}} \sqrt{\frac{2 \text{sgn}_1(\Delta P) (P_1 - P_2)}{\rho_i \left(1 - N^2 \left(\frac{D_{\text{ag}}}{D_T} \right)^4 \right)}}$$

La ecuación que define el coeficiente de descarga C_d para agujeros cilíndricos, con una relación de longitud y diámetro $2 \leq \frac{l}{d} \leq 10$, viene dada en el enunciado.

$$C_d = \left(\frac{1}{C_{\text{du}}} + \frac{20}{\text{Re}_h} \left(1 + 2.25 \frac{e}{D_{\text{ag}}} \right) - \frac{0.005 \frac{e}{D_{\text{ag}}}}{1 + 7.5 (\log 0.00015 \text{Re}_h)^2} \right)^{-1} \quad \text{para } 10 \leq \text{Re}_h \leq 2 \cdot 10^4$$

$$C_d = C_{\text{du}} \quad \text{si } \text{Re}_h > 2 \cdot 10^4$$

donde:

$$C_{\text{du}} = 0.827 - 0.0085 \frac{e}{D_{\text{ag}}}$$



$$Re_h = \frac{\left(1 - \left(\frac{D_{ag}}{D_T}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}}{C_d} Re$$

Esta ecuación no lineal depende del número de Reynolds ($Re = \frac{\rho D_{ag} V}{\mu} = \frac{4\rho Q_{ag}}{\pi\mu D_{ag}}$), el

cual, a su vez, depende del caudal circulante a través de cada orificio. Por ello, para cada instante de tiempo, el coeficiente de descarga varía, además, su cálculo se tiene que realizar numéricamente como consecuencia de la no linealidad presentada.

Una vez determinado el caudal circulante a través de los agujeros, es necesario hallar otra de las incógnitas que presenta el sistema: la posición del émbolo en suspensión.

Con este fin, se aplica la segunda ley de Newton al émbolo:

$$\sum F_y = m_2 a_2$$

$\sum F_y$: sumatorio de fuerzas aplicadas al émbolo en la dirección del eje y.

m_2 : masa del émbolo

a_2 : aceleración del émbolo

Para hallar el sumatorio de fuerzas $\sum F_y$, deben tenerse en cuenta las fuerzas debidas a la presión de las dos cámaras en contacto con el émbolo. La fuerza de fricción existente entre la superficie del émbolo y el cilindro por el cual se desplaza no se tiene en cuenta.

S_{emb} : superficie del émbolo en contacto con cada uno de los fluidos en contacto.

P_2 : presión a que está sometido el aceite en la cámara intermedia y, por ende, presión que ejerce el aceite sobre el émbolo.

$$\sum F_y = P_2 S_{emb} - P_{N_2} S_{emb} - m_2 g \quad (12)$$

La aceleración del émbolo, a_2 , se puede expresar como $a_2 = \frac{\partial^2 Y_2}{\partial t^2}$. Introduciendo la

aceleración y el sumatorio de fuerzas (v. expresión 12), en la ecuación definida por la segunda ley de Newton resulta:



$$P_2 S_{\text{emb}} - P_{N_2} S_{\text{emb}} - m_2 g = m_2 \frac{\partial^2 Y_2}{\partial t^2} \quad (13)$$

De esta última ecuación, la presión de la cámara de nitrógeno no está definida. En la hipótesis de que el nitrógeno sigue un proceso adiabático con constante γ , se podrá hallar la presión de la cámara de este gas a lo largo del tiempo. La ecuación que caracteriza un proceso de este tipo es la siguiente:

$$P_{1g} \forall_{1g}^\gamma = P_{2g} \forall_{2g}^\gamma \quad (14)$$

P_{1g} : presión del gas en un instante inicial

$\forall_{1g}$: volumen de gas en un instante inicial

P_{2g} : presión del gas en un instante posterior

$\forall_{2g}$: volumen de gas en un instante posterior

La presión P_{1g} , presión inicial del nitrógeno ($P_{1g} = P_{N_2 \text{ in}}$), y el volumen $\forall_{1g}$, volumen inicial de la cámara de nitrógeno ($\forall_{1g} = \forall_{N_2 \text{ in}}$), se consideran conocidos para el análisis actual.

El volumen $\forall_{2g}$, volumen de nitrógeno en un instante genérico ($\forall_{2g} = \forall_{N_2}$), se puede definir a partir de la geometría de la cámara y presentarlo en función de la posición del émbolo. En consecuencia, la expresión que define este volumen es la siguiente:

$$\forall_{N_2} = S_T (H_T - Y_2 - e_{\text{emb}}) \quad (15)$$

La presión P_{2g} es la presión de la cámara de nitrógeno en este caso, para un instante genérico de tiempo, ($P_{2g} = P_{N_2}$).

Sustituyendo el volumen $\forall_{N_2}$ en la ecuación 14 y aislando la presión P_2 , es posible hallar la variación de presión en la cámara de nitrógeno, P_{N_2} , a lo largo del tiempo:

$$P_{2g} = P_{1g} \left(\frac{\forall_{1g}}{S_T (H_T - Y_2 - e_{\text{emb}})} \right)^\gamma$$

Si $P_{2g} = P_{N_2}$, $\forall_{1g} = \forall_{N_2 \text{ in}}$ y $P_{1g} = P_{N_2 \text{ in}}$, la expresión anterior se reescribe como:

$$P_{N_2} = P_{N_2 \text{ in}} \left(\frac{\forall_{N_2 \text{ in}}}{S_T (H_T - Y_2 - e_{\text{emb}})} \right)^\gamma \quad (16)$$

de donde:



$$\forall_{N_2in} = S_T (H_T - Y_{2in} - e_{emb})$$

Siendo Y_{2in} la posición inicial del émbolo.

Una vez definida la presión de la cámara de nitrógeno, la ecuación 13 ya queda completamente definida.

Mediante el desarrollo realizado, se llega a un sistema de ecuaciones diferenciales definido por el conjunto de ecuaciones 9, 10, 13 y 16:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = (S_0 (H_0 - Y_1) + S_T H_1) \frac{\rho_1}{\beta} \frac{\partial P_1}{\partial t} - \rho_1 S_0 A \omega \sin(\omega t) + \text{sgn}_1(\Delta P) \rho_i N Q_{ag} \\ 0 = S_T (Y_2 - (H_0 + H_1 + e)) \frac{\rho_2}{\beta} \frac{\partial P_2}{\partial t} + \rho_2 S_T \frac{\partial Y_2}{\partial t} + \text{sgn}_2(\Delta P) \rho_i N Q_{ag} \\ P_2 S_{emb} - P_{N_2} S_{emb} - m_2 g = m_2 \frac{\partial^2 Y_2}{\partial t^2} \\ P_{N_2} = P_{N_2in} \left(\frac{\forall_{N_2in}}{S_T (H_T - Y_2 - e_{emb})} \right)^\gamma \end{array} \right. \quad (17)$$

donde:

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_{ag} = C_d S_{ag} \sqrt{\frac{2 \text{sgn}_1(\Delta P) (P_1 - P_2)}{\rho_i \left(1 - N^2 \left(\frac{D_{ag}}{D_T} \right)^4 \right)}} \end{array} \right.$$

$$\rho_i = \begin{cases} \rho_1 & \text{si } P_1 - P_2 > 0 \\ \rho_2 & \text{si } P_1 - P_2 < 0 \end{cases}$$

$$\rho_1 = \rho_0 e^{\frac{1}{\beta}(P_1 - P_0)}$$

$$\rho_2 = \rho_0 e^{\frac{1}{\beta}(P_2 - P_0)}$$

$$\text{sgn}_1(\Delta P) = \begin{cases} 1 & \text{si } P_1 - P_2 > 0 \\ -1 & \text{si } P_1 - P_2 < 0 \end{cases}$$

$$\text{sgn}_2(\Delta P) = \begin{cases} 1 & \text{si } P_1 - P_2 < 0 \\ -1 & \text{si } P_1 - P_2 > 0 \end{cases}$$



$$Y_1 = \frac{K}{\omega} (1 - \cos(\omega t)) + Y_{1in}$$

El sistema de ecuaciones presentado se debe resolver numéricamente. En el tercer apartado de este problema, se indica el modo de resolución y los resultados que se exigen en el enunciado.

2) Fuerza de amortiguamiento realizada por el amortiguador

La fuerza de amortiguamiento se define como la fuerza de oposición al movimiento del pistón. Sobre el pistón, una vez iniciado el movimiento, actúa la fuerza debida al incremento o al decremento de la presión respecto al estado inicial y la fuerza asociada a la fricción entre el pistón y el cilindro. En consecuencia, esta fuerza puede expresarse como:

$$F_{amort} = (P_1 - P_{1in}) S_0 + F_{fr:piston-cil} \quad (18)$$

$F_{fr:piston-cil}$: fuerza de fricción entre el pistón y el cilindro.

La fuerza de fricción puede posible obtenerse mediante el modelo que se presenta en el enunciado.

$$F_{fr:piston-cil} = F_C + (F_S - F_C) e^{-\left(\frac{V_p}{V_s}\right)^n} + F_v V_p$$

Exceptuando la velocidad del pistón V_p , las demás constantes (F_C, F_S, F_v, n, V_s) se hallan de forma experimental. Para este ejercicio, los valores presentados, (v. tabla 2), se suponen conocidos.

La fuerza de amortiguamiento, (v. expresión 18) no puede definirse de forma algebraica únicamente en función del tiempo porque, para hallar la presión en la cámara inferior de aceite, es necesario resolver numéricamente el sistema de ecuaciones diferenciales. En consecuencia, la fuerza de amortiguamiento se ha definido en función de la presión P_1 y la velocidad V_p . Una vez hallada la presión de forma numérica, es decir, obteniendo un vector* de presión para diferentes instantes de tiempo, sí es posible expresar la fuerza de amortiguamiento en función del tiempo aunque solo sea de forma gráfica.

*En programación, se le denomina *vector* a un conjunto de valores representados en una matriz (1xN) o (Nx1) en que N es el número de elementos. Recuérdese que la presión es un escalar, así que no tiene sentido referirse matemáticamente a esta magnitud como un vector con módulo, dirección y sentido.



3) Resolución numérica del sistema de ecuaciones. Representación gráfica de la fuerza de amortiguamiento.

La resolución numérica se va a llevar a cabo mediante el software de programación MATLAB®.

Bajo la hipótesis de compresibilidad del aceite, las soluciones de las ecuaciones desarrolladas no pueden hallarse de forma directa, es decir, no pueden determinarse expresiones algebraicas que caractericen la posición del émbolo, las presiones de las cámaras, y el caudal circulante a través de los agujeros. Ello es debido a que el sistema resultante es un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales 17, que requieren una integración numérica.

Con este objetivo, es necesario definir la geometría, las propiedades, las condiciones de contorno y las condiciones iniciales, (v. tablas 1,2 y 3).

La resolución de este sistema se ha realizado utilizando uno de los métodos de integración numérica proporcionados por el software de MATLAB®, “ode23s” [3], que es un método numérico de orden 2-3, y es una modificación del algoritmo definido por Rosenbrock. Este paquete permite solucionar ecuaciones diferenciales rígidas, es decir, aquellas que presenten inestabilidades en intervalos muy concretos.

El entorno de MATLAB® ofrece más alternativas para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales, como son los métodos de Runge-Kutta de orden 4-5, o de orden 2-3.

Para proceder a la resolución, y con el fin de hallar las magnitudes en función del tiempo, se han de definir las ecuaciones de manera que los únicos parámetros incógnita sean estas variables o su primera derivada respecto del tiempo. Así, el sistema de ecuaciones 17 deberá expresarse como sigue:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial P_1}{\partial t} = \frac{(\rho_1 S_0 A \omega \sin(\omega t) - \text{sgn}_1(\Delta P) \rho_i N Q_{ag})}{(S_0 (H_0 - Y_1) + S_T H_1) \frac{\rho_1}{\beta}} \\ \frac{\partial P_2}{\partial t} = \frac{\left(-\rho_2 S_T \frac{\partial Y_2}{\partial t} - \text{sgn}_2(\Delta P) \rho_i N Q_{ag} \right)}{S_T (Y_2 - (H_0 + H_1 + e)) \frac{\rho_2}{\beta}} \\ \frac{\partial Y_2}{\partial t} = V_2 \\ \frac{\partial V_{embolo}}{\partial t} = \frac{\partial^2 Y_2}{\partial t^2} = \frac{(P_2 S_{emb} - P_{N_2} S_{emb} \pm F_{fr. emb-cil})}{m_2} \\ P_{N_2} = P_{N_2 in} \left(\frac{V_{N_2 in}}{S_T (H_T - Y_2 - e_{emb})} \right)^\gamma \end{array} \right. \quad (19)$$

Este sistema expresado de forma genérica para la subida y para la bajada, presenta diferentes condiciones iniciales para la carrera de compresión o expansión. La integración se realizará en dos partes. En la primera, se integrará la parte del período correspondiente a la compresión y, en la segunda, se integrará la expansión. En la primera, las condiciones iniciales corresponderán a las fijadas y, en la segunda, las condiciones iniciales serán las finales de la primera parte del período.

Para integrar el sistema de ecuaciones diferenciales, es necesario sustituir el valor de los coeficientes y términos de estas ecuaciones, (propiedades físicas, geometría, etc.) ya que, como se ha dicho anteriormente, la integración no puede ser algebraica. Entre estos factores, el coeficiente de descarga debe determinarse de forma numérica para cada incremento de tiempo. Este es necesario para calcular el caudal circulante y dejar definido el sistema para cualquier instante de tiempo.

La estructura utilizada para la resolución numérica se expone en los puntos siguientes:

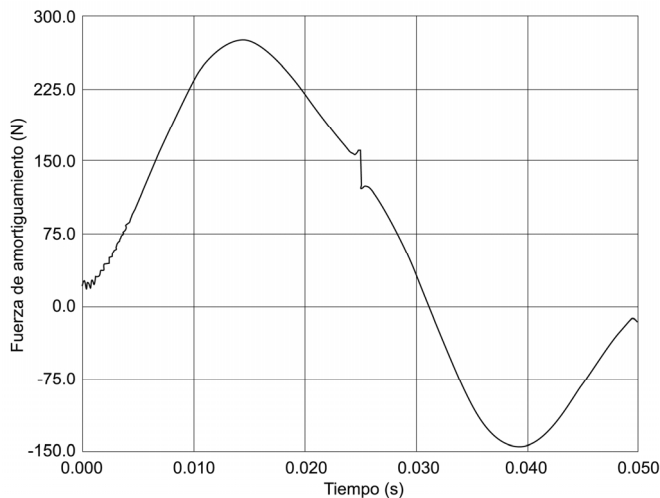
- 1- Introducción de datos: geometría, propiedades físicas, condiciones de contorno y condiciones iniciales.
- 2- Definición de parámetros de integración en la compresión: intervalos e incrementos de tiempo, error absoluto y relativo, establecimiento del método a utilizar.
- 3- Cálculo de $Y_1, Y_2, V_1, V_2, P_1, P_2$ en el período de compresión: para cada incremento de tiempo, se calculan las densidades en las dos cámaras, el coeficiente de descarga y todos los parámetros para que el sistema esté definido. Este bloque se realiza a través de la función “ode23s” de MATLAB®. Como variables de salida de esta función, solo habrá $Y_1, Y_2, V_1, V_2, P_1, P_2$, a pesar de que en el proceso de cálculo se hayan determinado otras variables, como el coeficiente de descarga, P_{N_2} , y las densidades del aceite en cada cámara, así como la del nitrógeno.
- 4- Cálculo del resto de magnitudes en la compresión: se calculan de nuevo la P_{N_2} , las densidades, el número de Reynolds, el coeficiente de descarga, etc.
- 5- Asignación de unas nuevas condiciones iniciales para la expansión: las condiciones finales de la subida del pistón pasan a ser las condiciones iniciales en la bajada.
- 6- Definición de parámetros de integración en la expansión: intervalos e incrementos de tiempo, error absoluto y relativo, establecimiento del método que utilizar.
- 7- Cálculo de $Y_1, Y_2, V_1, V_2, P_1, P_2$ y del resto de magnitudes en la expansión, tal como se ha hecho en los puntos 3 y 4, pero con las nuevas condiciones iniciales.
- 8- Procedimientos finales: unir los vectores de las variables calculadas en la compresión y la expansión y, finalmente, calcular la fuerza de amortiguamiento tras haber hallado las magnitudes que permiten caracterizarla.



- 9- Representación gráfica: una vez halladas todas las variables y guardadas en forma de vectores, se representan gráficamente aquellas que se necesiten.

Una vez definido el código en MATLAB®, implementando todos los puntos mencionados, se obtiene que la fuerza de amortiguamiento presenta la siguiente evolución a lo largo del tiempo, (v. fig. 3.5):

Fig. 3.5
Fuerza de
amortiguamiento
en función
del tiempo



La fuerza de amortiguamiento tiene asociada tanto la fuerza debida a la presión en la cámara inferior como la fuerza de rozamiento entre el cilindro y el pistón. Según la influencia que tengan estos factores, la fuerza de amortiguamiento describe una evolución determinada.

En el instante inicial ($t = 0$), el pistón tiene una posición determinada y, para que empiece a moverse, debe superarse la fuerza de fricción estática. Por ello, en este instante de tiempo, la fuerza de amortiguamiento efectuada es de 20 N. A partir de este punto, a medida que el pistón sube y su velocidad aumenta, la presión en las tres cámaras se incrementa, el caudal circulante a través de los agujeros también aumenta y, por tanto, debe haber una diferencia de presión mayor entre las dos cámaras de aceite, (v. fig. 3.6). Cuando la velocidad positiva deja de aumentar y empieza a disminuir hasta que es nula, el caudal circulante también empieza a disminuir y, en consecuencia, la diferencia de presiones entre las dos cámaras de aceite es menor. Sin embargo, el pico de presión en la cámara inferior de aceite se produce poco después (en $t = 0.0149$ s) de que la velocidad del pistón alcance su máximo y que el caudal circulante sea máximo, lo cual sucede para ($t = 0.0125$ s). Este retardo temporal se produce porque, a pesar de que el caudal circulante sea menor respecto al que existía cuando el pistón estaba acelerando, el volumen de fluido en la cámara inferior de aceite, sigue disminuyendo, con lo cual su presión sigue aumentando. Esto último hace que la presión en las cámaras superior e intermedia también siga aumentando, aunque la presión en la cámara inferior es, en todo momento, mayor que en las demás. En cuanto a la cámara superior, es decir, la



presión del nitrógeno, la curva coincide con la presión de la cámara intermedia, de aceite. Este hecho se debe a que la masa del émbolo es pequeña.

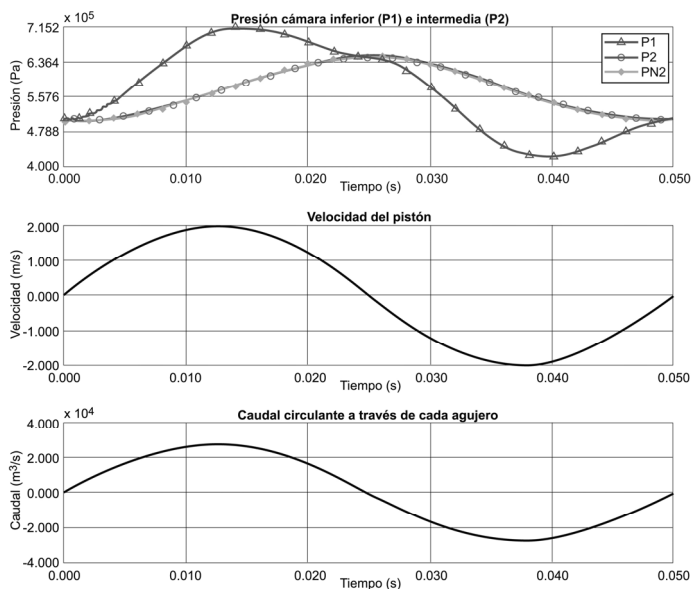


Fig. 3.6
Presiones (P1, P2, PN2), velocidad del pistón y caudal circulante en función del tiempo

Si se compara la gráfica de presión de la cámara inferior, (v. fig. 3.6) con la fuerza de amortiguamiento, (v. fig. 3.5), se observa que presentan la misma forma. Los máximos y los mínimos se dan prácticamente en los mismos instantes de tiempo y su curvatura es muy parecida. A los 0.025 segundos, en cambio, se observa un cambio repentino en la fuerza de amortiguamiento. Ello se produce cuando el pistón está en el punto muerto superior, ($V_p = 0$) y solo actúa la fuerza de rozamiento estática, ya que la diferencia de presión entre las dos cámaras de aceite es nula. Si la presión en las dos cámaras de aceite es la misma, el caudal circulante a través de los agujeros que las separa es nulo.

A medida que el pistón baja, a partir de la mitad del período, la fuerza de amortiguamiento también aumenta negativamente. En esta etapa, el pico se da también en el mismo instante que lo hace la presión.

En estas condiciones, se concluye que la fuerza debida a la presión es la que tiene mayor peso sobre la fuerza de amortiguamiento, excepto cuando la velocidad del pistón es nula, en que actúa únicamente la fricción estática.

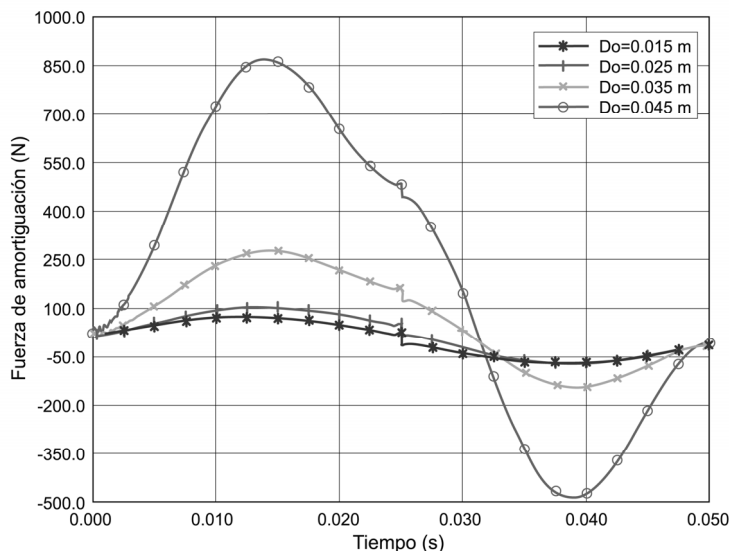
Cabe destacar que las pequeñas oscilaciones que se observan en el instante inicial se deben a la inestabilidad que presenta la resolución numérica del sistema de ecuaciones.



4) Fuerza de amortiguamiento para diferentes diámetros del pistón

Realizando la misma resolución numérica y representando la fuerza de amortiguamiento para diferentes diámetros del pistón, se obtienen las soluciones representadas en la figura 3.7.

Fig. 3.7
Fuerza de
amortiguamiento
en función del
tiempo para
distintos diámetros
del pistón



Obsérvese que, si el diámetro del pistón es mayor, la fuerza de amortiguamiento aumenta tanto en la compresión como en la expansión, de forma positiva o negativa, respectivamente. Este hecho se debe a que, si aumenta el diámetro, el caudal circulante a través de los agujeros es superior y, por tanto, la diferencia de presión entre las dos cámaras debe ser mayor. A continuación, se muestran las fuerzas de amortiguamiento máximas alcanzadas junto con el tiempo y el caudal circulante por cada agujero asociado a esta fuerza para diferentes diámetros del pistón:

- Con un diámetro del pistón de 0.015 m:

$$F_{\text{amortmax}} = 72.45 \text{ N}, Q_{\text{ag}} = 5.051 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3/\text{s}, t = 0.0126 \text{ s}$$

- Con un diámetro del pistón de 0.025 m:

$$F_{\text{amortmax}} = 105.01 \text{ N}, Q_{\text{ag}} = 13.83 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3/\text{s}, t = 0.0138 \text{ s}$$

- Con un diámetro del pistón de 0.035 m:

$$F_{\text{amortmax}} = 274.67 \text{ N}, Q_{\text{ag}} = 26.78 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3/\text{s}, t = 0.0143 \text{ s}$$

- Con un diámetro del pistón de 0.045 m:

$$F_{\text{amortmax}} = 868.39 \text{ N}, Q_{\text{ag}} = 44.63 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3/\text{s}, t = 0.0140 \text{ s}$$

Si el diámetro del pistón es menor que los que se acaban de presentar, la fuerza asociada a la fricción tiene mayor influencia que la fuerza debida a la presión. En consecuencia, los máximos y los mínimos absolutos de la curva que caracteriza la fuerza de amortiguamiento se aproximan más al instante en que la velocidad del pistón es máxima. Si, además, se grafica la fuerza de fricción para los distintos diámetros calculados, (v. fig. 3.8), se observa que la fuerza de amortiguamiento en los diámetros más pequeños (0.015 m y 0.025 m, v. fig. 3.9), posee una forma muy similar a esta fuerza de fricción. También destaca que, puesto que la fuerza de fricción no depende del diámetro del pistón, las curvas son coincidentes.

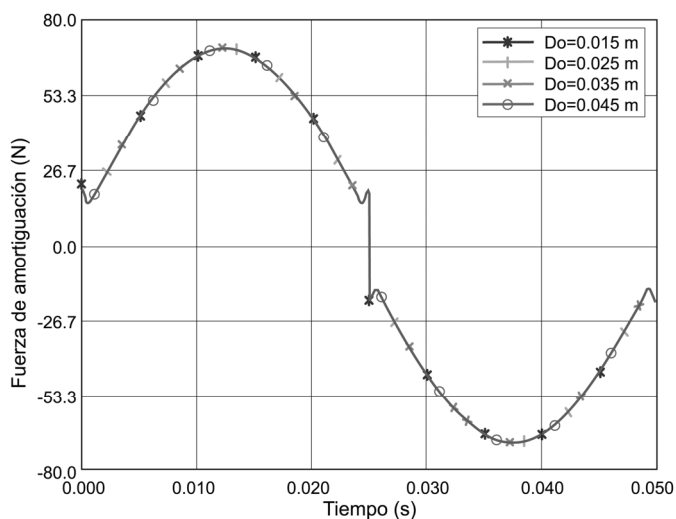


Fig. 3.8
Fuerza de fricción
en función del
tiempo para
distintos diámetros
del pistón

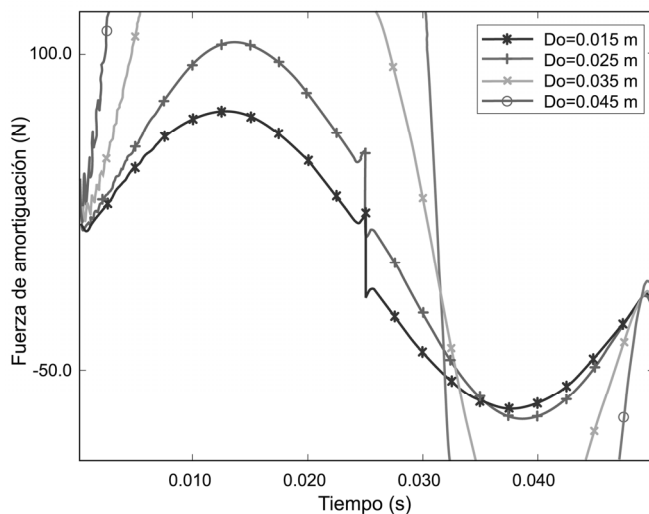


Fig. 3.9
Detalle de las
curvas de
la figura 3.7



Referencias

- [1] Lichtarowicz, A.; Duggins, R. K.; Markland, E. (1965): “Discharge Coefficients for Incompressible Non-Cavitating Flow through Long Orifices”. *Journal of Mechanical Engineering Science*, 7(2): 210-219, junio.
- [2] Armstrong-Hélouvry, B.; Dupont, P.; De Wit, C.C. (1994): “A survey of models, analysis tools and compensation methods for the control of machines with friction”. *Automatica*, 30(7): 1083-1138, julio.
- [3] Shampine, L. F.; Reichelt, M. W. (1997): “The MATLAB ODE Suite”. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 18(1):1-22, enero.



Problema 4

Enunciado

El esquema de la figura 4.1 muestra un aspersor con dos brazos en forma de semicircunferencia. El fluido entra en el sistema mediante un conducto situado en el centro del eje de coordenadas y perpendicular al plano del dibujo. El fluido sale por las dos ramas del aspersor, tal como se muestra en la figura adjunta.

Durante un período de tiempo comprendido entre $0 \leq t \leq t_0$, el caudal volumétrico que entra en el sistema viene dado por la ecuación: $Q_e = Q_0 e^t$. Para tiempos superiores a t_0 , $t \geq t_0$, el flujo volumétrico entrante viene definido por $Q_e = Q_0 e^{t_0}$. Los valores de Q_0 y t_0 se consideran constantes y conocidos, lo cual implica que, para tiempos mayores que t_0 , el flujo entrante es constante.

Sabiendo que, en todo momento, el par antagonista al giro se puede expresar mediante la expresión $M_0 = k \cdot \omega$, donde k es una constante conocida y ω es la velocidad angular del aspersor, se pide:

- 1.- Determinar las ecuaciones diferenciales que caracterizan la velocidad angular del aspersor en función del tiempo. Resolver y graficar la solución hallada a partir de estas ecuaciones, con el fin de visualizar la variación de velocidad angular con el tiempo.
- 2.- Determinar la ecuación algebraica que define la velocidad angular del aspersor en régimen permanente.
- 3.- Para diferentes grosores de pared, variando el radio exterior, graficar la velocidad angular en función del tiempo.

Considerar el fluido como incompresible. Utilizar, en ambos apartados del problema, un sistema inercial de coordenadas.

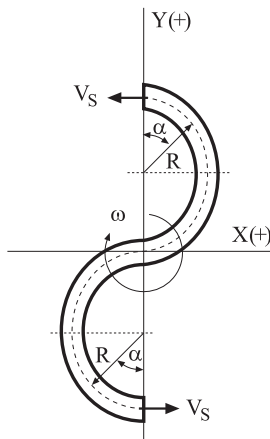


Fig. 4.1
Aspersor
objeto de
estudio



Resolución

- 1.- Inicialmente, se aplicará la ecuación de continuidad al aspersor en estudio con el fin de relacionar la velocidad de salida del fluido en cada una de las dos ramas con el flujo volumétrico entrante.

La ecuación de continuidad de forma integral se define como:

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\forall C} \rho d\forall + \oint_{SC} \rho \vec{V} d\vec{s}$$

Eligiendo los dos brazos del aspersor como volumen de control, un volumen de control móvil e indeformable, y considerando el fluido incompresible, el primer término de la ecuación de continuidad se anula.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\forall C} \rho d\forall = 0$$

El segundo término de la ecuación de continuidad se aplica a todas las superficies entrantes y salientes. Para el caso en estudio, existe una sección entrante, que no se muestra en la figura 4.1, y dos secciones salientes. Recordando que el producto escalar de dos vectores que forman ángulos de 180 y 0 grados llevan asociado un signo negativo y uno positivo, respectivamente, se concluye:

$$0 = \oint_{SC} \rho \vec{V} d\vec{s} = - \int_{S_e} \rho V_e ds + \int_{S_{s1}} \rho V_{s1} ds + \int_{S_{s2}} \rho V_{s2} ds$$

Puesto que la velocidad del fluido es independiente del diferencial de superficie, se obtiene:

$$0 = -\rho V_e S_e + \rho V_{s1} S_1 + \rho V_{s2} S_2$$

Considerando que las superficies de paso entrante y salientes tienen la misma dimensión:

$$0 = -\rho V_e S + \rho V_s S + \rho V_s S$$

ecuación que se puede expresar como:

$$0 = -\dot{m}_e + 2\dot{m}_s$$

o bien:

$$0 = -V_e + 2V_s$$

$$V_e = 2V_s$$



Puesto que el flujo entrante está definido en el enunciado, se establece, cuando $0 \leq t \leq t_0$:

$$V_e = \frac{Q_e}{S} = \frac{Q_0 \cdot e^t}{S}$$

En consecuencia, la velocidad del fluido saliente será:

$$V_s = \frac{Q_e}{2S} = \frac{Q_0 \cdot e^t}{2S}$$

Para el caso en que $t \geq t_0$, la velocidad del fluido saliente se define:

$$V_s = \frac{Q_e}{2S} = \frac{Q_0 \cdot e^{t_0}}{2S}$$

Una vez definida la velocidad saliente del fluido, se procede a aplicar al volumen de control elegido la ecuación del momento cinético.

La ecuación que caracteriza la velocidad angular del aspersor en función del tiempo se obtiene de aplicar la ecuación del momento de la cantidad de movimiento al volumen de control formado por los dos brazos del aspersor. En este apartado se evalúa esta ecuación para el espacio temporal comprendido entre $0 \leq t \leq t_0$:

La ecuación del momento cinético para sistemas inerciales de coordenadas adopta la forma:

$$\begin{aligned} \vec{r} \wedge \int_{VC} \rho \vec{g} dV + \vec{r} \wedge \oint_{SC} P d\vec{s} + \vec{r} \wedge \int_{SC} \bar{\tau} d\vec{s} = \frac{d}{dt} \int_{VC} \rho (\vec{r} \wedge \vec{V}_i) dV \\ + \oint_{SC} \rho (\vec{r} \wedge \vec{V}_i) \vec{V} d\vec{s} \end{aligned}$$

El primer término de la izquierda de la ecuación, caracteriza el par generado por las fuerzas másicas. Véase que las fuerzas másicas tienen una línea de acción que pasa por el origen de coordenadas y va en dirección perpendicular al plano del aspersor, de modo que dichas fuerzas no causarán momento alguno.

El segundo término de la izquierda de la ecuación, caracteriza los pares generados por las fuerzas de presión a lo largo de todo el volumen de control. Para el caso objeto de estudio, este término se descompone en cuatro subterminos. El primero define el par generado debido a la presión del fluido en la sección entrante. Véase que este par será nulo, puesto que el fluido entra por el origen de coordenadas perpendicularmente al plano del aspersor, de modo que el radio de las fuerzas de presión es nulo. El segundo y el tercer subterminos caracterizan los pares generados por las fuerzas de presión asociadas al flujo saliente: si la presión en las dos secciones de salida es la presión atmosférica y se trabaja con presiones relativas, estos dos subterminos serán también nulos. El tercer subtermino define los pares debidos a la presión en toda la superficie lateral del aspersor; este término existe.



El tercer término de la izquierda de la ecuación define los pares generados por los esfuerzos cortantes. De nuevo, al igual que en el caso precedente, este término se subdivide en cuatro subtérminos, para la sección entrante del fluido, para las dos secciones salientes y para la sección lateral del aspersor. Dado que la distribución de velocidades en la sección entrante y en las salientes se ha considerado uniforme, no existirán esfuerzos cortantes en dichas secciones, con lo cual únicamente se considerarán los esfuerzos cortantes a lo largo de toda la superficie lateral del aspersor.

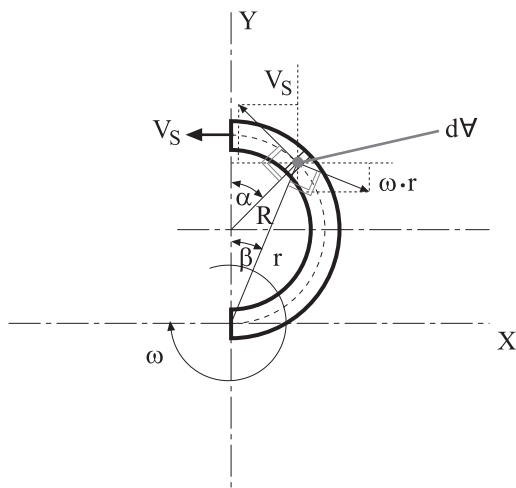
En función de lo que acabamos de explicar, la ecuación de momento cinético aplicada al aspersor objeto de estudio tomará la forma:

$$\sum M_0 = \vec{r} \wedge \int_{SL} -P \, d\vec{s} + \vec{r} \wedge \int_{SL} \vec{\tau} \, d\vec{s} = \frac{d}{dt} \int_{VC} \rho (\vec{r} \wedge \vec{V}_i) \, dV + \oint_{SC} \rho (\vec{r} \wedge \vec{V}_i) \, \vec{V} \, d\vec{s}$$

Obsérvese que los dos términos que caracterizan los pares debidos a las fuerzas de presión y de esfuerzo cortante que actúan en la superficie lateral del aspersor son la *suma de momentos de reacción* que el fluido ejerce sobre el eje central del aspersor, el eje perpendicular al plano del aspersor.

A continuación, se analiza la parte derecha de la ecuación del momento cinético. El primer término de la derecha caracteriza la variación temporal del momento cinético dentro del volumen de control. La velocidad V_i caracteriza la velocidad del fluido asociada a un diferencial de volumen genérico, referida al sistema de coordenadas elegido. Es importante destacar que, puesto que se ha elegido un sistema inercial de coordenadas, a la hora de evaluar la velocidad del fluido es necesario considerar la velocidad de giro del aspersor, concepto que se aclara en la figura 4.2. El radio r define la distancia en forma vectorial entre el diferencial de volumen genérico y el origen de coordenadas. Con el fin de entender estos conceptos, se aplica el término que caracteriza la variación temporal de la cantidad de movimiento en el volumen de control primero a la rama superior del aspersor y, posteriormente a su rama inferior.

Fig. 4.2
Elemento
diferencial de
volumen del
aspersor con las
velocidades y el
radio genérico
asociados





Aplicación del término de la variación temporal de la cantidad de movimiento a la rama superior del aspersor

El vector $\vec{r}$ asociado a un elemento diferencial de volumen genérico se define como:

$$r_x = R \sin \alpha; \quad r_y = R (1 + \cos \alpha); \quad r_z = 0$$

El vector $\vec{V}_i$ se ha de expresar en función de sus componentes X e Y y, además considerar el desplazamiento del sólido (v. figura 4.2), de donde:

$$V_{ix} = \omega r \cos \beta - V_s \cos \alpha; \quad V_{iy} = -\omega r \sin \beta + V_s \sin \alpha; \quad V_{iz} = 0$$

La relación entre los ángulos α y β puede definirse como (v. figura 4.2):

$$\tan \beta = \frac{R \sin \alpha}{R + R \cos \alpha} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$$

Otras relaciones trigonométricas que se obtienen directamente de la figura 4.2 son:

$$R \sin \alpha = r \sin \beta$$

$$R \sin \alpha = \left(\sqrt{(R \sin \alpha)^2 + (R(1 + \cos \alpha))^2} \right) \sin \beta$$

$$\sin \beta = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{(\sin \alpha)^2 + (1 + \cos \alpha)^2}}$$

Y también:

$$R \cos \alpha = r \cos \beta - R$$

$$R (1 + \cos \alpha) = \left(\sqrt{(R \sin \alpha)^2 + (R(1 + \cos \alpha))^2} \right) \cos \beta$$

$$\cos \beta = \frac{1 + \cos \alpha}{\sqrt{(\sin \alpha)^2 + (1 + \cos \alpha)^2}}$$

con lo cual la distribución de velocidades se puede expresar:

$$V_{ix} = \omega R (1 + \cos \alpha) - V_s \cos \alpha; \quad V_{iy} = -\omega R \sin \alpha + V_s \sin \alpha; \quad V_{iz} = 0$$

El producto vectorial $\vec{r} \wedge \vec{V}_{iz}$ da lugar a:

$$\vec{r} \wedge \vec{V}_i = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ R \sin \alpha & R (1 + \cos \alpha) & 0 \\ \omega R (1 + \cos \alpha) - V_s \cos \alpha & -\omega R \sin \alpha + V_s \sin \alpha & 0 \end{vmatrix} =$$



$$= (R \cdot \sin \alpha) (-\omega R \sin \alpha + V_s \sin \alpha) \vec{k} - R (1 + \cos \alpha) (\omega R (1 + \cos \alpha) - V_s \cos \alpha) \vec{k}$$

Trabajando un poco este resultado se llega a:

$$\begin{aligned} &= (-\omega R^2 \sin^2 \alpha + R V_s \sin^2 \alpha - \omega R^2 (1 + \cos \alpha)^2 + R V_s (1 + \cos \alpha) \cos \alpha) \vec{k} \\ &= (-\omega R^2 (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) - \omega R^2 - 2\omega R^2 \cos \alpha + R V_s (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) + R V_s \cos \alpha) \vec{k} \\ &= (-2\omega R^2 (1 + \cos \alpha) + R V_s (1 + \cos \alpha)) \vec{k} \end{aligned}$$

El diferencial de volumen de fluido se define como $dV = S R d\alpha$, donde S es la sección del conducto.

Así, el término de variación temporal de la cantidad de movimiento en el interior del volumen de control queda como:

$$\begin{aligned} &\left. \frac{d}{dt} \int_{VC} \rho (\vec{r} \wedge \vec{V}_i) dV \right|_{\text{rama superior aspersor}} = \\ &= \frac{d}{dt} \int_{VC} \rho (-2\omega R^2 (1 + \cos \alpha) + R V_s (1 + \cos \alpha)) \vec{k} dV = \\ &\rho \frac{d}{dt} \int_0^\pi (-2\omega R^2 (1 + \cos \alpha) + R V_s (1 + \cos \alpha)) \vec{k} S R d\alpha = \\ &\rho S R^2 \frac{d}{dt} [-2\omega R \pi + V_s \pi] \vec{k} = \end{aligned}$$

y se concluye:

$$\left. \frac{d}{dt} \int_{VC} \rho (\vec{r} \wedge \vec{V}_i) dV \right|_{\text{rama superior aspersor}} = \pi \rho S R^2 \left[-2R \frac{d\omega}{dt} + \frac{dV_s}{dt} \right] \vec{k}$$

Sustituyendo la velocidad del fluido por su equivalente y derivando se obtiene:

$$\left. \frac{d}{dt} \int_{VC} \rho (\vec{r} \wedge \vec{V}_i) dV \right|_{\text{rama superior aspersor}} = \pi \rho S R^2 \left[-2R \dot{\omega} + \frac{Q_0 \cdot e^i}{2S} \right] \vec{k}$$

Aunque se espera el mismo resultado, seguidamente se repetirá el proceso en la rama inferior del aspersor.



Aplicación del término de la variación temporal de la cantidad de movimiento a la rama inferior del aspersor

El vector $\vec{r}$ asociado a un elemento diferencial de volumen genérico se define como:

$$r_x = -R \sin \alpha; \quad r_y = -R(1 + \cos \alpha); \quad r_z = 0$$

Las componentes del vector velocidad $\vec{V}_i$ serán:

$$V_{ix} = -\omega r \cos \beta + V_s \cos \alpha; \quad V_{iy} = \omega r \sin \beta - V_s \sin \alpha; \quad V_{iz} = 0$$

Utilizando las relaciones obtenidas anteriormente, esta relación se transforma en:

$$V_{ix} = -\omega R(1 + \cos \alpha) + V_s \cos \alpha; \quad V_{iy} = \omega R \sin \alpha - V_s \sin \alpha; \quad V_{iz} = 0$$

El producto vectorial dará lugar a:

$$\begin{aligned} \vec{r} \wedge \vec{V}_i &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -R \sin \alpha & -R(1 + \cos \alpha) & 0 \\ -\omega R(1 + \cos \alpha) + V_s \cos \alpha & \omega R \sin \alpha - V_s \sin \alpha & 0 \end{vmatrix} = \\ &= -(R \sin \alpha)(\omega R \sin \alpha - V_s \sin \alpha) \vec{k} \\ &\quad - (-R(1 + \cos \alpha))(-\omega R(1 + \cos \alpha) + V_s \cos \alpha) \vec{k} \end{aligned}$$

Reorganizando esta ecuación, se observa que se obtiene el mismo resultado que en la rama superior del aspersor.

$$= (R \sin \alpha)(-\omega R \sin \alpha + V_s \sin \alpha) \vec{k} - R(1 + \cos \alpha)(\omega R(1 + \cos \alpha) - V_s \cos \alpha) \vec{k}$$

Dado que el proceso a partir de este punto es idéntico al que se ha establecido para el caso precedente, se puede concluir que, para la rama inferior del aspersor, se obtendrá:

$$\left. \frac{d}{dt} \int_{\forall C} \rho (\vec{r} \wedge \vec{V}_i) d\forall \right|_{\text{rama inferior aspersor}} = \pi \rho S R^2 \left[-2R \dot{\omega} + \frac{Q_0 \cdot e^t}{2S} \right] \vec{k}$$

Así, el par generado por las dos ramas del aspersor será la suma de ambos pares:

$$\left. \frac{d}{dt} \int_{\forall C} \rho (\vec{r} \wedge \vec{V}_i) d\forall \right|_{\text{total}} = 2\pi \rho S R^2 \left[-2R \dot{\omega} + \frac{Q_0 \cdot e^t}{2S} \right] \vec{k}$$



Llegados a este punto, se procede a determinar el término restante de la ecuación de momento cinético. Dicho término era:

$$\oint_{sc} \rho (\vec{r} \wedge \vec{V}_i) \vec{V} d\vec{s}$$

Véase que este término caracteriza el momento cinético asociado al flujo que atraviesa las diversas superficies de control. Para el problema objeto de estudio, existen tres superficies de control: la entrante y las dos salientes. En consecuencia, la ecuación precedente se define, para este caso:

$$\oint_{sc} \rho (\vec{r} \wedge \vec{V}_i) \vec{V} d\vec{s} = \int_{S_e} \rho (\vec{r} \wedge \vec{V}_i) \vec{V} d\vec{s} + \int_{S_{s1}} \rho (\vec{r} \wedge \vec{V}_i) \vec{V} d\vec{s} + \int_{S_{s2}} \rho (\vec{r} \wedge \vec{V}_i) \vec{V} d\vec{s}$$

La velocidad $\vec{V}_i$ es la velocidad con que el fluido atraviesa cada una de las tres superficies, pero referida al sistema de coordenadas elegido. Por otro lado, la velocidad $\vec{V}$ es la velocidad con que el fluido atraviesa cada una de las superficies, pero respecto a la propia superficie. Obsérvese que, en cada una de estas tres integrales, existe un producto vectorial y un producto escalar.

Para la sección entrante, el producto vectorial $\vec{r} \wedge \vec{V}_i$ es nulo, dado que el vector $\vec{r}$ vale cero, (0,0,0). Por tanto, la integral del flujo de momento cinético a lo largo de la superficie entrante será nula.

Con respecto a las dos integrales a lo largo de las dos superficies salientes, se tiene, para la superficie superior:

$$\vec{r} \wedge \vec{V}_i = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 2R & 0 \\ -V_s + \omega 2R & 0 & 0 \end{vmatrix} = -(2R(\omega 2R - V_s))\vec{k} = 2R(V_s - \omega 2R)\vec{k}$$

Haciendo lo propio para la superficie inferior S_2 , se concluye:

$$\vec{r} \wedge \vec{V}_i = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -2R & 0 \\ V_s - \omega 2R & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2R(V_s - \omega 2R)\vec{k}$$

Véase que los dos productos vectoriales dan el mismo resultado, con lo cual el momento cinético asociado al flujo a través de las dos superficies salientes queda:

$$\begin{aligned} \oint_{sc} \rho (\vec{r} \wedge \vec{V}_i) \vec{V} d\vec{s} &= \int_{S_{s1}} \rho (\vec{r} \wedge \vec{V}_i) \vec{V} d\vec{s} + \int_{S_{s2}} \rho (\vec{r} \wedge \vec{V}_i) \vec{V} d\vec{s} \\ &= \int_{S_s} 2\rho 2R(V_s - \omega 2R)\vec{k} V_s ds \end{aligned}$$



Por otro lado, el producto escalar de la velocidad saliente por el diferencial de superficie toma, para las dos superficies salientes, el mismo valor: $\vec{V} d\vec{s} = V_s ds$, con lo cual la resolución de la integral dará lugar a:

$$\oint_{sc} \rho (\vec{r} \wedge \vec{V}_i) \vec{V} d\vec{s} = \int_{S_s} 2\rho 2R (V_s - \omega 2R) \vec{k} V_s ds = 4\rho RS (V_s - \omega 2R) V_s \vec{k}$$

(Obsérvese que ninguno de los parámetros depende del diferencial de superficie.)

Sustituyendo ahora todos los términos en la ecuación genérica de momento cinético, se obtiene:

$$\sum M_0 = \vec{r} \wedge \int_{SL} -P d\vec{s} + \vec{r} \wedge \int_{SL} \vec{\tau} d\vec{s} = \frac{d}{dt} \int_{vc} \rho (\vec{r} \wedge \vec{V}_i) dV + \oint_{sc} \rho (\vec{r} \wedge \vec{V}_i) \vec{V} d\vec{s}$$

$$\sum M_0 = 2\pi\rho SR^2 \left[-2R\dot{\omega} + \frac{Q_0 \cdot \vec{e}^t}{2S} \right] \vec{k} + 4\rho RS (V_s - \omega 2R) V_s \vec{k}$$

Sustituyendo en esta ecuación la velocidad temporal del fluido saliente,

$$V_s = \frac{Q_s}{2S} = \frac{Q_0 \cdot \vec{e}^t}{2S}, \text{ se obtiene:}$$

$$\sum M_0 = 2\rho\pi SR^2 \left(\frac{Q_0 \cdot \vec{e}^t}{2S} - 2R\dot{\omega} \right) \vec{k} + 4\rho RS \left(\frac{Q_0 \cdot \vec{e}^t}{2S} - \omega 2R \right) \frac{Q_0 \cdot \vec{e}^t}{2S} \vec{k}$$

Este par es el que genera el fluido sobre el aspersor durante el período de tiempo $0 \leq t \leq t_0$ y es contrarrestado por el par antagonista al fluido debido a la fricción $k\omega$ y por el par debido al momento de inercia $I_z \dot{\omega}$ y asociado a la aceleración angular del aspersor. Por tanto, realizando un balance de momentos, resulta:

$$\sum M_0 = k\omega + I_z \dot{\omega}$$

Sustituyendo el término $\sum M_0$ por la expresión que lo describe:

$$2\rho\pi SR^2 \left(\frac{Q_0 \cdot \vec{e}^t}{2S} - 2R\dot{\omega} \right) + 4\rho RS \left(\frac{Q_0 \cdot \vec{e}^t}{2S} - 2R\omega \right) \frac{Q_0 \cdot \vec{e}^t}{2S} = k\omega + I_z \dot{\omega}$$

Simplificando, se obtiene:

$$\rho\pi R^2 Q_0 \cdot \vec{e}^t + (-4\rho\pi SR^3 - I_z) \dot{\omega} + 4\rho RS \left(\frac{Q_0 \cdot \vec{e}^t}{2S} \right)^2 + (-4\rho R^2 Q_0 \cdot \vec{e}^t - k) \omega = 0$$



Esta ecuación se puede expresar como:

$$\left(-4\rho\pi SR^3 - I_z\right)\dot{\omega} + \left(-4\rho R^2 Q_0 e^t - k\right)\omega + \rho\pi R^2 Q_0 e^t + 4\rho RS \left(\frac{Q_0 e^t}{2S}\right)^2 = 0$$

y, estableciendo que:

$$A_1 = -4\rho\pi SR^3 - I_z$$

$$A_2 = -4\rho R^2 Q_0 e^t - k$$

$$A_3 = +\rho\pi R^2 Q_0 e^t + 4\rho RS \left(\frac{Q_0 e^t}{2S}\right)^2$$

La ecuación diferencial toma la forma:

$$A_1 \dot{\omega} + A_2 \omega + A_3 = 0$$

Para la resolución de esta ecuación, es necesario definir las condiciones de contorno, la geometría y las condiciones iniciales.

Condiciones de contorno y propiedades físicas

$$\rho = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}; Q_0 = 0.0035 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}; \rho_{\text{conducto}} = 8000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}; k = 10 \text{ N m s}$$

Geometría, (v. figura 4.6)

$$R = 0.5 \text{ m}; a = 0.070 \text{ m}; b = 0.050 \text{ m}; S = \pi b^2 = 0.0079 \text{ m}^2$$

Con esta geometría, el momento de inercia del conducto (v. el último apartado del problema) resulta: $I_z = 95.8 \text{ kg m}^2$

Condiciones iniciales

$$\omega(0) = 0 \text{ rad/s}$$



Los valores de las variables: A_1 , A_2 y A_3 serán:

$$A_1 = -108.1369$$

$$A_2 = -3.5e^t - 10$$

$$A_3 = (0.7798e^t + 2.749)e^t$$

La primera ecuación diferencial lineal por integrar resulta:

$$-108.1369\dot{\omega} + (-3.5e^t - 10)\omega + (0.7798e^t + 2.749)e^t = 0$$

Recuérdese que esta ecuación es válida para un intervalo de tiempo comprendido entre 0 y 5 segundos.

En el instante $t = t_0$, el aspersor tiene una aceleración que se desarrolla hasta un tiempo $t = t_p$, tiempo desconocido y diferente para cada caso, en que puede considerarse que se ha llegado a un régimen permanente donde la aceleración sea despreciable.

Durante ese intervalo de tiempo, entre t_0 y t_p , el sistema se encuentra también en régimen transitorio. En consecuencia, el procedimiento seguido en el primer apartado de este problema para hallar el momento cinético aplicado al aspersor y la ecuación diferencial correspondiente, es muy similar. El único término que varía para este análisis es el relacionado con la variación temporal del momento cinético. Cabe recordar que la expresión hallada en el apartado anterior asociada a este término, que es válida para las dos ramas del aspersor, es la siguiente:

$$\frac{d}{dt} \int_{VC} \rho (\vec{r} \wedge \vec{V}_i) dV = \pi \rho S R^2 \left[-2 R \frac{d\omega}{dt} + \frac{dV_s}{dt} \right] \vec{k}$$

Sin embargo, para $t \geq t_0$, el caudal circulante se mantiene constante y por tanto $\frac{dV_s}{dt} = 0$. En consecuencia, la expresión anterior resulta:

$$\frac{d}{dt} \int_{VC} \rho (\vec{r} \wedge \vec{V}_i) dV = -2\pi \rho S R^3 \frac{d\omega}{dt} \vec{k}$$

El procedimiento para obtener el momento cinético asociado a los flujos de salida y entrada es idéntico al del apartado anterior. En este caso, $V_s = \frac{Q_0 \cdot e^{t_0}}{2S}$.

Entonces:

$$\oint_{sc} \rho (\vec{r} \wedge \vec{V}_i) \vec{V} d\vec{s} = 4\rho RS (V_s - \omega 2R) V_s \vec{k} = 4\rho RS \left(\frac{Q_0 \cdot e^{t_0}}{2S} - \omega 2R \right) \frac{Q_0 \cdot e^{t_0}}{2S} \vec{k}$$



El sumatorio de momentos resultante es:

$$\sum M_o = -4\pi \rho S R^3 \dot{\omega} \vec{k} + 4\rho RS \left(\frac{Q_o \cdot \vec{e}^{t_0}}{2S} - \omega 2R \right) \frac{Q_o \cdot \vec{e}^{t_0}}{2S} \vec{k}$$

Realizando un balance de momentos:

$$\sum M_o = k\omega + I_z \dot{\omega}$$

Sustituyendo el sumatorio de momentos y elaborando la ecuación resultante, se obtiene que la ecuación diferencial que permite determinar la evolución de la velocidad angular para un tiempo superior a t_0 es:

$$A_1 \dot{\omega} + A_2 \omega + A_3 = 0$$

donde:

$$A_1 = -4\pi \rho S R^3 - I_z$$

$$A_2 = -4\rho R^2 Q_o \vec{e}^{t_0} \cdot \vec{k}$$

$$A_3 = +4\rho RS \left(\frac{Q_o \vec{e}^{t_0}}{2S} \right)^2$$

Para la resolución de esta ecuación, las propiedades físicas y la geometría ya se han definido en el apartado anterior.

Las condiciones de contorno y las condiciones iniciales son diferentes respecto al apartado anterior, ya que se toma como referencia el instante $t = t_0$. A continuación, se muestran los nuevos coeficientes asociados a cada uno de los términos de la ecuación diferencial y la condición inicial necesarios para realizar la integración posterior de la ecuación:

$$\omega(5) = 26.56 \text{ rad/s}$$

$$A_1 = -108.1369$$

$$A_2 = -529.4461$$

$$A_3 = 1.7178 \cdot 10^4$$

La segunda ecuación diferencial lineal por integrar resulta:

$$-108.1369 \dot{\omega} + -529.4461\omega + 1.7178 \cdot 10^4 = 0$$



Mediante integración numérica utilizando MATLAB®, se resuelven las dos ecuaciones diferenciales que definen la evolución temporal de la velocidad angular.

La resolución de las dos ecuaciones diferenciales expuestas, se realiza a través de MATLAB®. A continuación, se presentan de nuevo estas dos ecuaciones y la gráfica resultante, en cuanto se han integrado:

Si $0 \leq t \leq t_0$:

$$-108.1369 \dot{\omega} + (-3.5e^t - 10)\omega + (0.7798e^t + 2.749)e^t = 0 \quad (1)$$

Si $t \geq t_0$:

$$-108.1369 \dot{\omega} + -529.4461\omega + 1.7178 \cdot 10^4 = 0 \quad (2)$$

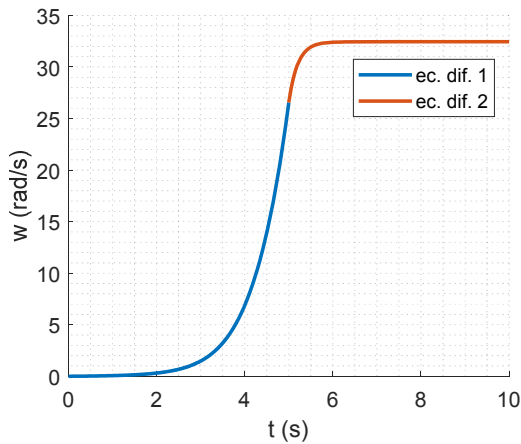


Fig. 4.3
Variación
de la velocidad
angular del aspersor
en función del tiempo

- 2.- Para obtener la ecuación que relaciona la velocidad angular del aspersor en régimen permanente, es necesario determinar el par generado por el fluido. Una vez determinado, se igualará al par antagonista generado por las fuerzas de fricción mecánica de los cojinetes y, de esta manera, se obtendrá la ecuación que caracteriza la velocidad de giro.

En este apartado del problema se pide determinar la ecuación que caracteriza la velocidad de giro del aspersor para régimen permanente.

Recuérdese que la ecuación del momento cinético para un sistema inercial de coordenadas adopta la forma:

$$\begin{aligned} \vec{r} \wedge \int_{V_c} \rho \vec{g} dV + \vec{r} \wedge \oint_{SC} P d\vec{s} + \vec{r} \wedge \oint_{SC} \vec{\tau} d\vec{s} = \frac{d}{dt} \int_{V_c} \rho (\vec{r} \wedge \vec{V}_i) dV \\ + \oint_{SC} \rho (\vec{r} \wedge \vec{V}_i) \cdot \vec{V} d\vec{s} \end{aligned}$$



Con respecto al primer término de la parte derecha, cabe destacar que, para este caso no existe ningún parámetro que dependa del tiempo; en consecuencia, este término será nulo, de modo que la ecuación de momento cinético tomará la forma siguiente:

$$\sum M_0 = \vec{r} \wedge \int_{SL} -P d\vec{s} + \vec{r} \wedge \int_{SL} \vec{\tau} d\vec{s} = \oint_{SC} \rho (\vec{r} \wedge \vec{V}_i) \vec{V} d\vec{s}$$

El término que caracteriza el flujo de momento cinético ha de extenderse a lo largo de la superficie entrante y de las salientes, así que:

$$\begin{aligned} \sum M_0 &= \oint_{SC} \rho (\vec{r} \wedge \vec{V}_i) \vec{V} d\vec{s} = \int_{Se} \rho (\vec{r} \wedge \vec{V}_i) \vec{V} d\vec{s} \\ &+ \int_{Ss_1} \rho (\vec{r} \wedge \vec{V}_i) \vec{V} d\vec{s} + \int_{Ss_2} \rho (\vec{r} \wedge \vec{V}_i) \vec{V} d\vec{s} \end{aligned}$$

El flujo de momento cinético para la superficie entrante será nulo, puesto que el producto vectorial $\vec{r} \wedge \vec{V}_i$ es nulo y, el vector $\vec{r}$ vale cero (0,0,0).

Para la superficie saliente superior S_1 , se establece:

$$\vec{r} \wedge \vec{V}_i = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 2R & 0 \\ -V_s + \omega 2R & 0 & 0 \end{vmatrix} = -(2R(\omega 2R - V_s))\vec{k} = 2R(V_s - \omega 2R)\vec{k}$$

Para la superficie saliente inferior, S_2 , se puede decir:

$$\vec{r} \wedge \vec{V}_i = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -2R & 0 \\ V_s - \omega 2R & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2R(V_s - \omega 2R)\vec{k}$$

de donde se concluye que:

$$\sum M_0 = \int_{Ss} 2 \rho 2R (V_s - \omega 2R) \vec{k} \cdot V_s ds = 4\rho RS (V_s - \omega 2R) V_s \vec{k}$$

Es necesario apuntar que este par es el que ejerce el fluido sobre el cuerpo. Igualando el par de acción al par antagonista, se tiene:

$$k\omega = 4\rho RS (V_s - \omega 2R) V_s$$

de donde:

$$k\omega + 8\rho RS^2 V_s \omega = 4\rho RS V_s^2$$

$$\omega (k + 8\rho RS^2 V_s) = 4\rho RS V_s^2$$



$$\omega = \frac{4\rho R S V_s^2}{k + 8\rho S R^2 V_s} = \frac{4\rho R S \left(\frac{Q_0 \cdot e^{t_0}}{2S} \right)^2}{k + 8\rho S R^2 \left(\frac{Q_0 \cdot e^{t_0}}{2S} \right)}$$

Esta será la velocidad angular de giro del aspersor en régimen permanente.

Teniendo en cuenta las condiciones de contorno y la geometría establecida, la velocidad angular en régimen permanente resulta: $\omega = 32.44 \text{ rad/s}$.

Se comprueba que la velocidad angular en régimen permanente obtenida a partir de la expresión obtenida coincide con la velocidad hallada pasado un tiempo suficiente mediante la resolución de las ecuaciones diferenciales del apartado anterior.

3.- En la figura siguiente, se muestra la evolución de la velocidad angular para tres grosores diferentes, variando únicamente el radio exterior a de la pared.

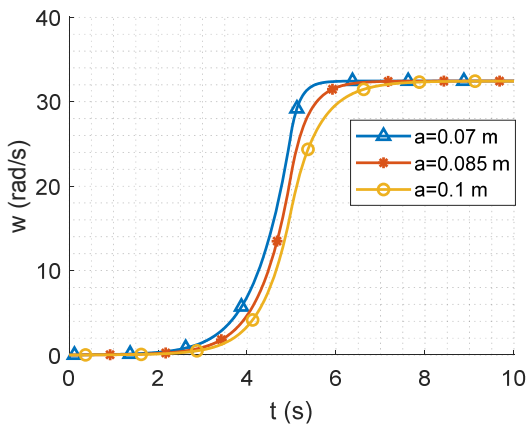


Fig. 4.4
Evolución temporal de la velocidad de giro en función del espesor de la pared del tubo

Obsérvese que, a medida que el grosor de la pared es mayor, la inercia del aspersor aumenta y, en consecuencia, el tiempo necesario para alcanzar el régimen permanente es mayor. Sin embargo, en los tres casos, la velocidad angular en régimen permanente es la misma, es decir, su valor final no depende de la variación del radio exterior de la pared.

A continuación, se presentan los valores mencionados para los tres casos calculados:

- Grosor de pared: 2.0 cm donde $a = 0.07 \text{ m}$:

$$I_z = 95.80 \text{ kg m}^2; t_{rp} = 5.93 \text{ s}; \omega = 32.44 \text{ rad/s}$$

- Grosor de pared: 3.5 cm donde $a = 0.085 \text{ m}$:

$$I_z = 189.26 \text{ kg m}^2; t_{rp} = 6.96 \text{ s}; \omega = 32.44 \text{ rad/s}$$



- Grosor de pared: 5.0 cm donde $a = 0.1$ m:

$$I_z = 301.64 \text{ kg}\cdot\text{m}^2; t_{rp} = 8.23 \text{ s}; \omega = 32.44 \text{ rad/s}$$

Para los tres casos, se ha considerado que el sistema ha alcanzado el régimen permanente cuando el valor de la velocidad angular está en torno a un 0.2% del valor final.

Determinación de la ecuación que caracteriza el momento de inercia del conducto aspersor

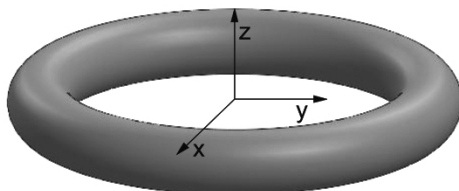
Se desea hallar el momento de inercia del conducto aspersor respecto a su eje de rotación. En primer lugar, es imprescindible tener en cuenta que la geometría del conducto es simétrica y puede descomponerse en dos partes cada una de las cuales es la mitad de un toroide. Por este motivo, primero se desarrolla el cálculo del momento de inercia para un toroide completo, en que el eje de rotación pasa por su centro geométrico. Posteriormente, se calcula el momento de inercia para la mitad del toroide, pero pasando por el mismo eje. Mediante el teorema de Steiner, es posible relacionar el momento de inercia respecto del eje central del toroide con el correspondiente al centro de giro del aspersor. A continuación, se muestran cada uno de los pasos.

La definición del momento de inercia respecto del eje z , perpendicular al plano de giro del aspersor, en coordenadas cartesianas, viene definido por la expresión siguiente:

$$I_z = \int_V \rho \cdot (x^2 + y^2) dV$$

El diferencial de volumen en coordenadas cartesianas se define como $dV = dx dy dz$. La integral es triple y, en el dominio de integración considerado, el toroide es difícilmente integrable en coordenadas cartesianas.

Fig. 4.5
Toroide





Al objeto de facilitar el cálculo de la integral, se realiza un cambio de coordenadas. Se pasa de coordenadas cartesianas a coordenadas toroidales. La integral con el cambio de coordenadas resulta:

$$I_z = \int_V \rho \left(x(r, \alpha, \beta)^2 + y(r, \alpha, \beta)^2 \right) \cdot J(r, \alpha, \beta) dr d\alpha d\beta$$

ρ : densidad del toroide (constante en todo el volumen)

Para resolver la integral, es imprescindible definir las ecuaciones paramétricas, el jacobiano de la transformación y el nuevo dominio de integración:

Ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = (R + r \cdot \cos(\beta)) \cdot \cos(\alpha) \\ y = (R + r \cdot \cos(\beta)) \cdot \sin(\alpha) \\ z = r \cdot \sin(\beta) \end{cases}$$

Jacobiano de la transformación:

$$\begin{aligned} J(r, \alpha, \beta) &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \alpha} & \frac{\partial x}{\partial \beta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \alpha} & \frac{\partial y}{\partial \beta} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \alpha} & \frac{\partial z}{\partial \beta} \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) & -\sin(\alpha) \cdot (R + r \cdot \cos(\beta)) & -r \cdot \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta) \\ \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) & (R + r \cdot \cos(\beta)) \cdot \cos(\alpha) & -r \cdot \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) \\ \sin(\beta) & 0 & \cos(\alpha) \end{vmatrix} \\ &= r \cdot (R + r \cdot \cos(\beta)) \end{aligned}$$

Dominio de integración (en coordenadas toroidales):

$$\begin{cases} r \in [0, a] \\ \alpha \in [0, 2\pi] \\ \beta \in [0, 2\pi] \end{cases}$$



Sustituyendo, integrando y simplificando, se obtiene:

$$I_z = \rho \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^a \left(x(r, \alpha, \beta)^2 + y(r, \alpha, \beta)^2 \right) \cdot J(r, \alpha, \beta) dr d\alpha d\beta$$

$$= \frac{\pi^2 R a^2 \rho}{2} \cdot (4R^2 + 3a^2)$$

La masa del toroide viene dada por $m = 2\rho\pi^2 R a^2$. Sustituyendo, se obtiene:

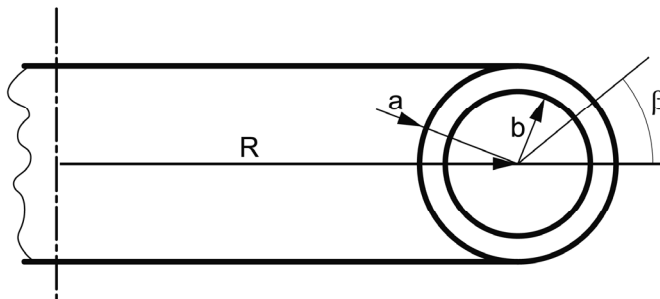
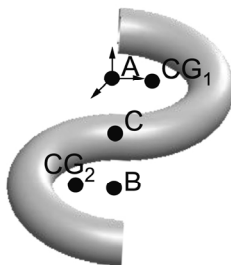
$$I_z = \frac{m}{4} \cdot (4R^2 + 3a^2)$$

Este análisis, efectuado para un toroide completo y macizo, se realizará de forma similar para el conducto aspersor del problema. En cada mitad del conducto correspondiente a la mitad de un toroide se utilizará el mismo eje z sobre el cual se ha calculado el momento de inercia del toroide completo, y estos momentos de inercia se trasladarán al eje de rotación del conducto. El momento de inercia total se obtendrá sumando cada uno de los dos momentos trasladados.

$$I_z = I_{zC_1} + I_{zC_2}$$

Fig. 4.6
Conducto con los
puntos estudiados.

Fig. 4.7
Radios interior y
exterior del
conducto



Cálculo del momento de inercia de la mitad superior del aspersor y respecto al eje z que pasa por el punto A (v. figura 4.5).

Cabe recordar que el conducto utilizado no es macizo y, además, que se trata de la mitad de un toroide. Estos dos hechos influyen de forma directa sobre los límites de integración de la integral triple que configura el momento de inercia calculado respecto a un eje que pase por el punto A. A continuación, se muestra la integral teniendo en cuenta estos factores:

$$I_{z1_A} = \rho_{\text{cond}} \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^a \left(x(r, \alpha, \beta)^2 + y(r, \alpha, \beta)^2 \right) \cdot J(r, \alpha, \beta) dr d\alpha d\beta$$

Integrando, se obtiene:

$$I_{z1_A} = \frac{\rho_{\text{cond}} \pi^2 R}{4} \cdot (4R^2 a^2 - 4R^2 b^2 + 3a^4 - 3b^4)$$



Si la masa de la mitad del conducto es $m = \rho_{\text{cond}} \pi^2 R \cdot (a^2 - b^2)$, sustituyendo en la ecuación anterior se obtiene:

$$I_{z_{1A}} = \frac{m}{4} \cdot \frac{4R^2 a^2 - 4R^2 b^2 + 3a^4 - 3b^4}{a^2 - b^2}$$

Para trasladar $I_{z_{1A}}$ hasta la línea de acción que pasa por el punto C (v. figura 4.5), se utilizará el teorema de Steiner. Según este teorema, si se conoce el momento de inercia respecto a un eje que pasa por el centro de gravedad, es posible calcular cualquier momento de inercia respecto a otro eje que pase por cualquier otro punto. Cabe señalar que el punto A no es el centro de gravedad de la mitad superior del conducto; por tanto, primero hay que calcular el centro de gravedad para la mitad del toroide, trasladar el momento de inercia hasta el centro de gravedad y, posteriormente, trasladarlo al punto por el cual pasa el eje de rotación del conducto analizado, eso es, el punto C de la figura 4.5. La expresión genérica del teorema de Steiner es la siguiente:

$$I_{\text{eje } p} = I_{\text{eje } CG} + m \cdot d^2$$

$I_{\text{eje } CG}$: momento de inercia respecto a un eje que pasa por el centro de gravedad CG_1

$I_{\text{eje } p}$: momento de inercia respecto a un eje paralelo al anterior y que pasa por cualquier otro punto P genérico

m: masa del cuerpo

d: distancia entre el punto P y centro de gravedad CG_1

En este caso, para calcular el momento de inercia respecto del centro de gravedad de la mitad superior, conociendo el momento de inercia respecto de un eje que pase por el punto A se obtiene:

$$I_{z_{CG}} = I_{z_{1A}} - m \cdot d_{A-CG}^2$$

$I_{z_{CG}}$: momento de inercia respecto a un eje que pasa por el centro de gravedad y que es paralelo al eje z

d_{A-CG} : distancia desde A hasta el centro de gravedad

La distancia d_{A-CG} se calcula mediante la integral siguiente:

$$d_{A-CG} = \frac{\rho_{\text{cond}} \int_V x \, dV}{m}$$



También es necesario realizar un cambio de coordenadas; por tanto, la expresión resultante es:

$$d_{A-CG} = \frac{\rho_{\text{cond}}}{m} \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \int_b^a x(r, \alpha, \beta) \cdot J(r, \alpha, \beta) \, dr d\alpha d\beta$$

Sustituyendo e integrando, se obtiene:

$$d_{A-CG} = \frac{\pi \rho_{\text{cond}}}{2m} \cdot (4R^2 a^2 - 4R^2 b^2 + a^4 - b^4)$$

Si la masa de medio conducto es $m = m_{\text{cond}}/2 = \rho_{\text{cond}} \pi^2 R \cdot (a^2 - b^2)$, sustituyendo resulta:

$$d_{A-CG} = \frac{4R^2 a^2 - 4R^2 b^2 + a^4 - b^4}{2\pi R \cdot (a^2 - b^2)}$$

Conociendo la distancia al centro de gravedad, queda definida la ecuación que describe el momento de inercia $I_{z_{CG}}$. Sustituyendo los términos calculados en $I_{z_{CG}}$:

$$I_{z_{CG}} = m \left(\frac{4R^2 + 3a^2 + 3b^2}{4} - \left(\frac{4R^2 a^2 - 4R^2 b^2 + a^4 - b^4}{2\pi R \cdot (a^2 - b^2)} \right)^2 \right)$$

Finalmente, sabiendo el $I_{z_{CG}}$ mediante el teorema de Steiner se obtiene el momento de inercia asociado a la mitad superior del conducto en el eje de rotación (punto C):

$$I_{z_c} = I_{z_{CG}} + m_{\text{cond}} d_{CG-C}^2$$

d_{CG-C} : distancia desde el centro de gravedad hasta C

La distancia d_{CG-C} viene definida por $d_{CG-C} = \sqrt{d_{A-CG}^2 + R^2}$

Sustituyendo los términos que componen I_{z_c} por las expresiones definidas en cada uno de ellos, resulta:

$$I_{z_c} = m \left(\frac{4R^2 + 3a^2 + 3b^2}{4} - \left(\frac{4R^2 a^2 - 4R^2 b^2 + a^4 - b^4}{2\pi R \cdot (a^2 - b^2)} \right)^2 + \left(\frac{4R^2 a^2 - 4R^2 b^2 + a^4 - b^4}{2\pi R \cdot (a^2 - b^2)} \right)^2 + R^2 \right)$$



Simplificando, la expresión anterior se puede expresar como:

$$I_{z_c} = m \cdot \frac{8R^2 + 3a^2 + 3b^2}{4}$$

En la mitad inferior del toroide, debido a la simetría del conducto, el momento de inercia respecto al eje que pasa por B (v. figura 4.5) es igual al momento de inercia respecto al eje que pasa por A en la mitad superior del conducto. La distancia del centro de gravedad de la mitad inferior respecto de B y la distancia desde el centro de gravedad hasta C son iguales a la distancia del centro de gravedad de la mitad superior respecto de A y la distancia desde el centro de gravedad hasta C, respectivamente. Por tanto, el momento de inercia respecto al eje de rotación en el punto C, una vez trasladado el momento de inercia utilizando el teorema de Steiner desde B, será igual al calculado en la mitad superior. En consecuencia, la ecuación que define el momento de inercia respecto al eje de rotación del conducto completo resulta:

$$I_z = 2I_{z1}$$

Sustituyendo el momento de inercia calculado en la mitad superior, se obtiene que el momento de inercia del conducto es:

$$I_z = 2m \cdot \frac{8R^2 + 3a^2 + 3b^2}{4}$$

Considerando que la masa total del conducto completo m_{cond} es dos veces la masa m , la de la mitad de este sería $m_{\text{cond}} = 2m$. Sustituyendo en la expresión anterior se obtiene que el momento de inercia para el aspersor completo es:

$$I_z = m_{\text{cond}} \cdot \frac{8R^2 + 3a^2 + 3b^2}{4}$$

Esta es la ecuación que se ha utilizado para hallar el momento de inercia del aspersor.

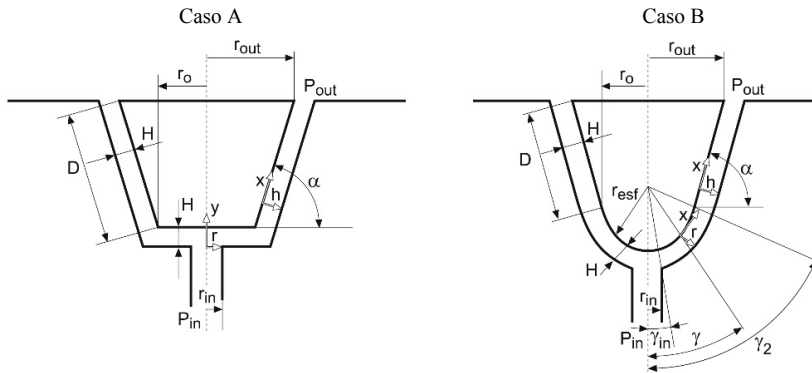


Problema 5

Enunciado

En los dos esquemas siguientes se muestra una pequeña cantidad de fluido que fluye por un intersticio que separa una superficie (cilíndrica para el caso A y esférica para el caso B) y su correspondiente alojamiento. Posteriormente, este mismo fluido fluye a lo largo de una superficie troncocónica en ambos casos. Ambas superficies están conectadas, tal como se muestra en las dos figuras. Téngase en cuenta que todas las dimensiones son conocidas.

Fig. 5.1



Para la zona cilíndrica, se cumple:

$$V_c = -\frac{1}{\mu} \frac{dp}{dr} \frac{y(h-y)}{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r} \right) = 0$$

De la zona troncocónica, se conoce:

$$V_T = -\frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} \frac{h(H-h)}{2}$$

Para la zona esférica, se cumple:

$$V_{esf} = -\frac{1}{\mu} \frac{dp}{d\gamma} \frac{r(H-r)}{2}$$

$$\frac{1}{\sin \gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(h^3 \sin \gamma \frac{dp}{d\gamma} \right) = 0$$

De la zona troncocónica, se conoce:

$$V_T = -\frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} \frac{h(H-h)}{2}$$

Sabiendo que la presión en el conducto de entrada es P_{in} y en la parte superior de la zona troncocónica es P_{out} , se pide determinar para ambos casos:

1. El caudal circulante y la distribución de presiones en las zonas cilíndrica y cónica para el caso A, y lo mismo para las zonas esférica y cónica del caso B.
2. La fuerza de sustentación que el fluido ejerce sobre la pieza interior en ambos casos.



3. Para el caso B, representar la fuerza de sustentación en función del radio de la esfera si r_0 se mantiene constante.

Resolución

Las hipótesis de partida para la resolución de este problema son:

- Flujo laminar, incompresible y newtoniano.
- En la zona cilíndrica, se considera que:
El movimiento del fluido es en la dirección radial.
La distancia mínima H entre las superficies es muy inferior a la diferencia de radios.
 $H \ll (r_0 - r_{in})$
- En la zona esférica, se considera que:
El movimiento del fluido es en la dirección tangencial a la superficie.
La distancia mínima H entre las dos superficies es muy inferior a la longitud de arco recorrida por el fluido desde la entrada hasta la salida de la zona esférica.
 $H \ll r_0(\gamma_2 - \gamma_{in})$
- En la zona troncocónica, se considera que:
El movimiento del fluido es en la dirección tangencial a la superficie, es decir, en la dirección x marcada en la figura.
La distancia mínima H entre las dos superficies es muy inferior a la generatriz del tronco del cono.
 $H \ll D$
- El tronco del cono es suficientemente rígido para no permitir la flexión del mismo.

Partiendo de estas consideraciones, se procede a analizar ambos casos:

A.1. Análisis del caudal circulante y de la distribución de presiones en el caso A

Zona cilíndrica

Si el fluido es incompresible, mediante la ecuación de continuidad es posible afirmar que el caudal volumétrico entrante es igual al saliente.

El caudal volumétrico se define:

$$Q_{cil} = \int_S V_c ds$$

Sustituyendo la expresión de la velocidad $V_c = -\frac{1}{\mu} \frac{dp}{dr} \frac{y(h-y)}{2}$ y considerando que, para este caso en particular, $h = H$, se obtiene:



$$Q_{cil} = \int_s -\frac{1}{\mu} \frac{dp}{dr} \frac{y(H-y)}{2} ds$$

El diferencial de superficie viene definido por $ds = 2\pi r dy$ y el dominio de integración es de 0 a H. Entonces:

$$Q_{cil} = \int_0^H -\frac{1}{\mu} \frac{dp}{dr} \frac{y(H-y)}{2} 2\pi r dy = -\frac{1}{\mu} \frac{dp}{dr} \pi r \int_0^H y(H-y) dy = -\frac{1}{\mu} \frac{dp}{dr} \pi r \left[\frac{Hy^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right]_0^H$$

$$Q_{cil} = -\frac{1}{6} \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dr} \pi r H^3$$

Aplicando la ecuación de lubricación de Reynolds se determinará la distribución de presiones en función del radio:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{rh^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r} \right) = 0$$

La primera integración da lugar a:

$$\frac{rh^3}{\mu} \frac{dp}{dr} = C_1$$

Despejando $\frac{\partial p}{\partial r}$ y teniendo presente que la distancia entre platos es constante, es decir, que $h = H$:

$$\frac{dp}{dr} = C_1 \frac{\mu}{rh^3} \Big|_{h=H} = C_1 \frac{\mu}{rH^3}$$

La constante C_1 es desconocida. Para determinarla, se procede a integrar la ecuación anterior. Las condiciones de contorno son: para un radio r_0 , la presión es P_0 y, para un radio r_{in} , la presión es P_{in} .

$$\int_{P_{in}}^{P_0} dp = \int_{r_{in}}^{r_0} C_1 \frac{\mu}{rH^3} dr$$

$$P_0 - P_{in} = \frac{C_1 \mu}{H^3} \ln \frac{r_0}{r_{in}}$$

P_0 : presión de entrada de la zona cilíndrica (conocida)

P_{in} : presión de salida de la zona cilíndrica. (desconocida)

Aislando C_1 :

$$C_1 = \frac{H^3 (P_0 - P_{in})}{\mu \ln \frac{r_0}{r_{in}}}$$



Posteriormente, se determina esta presión P_0 relacionándola con la zona troncocónica.

Una vez obtenido el valor de la constante C_1 , agrupando términos ya es posible obtener el gradiente de presiones y, en consecuencia, el caudal:

$$\frac{dp}{dr} = \frac{H^3 (P_0 - P_{in})}{\mu \ln \frac{r_0}{r_{in}}} \frac{\mu}{rH^3} = \frac{1}{r} \frac{(P_0 - P_{in})}{\ln \frac{r_0}{r_{in}}}$$

Sustituyendo esta ecuación en la expresión que determina el caudal circulante en esta zona:

$$Q_{cil} = -\frac{1}{6} \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dr} \pi r H^3 = -\frac{1}{6} \frac{1}{\mu} \frac{(P_0 - P_{in})}{\ln \frac{r_0}{r_{in}}} \pi H^3$$

Para hallar la distribución de presiones, se integra el gradiente de presiones hallado anteriormente, sabiendo que, para un radio r_{in} , hay una presión P_{in} y que, para un radio genérico r , hay una presión genérica P :

$$\int_{P_{in}}^P dp = \int_{r_{in}}^r \frac{(P_0 - P_{in})}{\ln \frac{r_0}{r_{in}}} \frac{1}{r} dr$$

En consecuencia, la distribución de presiones se puede dar como:

$$P = P_{in} + \frac{(P_0 - P_{in})}{\ln \frac{r_0}{r_{in}}} \ln \frac{r}{r_{in}}$$

Zona troncocónica

El caudal circulante en esta zona viene definido por:

$$Q = \int_S V_T ds$$

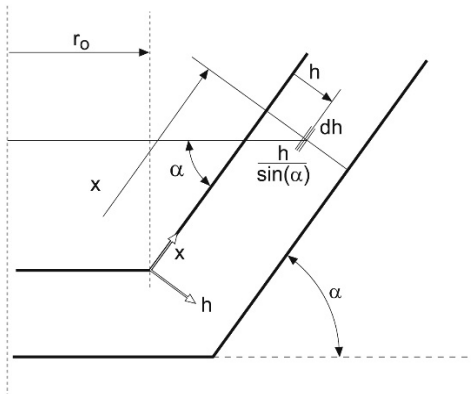


Fig. 5.2



Donde

$$V_T = -\frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} \frac{h(H-h)}{2}$$

y el diferencial de superficie $ds = 2\pi(r_0 + x\cos(\alpha) + h \cdot \sin(\alpha))dh$. El dominio de integración está entre 0 y H. Entonces, la expresión del caudal queda como:

$$\begin{aligned} Q_{tr} &= \int_0^H -\frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} \frac{h(H-h)}{2} 2\pi(r_0 + x\cos(\alpha) + h \cdot \sin(\alpha))dh = \\ &= -\frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} \pi \int_0^H h(H-h)(r_0 + x\cos(\alpha) + h \cdot \sin(\alpha))dh \end{aligned}$$

Resolviendo la integral:

$$Q_{tr} = -\frac{1}{6\mu} \frac{dp}{dx} \pi H^3 \left(r_0 + x \cdot \cos(\alpha) + \frac{H \cdot \sin(\alpha)}{2} \right)$$

La definición completa del caudal y la distribución de presiones en ambas zonas, puede realizarse de dos maneras distintas. A continuación, se muestran las dos resoluciones:

Resolución 1

Una vez obtenida la expresión del caudal en la zona troncocónica, se observa que el gradiente de presiones $\frac{dp}{dx}$ no es conocido. Como ya se ha señalado anteriormente, es posible igualar los caudales circulantes por las dos zonas. Introduciendo esta igualdad, se obtiene la ecuación siguiente:

$$-\frac{1}{6\mu} \frac{dp}{dx} \pi H^3 \left(r_0 + x \cdot \cos(\alpha) + \frac{H \cdot \sin(\alpha)}{2} \right) = -\frac{1}{6} \frac{1}{\mu} \frac{(P_0 - P_{in})}{\ln \frac{r_0}{r_{in}}} \pi H^3$$

A continuación, se despeja $\frac{dp}{dx}$, con la intención de integrar la ecuación y obtener el valor de P_0 .

$$\frac{dp}{dx} = \frac{1}{\left(r_0 + x \cdot \cos(\alpha) + \frac{H \cdot \sin(\alpha)}{2} \right)} \frac{(P_0 - P_{in})}{\ln \frac{r_0}{r_{in}}}$$



Se integra la expresión anterior sabiendo que, para $x = 0$, hay una presión P_0 y, para $x = D$, hay una presión P_{out} . D es la generatriz del tronco del cono.

$$\int_{P_0}^{P_{out}} dp = \int_0^D \frac{1}{\left(r_0 + x \cdot \cos(\alpha) + \frac{H \cdot \sin(\alpha)}{2}\right)} \frac{(P_0 - P_{in})}{\ln \frac{r_0}{r_{in}}} dx$$

$$P_{out} = P_0 + \frac{(P_0 - P_{in})}{\ln \frac{r_0}{r_{in}}} \frac{1}{\cos(\alpha)} \ln \frac{\left(r_0 + D \cdot \cos(\alpha) + \frac{H \cdot \sin(\alpha)}{2}\right)}{r_0 + \frac{H \cdot \sin(\alpha)}{2}} \quad (1)$$

De la ecuación 1 se puede aislar la presión P_0 , que anteriormente era desconocida.

Para realizar este procedimiento de una manera más sencilla, al factor

$$\frac{1}{\cos(\alpha) \ln \frac{r_0}{r_{in}}} \ln \frac{\left(r_0 + D \cdot \cos(\alpha) + \frac{H \cdot \sin(\alpha)}{2}\right)}{r_0 + \frac{H \cdot \sin(\alpha)}{2}} \text{ constante se le llamará } A.$$

$$A = \frac{1}{\cos(\alpha) \ln \frac{r_0}{r_{in}}} \ln \frac{\left(r_0 + D \cdot \cos(\alpha) + \frac{H \cdot \sin(\alpha)}{2}\right)}{r_0 + \frac{H \cdot \sin(\alpha)}{2}}$$

Sustituyendo en la ecuación 1:

$$P_{out} = P_0 + A(P_0 - P_{in}) = P_0 + AP_0 - AP_{in}$$

y aislando P_0 :

$$P_0 = \frac{P_{out} + AP_{in}}{1 + A}$$

Si ahora se vuelve a introducir el factor $1 + \frac{1}{\cos(\alpha) \ln \frac{r_0}{r_{in}}} \ln \frac{\left(r_0 + D \cdot \cos(\alpha) + \frac{H \cdot \sin(\alpha)}{2}\right)}{r_0 + \frac{H \cdot \sin(\alpha)}{2}}$

en lugar de A :

$$P_0 = \frac{P_{out} + \frac{P_{in}}{\cos(\alpha) \ln \frac{r_0}{r_{in}}} \ln \frac{\left(r_0 + D \cdot \cos(\alpha) + \frac{H \cdot \sin(\alpha)}{2}\right)}{r_0 + \frac{H \cdot \sin(\alpha)}{2}}}{1 + \frac{1}{\cos(\alpha) \ln \frac{r_0}{r_{in}}} \ln \frac{\left(r_0 + D \cdot \cos(\alpha) + \frac{H \cdot \sin(\alpha)}{2}\right)}{r_0 + \frac{H \cdot \sin(\alpha)}{2}}}$$



conociendo P_0 , el caudal en las dos zonas y la distribución de presiones en la zona cilíndrica ya quedan definidos.

La distribución de presiones en la zona troncocónica se obtiene integrando el gradiente de presiones $\frac{dp}{dx}$. Las condiciones de contorno serán ahora, para $x = 0$ una presión P_0 y, para una x genérica, una presión P .

$$\int_{P_0}^P dp = \int_0^x \frac{1}{\left(r_0 + x \cdot \cos(\alpha) + \frac{H \cdot \sin(\alpha)}{2}\right)} \frac{(P_0 - P_{in})}{\ln \frac{r_0}{r_{in}}} dx$$

Se obtiene que la distribución de presiones en la zona troncocónica es:

$$P = P_0 + \frac{(P_0 - P_{in})}{\ln \frac{r_0}{r_{in}}} \frac{1}{\cos(\alpha)} \ln \left(\frac{r_0 + x \cdot \cos(\alpha) + \frac{H \cdot \sin(\alpha)}{2}}{r_0 + \frac{H \cdot \sin(\alpha)}{2}} \right)$$

Resolución 2

Partiendo, en este caso, también de la expresión del caudal circulante en la zona troncocónica:

$$Q_{tr} = - \frac{1}{6\mu} \frac{dp}{dx} \pi H^3 \left(r_0 + x \cdot \cos(\alpha) + \frac{H \cdot \sin(\alpha)}{2} \right)$$

Es posible aislar $\frac{dp}{dx}$ e integrarlo asumiendo que, para $x = 0$ hay una presión P_0 y, para una x genérica, hay una presión P genérica.

$$\frac{dp}{dx} = \frac{-6\mu Q_{tr}}{\pi H^3 \left(r_0 + x \cdot \cos(\alpha) + \frac{H \cdot \sin(\alpha)}{2} \right)}$$

$$\int_{P_0}^P dp = \int_0^x \frac{-6\mu Q_{tr}}{\pi H^3 \left(r_0 + x \cdot \cos(\alpha) + \frac{H \cdot \sin(\alpha)}{2} \right)} dx$$

Debido a que el caudal es constante a lo largo de toda la zona, es posible sacarlo fuera de la integral. Si se integra la expresión anterior, se obtiene la distribución de presiones:

$$P = P_0 + \frac{6\mu Q_{tr}}{\pi H^3 \cos \alpha} \ln \left(\frac{r_0 + \frac{H \cdot \sin(\alpha)}{2}}{r_0 + x \cdot \cos(\alpha) + \frac{H \cdot \sin(\alpha)}{2}} \right) \quad (2)$$



Según la ecuación de continuidad, el caudal circulante que pasa a través de la zona troncocónica es igual al que circula por la zona cilíndrica. Introduciendo dicha igualdad, es posible obtener tanto el caudal en las dos zonas como la distribución de presiones en función de la presión P_0 , que, por el momento es desconocida.

$$Q_{tr} = Q_{cil} = -\frac{1}{6} \frac{1}{\mu} \frac{(P_0 - P_{in})}{\ln \frac{r_0}{r_{in}}} \pi H^3$$

Para la distribución de presiones, se sustituye Q_{tr} por Q_{cil} y, entonces, la ecuación 2 resulta:

$$P = P_0 + \frac{1}{\cos \alpha} \frac{(P_0 - P_{in})}{\ln \frac{r_0}{r_{in}}} \ln \left(\frac{r_0 + x \cdot \cos(\alpha) + \frac{H \cdot \sin(\alpha)}{2}}{r_0 + \frac{H \cdot \sin(\alpha)}{2}} \right)$$

Se observa que las dos expresiones que determinan el caudal y la distribución de presiones dependen de P_0 . Si se tiene en cuenta que para $x = D$ hay una presión P_{out} , es posible obtener P_0 aislando dicho término. Realizando todo este proceso, resulta:

$$P_{out} = P_0 + \frac{1}{\cos \alpha} \frac{(P_0 - P_{in})}{\ln \frac{r_0}{r_{in}}} \ln \left(\frac{r_0 + D \cdot \cos(\alpha) + \frac{H \cdot \sin(\alpha)}{2}}{r_0 + \frac{H \cdot \sin(\alpha)}{2}} \right)$$

Esta ecuación es idéntica a la ecuación 1 obtenida en la resolución anterior. Por tanto, si se aísla P_0 , se obtiene el mismo resultado:

$$P_0 = \frac{P_{out} + \frac{P_{in}}{\cos(\alpha) \ln \frac{r_0}{r_{in}}} \ln \left(\frac{r_0 + D \cdot \cos(\alpha) + \frac{H \cdot \sin(\alpha)}{2}}{r_0 + \frac{H \cdot \sin(\alpha)}{2}} \right)}{1 + \frac{1}{\cos(\alpha) \ln \frac{r_0}{r_{in}}} \ln \left(\frac{r_0 + D \cdot \cos(\alpha) + \frac{H \cdot \sin(\alpha)}{2}}{r_0 + \frac{H \cdot \sin(\alpha)}{2}} \right)}$$

Una vez conocida la presión P_0 , el caudal circulante y la distribución de presiones en cada una de las dos zonas quedan completamente definidos.

A.2. Fuerza de sustentación sobre la pieza interior en el caso A

La fuerza de sustentación total es la suma de la fuerza que realiza el fluido en la componente vertical en la zona cilíndrica más la correspondiente a la zona troncocónica.



$$\text{Fuerza de sustentación} = F_{P_C}^y + F_{C_C}^y + F_{P_T}^y + F_{C_T}^y$$

$F_{P_C}^y$: fuerza debida a la presión en la zona cilíndrica en la dirección vertical

$F_{C_C}^y$: fuerza debida a los esfuerzos cortantes en la zona cilíndrica en la dirección vertical

$F_{P_T}^y$: fuerza debida a la presión en la zona troncocónica en la dirección vertical

$F_{C_T}^y$: fuerza debida a los esfuerzos cortantes en la zona troncocónica en la dirección vertical

A continuación, se analizan cada una de las zonas, con sus respectivas fuerzas asociadas

Zona cilíndrica

En esta zona, la fuerza resultante debida a la presión únicamente tiene componente vertical. En cambio, la fuerza resultante debida a los esfuerzos cortantes es nula, debido a la simetría. Por tanto, se concluye

$$F_{C_C}^y = 0$$

La fuerza debida a la presión debe desglosarse en dos términos ya que la presión se mantiene constante entre $r=0$ y $r=r_{in}$, pero entre r_{in} y r_0 la presión decae logarítmicamente. Entre $r=0$ y $r=r_{in}$ la presión es P_{in} y entre r_{in} y r_0 , la distribución de presiones ha sido determinada anteriormente. Entonces:

$$F_{P_C}^y = P_{in} \pi r_{in}^2 + \int_s P ds = P_{in} \pi r_{in}^2 + \int_s \left(P_{in} + \frac{(P_0 - P_{in})}{\ln \frac{r_0}{r_{in}}} \ln \frac{r}{r_{in}} \right) ds$$

Si el diferencial de superficie es $ds = 2\pi r dr$:

$$\begin{aligned} F_{P_C}^y &= P_{in} \pi r_{in}^2 + \int_s P ds = P_{in} \pi r_{in}^2 + \int_{r_{in}}^{r_0} \left(P_{in} 2\pi r + \frac{(P_0 - P_{in})}{\ln \frac{r_0}{r_{in}}} \ln \frac{r}{r_{in}} 2\pi r \right) dr = \\ &= P_{in} \pi r_{in}^2 + P_{in} \pi (r_0^2 - r_{in}^2) + 2\pi \frac{(P_0 - P_{in})}{\ln \frac{r_0}{r_{in}}} \left(\frac{r_0^2}{2} \ln \frac{r_0}{r_{in}} + \frac{1}{4} (r_{in}^2 - r_0^2) \right) \end{aligned}$$



Zona troncocónica

En esta zona, las fuerzas debidas la presión tienen componente horizontal y vertical. Como se está estudiando la sustentación generada, la componente horizontal no influye en la sustentación. Además de las fuerzas debidas a la presión, existen unos esfuerzos cortantes que, para este caso, sí tienen una componente vertical.

Fuerza debida a los esfuerzos cortantes en la dirección vertical

$$F_{C_T} = \int_S \tau_{hx}|_{h=0} \sin(\alpha) ds \quad (3)$$

Es necesario hallar los esfuerzos cortantes en la pared de la pieza interior, donde $h=0$. Para un fluido newtoniano, los esfuerzos cortantes se definen:

$$\tau_{hx}|_{h=0} = \mu \frac{\partial V_T}{\partial h} \Big|_{h=0} = \mu \frac{\partial \left(-\frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} \frac{h(H-h)}{2} \right)}{\partial h} \Big|_{h=0} = -\frac{1}{2} \frac{dp}{dx} H$$

El diferencial de superficie viene determinado por $ds = 2\pi(r_0 + x \cos \alpha) dx$.

Sustituyendo los esfuerzos cortantes y el diferencial de superficie en la ecuación 3:

$$F_{C_T}^y = \int_0^D -\frac{1}{2} \frac{dp}{dx} H 2\pi(r_0 + x \cos(\alpha)) \sin(\alpha) dx = -\frac{1}{2} H 2\pi \sin(\alpha) \int_0^D \frac{dp}{dx} (r_0 + x \cos(\alpha)) dx$$

Recordando que el término $\frac{dp}{dx}$ hallado anteriormente era:

$$\frac{dp}{dx} = \frac{1}{\left(r_0 + x \cdot \cos(\alpha) + \frac{H \cdot \sin(\alpha)}{2} \right)} \cdot \frac{(P_0 - P_{in})}{\ln \frac{r_0}{r_{in}}}$$

e, introduciendo la expresión del gradiente de presiones en la ecuación que determina la fuerza $F_{C_T}^y$, queda:

$$\begin{aligned} F_{C_T}^y &= -\frac{1}{2} H 2\pi \sin(\alpha) \int_0^D \frac{1}{\left(r_0 + x \cdot \cos(\alpha) + \frac{H \cdot \sin(\alpha)}{2} \right)} \frac{(P_0 - P_{in})}{\ln \frac{r_0}{r_{in}}} (r_0 + x \cos(\alpha)) dx = \\ &= -\frac{1}{2} H 2\pi \sin(\alpha) \frac{(P_0 - P_{in})}{\ln \frac{r_0}{r_{in}}} \int_0^D \frac{1}{\left(r_0 + x \cdot \cos(\alpha) + \frac{H \cdot \sin(\alpha)}{2} \right)} (r_0 + x \cos(\alpha)) dx \end{aligned}$$



Resolviendo la integral, resulta:

$$F_{C_T}^y = -\frac{1}{2} H 2\pi \sin(\alpha) \frac{(P_0 - P_{in})}{\ln \frac{r_0}{r_{in}}} \left(D + \frac{H}{2 \sin(\alpha) \cos(\alpha)} \ln \frac{r_0 + \frac{H \cdot \sin(\alpha)}{2}}{r_0 + D \cdot \cos(\alpha) + \frac{H \cdot \sin(\alpha)}{2}} \right)$$

Fuerza debida a la presión en la dirección vertical:

$$F_{P_T}^y = \int_S P ds = \int_S \left(P_0 + \frac{(P_0 - P_{in})}{\ln \frac{r_0}{r_{in}}} \frac{1}{\cos(\alpha)} \ln \frac{\left(r_0 + x \cdot \cos(\alpha) + \frac{H \cdot \sin(\alpha)}{2} \right)}{r_0 + \frac{H \cdot \sin(\alpha)}{2}} \right) \cos(\alpha) ds$$

En este caso, el diferencial de superficie viene determinado por:

$$ds = 2\pi (r_0 + x \cos(\alpha)) dx.$$

Sustituyendo:

$$F_{P_T}^y = \int_0^D \left(P_0 + \frac{(P_0 - P_{in})}{\ln \frac{r_0}{r_{in}}} \frac{1}{\cos(\alpha)} \ln \frac{\left(r_0 + x \cdot \cos(\alpha) + \frac{H \cdot \sin(\alpha)}{2} \right)}{r_0 + \frac{H \cdot \sin(\alpha)}{2}} \right) 2\pi (r_0 + x \cos(\alpha)) \cos(\alpha) dx$$

Resolución de la integral definida $F_{P_T}^y$:

$$F_{P_T}^y = \int_0^D \left(P_0 + \frac{(P_0 - P_{in})}{\ln \frac{r_0}{r_{in}}} \frac{1}{\cos(\alpha)} \ln \frac{\left(r_0 + x \cdot \cos(\alpha) + \frac{H \cdot \sin(\alpha)}{2} \right)}{r_0 + \frac{H \cdot \sin(\alpha)}{2}} \right) 2\pi (r_0 + x \cos(\alpha)) \cos(\alpha) dx$$

$$= \int_0^D P_0 2\pi (r_0 + x \cos(\alpha)) \cos(\alpha) dx$$

$$+ \int_0^D \left(\frac{(P_0 - P_{in})}{\ln \frac{r_0}{r_{in}}} \frac{1}{\cos(\alpha)} \ln \frac{\left(r_0 + x \cdot \cos(\alpha) + \frac{H \cdot \sin(\alpha)}{2} \right)}{r_0 + \frac{H \cdot \sin(\alpha)}{2}} \right) 2\pi (r_0 + x \cos(\alpha)) \cos(\alpha) dx$$

$$F_{P_T}^y = I_1 + I_2$$



Para facilitar el cálculo, se calcula cada integral por separado:

$$I_1 = \int_0^D P_0 2\pi (r_0 + x \cos(\alpha)) \cos(\alpha) dx = P_0 2\pi \left(r_0 D + \frac{D^2}{2} \cos(\alpha) \right) \cos(\alpha)$$

$$I_2 = \int_0^D \left(\frac{(P_0 - P_{in})}{\ln \frac{r_0}{r_{in}}} \frac{1}{\cos(\alpha)} \ln \left(\frac{r_0 + x \cdot \cos(\alpha) + \frac{H \cdot \sin(\alpha)}{2}}{r_0 + \frac{H \cdot \sin(\alpha)}{2}} \right) \right) 2\pi (r_0 + x \cos(\alpha)) \cos(\alpha) dx$$

$$= I_2' + I_2''$$

$$I_2 = \int_0^D \left(\frac{(P_0 - P_{in})}{\ln \frac{r_0}{r_{in}}} \frac{1}{\cos(\alpha)} \ln \left(\frac{r_0 + x \cdot \cos(\alpha) + \frac{H \cdot \sin(\alpha)}{2}}{r_0 + \frac{H \cdot \sin(\alpha)}{2}} \right) \right) 2\pi (r_0 + x \cos(\alpha)) \cos(\alpha) dx$$

$$= I_2' + I_2''$$

$$I_2' = \int_0^D \left(\frac{(P_0 - P_{in})}{\ln \frac{r_0}{r_{in}}} \frac{1}{\cos(\alpha)} \ln \left(\frac{r_0 + x \cdot \cos(\alpha) + \frac{H \cdot \sin(\alpha)}{2}}{r_0 + \frac{H \cdot \sin(\alpha)}{2}} \right) \right) 2\pi r_0 \cos(\alpha) dx =$$

$$= \int_0^D \left(2\pi r_0 \frac{(P_0 - P_{in})}{\ln \frac{r_0}{r_{in}}} \ln \left(\frac{r_0 + x \cdot \cos(\alpha) + \frac{H \cdot \sin(\alpha)}{2}}{r_0 + \frac{H \cdot \sin(\alpha)}{2}} \right) \right) dx$$

$$I_2'' = \int_0^D \left(\frac{(P_0 - P_{in})}{\ln \frac{r_0}{r_{in}}} \frac{1}{\cos(\alpha)} \ln \left(\frac{r_0 + x \cdot \cos(\alpha) + \frac{H \cdot \sin(\alpha)}{2}}{r_0 + \frac{H \cdot \sin(\alpha)}{2}} \right) \right) 2\pi x \cos^2(\alpha) dx =$$

$$= \int_0^D \left(2\pi \cos(\alpha) \frac{(P_0 - P_{in})}{\ln \frac{r_0}{r_{in}}} x \ln \left(\frac{r_0 + x \cdot \cos(\alpha) + \frac{H \cdot \sin(\alpha)}{2}}{r_0 + \frac{H \cdot \sin(\alpha)}{2}} \right) \right) dx$$

Se definen las constantes siguientes, para facilitar también el cálculo de dichas integrales:

$$A = \cos(\alpha)$$



$$B = 2\pi \frac{(P_0 - P_{in})}{\ln \frac{r_0}{r_{in}}}$$

$$C = \frac{H \cdot \sin(\alpha)}{2} + r_0$$

Entonces:

$$I'_2 = \int_0^D \left(r_0 B \ln \frac{(Ax+C)}{C} \right) dx = \frac{r_0 B}{A} \left(AD \ln \left(\frac{DA+C}{C} \right) - DA + C \ln \left(\frac{DA+C}{C} \right) \right)$$

$$\begin{aligned} I'_2 &= \int_0^D \left(ABx \ln \frac{(Ax+C)}{C} \right) dx = \\ &= \frac{B}{4A} \left(2 \ln \left(\frac{DA+C}{C} \right) D^2 A^2 - D^2 A^2 + 2CDA - 2C^2 \ln \frac{DA+C}{C} \right) \end{aligned}$$

Una vez determinadas estas fuerzas asociadas a cada zona, la fuerza de sustentación queda totalmente definida.

B.1. Análisis del caudal circulante y de la distribución de presiones en el caso B

Se debe puntualizar que, aunque la geometría es diferente que en el caso anterior, también se cumple que el caudal en ambas zonas es el mismo y constante a lo largo del recorrido

Zona esférica

El caudal se define como:

$$Q_{esf} = \int_S V_{esf} ds$$

Si la distribución de velocidades en la zona esférica es:

$$V_{esf} = -\frac{1}{\mu} \frac{dp}{\left(r_{esf} + \frac{H}{2} \right) d\gamma} \frac{r(H-r)}{2}$$



y el diferencial de superficie viene determinado por: $ds = 2\pi(r_{\text{esf}} + r)\sin(\gamma)dr$.

Sustituyendo, se obtiene:

$$\begin{aligned}
 Q_{\text{esf}} &= \int_0^H -\frac{1}{\mu} \frac{dp}{\left(r_{\text{esf}} + \frac{H}{2}\right) d\gamma} \frac{r(H-r)}{2} 2\pi(r_{\text{esf}} + r)\sin(\gamma)dr \\
 &= -\frac{1}{\mu} \frac{1}{\left(r_{\text{esf}} + \frac{H}{2}\right) d\gamma} \frac{dp}{d\gamma} \pi \sin(\gamma) \int_0^H \left((Hr-r^2)r_{\text{esf}} + (Hr-r^2)r\right) dr \\
 Q_{\text{esf}} &= -\frac{1}{\mu} \frac{\pi \sin(\gamma)}{\left(r_{\text{esf}} + \frac{H}{2}\right) d\gamma} \frac{dp}{d\gamma} \left(\frac{H^3}{6} r_{\text{esf}} + \frac{H^4}{12}\right) = -\frac{1}{6\mu} \pi \sin(\gamma) H^3 \frac{dp}{d\gamma} \quad (4)
 \end{aligned}$$

La distribución de presiones en el intersticio esférico puede determinarse mediante la ecuación de lubricación de Reynolds, la cual, para el caso que nos ocupa, adopta la forma:

$$\frac{1}{\sin\gamma} \frac{\partial}{\partial\gamma} \left(h^3 \sin(\gamma) \frac{dp}{d\gamma} \right) = 0$$

Si la variación de $\left(h^3 \sin(\gamma) \frac{dp}{d\gamma} \right)$ respecto del ángulo es cero, se concluye que

$\left(h^3 \sin(\gamma) \frac{dp}{d\gamma} \right)$ es igual a una constante, que en este caso se denomina C_2 :

$$h^3 \sin(\gamma) \frac{dp}{d\gamma} = C_2$$

Aislando $\frac{dp}{d\gamma}$ y teniendo en cuenta que, en este caso, la altura del intersticio es constante, $h = H$, se obtiene lo siguiente:

$$\frac{dp}{d\gamma} = \frac{C_2}{H^3 \sin(\gamma)} \quad (5)$$

Sustituyendo 5 en 4 se obtiene la expresión que determina el caudal circulante en función de C_2 :

$$Q_{\text{esf}} = -\frac{1}{\mu} \frac{C_2 \pi}{6}$$



La constante C_2 es desconocida. Si se integra la ecuación 5 de forma definida, teniendo en cuenta que para un ángulo γ_{in} hay una presión P_{in} y que para un ángulo γ_2 hay una presión P_2 , se obtiene lo siguiente :

$$\int_{P_{in}}^{P_2} dp = \int_{\gamma_{in}}^{\gamma_2} \frac{C_2}{H^3} \frac{1}{\sin(\gamma)} d\gamma$$

$$P_2 = P_{in} + \frac{C_2}{H^3} \left(\ln \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\gamma_2}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\gamma_{in}}{2}\right)} \right)$$

De esta última ecuación, se aísla C_2 :

$$C_2 = \frac{(P_2 - P_{in}) H^3}{\ln \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\gamma_2}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\gamma_{in}}{2}\right)}}$$

La presión P_2 no es conocida, pero se determinará más adelante mediante la zona troncocónica.

Agrupando términos, la expresión del caudal resulta:

$$Q_{esf} = -\frac{1}{\mu} \frac{\pi}{6} \frac{(P_2 - P_{in}) H^3}{\ln \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\gamma_2}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\gamma_{in}}{2}\right)}}$$

La distribución de presiones se obtiene integrando el gradiente de presión $\frac{dp}{d\gamma}$ y tomando como límites de integración la presión P_{in} para el correspondiente ángulo γ_{in} y una presión genérica P para un ángulo genérico γ .

$$\int_{P_{in}}^P dp = \int_{\gamma_{in}}^{\gamma} \frac{C_2}{h^3} \frac{1}{\sin(\gamma)} d\gamma$$

$$P = P_{in} + \frac{C_2}{h^3} \ln \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\gamma}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\gamma_{in}}{2}\right)}$$



Sustituyendo C_2 en la expresión anterior, se obtiene la distribución de presiones en la zona esférica:

$$P = P_{in} + \frac{(P_2 - P_{in})}{\ln \frac{\left(\frac{\gamma_2}{2} \right)}{\left(\frac{\gamma_{in}}{2} \right)}} \ln \frac{\left(\frac{\gamma}{2} \right)}{\left(\frac{\gamma_{in}}{2} \right)}$$

Zona troncocónica

La ecuación 2 que determinaba la distribución de presiones en la zona troncocónica del primer apartado, la cual además estaba en función del caudal circulante en esta misma zona, puede utilizarse en este caso. La única diferencia que hay al respecto es que ahora la presión P_0 del caso A es P_2 . Por tanto, la distribución de presiones en función del caudal circulante viene definida por la expresión siguiente:

$$P = P_2 + \frac{6\mu Q_{tr}}{\pi H^3 \cos(\alpha)} \ln \left(\frac{r_0 + \frac{H \cdot \sin(\alpha)}{2}}{r_0 + x \cdot \cos(\alpha) + \frac{H \cdot \sin(\alpha)}{2}} \right) \quad (6)$$

El caudal circulante en esta zona es igual al caudal circulante en la zona esférica.

$$Q_{tr} = Q_{esf} = -\frac{1}{\mu} \frac{\pi (P_2 - P_{in}) H^3}{6 \ln \frac{\left(\frac{\gamma_2}{2} \right)}{\left(\frac{\gamma_{in}}{2} \right)}}$$

Combinando las dos ecuaciones precedentes, se obtiene la ecuación que caracteriza la distribución de presiones en la zona troncocónica.

$$P = P_2 + \frac{1}{\cos(\alpha)} \frac{(P_2 - P_{in})}{\ln \frac{\left(\frac{\gamma_2}{2} \right)}{\left(\frac{\gamma_{in}}{2} \right)}} \ln \left(\frac{r_0 + x \cdot \cos(\alpha) + \frac{H \cdot \sin(\alpha)}{2}}{r_0 + \frac{H \cdot \sin(\alpha)}{2}} \right)$$



Véase que tanto la distribución de presiones como el caudal circulante están en función de P_2 . Si en la ecuación anterior se establece que, para $x = D$ hay una presión P_{out} , se obtiene una ecuación de la cual será posible obtener P_2 . Realizando este proceso, se llega a la ecuación siguiente:

$$P_{out} = P_2 + \frac{1}{\cos(\alpha)} \frac{(P_2 - P_{in})}{\ln \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\gamma_2}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\gamma_{in}}{2}\right)}} \ln \left(\frac{r_0 + D \cdot \cos(\alpha) + \frac{H \cdot \sin(\alpha)}{2}}{r_0 + \frac{H \cdot \sin(\alpha)}{2}} \right)$$

Ahora es posible obtener P_2 . Para aislar de una forma más sencilla, se define una constante E:

$$E = \frac{1}{\cos(\alpha)} \ln \left(\frac{r_0 + D \cdot \cos(\alpha) + \frac{H \cdot \sin(\alpha)}{2}}{r_0 + \frac{H \cdot \sin(\alpha)}{2}} \right) \frac{1}{\ln \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\gamma_2}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\gamma_{in}}{2}\right)}}$$

Entonces:

$$P_{out} - P_2 = E(P_2 - P_{in}) = EP_2 - EP_{in}$$

Aislado P_2 :

$$P_{out} + EP_{in} = EP_2 + P_2$$

$$P_2 = \frac{P_{out} + EP_{in}}{E + 1}$$

$$P_2 = \frac{P_{out} + \frac{1}{\cos(\alpha)} \ln \left(\frac{r_0 + D \cdot \cos(\alpha) + \frac{H \cdot \sin(\alpha)}{2}}{r_0 + \frac{H \cdot \sin(\alpha)}{2}} \right) \frac{P_{in}}{\ln \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\gamma_2}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\gamma_{in}}{2}\right)}}}{\frac{1}{\cos(\alpha)} \ln \left(\frac{r_0 + D \cdot \cos(\alpha) + \frac{H \cdot \sin(\alpha)}{2}}{r_0 + \frac{H \cdot \sin(\alpha)}{2}} \right) \frac{1}{\ln \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\gamma_2}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\gamma_{in}}{2}\right)}} + 1}$$



Una vez obtenida P_2 , las expresiones que determinan el caudal circulante y la distribución de presiones en las dos zonas quedan completamente definidas.

B.2. Fuerza de sustentación sobre la pieza interior en el caso B

En este caso, a diferencia del anterior, en que la zona central era cilíndrica en lugar de esférica, las fuerzas de sustentación generadas a causa de los esfuerzos cortantes no son nulas. Por tanto, en las zonas esférica y troncocónica, se analiza la fuerza de sustentación generada por la presión y por los esfuerzos cortantes.

En primer lugar, se define la fuerza de sustentación como:

$$\text{Fuerza de sustentación} = F_{P_{\text{esf}}}^y + F_{C_{\text{esf}}}^y + F_{P_{\text{tr}}}^y + F_{C_{\text{tr}}}^y$$

$F_{P_{\text{esf}}}^y$: fuerza debida a la presión en la zona esférica en la dirección vertical

$F_{C_{\text{esf}}}^y$: fuerza debida a los esfuerzos cortantes en la zona esférica en la dirección vertical

$F_{P_{\text{tr}}}^y$: fuerza debida a la presión en la zona troncocónica en la dirección vertical

$F_{C_{\text{tr}}}^y$: fuerza debida a los esfuerzos cortantes en la zona troncocónica en la dirección vertical

Seguidamente, se analiza cada una de las zonas y sus respectivas fuerzas asociadas:

Zona esférica

Fuerza debida a la presión en la dirección vertical

Esta fuerza debida a la presión se debe desglosar en dos términos ya que la presión en la superficie comprendida entre los ángulos $\gamma = 0$ y $\gamma = \gamma_{\text{in}}$ se mantiene constante (primer término de la ecuación siguiente) pero, a partir del ángulo γ_{in} y hasta γ_2 , la presión decae logarítmicamente (segundo término de la ecuación siguiente). Este hecho se define a continuación:

$$F_{P_{\text{esf}}}^y = \int_{S_1} P_{\text{in}} \cos(\gamma) ds + \int_{S_2} P \cos(\gamma) ds$$

Debido a que el diferencial de fuerza se debe contemplar en la dirección vertical, es necesario proyectarlo hacia esta dirección. Por ese motivo, se ha multiplicado por el coseno del ángulo γ .



Además, para simplificar el cálculo del primer término de la ecuación anterior, la presión P_{in} se puede extraer fuera de la integral, ya que no varía a lo largo de la superficie. Una vez definido el diferencial de superficie, al realizar el proceso de integración, el primer término de la ecuación precedente resulta:

$$\begin{aligned}\int_{S_1} P_{in} \cos(\gamma) ds &= \int_0^{\gamma_{in}} P_{in} 2\pi r_{esf}^2 \sin(\gamma) \cos(\gamma) d\gamma = P_{in} 2\pi r_{esf}^2 \left[\frac{1}{2} \sin^2(\gamma) \right]_0^{\gamma_{in}} \\ &= P_{in} \pi r_{esf}^2 \sin^2(\gamma) = P_{in} \pi r_{in}^2\end{aligned}$$

Para el cálculo del segundo término, se utiliza el mismo diferencial de superficie que para la integral precedente:

$$ds = r_{esf}^2 2\pi \sin(\gamma) d\gamma$$

Sustituyendo en la expresión de la fuerza en dirección vertical y para la zona esférica, se obtiene:

$$F_{P_{esf}}^y = P_{in} \pi r_{in}^2 + \int_{\gamma_{in}}^{\gamma_2} P \cos(\gamma) r_{esf}^2 2\pi \sin(\gamma) d\gamma$$

Mediante trigonometría, se determina que $\sin(2\gamma) = 2 \sin(\gamma) \cos(\gamma)$. Entonces, la expresión anterior se reduce a:

$$F_{P_{esf}}^y = P_{in} \pi r_{in}^2 + \int_{\gamma_{in}}^{\gamma_2} P r_{esf}^2 \pi \sin(2\gamma) d\gamma$$

Recuérdese que la distribución de presiones a lo largo de la zona esférica estaba definida por:

$$P = P_{in} + \frac{(P_2 - P_{in})}{\ln \frac{\left(\frac{\gamma_2}{2}\right)}{\left(\frac{\gamma_{in}}{2}\right)}} \ln \frac{\left(\frac{\gamma}{2}\right)}{\left(\frac{\gamma_{in}}{2}\right)}$$

Sustituyendo en la expresión que determina la fuerza $F_{P_{esf}}^y$:

$$F_{P_{esf}}^y = P_{in} \pi r_{in}^2 + \int_{\gamma_{in}}^{\gamma_2} \left(P_{in} + \frac{(P_2 - P_{in})}{\ln \frac{\left(\frac{\gamma_2}{2}\right)}{\left(\frac{\gamma_{in}}{2}\right)}} \ln \frac{\left(\frac{\gamma}{2}\right)}{\left(\frac{\gamma_{in}}{2}\right)} \right) r_{esf}^2 \pi \sin(2\gamma) d\gamma =$$



$$\begin{aligned}
 &= P_{in} \pi r_{in}^2 + \int_{\gamma_{in}}^{\gamma_2} P_{in} r_{esf}^2 \pi \sin(2\gamma) d\gamma + \int_{\gamma_{in}}^{\gamma_2} \frac{(P_2 - P_{in})}{\frac{\ln \left(\frac{\frac{\gamma_2}{2}}{\frac{\gamma_{in}}{2}} \right)}{\frac{\operatorname{tg} \left(\frac{\gamma}{2} \right)}{\operatorname{tg} \left(\frac{\gamma_{in}}{2} \right)}}} r_{esf}^2 \pi \sin(2\gamma) d\gamma = \\
 &= P_{in} \pi r_{in}^2 + \frac{1}{2} P_{in} r_{esf}^2 \pi (\cos(2\gamma_{in}) - \cos(2\gamma_2)) + \int_{\gamma_{in}}^{\gamma_2} \frac{(P_2 - P_{in})}{\frac{\ln \left(\frac{\frac{\gamma_2}{2}}{\frac{\gamma_{in}}{2}} \right)}{\frac{\operatorname{tg} \left(\frac{\gamma}{2} \right)}{\operatorname{tg} \left(\frac{\gamma_{in}}{2} \right)}}} r_{esf}^2 \pi \sin(2\gamma) d\gamma
 \end{aligned}$$

La integral que define el tercer término de $F_{p_{esf}}^y$ se va a resolver numéricamente al final del problema.

Fuerza debida a los esfuerzos cortantes en la dirección vertical

$$F_{C_{esf}}^y = \int_S \tau_{xr} \big|_{r=0} \sin(\gamma) ds$$

Los esfuerzos cortantes para $r = 0$ vienen determinados por:

$$\tau_{xr} \big|_{r=0} = \mu \frac{\partial V}{\partial r} \bigg|_{r=0}$$

La expresión que determina la velocidad en el intersticio esférico era:

$$V_{esf} = -\frac{1}{\mu} \frac{dp}{\left(r_{esf} + \frac{H}{2}\right) d\gamma} \frac{r(H-r)}{2}$$

de donde:

$$\tau_{xr} \big|_{r=0} = -\frac{dp}{\left(r_{esf} + \frac{H}{2}\right) d\gamma} \frac{(H-2r)}{2} \bigg|_{r=0} = -\frac{1}{2} \frac{H}{\left(r_{esf} + \frac{H}{2}\right)} \frac{dp}{d\gamma}$$

Recordando que el diferencial de superficie es $ds = r_{esf}^2 2\pi \sin(\gamma) d\gamma$, resulta una fuerza:



$$F_{C_{esf}}^y = \int_{\gamma_{in}}^{\gamma_2} -\frac{1}{2} \frac{H}{\left(r_{esf} + \frac{H}{2}\right)} \frac{dp}{d\gamma} \sin(\gamma) r_{esf}^2 2\pi \sin(\gamma) d\gamma = \int_{\gamma_{in}}^{\gamma_2} -\frac{H}{\left(r_{esf} + \frac{H}{2}\right)} \frac{dp}{d\gamma} \sin^2(\gamma) r_{esf}^2 \pi d\gamma$$

Sustituyendo el valor del $\frac{dp}{d\gamma}$:

$$F_{C_{esf}}^y = \int_{\gamma_{in}}^{\gamma_2} -\frac{H}{\left(r_{esf} + \frac{H}{2}\right)} \frac{1}{\sin(\gamma)} \cdot \frac{(P_2 - P_{in})}{\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\gamma_2}{2}\right)}{\ln \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\gamma_{in}}{2}\right)}}} \sin^2(\gamma) r_{esf}^2 \pi d\gamma =$$

$$= \int_{\gamma_{in}}^{\gamma_2} -\frac{H}{\left(r_{esf} + \frac{H}{2}\right)} \cdot \frac{(P_2 - P_{in})}{\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\gamma_2}{2}\right)}{\ln \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\gamma_{in}}{2}\right)}}} \sin(\gamma) r_{esf}^2 \pi d\gamma$$

$$F_{C_{esf}}^y = \frac{H r_{esf}^2 \pi}{\left(r_{esf} + \frac{H}{2}\right)} \cdot \frac{(P_2 - P_{in})}{\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\gamma_2}{2}\right)}{\ln \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\gamma_{in}}{2}\right)}}} (\cos(\gamma_2) - \cos(\gamma_{in}))$$

Zona troncocónica

Fuerza debida a la presión en la dirección vertical y.

$$F_{P_{tr}}^y = \int_S P \cos(\alpha) ds$$

Recuérdese que la distribución de presiones en la zona troncocónica era:

$$P = P_2 + \frac{1}{\cos(\alpha)} \frac{(P_2 - P_{in})}{\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\gamma_2}{2}\right)}{\ln \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\gamma_{in}}{2}\right)}}} \ln \left(\frac{r_0 + x \cdot \cos(\alpha) + \frac{H \cdot \sin(\alpha)}{2}}{r_0 + \frac{H \cdot \sin(\alpha)}{2}} \right)$$



El diferencial de superficie se define como: $ds = 2\pi(r_0 + x \cos(\alpha))dx$. Sustituyendo:

$$F_{P_{tr}}^y = \int_0^D \left(P_2 + \frac{1}{\cos(\alpha)} \frac{(P_2 - P_{in})}{\ln \frac{\lg\left(\frac{\gamma_2}{2}\right)}{\lg\left(\frac{\gamma_{in}}{2}\right)}} \ln \left(\frac{r_0 + x \cdot \cos(\alpha) + \frac{H \cdot \sin(\alpha)}{2}}{r_0 + \frac{H \cdot \sin(\alpha)}{2}} \right) \right) 2\pi(r_0 + x \cos(\alpha)) \cos(\alpha) dx$$

La resolución de la integral se detalla a continuación:

$$F_{P_{tr}}^y = \int_0^D P_2 2\pi(r_0 + x \cos(\alpha)) \cos(\alpha) dx + \int_0^D \left(\frac{1}{\cos(\alpha)} \frac{(P_2 - P_{in})}{\ln \frac{\lg\left(\frac{\gamma_2}{2}\right)}{\lg\left(\frac{\gamma_{in}}{2}\right)}} \ln \left(\frac{r_0 + x \cdot \cos(\alpha) + \frac{H \cdot \sin(\alpha)}{2}}{r_0 + \frac{H \cdot \sin(\alpha)}{2}} \right) \right) 2\pi(r_0 + x \cos(\alpha)) \cos(\alpha) dx$$

$$F_{P_{tr}}^y = I_1^* + I_2^*$$

Para facilitar el cálculo, se calcula cada integral por separado:

$$I_1^* = \int_0^D P_2 2\pi(r_0 + x \cos(\alpha)) \cos(\alpha) dx = P_2 2\pi \left(r_0 D + \frac{D^2}{2} \cos(\alpha) \right) \cos(\alpha)$$

$$I_2^* = \int_0^D \left(\frac{1}{\cos(\alpha)} \frac{(P_2 - P_{in})}{\ln \frac{\lg\left(\frac{\gamma_2}{2}\right)}{\lg\left(\frac{\gamma_{in}}{2}\right)}} \ln \left(\frac{r_0 + x \cdot \cos(\alpha) + \frac{H \cdot \sin(\alpha)}{2}}{r_0 + \frac{H \cdot \sin(\alpha)}{2}} \right) \right) 2\pi(r_0 + x \cos(\alpha)) \cos(\alpha) dx = I_2'^* + I_2^{**}$$



$$I_2'^* = \int_0^D \left(2\pi r_0 \frac{(P_2 - P_{in})}{\ln \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\gamma_2}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\gamma_{in}}{2}\right)}} \ln \left(\frac{r_0 + x \cdot \cos(\alpha) + \frac{H \cdot \sin(\alpha)}{2}}{r_0 + \frac{H \cdot \sin(\alpha)}{2}} \right) \right) dx$$

$$I_2''^* = \int_0^D \left(2\pi \cos(\alpha) \frac{(P_2 - P_{in})}{\ln \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\gamma_2}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\gamma_{in}}{2}\right)}} x \ln \left(\frac{r_0 + x \cdot \cos(\alpha) + \frac{H \cdot \sin(\alpha)}{2}}{r_0 + \frac{H \cdot \sin(\alpha)}{2}} \right) \right) dx$$

Cabe destacar que la forma de estas integrales es la misma que las analizadas en el primer apartado, donde se ha calculado también la fuerza debida a la presión en la zona troncocónica. Lo que cambian son las constantes.

Se definen las constantes siguientes para facilitar también el cálculo de dichas integrales:

$$A = \cos(\alpha)$$

$$B^* = 2\pi \frac{(P_2 - P_{in})}{\ln \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\gamma_2}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\gamma_{in}}{2}\right)}}$$

$$C = \frac{H \cdot \sin(\alpha)}{2} + r_0$$

Entonces:

$$I_2'^* = \int_0^D \left(r_0 B^* \ln \frac{(Ax+C)}{C} \right) dx = \frac{r_0 B^*}{A} \left(A D \ln \left(\frac{DA+C}{C} \right) - DA + C \ln \left(\frac{DA+C}{C} \right) \right)$$



$$I_2^{**} = \int_0^D \left(AB^* x \ln \frac{(Ax+C)}{C} \right) dx =$$

$$= \frac{B^*}{4A} \left(2 \ln \left(\frac{DA+C}{C} \right) D^2 A^2 - D^2 A^2 + 2CDA - 2 C^2 \ln \frac{DA+C}{C} \right)$$

Fuerza debida a los esfuerzos cortantes en la dirección vertical

$$F_{C_{tr}}^y = \int_S \tau_{hx} \big|_{h=0} \sin(\alpha) ds$$

Es necesario hallar los esfuerzos cortantes en $h = 0$:

$$\tau_{hx} \big|_{h=0} = \mu \frac{\partial V_{tr}}{\partial h} \bigg|_{h=0} = \mu \frac{\partial \left(-\frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} \frac{h(H-h)}{2} \right)}{\partial h} \bigg|_{h=0} = -\frac{1}{2} \frac{dp}{dx} H$$

El diferencial de superficie es $ds = 2\pi(r_0 + x \cos(\alpha)) dx$.

Sustituyendo:

$$F_{C_{tr}}^y = \int_0^D -\frac{1}{2} \frac{dp}{dx} H 2\pi(r_0 + x \cos(\alpha)) \sin(\alpha) dx = -\frac{1}{2} H 2\pi \sin(\alpha) \int_0^D \frac{dp}{dx} (r_0 + x \cos(\alpha)) dx$$

El valor de $\frac{dp}{dx}$, hallado anteriormente, tomaba la forma:

$$\frac{dp}{dx} = -6\mu \frac{Q_{esf}}{\pi H^3 \left(r_0 + x \cdot \cos(\alpha) + \frac{H \cdot \sin(\alpha)}{2} \right)}$$

$$F_{C_{tr}}^y = -\frac{1}{2} H 2\pi \sin(\alpha) \int_0^D -6\mu \frac{Q_{esf}}{\pi H^3 \left(r_0 + x \cdot \cos(\alpha) + \frac{H \cdot \sin(\alpha)}{2} \right)} (r_0 + x \cos \alpha) dx$$

$$= \frac{6\mu \sin(\alpha) Q_{esf}}{H^2} \int_0^D \frac{(r_0 + x \cos(\alpha))}{\left(r_0 + x \cdot \cos(\alpha) + \frac{H \cdot \sin(\alpha)}{2} \right)} dx$$

$$= \frac{6\mu \sin(\alpha) Q_{esf}}{H^2} \left[D + \frac{H}{2 \sin(\alpha) \cos(\alpha)} \ln \left(\frac{r_0 + \frac{H \cdot \sin(\alpha)}{2}}{\left(r_0 + D \cdot \cos(\alpha) + \frac{H \cdot \sin(\alpha)}{2} \right)} \right) \right]$$



Si se sustituye Q_{esf} por su expresión, determinada anteriormente, la fuerza $F_{C_{tr}}^y$ resulta:

$$F_{C_{tr}}^y = - \frac{H\pi\sin(\alpha)(P_2 - P_{in})}{\ln \frac{\text{tg}\left(\frac{\gamma_2}{2}\right)}{\text{tg}\left(\frac{\gamma_{in}}{2}\right)}} \left[D + \frac{H}{2\sin(\alpha)\cos(\alpha)} \ln \left(\frac{r_0 + \frac{H \cdot \sin(\alpha)}{2}}{\left(r_0 + D \cdot \cos(\alpha) + \frac{H \cdot \sin(\alpha)}{2} \right)} \right) \right]$$

Una vez definidas completamente todas las fuerzas asociadas a cada una de las zonas, la fuerza de sustentación queda totalmente determinada.

En adelante, se procede a determinar la fuerza que actúa sobre la pieza interior para el caso B, donde se combinan las superficies esférica y cómica.

Representación gráfica de la fuerza de sustentación.

Los datos de partida son:

$$r_0 = 0.060\text{m}$$

$$r_{\text{out}} = 0.080\text{m}$$

$$r_{\text{in}} = 0.005\text{m}$$

$$\alpha = 70^\circ$$

$$H = 0.001\text{m}$$

r_{esf} variable . El valor mínimo utilizado es de 0.060 m

$$P_{in} = 2 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

$$P_{out} = 1 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

Los ángulos γ_{in} y γ_{out} varían en función del radio de la esfera elegido. A continuación, se definen estos ángulos en función del valor del radio de la esfera.

$$\gamma_{in} = \arctan \left(\frac{r_{in}}{r_{esf} + H} \right)$$

$$\gamma_{out} = \arcsin \left(\frac{r_o}{r_{esf}} \right)$$



Fuerza de sustentación debida a la presión en la zona esférica

La expresión que define esta fuerza ya se ha determinado en el apartado B.2:

$$F_{p_{\text{esf}}}^y = P_{\text{in}} \pi r_{\text{in}}^2 + \frac{1}{2} P_{\text{in}} r_{\text{esf}}^2 \pi (\cos(2\gamma_{\text{in}}) - \cos(2\gamma_2)) +$$

$$+ \int_{\gamma_{\text{in}}}^{\gamma_2} \frac{(P_2 - P_{\text{in}})}{\ln \frac{\text{tg}\left(\frac{\gamma_2}{2}\right)}{\text{tg}\left(\frac{\gamma_{\text{in}}}{2}\right)}} \ln \frac{\text{tg}\left(\frac{\gamma}{2}\right)}{\text{tg}\left(\frac{\gamma_{\text{in}}}{2}\right)} r_{\text{esf}}^2 \pi \sin(2\gamma) d\gamma$$

Mediante los datos de partida es posible obtener la fuerza para distintos radios de la esfera. Téngase en cuenta que los ángulos γ_{in} y γ_{out} varían en función del radio de la esfera y que la resolución de la integral restante es numérica. A continuación, se realiza un análisis de esta fuerza en función del radio de la esfera.

En la figura siguiente, realizada a través de MATLAB[®], se observa que a medida que el radio de la esfera aumenta, la fuerza de sustentación generada por la presión que ejerce el fluido sobre la zona esférica tiende a un valor que se mantiene constante.

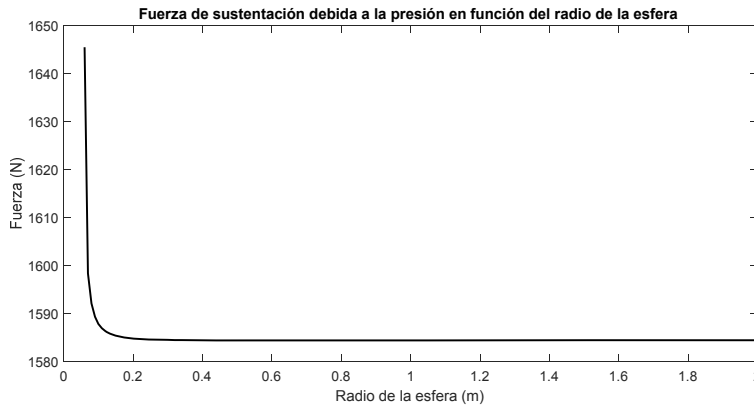


Fig. 5.3

Cabe destacar que a medida que el radio de la esfera crece, la superficie esférica se aproxima a una superficie plana. Este hecho permite afirmar que, si el radio de la esfera es infinitamente superior a r_0 , la fuerza de sustentación generada debe ser infinitamente próxima a la fuerza de sustentación que se genera en la zona cilíndrica del caso A.

Calculando esta fuerza para diferentes radios de la esfera muy superiores a r_0 , se obtiene:

$$\text{Si } r_{\text{esf}} = 2\text{m}, F_{p_{\text{esf}}} = 1584.471 \text{ N}$$



$$\text{Si } r_{\text{esf}} = 8\text{m}, F_{p_{\text{esf}}} = 1584.502 \text{ N}$$

$$\text{Si } r_{\text{esf}} = 30\text{m}, F_{p_{\text{esf}}} = 1584.511 \text{ N}$$

Los radios de 2, 8 y 30 m son 33.33, 133.33 y 500 veces más grandes que r_o , respectivamente.

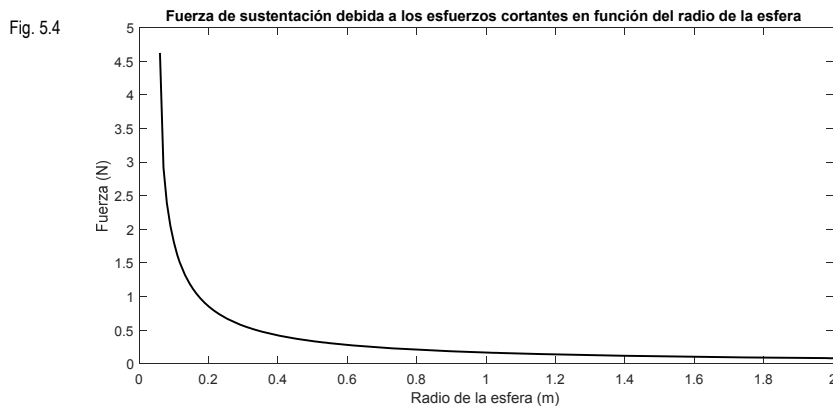
Si se calcula la fuerza de sustentación en la zona cilíndrica, su valor es de 1584.515 N. Por tanto, comparada con las fuerzas calculadas para diferentes radios de la esfera, se observa que son prácticamente iguales al valor obtenido en la zona cilíndrica. Además, se confirma que, a medida que el radio de la esfera aumenta, la fuerza de sustentación se aproxima a la obtenida para la zona cilíndrica.

Fuerza de sustentación en la superficie esférica, debida a los esfuerzos cortantes

La expresión que define esta fuerza, en dirección vertical, es la determinada en el apartado B.2:

$$F_{C_{\text{esf}}}^y = \frac{H r_{\text{esf}}^2 \pi}{\left(r_{\text{esf}} + \frac{H}{2}\right)} \cdot \frac{(P_2 - P_{\text{in}})}{\ln \frac{\text{tg}\left(\frac{\gamma_2}{2}\right)}{\text{tg}\left(\frac{\gamma_{\text{in}}}{2}\right)}} (\cos(\gamma_2) - \cos(\gamma_{\text{in}}))$$

La fuerza resultante debida a los esfuerzos cortantes tiene dos componentes, horizontal y vertical. La componente que genera la sustentación es la vertical y esta disminuye a medida que el radio de la esfera aumenta. En la figura siguiente, realizada mediante MATLAB®, se observa este hecho:



Obsérvese que la fuerza de sustentación tiende a ser 0 a medida que aumenta el radio de la esfera.



Problema 6

Enunciado

Se pretende diseñar una miniturbina para que gire a altas velocidades angulares y, a priori, se quiere estudiar la posibilidad de que el fluido que fluye por la turbomáquina se pueda utilizar como fluido lubricante en el eje de la propia turbina. A tal efecto, se pretende canalizar el fluido hacia uno de los extremos del eje de la máquina, tal como se ilustra en la figura 6.1.

Se pide determinar:

- 1.- El caudal volumétrico circulante a través del intersticio entre eje de la turbina y su carcasa, así como la distribución de presiones a lo largo del intersticio.
- 2.- El caudal circulante en el intersticio entre la carcasa y la turbina, en la zona cónica. La presión en la sección de contacto entre las dos zonas, cilíndrica y cónica, así como la fuerza horizontal desarrollada por el fluido circulante en la zona cónica. Considérese una zona cilíndrica de longitud L , conectada a una zona troncocónica con un radio de giro R . (La presión en ambos extremos es conocida, P_{in} , y P_{out} .)
- 3.- La estabilidad del eje de la turbina en función del fluido de trabajo y de la velocidad de giro del rotor.

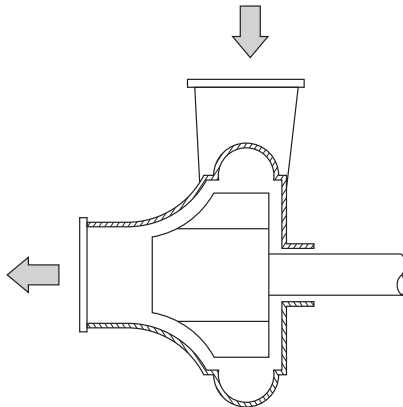


Fig. 6.1
Turbina objeto
de estudio

Resolución

1(a). Plato cilíndrico

Para determinar el flujo circulante entre el eje y la carcasa, es necesario hallar inicialmente el flujo que fluye entre la pared de la turbina y la carcasa de la máquina, (v. figura 6.2). Es decir, es necesario determinar inicialmente el flujo y la distribución de presiones entre dos platos paralelos con movimiento circular relativo entre ambos.



Puesto que el intersticio entre los dos platos es, en realidad, muy pequeño, se asume inicialmente que el flujo es laminar. Para determinar la distribución de presiones entre ambos discos circulares, se utiliza la ecuación de lubricación de Reynolds en coordenadas cilíndricas, que toma la forma:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r h^3 \frac{\partial p}{\partial r} \right) = 6\mu \left(U \cos \theta \frac{\partial h}{\partial r} - \frac{U \sin \theta}{r} \frac{\partial h}{\partial \theta} + \omega \frac{\partial h}{\partial \theta} \right) \quad (1)$$

Asumiendo que el flujo es incompresible y que el régimen es laminar, y considerando que los dos platos se mantienen paralelos, siendo la distancia entre ellos (h) constante, se puede establecer que la distancia entre los platos no va a cambiar ni en dirección angular ni en dirección radial; asimismo, la presión se mantendrá constante en dirección angular:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \theta} \right) = \left(\frac{\partial h}{\partial r} \right) = \left(\frac{\partial h}{\partial \theta} \right) = 0 \quad (2)$$

En estas condiciones, la ecuación de lubricación de Reynolds tomará la forma:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r h^3 \frac{\partial p}{\partial r} \right) = 0 \quad (3)$$

La integración de esta ecuación da lugar a:

$$P = \frac{K_1}{h^3} \ln r + K_2 \quad (4)$$

donde K_1 y K_2 son constantes

Las condiciones de contorno para determinar dichas constantes serán (v. figura 6.2):

Para $r = R_1 \Rightarrow P = P_1$, y cuando $r = R_2 \Rightarrow P = P_2$ (5)

Una vez las constantes K_1 y K_2 han sido determinadas y sustituidas en la ecuación 4, se obtiene:

$$P = P_1 + \frac{P_1 - P_2}{\ln \left(\frac{R_1}{R_2} \right)} \ln \left(\frac{r}{R_1} \right) \quad (6)$$

ecuación que proporciona la distribución de presiones entre los dos platos y en función del radio.

Por otro lado, el flujo volumétrico entre los dos platos puede ser determinado como:

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_0^h u \, r \, dy \, d\theta = \int_0^h 2\pi r u \, dy \quad (7)$$



Asumiendo flujo de Poiseuille entre los dos platos, la distribución de velocidades entre ellos puede definirse como:

$$u = -\frac{1}{\mu} \frac{dp}{dr} \frac{y}{2} (y-h), \text{ donde: } 0 < y < h \quad (8)$$

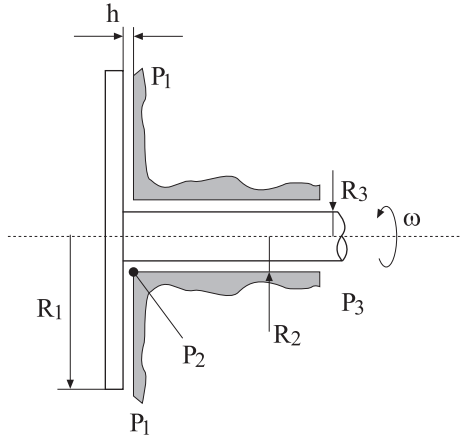


Fig. 6.2
Eje central de
la turbina y su
pared lateral

Véase que el flujo se asume como unidireccional y que fluye en dirección radial del radio mayor al radio menor de los platos paralelos.

Sustituyendo la ecuación 8 en 7, se obtiene:

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_0^h \left(-\frac{1}{\mu} \frac{dp}{dr} \frac{y}{2} (y-h) \right) r \, dy \, d\theta \quad (9)$$

Véase que la variación de presión con respecto al radio, definida en la ecuación 9, es en realidad la primera derivada de la ecuación 3, con lo cual se tiene:

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \frac{K_1}{r \, h^3} = \frac{(P_1 - P_2)}{r \, \ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)} \quad (10)$$

Sustituyendo la ecuación 10 en la 9 e integrando, se obtiene:

$$Q_{\text{plato}} = \frac{\pi}{\mu} \frac{(P_1 - P_2)}{\ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)} \frac{h^3}{6} \quad (11)$$

Esta ecuación determina el caudal circulante entre los dos platos paralelos en función de la presión diferencial existente entre sus extremos, la viscosidad del fluido, la distancia entre platos y las dimensiones de estos.



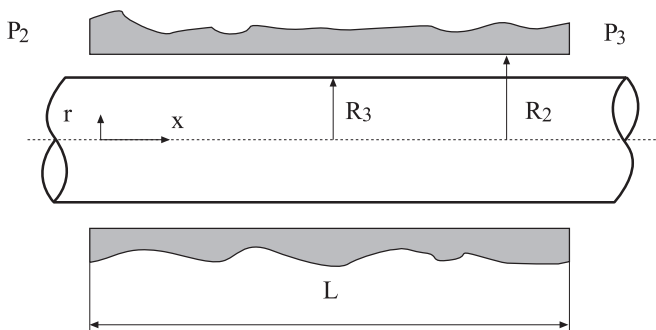
1(b). Eje cilíndrico

En este segundo subapartado, se determinan el flujo y la distribución de presiones entre el eje de la máquina y la carcasa de esta (v. figura 6.3).

El flujo a través del intersticio entre el eje giratorio y su alojamiento, un flujo en dirección axial, en función de la presión existente entre los extremos del eje, es en realidad bidireccional, dado que $V_x \neq 0$ y $V_\theta \neq 0$; la ecuación diferencial resultante no puede resolverse analíticamente. No obstante, si se asume la no existencia de rotación, el flujo tendrá únicamente dirección axial X. En este caso, la ecuación diferencial por resolver tendrá la forma:

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V_x}{\partial r} \right) \quad (12)$$

Fig. 6.3
Conjunto del
eje giratorio
y el estátor.
Dimensiones
principales



La variación de presión a lo largo del eje de la máquina puede expresarse como:

$$\frac{\partial p}{\partial x} \approx \frac{\Delta p}{\Delta x} = \frac{p_3 - p_2}{L} \quad (13)$$

Sustituyendo la ecuación 13 en 12 e integrando dos veces se obtiene:

$$V_x = \frac{p_3 - p_2}{L} \frac{r^2}{4 \mu} + C_1 \ln(r) + C_2 \quad (14)$$

Las condiciones de contorno para determinar las constantes C_1 y C_2 son:

$$\text{cuando } r = R_3 \Rightarrow V_x = 0, \text{ y cuando } r = R_2 \Rightarrow V_x = 0 \quad (15)$$

Una vez halladas las constantes, se sustituyen en la ecuación 14 y se obtiene:

$$V_x = \frac{(p_3 - p_2)}{L} \frac{(r^2 - R_3^2)}{4 \mu} - \frac{(p_3 - p_2)}{L} \frac{(R_2^2 - R_3^2)}{4 \mu \ln\left(\frac{R_2}{R_3}\right)} \ln\left(\frac{r}{R_3}\right) \quad (16)$$



La ecuación 16 proporciona el perfil de velocidades parabólico existente entre los dos cilindros.

El flujo de fluido en el intersticio existente entre el eje y la carcasa será:

$$Q|_{\text{eje}} = \int_{R_3}^{R_2} V_X \, 2 \pi r \, dr \quad (17)$$

Sustituyendo la ecuación 16 en la 17, se obtiene:

$$Q|_{\text{eje}} = \int_{R_3}^{R_2} \left[\frac{(p_3 - p_2)}{L} \frac{(r^2 - R_3^2)}{4 \mu} - \frac{(p_3 - p_2)}{L} \frac{(R_2^2 - R_3^2)}{4 \mu \ln\left(\frac{R_2}{R_3}\right)} \ln\left(\frac{r}{R_3}\right) \right] 2 \pi r \, dr \quad (18)$$

De la integración de la ecuación 18, se obtiene:

$$Q|_{\text{eje}} = \frac{\pi (p_3 - p_2)}{8 L \mu} (R_2^2 - R_3^2)^2 - \frac{\pi (p_3 - p_2)}{2 L \mu} \frac{(R_2^2 - R_3^2)}{\ln\left(\frac{R_2}{R_3}\right)} \left[\frac{R_2^2}{2} \ln\left(\frac{R_2}{R_3}\right) - \frac{(R_2^2 - R_3^2)}{4} \right] \quad (19)$$

Obsérvese que la ecuación 19 proporciona el flujo entre los dos cilindros en función de la diferencia de presión existente entre sus extremos, las dimensiones del conjunto y la viscosidad del fluido. Por otro lado, la ecuación 11 daba el caudal volumétrico entre dos platos giratorios y paralelos, pero ambos caudales han de ser el mismo en todo momento; en consecuencia, de la igualación de las ecuaciones 11 y 19, se obtendrá la presión en el punto de intersección entre el plato y el eje, presión P_2 , cuyo valor será:

$$P_2 = \frac{\frac{p_1 h^3}{3 \ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)} - p_3 \left[\frac{(R_2^2 - R_3^2)^2}{4 L} - \frac{(R_2^2 - R_3^2)}{L \ln\left(\frac{R_2}{R_3}\right)} \left(\frac{R_2^2}{2} \ln\left(\frac{R_2}{R_3}\right) - \frac{(R_2^2 - R_3^2)}{4} \right) \right]}{\frac{h^3}{3 \ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)} - \left[\frac{(R_2^2 - R_3^2)^2}{4 L} - \frac{(R_2^2 - R_3^2)}{L \ln\left(\frac{R_2}{R_3}\right)} \left(\frac{R_2^2}{2} \ln\left(\frac{R_2}{R_3}\right) - \frac{(R_2^2 - R_3^2)}{4} \right) \right]} \quad (20)$$

Para determinar la distribución de presiones a lo largo del eje de la máquina, se puede utilizar la ecuación de lubricación de Reynolds en coordenadas cartesianas, aunque el intersticio eje-carcasa tenga la forma de un cilindro hueco. Dicha ecuación en modo unidimensional adopta la forma:



$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{b^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) = 0 \quad (21)$$

Su integración da lugar a:

$$P = \frac{A}{b^3} X + B \quad (22)$$

Para el caso que nos ocupa, el parámetro b es, en realidad, $b = (R_2 - R_3)$

Las condiciones de contorno para determinar las constantes A y B son:

$$\text{cuando } X = 0 \Rightarrow p = p_2 \text{ y cuando } X = L \Rightarrow p = p_3 \quad (23)$$

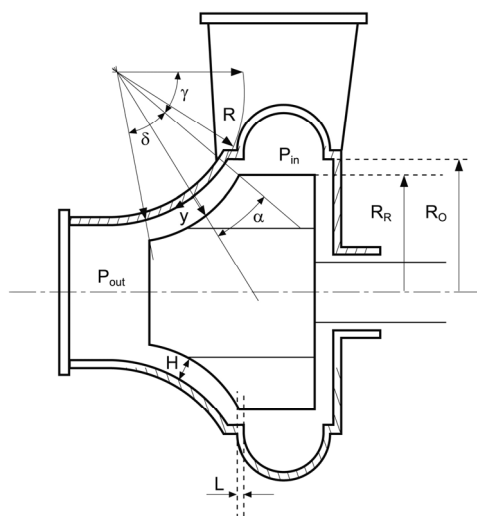
Una vez las constantes han sido halladas, se sustituyen en la ecuación 22 y se obtiene:

$$P = \frac{(p_3 - p_2)}{L} X + p_2 \quad (24)$$

ecuación que proporciona la caída de presión a lo largo del eje de la máquina. Obsérvese que la presión decae linealmente, tal como se estableció en la ecuación 13.

2. En este segundo apartado, se requiere realizar un proceso similar al del primer apartado del problema, pero para la parte izquierda de la turbina. En la figura siguiente, se definen los parámetros dimensionales necesarios para realizar este apartado.

Fig. 6.4
Dimensiones
necesarias
para realizar
este segundo
apartado





2(a). Zona cónica

El caudal circulante se define como:

$$Q_{\text{conica}} = \int V \, dS$$

El diferencial de superficie, según la geometría que se muestra, viene determinado por la expresión siguiente:

$$dS = 2\pi[(R + H)\sin(\gamma) + R_R - (R + y)\sin(\gamma + \alpha)]dy$$

La distribución de velocidades viene definida por esta expresión:

$$V = -\frac{1}{\mu} \frac{dp}{d\alpha} \frac{y(H-y)}{2\left(R + \frac{H}{2}\right)}$$

Sustituyendo el diferencial de superficie y la distribución de presión dentro de la integral que define el caudal circulante, y definiendo los límites de integración de la variable y entre 0 y H , resulta:

$$Q_{\text{conica}} = \int_0^H -\frac{1}{\mu} \frac{dp}{d\alpha} \frac{y(H-y)}{2\left(R + \frac{H}{2}\right)} 2\pi[(R + H)\sin(\gamma) + R_R - (R + y)\sin(\gamma + \alpha)]dy$$

Resolviendo la integral y simplificando, se obtiene:

$$Q_{\text{conica}} = -\frac{\pi H^3}{6\mu(2R + H)} \frac{dp}{d\alpha} ((2R + H)\sin(\gamma + \alpha) - 2(H + R)\sin(\gamma) - 2R_R)$$

Despejando el diferencial de presión e integrando entre los límites de integración correspondientes, es decir, para un ángulo $\alpha = 0$ hay una presión P_1^* y para un ángulo $\alpha = \delta$ hay una presión P_{out} , resulta:

$$\int_{P_1^*}^{P_{\text{out}}} dP = \int_0^\delta \frac{6\mu(2R + H)Q_{\text{conica}}}{\pi H^3 ((2R + H)\sin(\gamma + \alpha) - 2(H + R)\sin(\gamma) - 2R_R)} d\alpha \quad (25)$$

Es importante destacar que el caudal circulante no varía a lo largo del ángulo: por tanto, se puede extraer fuera de la integral. Resolviendo la integral y aislando el caudal circulante en la zona cónica, se obtiene:



$$Q_{\text{conica}} = \frac{\pi H^3 (P_{\text{out}} - P_1^*)}{6\mu (2R + H)} \cdot \frac{1}{I_\delta}$$

Donde I_δ corresponde a la integral siguiente, que debería resolverse numéricamente:

$$I_\delta = \int_0^\delta \frac{1}{(2R + H)\sin(\gamma + \alpha) - 2(H + R)\sin(\gamma) - 2R_R} d\alpha$$

Una vez hallado el caudal, si se integra la ecuación 25 entre los ángulos $\alpha = 0$ y α genérico, se obtiene la presión a lo largo del intersticio analizado.

$$\int_{P_1^*}^P dP = \int_0^\alpha \frac{6\mu (2R + H) Q_{\text{conica}}}{\pi H^3 ((2R + H)\sin(\gamma + \alpha) - 2(H + R)\sin(\gamma) - 2R_R)} d\alpha$$

Integrando, sustituyendo Q_{conica} por su expresión y simplificando se obtiene que la distribución de presión en la zona cónica es:

$$P = (P_{\text{out}} - P_1) \cdot \frac{I_\alpha}{I_\delta} + P_1^*$$

donde I_α corresponde a la integral siguiente:

$$I_\alpha = \int_0^\alpha \frac{1}{(2R + H)\sin(\gamma + \alpha) - 2(H + R)\sin(\gamma) - 2R_R} d\alpha$$

2(b). Zona cilíndrica

El caudal circulante se define como:

$$Q_{\text{cilíndrica}} = \int V_x dS$$

Para esta zona, el diferencial de superficie se describe como: $dS = 2\pi r dr$. La distribución de velocidades viene dada por:

$$V_x = -\frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dx} \left[\left(r^2 - R_0^2 \right) + \left(R_0^2 - R_R^2 \right) \frac{\ln\left(\frac{R_0}{r}\right)}{\ln\left(\frac{R_0}{R_R}\right)} \right]$$



Sustituyendo en la expresión que define el caudal circulante, resulta:

$$Q_{cilindrica} = \int_{R_R}^{R_0} -\frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dx} \left[(r^2 - R_0^2) + (R_0^2 - R_R^2) \frac{\ln\left(\frac{R_0}{r}\right)}{\ln\left(\frac{R_0}{R_R}\right)} \right] 2\pi r dr$$

Integrando y simplificando, se obtiene:

$$Q_{cilindrica} = -\frac{\pi}{8\mu} \frac{dp}{dx} \left((R_0^4 - R_R^4) - \frac{(R_0^2 - R_R^2)^2}{\ln\left(\frac{R_0}{R_R}\right)} \right)$$

Dado que $(R_0^4 - R_R^4) - \frac{(R_0^2 - R_R^2)^2}{\ln\left(\frac{R_0}{R_R}\right)}$ es constante, para facilitar el cálculo posterior se

sustituye por una constante:

$$Q_{cilindrica} = -\frac{\pi}{8\mu} \frac{dp}{dx} A$$

tal que:

$$A = (R_0^4 - R_R^4) - \frac{(R_0^2 - R_R^2)^2}{\ln\left(\frac{R_0}{R_R}\right)}$$

Despejando el diferencial de presión e integrando entre los límites de integración correspondientes, es decir, para $x = 0$ hay una presión P_{in} y para $x = L$ hay una presión P_1^* , resulta:

$$\int_{P_{in}}^{P_1^*} -\frac{\pi A}{8\mu} dP = \int_0^L Q_{cilindrica} dx \quad (26)$$

Resolviendo la integral y despejando el caudal circulante en la zona cilíndrica:

$$Q_{cilindrica} = -\frac{(P_1^* - P_{in}) \pi A}{8\mu L}$$



Una vez se ha hallado el caudal, si se integra la ecuación 26 entre $x = 0$ y x genérica, resulta la distribución de presión a lo largo de la zona analizada.

$$\int_{P_{in}}^P -\frac{\pi A}{8\mu} dP = \int_0^x Q_{cilindrica} dx$$

Integrando, sustituyendo $Q_{cilindrica}$ por su expresión y simplificando, se obtiene que la distribución de presión en la zona cilíndrica es:

$$P = \frac{(P_1^* - P_{in})}{L} x + P_{in} \quad (27)$$

Obtenidos los caudales circulantes en cada una de las zonas, se debe precisar que estos deben ser iguales. Igualando estos caudales, se obtiene la ecuación siguiente:

$$Q_{cónica} = Q_{cilindrica}$$

$$\frac{\pi H^3 (P_{out} - P_1^*)}{6\mu (2R + H)} \cdot \frac{1}{I_\delta} = -\frac{(P_1^* - P_{in}) \pi A}{8\mu L}$$

De esta ecuación, es posible aislar la presión P_1 .

$$P_1^* = \frac{\left(-\frac{4LH^3}{3A(2R+H)} \cdot \frac{1}{I_\delta} P_{out} + P_{in} \right)}{\left(1 - \frac{4LH^3}{3A(2R+H)} \cdot \frac{1}{I_\delta} \right)}$$

Determinada la presión P_1^* , los caudales circulantes en las dos zonas y las distribuciones de presión en cada una de ellas, quedan totalmente definidos.

2(c). Fuerza horizontal

$$F_x = \int P \cos(\alpha + \gamma) dS$$

donde el diferencial de superficie viene definido por:

$$dS = 2\pi(R+H) \cdot (R_R + (R+H)\sin(\gamma) - (R+H)\sin(\gamma + \alpha)) d\alpha$$



La expresión que determina la distribución de presión en la zona cónica indicada anteriormente es:

$$P = (P_{\text{out}} - P_1) \cdot \frac{I_\alpha}{I_\delta} + P_1^*$$

Sustituyendo el diferencial de superficie y la distribución de presión a lo largo de la zona cónica en la integral que determina la fuerza horizontal se obtiene:

$$F_x = \int_0^\delta \left((P_{\text{out}} - P_1^*) \cdot \frac{I_\alpha}{I_\delta} + P_1^* \right) \cos(\alpha + \gamma) 2\pi(R + H) \begin{pmatrix} R_R + (R + H) \sin(\gamma) \\ -(R + H) \sin(\gamma + \alpha) \end{pmatrix} d\alpha$$

Se puede desglosar en dos integrales:

$$F_x = I_1 + I_2$$

tales que:

$$I_1 = \int_0^\delta \left((P_{\text{out}} - P_1^*) \cdot \frac{I_\alpha}{I_\delta} \right) \cos(\alpha + \gamma) 2\pi(R + H) \begin{pmatrix} R_R + (R + H) \sin(\gamma) \\ -(R + H) \sin(\gamma + \alpha) \end{pmatrix} d\alpha$$

$$I_2 = \int_0^\delta P_1 \cos(\alpha + \gamma) 2\pi(R + H) (R_R + (R + H) \sin(\gamma) - (R + H) \sin(\gamma + \alpha)) d\alpha$$

I_1 debe resolverse de forma numérica e I_2 puede resolverse de forma algebraica.

Si se resuelve I_2 , se obtiene:

$$I_2 = \frac{1}{-4H^3L + 3AHI_\delta + 6AI_\delta R} \left(3 \begin{pmatrix} -\frac{4}{3}H^3LP_{\text{out}} + AHI_\delta P_{\text{in}} \\ +2AI_\delta P_{\text{in}} R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ((2H + 2R) \sin(\gamma) + 2R_r) \sin(\gamma + \delta) + \\ + (R + H) (\cos(\delta + \gamma))^2 - 2 \sin(\gamma) R_r \\ + ((\cos(\gamma))^2 - 2) (R + H) \end{pmatrix} \pi(R + H) \right)$$

Para resolver las integrales I_δ , I_α e I_1 y, por tanto hallar las distribuciones de presión en las dos zonas, los caudales circulantes por las dos zonas y la fuerza horizontal ejercida



por el fluido, es indispensable considerar los valores que definen la geometría y las condiciones de contorno. A continuación, se presentan estos valores:

Geometría y propiedades físicas:

$$R_r = 0.01\text{m}; \quad R = 0.01\text{m}; \quad H = 4 \cdot 10^{-6}\text{m}; \quad L = 3 \cdot 10^{-3}\text{m};$$

$$R_0 = 0.010004\text{m}; \quad \gamma = 40^\circ; \quad \delta = 45^\circ$$

$$\mu = 1.983 \cdot 10^{-5} \text{kg}/(\text{ms})$$

Condiciones de contorno:

$$P_{\text{in}} = 10^7 \text{Pa}$$

$$P_{\text{out}} = 10^5 \text{Pa}$$

Esta integración numérica se ha realizado mediante MATLAB®. La distribución de presión obtenida para cada una de las zonas se muestra en las dos figuras siguientes:

Fig. 6.5
Distribución de
presión en la
zona cilíndrica

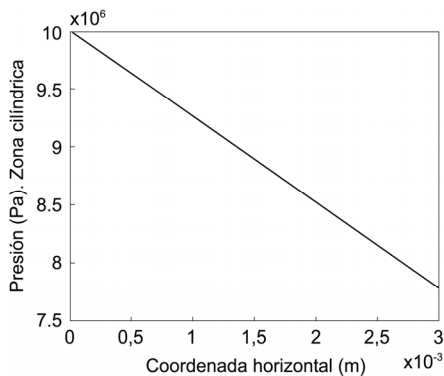
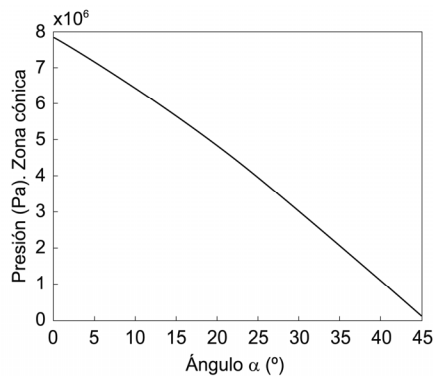


Fig. 6.6
Distribución de
presión en la
zona cónica



La presión P_1^* calculada es: $P_1^* = 7.776 \cdot 10^6 \text{Pa}$

En la zona cilíndrica (v. figura 6.5), tal y como muestra la ecuación 27, se comprueba que la caída de presión a lo largo del eje horizontal es lineal. En cambio, la caída de presión en la zona cónica no es lineal, sino que depende del valor que resulta de calcular I_α para cada uno de los ángulos.

El caudal circulante calculado en la zona cilíndrica y cónica ha resultado ser:

$$Q_{\text{cónica}} = Q_{\text{cilíndrica}} = 1.263 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3/\text{s}$$

La fuerza respecto del eje horizontal ejercida por el fluido sobre la superficie cónica es:

$$F_x = 994.208 \text{ N}$$

3. En este tercer apartado, se aplica la teoría de los cojinetes hidrodinámicos infinitamente largos al eje de la máquina, con el fin de determinar la estabilidad de este.

La figura 6.7 muestra el eje objeto de estudio e indica su posible desplazamiento. La figura 6.8 presenta una sección transversal del conjunto eje-carcasa, en que se observa la posición relativa del rotor *versus* el estátor.

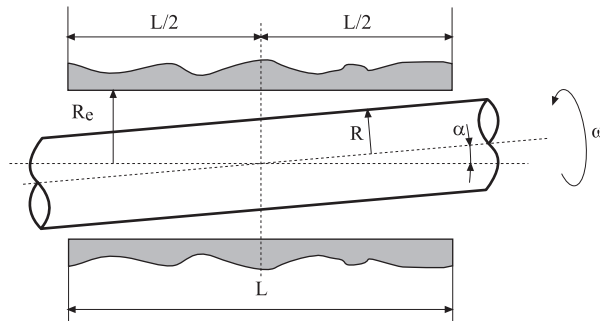


Fig. 6.7
Desplazamiento
genérico del eje
con respecto a la
carcasa

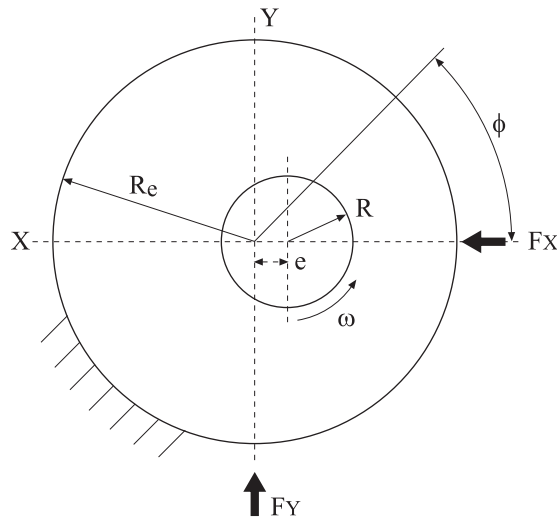


Fig. 6.8
Posición relativa
genérica del eje
versus el estátor.
Sección frontal

De acuerdo con las figuras 6.7 y 6.8, se puede definir:

$$\bar{h} = R_e - R \quad (28)$$

$$\psi = \frac{\bar{h}}{R} = \frac{R_e - R}{R} \quad (29)$$

$$\varepsilon = \frac{e}{\bar{h}} \quad (30)$$

$$h_{(\varphi)} = \bar{h} (1 - \varepsilon \cos \varphi) \quad (31)$$



Asumiendo el flujo de Couette-Poiseuille, el flujo volumétrico entre el estátor y el rotor puede expresarse como:

$$\dot{V} = Q = \frac{1}{2} U h_{(\varphi)} - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{12 \mu} h_{(\varphi)}^3 \left[\frac{m^2}{s} \right] \quad (32)$$

Para este caso: $dx = R d\varphi$

Integrando la ecuación 32 con respecto a la presión entre 0 y 2π , y extrayendo el flujo volumétrico, se obtiene:

$$\dot{V} = \frac{1}{2} \omega R^2 \psi \frac{I_2}{I_3} \left[\frac{m^2}{s} \right] \quad (33)$$

donde:

$$I_2 = \int_0^{2\pi} (1 - \varepsilon \cos \varphi)^{-2} d\varphi = \frac{2\pi}{(1 - \varepsilon^2)^{3/2}} \quad (34)$$

$$I_3 = \int_0^{2\pi} (1 - \varepsilon \cos \varphi)^{-3} d\varphi = \frac{\pi (2 + \varepsilon^2)}{(1 - \varepsilon^2)^{5/2}} \quad (35)$$

Integrando de nuevo la ecuación 32, ahora entre 0 y un ángulo genérico φ , y sustituyendo la ecuación del flujo volumétrico 33 en dicha ecuación 32, se obtiene:

$$p = -6 \frac{\mu \omega \varepsilon}{\psi^2} \frac{\sin \varphi (2 - \varepsilon \cos \varphi)}{(1 - \varepsilon \cos \varphi)^2 (2 + \varepsilon^2)} + C \left[\frac{N}{m^2} \right] \quad (36)$$

La constante de integración que se obtiene en la ecuación 36 debe hallarse mediante una condición de contorno, que es la presión en una posición angular genérica ($\varphi = \gamma$) conocida, con lo cual la ecuación final que caracteriza la distribución de presiones en dirección angular toma la forma:

$$p = -6 \frac{\mu \omega \varepsilon}{\psi^2} \frac{\sin \varphi (2 - \varepsilon \cos \varphi)}{(1 - \varepsilon \cos \varphi)^2 (2 + \varepsilon^2)} + p_{(\gamma)} \left[\frac{N}{m^2} \right] \quad (37)$$

Las fuerzas en las direcciones X e Y (horizontal y vertical) se definen como (v. fig. 6.8):

$$F_Y = - \int_0^{2\pi} p \sin \varphi R d\varphi \quad (38)$$

$$F_X = - \int_0^{2\pi} p \cos \varphi R d\varphi \quad (39)$$

La integración de las ecuaciones (38) y (39) da como resultado:

$$F_Y = \frac{6 \mu \omega R}{\psi} \left(\frac{I_2 I_5 - I_3 I_4}{I_3} \right) \quad (40)$$



$$F_X = \frac{6 \mu \omega R}{\psi^2} \left(\frac{I_6}{I_3} \frac{I_3 - I_7}{I_2} \right) \quad (41)$$

donde:

$$I_4 = \int_0^{2\pi} (1 - \varepsilon \cos \varphi)^{-2} \cos \varphi \, d\varphi = \frac{I_2 - I_1}{\varepsilon} \quad (42)$$

$$I_5 = \int_0^{2\pi} (1 - \varepsilon \cos \varphi)^{-3} \cos \varphi \, d\varphi = \frac{I_3 - I_2}{\varepsilon} \quad (43)$$

$$I_1 = \int_0^{2\pi} (1 - \varepsilon \cos \varphi)^{-1} d\varphi = \frac{2\pi}{(1 - \varepsilon^2)^{1/2}} \quad (44)$$

$$I_6 = \int_0^{2\pi} (1 - \varepsilon \cos \varphi)^{-2} \sin \varphi \, d\varphi = 0 \quad (45)$$

$$I_7 = \int_0^{2\pi} (1 - \varepsilon \cos \varphi)^{-3} \sin \varphi \, d\varphi = 0 \quad (46)$$

El valor de las integrales I_2 e I_3 se ha dado en las ecuaciones 34 y 35. Obsérvese que la fuerza F_x para la posición estudiada tiene un valor nulo.

Asúmase ahora que el eje está situado en una posición genérica, definida por el ángulo δ , tal como muestra la figura 6.9. Las fuerzas horizontales y verticales quedarán definidas como:

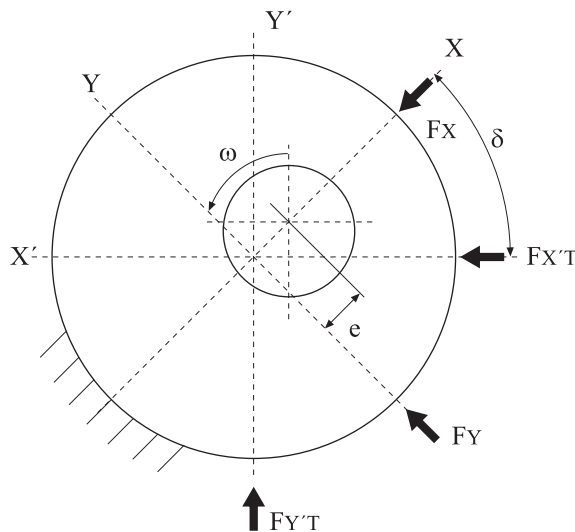


Fig. 6.9
Vista frontal del
cojinete
hidrodinámico.
El eje se ha
situado ahora
en una posición
genérica

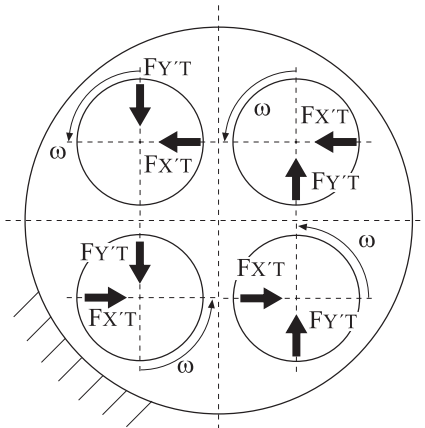


$$F_{Y'T} = F_Y \cos \delta - F_X \sin \delta \quad (47)$$

$$F_{X'T} = -F_Y \sin \delta - F_X \cos \delta \quad (48)$$

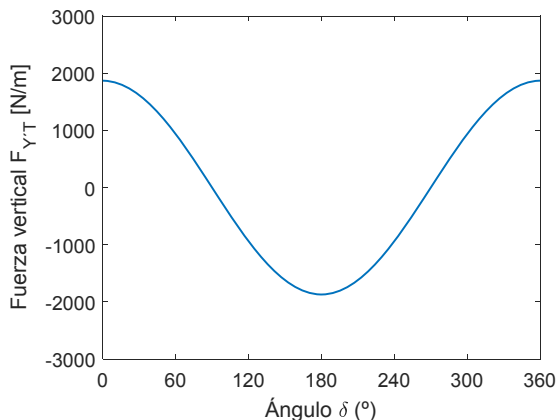
Puesto que, en este segundo apartado, lo que se quiere es evaluar la estabilidad del eje, el paso siguiente será visualizar las fuerzas que actúan sobre el eje en cualquier posición de este. La figura 6.10 presenta las fuerzas resultantes horizontal y vertical que actúan sobre el eje en función de su posición. Obsérvese que el eje tenderá a moverse hacia arriba o hacia abajo dependiendo de la posición temporal en que se encuentre. Es de esperar que el eje se mueva en forma elíptica dentro de su alojamiento.

Fig. 6.10
Direcciones de las fuerzas que actúan sobre el eje, en función de su posición relativa



Con el fin de clarificar este efecto, las figuras 6.11 y 6.12 presentan las fuerzas verticales y horizontales que actúan sobre el eje, en función de su posición relativa con respecto al estátor y para una excentricidad e dada. Obsérvese que dichas fuerzas cambian de magnitud y dirección dependiendo de la posición del eje, tal como se ha mostrado en la figura 6.10.

Fig. 6.11
Fuerza horizontal $F_{y'T}$ como función de la posición del eje central, definida por el ángulo δ .
Los parámetros utilizados en el cálculo son:
radio del eje $R = 0,01$ m;
la velocidad de giro = 5000 rad/s; distancia media entre eje y carcasa,
 $h = R_e - R = 10$ micras;
excentricidad, $e = 1$ micra; fluido de trabajo, aire; viscosidad, $1,983 \cdot 10^{-5}$ (kg/m s)



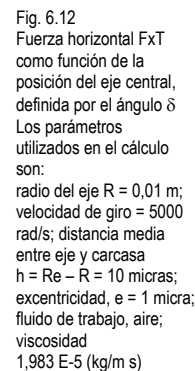
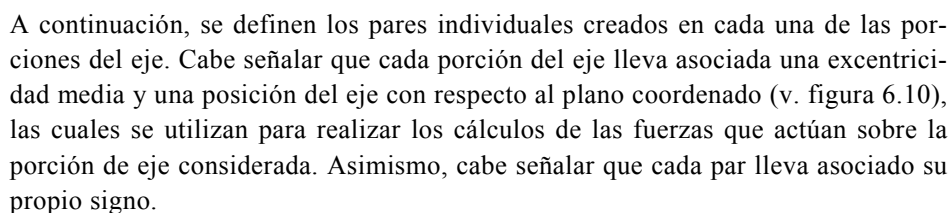


Fig. 6.13
Posición
genérica del
eje, la mitad del
cual ha sido
dividido en
varias
porciones



119



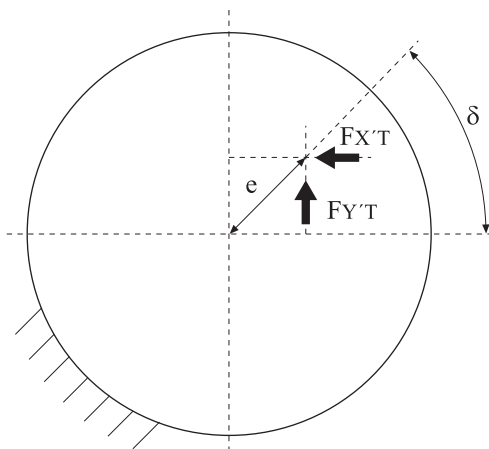
$$M_{iZ_0} = F_{iY'T} * d_i \text{ (empuja el eje hacia arriba)} \quad (49)$$

$$M_{iX_0} = F_{iX'T} * e * \sin \delta + F_{iY'T} * e * \cos \delta$$

$$M_{iY_0} = F_{iX'T} * d_i$$

Recuérdese que las unidades de la fuerza y el par son $F_i = \left[\frac{N}{m} \right]$; $M_i = \left[\frac{N*m}{m} \right]$

Fig. 6.14
Ejemplo de
situación del
eje para el
primer caso



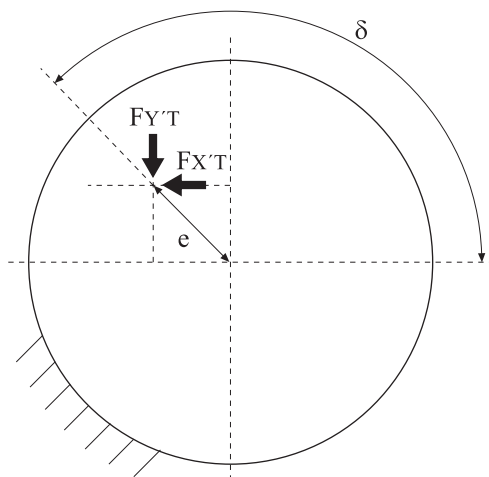
CASO 2. La posición del eje está localizada entre un ángulo $90^\circ < \delta < 180^\circ$ (v. figura 6.15). Los pares resultantes son ahora:

$$M_{iZ_0} = F_{iY'T} * d_i \text{ (empuja el eje hacia abajo)} \quad (50)$$

$$M_{iX_0} = F_{iX'T} * e * \sin(180 - \delta) + F_{iY'T} * e * \cos(180 - \delta)$$

$$M_{iY_0} = F_{iX'T} * d_i$$

Fig. 6.15
Ejemplo de
situación del
eje para el
segundo caso



CASO 3. La posición del eje está localizada entre un ángulo $180^\circ < \delta < 270^\circ$ (v. figura 6.16). Para este caso, se obtiene:

$$\begin{aligned} M_{iZ_0} &= F_{iY'T} * d_i \text{ (empuja el eje hacia abajo)} \\ M_{iX_0} &= F_{iX'T} * e * \sin(270 - \delta) + F_{iY'T} * e * \cos(270 - \delta) \\ M_{iY_0} &= F_{iX'T} * d_i \end{aligned} \quad (51)$$

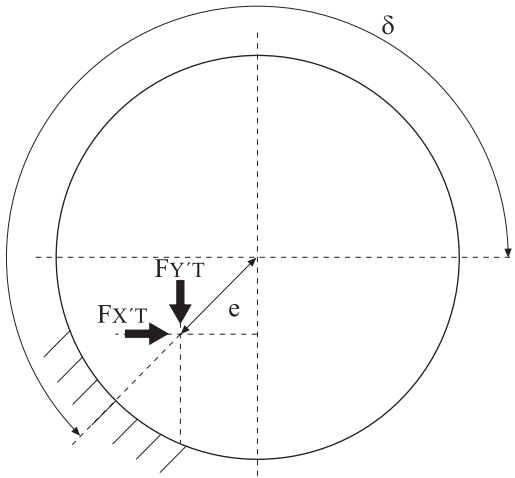


Fig. 6.16
Ejemplo de
situación del
eje para el
tercer caso

CASO 4. La posición del eje está localizada entre un ángulo $270^\circ < \delta < 360^\circ$ (v. figura 6.17).

$$\begin{aligned} M_{iZ_0} &= F_{iY'T} * d_i \text{ (empuja el eje hacia arriba).} \\ M_{iX_0} &= F_{iX'T} * e * \sin(360 - \delta) + F_{iY'T} * e * \cos(360 - \delta) \\ M_{iY_0} &= F_{iX'T} * d_i \end{aligned} \quad (52)$$

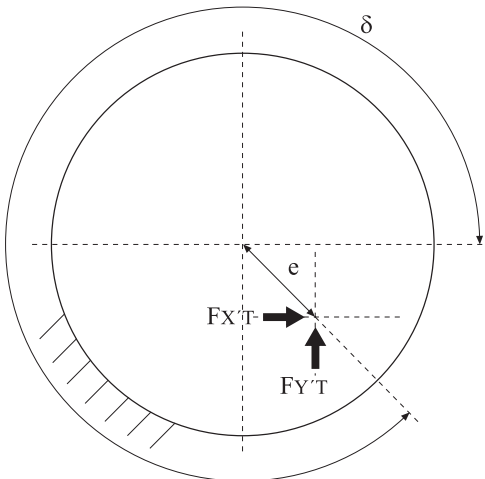


Fig. 6.17
Ejemplo de
situación del
eje para el
cuarto caso



Para calcular el par producido por todo el colectivo de porciones de eje, es necesario determinar para cada caso la distancia d_i entre el centro de la porción del eje considerado y el punto de giro del eje de la turbina.

Considerando que el número de porciones de eje es $2n$ y que la excentricidad máxima es $e_{\text{máx}}$, la excentricidad del centro de cada porción de eje será:

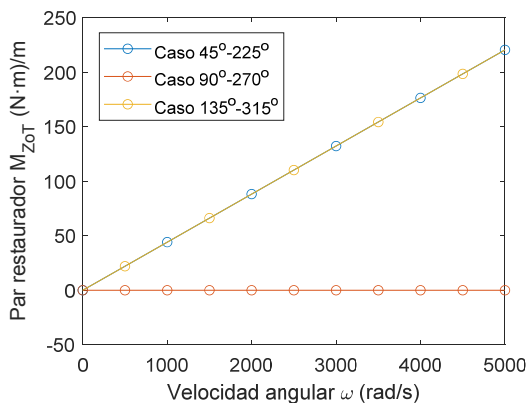
$$e_i = e_{\text{máx}} \frac{\frac{L}{2} - \frac{L}{4n} - \frac{L}{2n} \cdot (i-1)}{\frac{L}{2}} = e_{\text{máx}} \cdot \left(1 - \frac{i-1}{n} - \frac{1}{2n} \right) \quad (53)$$

donde $1 \leq i \leq n$.

La figura 6.18 presenta el par restaurador total (M_{ZOT}) que actúa sobre el eje de la turbina para tres configuraciones de eje diferentes, para una misma excentricidad e y en función de la velocidad de giro del eje. Las tres configuraciones del eje son (v. figuras 6.10 y 6.13-6.17).

- Un extremo del eje está situado en la parte inferior derecha, ángulo de 315° (v. figura 6.17) y el otro extremo del eje está situado en la parte superior izquierda, siendo su posición angular de 135° (v. figura 6.15).
- Un extremo del eje está situado en la parte inferior izquierda, formando un ángulo de 225° (v. figura 6.16), mientras que el extremo opuesto del eje está situado en la parte superior derecha del plano, formando un ángulo de 45° (v. figura 6.14).
- En este tercer caso, se supone que los extremos opuestos de los ejes están situados en las posiciones angulares de 270° y 90° , respectivamente.

Fig. 6.18
Relación entre
el par total que
actúa sobre el
eje (M_{ZOT}) en
función de su
velocidad
de giro,
y para las tres
configuraciones
de los ejes
establecidas





Finalmente, cabe señalar que los cojinetes hidrodinámicos suelen tener una ranura longitudinal cortada en el estátor, a través de la cual se inyecta fluido en el intersticio rotor-estátor. La presión del fluido a la salida de dicha ranura (fluido entrante en el cojinete) ha de tener un valor mínimo, con el fin de evitar la aparición de cavitación en el fluido circulante dentro del cojinete. En este caso, si el fluido de trabajo es aire, no existe riesgo de cavitación. No obstante, la ranura longitudinal podría utilizarse para introducir aire presurizado en el sistema. La presión de alimentación ha de entenderse como un parámetro que permite modificar la rigidez del sistema y que puede ayudar a estabilizar el movimiento del eje.



Problema 7

Enunciado

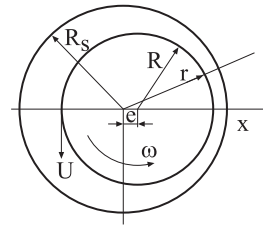
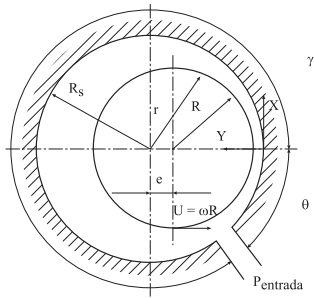
El cojinete cilíndrico que se muestra en la figura siguiente, tiene una ranura longitudinal donde la presión se considera conocida (P_{entrada}). Aplicando la teoría para cojinetes infinitamente largos, se pide lo siguiente:

1. Determinar la distribución de velocidades, el caudal circulante y la distribución de presiones en la película de fluido.
2. Calcular la fuerza vertical ejercida por la distribución de presiones y el par de giro.
3. Representar gráficamente la distribución de presiones en función del ángulo φ . Determinar la presión requerida en la ranura de entrada para asegurar la no existencia de cavitación en el cojinete.
4. Se desea que dos de estos cojinetes soporten un motor de aviación de 18000 N de peso y que gira a 30000 rpm. El radio del eje es de $R = 40$ mm y se debe estudiar la posibilidad de utilizar estatores con radios de $R_s = 40,05, 40,1$ y $40,15$ mm. La viscosidad del fluido se considera constante e igual a $\mu = 0,02$ kg/(m s). El centro de la ranura está situado en la posición angular $\theta = -40^\circ$. Determinar para los diferentes casos la longitud que ha de tener cada uno de los dos cojinetes.
5. Con el fin de entender mejor el efecto que la excentricidad causa sobre los parámetros de funcionamiento, graficar la fuerza de sustentación *versus* la velocidad de giro y la excentricidad. Realizar las mismas gráficas con el número de Sommerfeld.

Comentar las hipótesis realizadas.

Considérese que las integrales siguientes son conocidas:

$$\begin{aligned} \int_{-0}^{\gamma} (1 - \varepsilon \cos \varphi)^{-1} d\varphi &= I_1^* & \int_{-0}^{\varphi_i} (1 - \varepsilon \cos \varphi)^{-3} d\varphi &= I_{3p}^* \\ \int_{-0}^{\gamma} (1 - \varepsilon \cos \varphi)^{-2} d\varphi &= I_2^* & \int_{-0}^{\gamma} (1 - \varepsilon \cos \varphi)^{-2} \cos \varphi d\varphi &= I_4^* \\ \int_{-0}^{\gamma} (1 - \varepsilon \cos \varphi)^{-3} d\varphi &= I_3^* & \int_{-0}^{\gamma} (1 - \varepsilon \cos \varphi)^{-3} \cos \varphi d\varphi &= I_5^* \\ \int_{-0}^{\varphi_i} (1 - \varepsilon \cos \varphi)^{-2} d\varphi &= I_{2p}^* \end{aligned}$$



$$r = R + e \cdot \cos \varphi$$

Fig. 7.1
(izquierda)
Conjunto
estátor-rotor
para un cojinete
largo

Fig. 7.2
(derecha)
Esquema de la
relación entre
radios

Obsérvese que las integrales I_2^* e I_{2p}^* son, en realidad, la misma integral; únicamente difieren los límites de integración. Lo mismo sucede con las integrales I_3^* e I_{3p}^* . Así, en realidad, aparecen cinco tipos de integrales diferentes. A continuación, se da la resolución de estas integrales.

$$\text{Denominando } \Gamma \text{ el término } \frac{\arctan h \left(\frac{(1+\varepsilon) \tan\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{\sqrt{(-1+\varepsilon)(1+\varepsilon)}} \right)}{\sqrt{(-1+\varepsilon)(1+\varepsilon)}}$$

$$\text{Denominando } \Phi \text{ el término } \frac{\tan\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{(-1+\varepsilon) \left(\tan\left(\frac{\varphi}{2}\right)^2 + 1 + \varepsilon \tan\left(\frac{\varphi}{2}\right)^2 - \varepsilon \right)}$$

$$\text{Denominando } \Pi \text{ el término } \frac{\tan\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{(-1+\varepsilon) \left(\tan\left(\frac{\varphi}{2}\right)^2 + 1 + \varepsilon \tan\left(\frac{\varphi}{2}\right)^2 - \varepsilon \right)^2}$$

Las diversas integrales se pueden dar:

$$I_1^* = \int_{-\theta}^{\gamma} (1 - \varepsilon \cos \varphi)^{-1} d\varphi = [-2 \Gamma]_{(-\theta)}^{(\gamma)}$$

$$I_2^* = \int_{-\theta}^{\gamma} (1 - \varepsilon \cos \varphi)^{-2} d\varphi = \left[-\frac{2}{(1+\varepsilon)} \Gamma + \frac{4 \varepsilon \left\{ -\frac{1}{2} \Phi + \frac{\Gamma}{2(-1+\varepsilon)} \right\}}{(1+\varepsilon)} \right]_{(-\theta)}^{(\gamma)}$$



$$I_{2p}^* = \int_{-\theta}^{\varphi_1} (1 - \varepsilon \cos \varphi)^{-2} d\varphi = \left[-\frac{2}{(1+\varepsilon)} \Gamma + \frac{4\varepsilon \left\{ -\frac{1}{2} \Phi + \frac{\Gamma}{2(-1+\varepsilon)} \right\}}{(1+\varepsilon)} \right]_{(-\theta)}^{(\varphi_1)}$$

$$I_3^* = \int_{-\theta}^{\gamma} (1 - \varepsilon \cos \varphi)^{-3} d\varphi = \left[-\frac{2}{(1+\varepsilon)^2} \Gamma + \frac{8\varepsilon \left\{ -\frac{1}{2} \Phi + \frac{\Gamma}{2(-1+\varepsilon)} \right\}}{(1+\varepsilon)^2} + \frac{8\varepsilon^2}{(1+\varepsilon)^2} \left\{ -\frac{1}{4} \Pi - \frac{3}{4} \frac{\left\{ -\frac{1}{2} \Phi + \frac{\Gamma}{2(-1+\varepsilon)} \right\}}{(-1+\varepsilon)} \right\} \right]_{(-\theta)}^{(\gamma)}$$

$$I_{3p}^* = \int_{-\theta}^{\varphi_1} (1 - \varepsilon \cos \varphi)^{-3} d\varphi = \left[-\frac{2}{(1+\varepsilon)^2} \Gamma + \frac{8\varepsilon \left\{ -\frac{1}{2} \Phi + \frac{\Gamma}{2(-1+\varepsilon)} \right\}}{(1+\varepsilon)^2} + \frac{8\varepsilon^2}{(1+\varepsilon)^2} \left\{ -\frac{1}{4} \Pi - \frac{3}{4} \frac{\left\{ -\frac{1}{2} \Phi + \frac{\Gamma}{2(-1+\varepsilon)} \right\}}{(-1+\varepsilon)} \right\} \right]_{(-\theta)}^{(\varphi_1)}$$

$$I_4^* = \int_{-\theta}^{\gamma} (1 - \varepsilon \cos \varphi)^{-2} \cos \varphi d\varphi = \left[\frac{2}{(1+\varepsilon)} \Gamma + \frac{4 \left\{ -\frac{1}{2} \Phi + \frac{\Gamma}{2(-1+\varepsilon)} \right\}}{(1+\varepsilon)} \right]_{(-\theta)}^{(\gamma)}$$

$$I_5^* = \int_{-\theta}^{\gamma} (1 - \varepsilon \cos \varphi)^{-3} \cos \varphi d\varphi = \left[\frac{2}{(1+\varepsilon)^2} \Gamma + \frac{2(2-2\varepsilon) \left\{ -\frac{1}{2} \Phi + \frac{\Gamma}{2(-1+\varepsilon)} \right\}}{(1+\varepsilon)^2} + \frac{8\varepsilon}{(1+\varepsilon)^2} \left\{ -\frac{1}{4} \Pi - \frac{3}{4} \frac{\left\{ -\frac{1}{2} \Phi + \frac{\Gamma}{2(-1+\varepsilon)} \right\}}{(-1+\varepsilon)} \right\} \right]_{(-\theta)}^{(\gamma)}$$

Resolución

1. Abriendo el cojinete, se observa que este se puede considerar como una placa plana de altura variable. Algunas de las relaciones directas que se pueden extraer de las figuras representadas son:

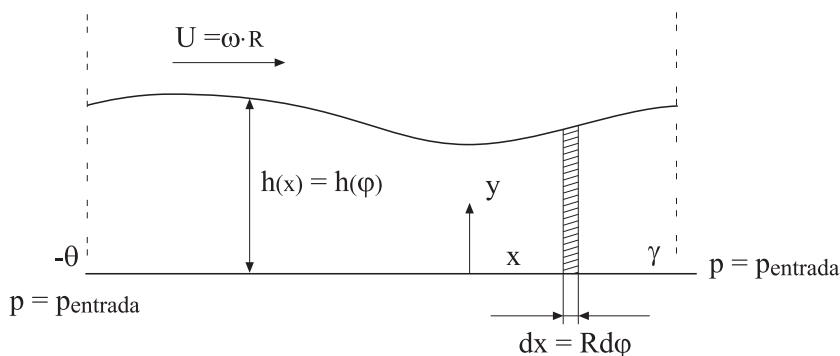


Fig. 7.3

$$R_s - R = \bar{h} ;$$

$$\psi = \frac{\bar{h}}{R} ;$$

$$r = R + e \cdot \cos \varphi ;$$

$$\varepsilon = \frac{e}{\bar{h}}$$

$$h_\varphi = R_s - r = R_s - (R + e \cos \varphi) = R_s - R - e \cos \varphi = \bar{h} - e \cos \varphi = \bar{h} (1 - \varepsilon \cdot \cos \varphi) ;$$

El primer paso es determinar la distribución de velocidades en función del espesor de la película y la dirección, y para ello se parte de la ecuación de continuidad para fluido unidireccional e incompresible, la cual se reduce a:

$$0 = \frac{\partial V_x}{\partial x} = \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi}$$

La ecuación de Navier-Stokes, en coordenadas cartesianas, para el flujo objeto de estudio adquiere la forma:

$$0 = -\frac{\partial P^*}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2}$$



La integración de esta ecuación da lugar a:

$$V_x = V_\varphi = \frac{\partial P^*}{\partial x} \cdot \frac{1}{2\mu} \cdot y^2 + C_1 y + C_2$$

Las condiciones de contorno necesarias para determinar las dos constantes de integración son: $y = 0$, $V_x = 0$, e $y = h_{(\varphi)}$, $V_x = \omega R$. De este modo, las dos constantes de integración toman la forma:

$$C_2 = 0; \quad C_1 = \frac{\omega R}{h_{(\varphi)}} - \frac{\partial P^*}{\partial x} \cdot \frac{1}{2\mu} \cdot h_{(\varphi)}$$

con lo cual la velocidad entre dos placas de fluido que se desplazan con velocidades relativas $\omega \cdot R$ queda definida como:

$$V_x = V_\varphi = \frac{\omega \cdot R \cdot y}{h_\varphi} + \frac{\partial P^*}{\partial x} \cdot \frac{1}{2\mu} \cdot y \cdot (y - h_\varphi)$$

El caudal circulante será:

$$\dot{V} = Q = \int_0^{h_\varphi} V_\varphi dy = \int_0^{h_\varphi} \left[\frac{\omega \cdot R \cdot y}{h_\varphi} + \frac{\partial P^*}{\partial x} \cdot \frac{1}{2\mu} \cdot y \cdot (y - h_\varphi) \right] \cdot dy ;$$

$$\dot{V} = \frac{\omega \cdot R \cdot h_\varphi}{2} - \frac{\partial P^*}{\partial x} \frac{1}{12\mu} \cdot h_\varphi^3 ;$$

Como el caudal circulante $\dot{V}$ ha de ser constante a lo largo de todo el cojinete, despejando $\frac{\partial P^*}{\partial x}$, se tiene:

$$\frac{\partial P^*}{\partial x} = \left(\frac{\omega \cdot R \cdot h_\varphi}{2} - \dot{V} \right) \cdot \frac{12\mu}{h_\varphi^3} = \frac{6\mu \cdot \omega \cdot R}{h_\varphi^2} - \frac{12\mu \cdot \dot{V}}{h_\varphi^3}$$

$$\frac{dP^*}{dx} = \frac{dP^*}{R \cdot d\varphi} ;$$

$$\int_{P_0}^{P_\gamma} dP^* = \int_0^\gamma \left(\frac{6\mu \cdot \omega \cdot R}{h_\varphi^2} - \frac{12\mu \cdot \dot{V}_\theta}{h_\varphi^3} \right) R d\varphi = 0$$

Véase que la ecuación anterior es igual a cero, puesto que la presión en los puntos $(-\theta)$ y (γ) es la misma.

Despejando el valor del caudal volumétrico, se tiene:

$$\dot{V} = \int_{-\theta}^{\gamma} \frac{6\mu \cdot \omega \cdot R^2}{h_{\phi}^2} d\phi \cdot \frac{1}{\int_{-\theta}^{\gamma} \frac{12\mu \cdot R}{h_{\phi}^3} d\phi} = \frac{\omega \cdot R}{2} \left[\frac{\int_{-\theta}^{\gamma} \frac{d\phi}{h_{\phi}^2} \cdot \frac{1}{\int_{-\theta}^{\gamma} \frac{d\phi}{h_{\phi}^3}} \right];$$

Adimensionando las integrales mediante el espesor medio de la película de líquido, se tiene:

$$\dot{V} = \frac{\omega \cdot R \cdot \bar{h}}{2} \left[\frac{\int_{-\theta}^{\gamma} \left(\frac{\bar{h}}{h_{\phi}} \right)^2 d\phi \cdot \frac{1}{\int_{-\theta}^{\gamma} \left(\frac{\bar{h}}{h_{\phi}} \right)^3 d\phi} \right];$$

y, denominando:

$$\int_{-\theta}^{\gamma} \left(\frac{\bar{h}}{h_{\phi}} \right)^2 d\phi = \int_{-\theta}^{\gamma} (1 - \varepsilon \cos \phi)^{-2} d\phi = I_2^*$$

$$\int_{-\theta}^{\gamma} \left(\frac{\bar{h}}{h_{\phi}} \right)^3 d\phi = \int_{-\theta}^{\gamma} (1 - \varepsilon \cos \phi)^{-3} d\phi = I_3^*$$

Se obtiene:

$$\dot{V} = \frac{\omega \cdot R \cdot \bar{h}}{2} \left[\frac{I_2^*}{I_3^*} \right]$$

Conocido el caudal, la distribución de presiones a lo largo del cojinete será:

$$\frac{dP^*}{dx} = \frac{dP^*}{R \cdot d\phi} = \frac{6\mu \cdot \omega \cdot R}{h_{\phi}^2} - \frac{12\mu \cdot \dot{V}}{h_{\phi}^3}$$

$$\frac{dP^*}{d\phi} = \frac{6\mu \cdot \omega \cdot R^2}{h_{\phi}^2} - \frac{12\mu \cdot R}{h_{\phi}^3} \cdot \frac{\omega \cdot R \cdot \bar{h}}{2} \frac{I_2^*}{I_3^*}$$

$$\frac{dP^*}{d\phi} = 6\mu \cdot \omega \cdot R^2 \left[\frac{1}{h_{\phi}^2} - \frac{\bar{h}}{h_{\phi}^3} \frac{I_2^*}{I_3^*} \right]$$

Integrando entre la sección de entrada y un punto genérico ϕ_i , se tiene:



$$\int_{P_{\varphi=0}=P_{\text{entrada}}}^{P_{\varphi=\varphi_i}=P_{\text{genérica}}} dP^* = \frac{6 \mu \cdot \omega \cdot R^2}{\bar{h}^2} \left[\int_{-0}^{\varphi_i} \frac{\bar{h}^2}{h_{\varphi}^2} d\theta - \int_{-0}^{\varphi_i} \frac{\bar{h}^3}{h_{\varphi}^3} \frac{I_2^*}{I_3^*} d\varphi \right]$$

Denominando:

$$\int_{-0}^{\varphi_i} \frac{\bar{h}^2}{h_{\varphi}^2} d\varphi = \int_{-0}^{\varphi_i} (1 - \varepsilon \cos \varphi)^{-2} d\varphi = I_{2P}^*$$

$$\int_{-0}^{\varphi_i} \frac{\bar{h}^3}{h_{\varphi}^3} d\varphi = \int_{-0}^{\varphi_i} (1 - \varepsilon \cos \varphi)^{-3} d\varphi = I_{3P}^*$$

(Véase que la solución de estas dos integrales es función de φ_i .)

Sustituyendo en la integral de la distribución de presiones, se llega a:

$$P_i^* - P_{\text{entrada}}^* = \frac{6 \mu \cdot \omega \cdot R^2}{\bar{h}^2} \left[I_{2P}^* - I_{3P}^* \frac{I_2^*}{I_3^*} \right]$$

Recordando que $\psi = \frac{\bar{h}}{R}$, la distribución de presiones puede darse como:

$$P_i^* - P_{\text{entrada}}^* = \frac{6 \mu \cdot \omega}{\psi^2} \left[I_{2P}^* - I_{3P}^* \frac{I_2^*}{I_3^*} \right]$$

(Esta ecuación se puede representar para diferentes presiones de entrada, con el fin de evitar que aparezca cavitación.)

2. La fuerza que el fluido a presión ejerce sobre el eje se determina del modo siguiente:

En dirección x :

$$F_x = - \int_{-0}^{\gamma} P_i^* \cos \varphi \cdot R \cdot d\varphi$$

Y, en dirección y será:

$$F_y = - \int_{-0}^{\gamma} P_i^* \sin \varphi \cdot R \cdot d\varphi$$

Integrando esta ecuación por partes, se obtiene:

$$u = P_i^* \rightarrow du = \frac{\partial P^*}{\partial \varphi} d\varphi$$

$$v = -\cos \varphi \rightarrow dv = \sin \varphi d\varphi$$



$$F_y = -R \left[P_i (-\cos\varphi) \Big|_{-\theta}^{\gamma} - \int_{-\theta}^{\gamma} -\cos\varphi \frac{dP}{d\varphi} d\varphi \right]$$

de donde, sustituyendo la distribución de presiones:

$$F_y = R \cdot P_i^* \cos\varphi \Big|_{-\theta}^{\gamma} - \int_{-\theta}^{\gamma} \cos\varphi \cdot 6\mu \cdot \omega \cdot R^3 \left[\frac{1}{h_\varphi^2} - \frac{\bar{h}}{h_\varphi^3} \frac{I_2^*}{I_3^*} \right] d\theta$$

Multiplicando y dividiendo por $\bar{h}^2$, se obtiene:

$$F_y = R \cdot P_i^* \cos\varphi \Big|_{-\theta}^{\gamma} - \int_{-\theta}^{\gamma} \frac{6\mu \cdot \omega \cdot R^3}{\bar{h}^2} \left[\frac{\bar{h}^2}{h_\varphi^2} \cos\varphi - \frac{\bar{h}^3}{h_\varphi^3} \frac{I_2^*}{I_3^*} \cos\varphi \right] d\varphi$$

Recuérdese que:

$$\int_{-\theta}^{\gamma} \frac{\bar{h}^2}{h_\varphi^2} \cos\varphi d\varphi = \int_{-\theta}^{\gamma} (1 - \varepsilon \cos\varphi)^{-2} \cos\varphi d\varphi = I_4^*$$

$$\int_{-\theta}^{\gamma} \frac{\bar{h}^3}{h_\varphi^3} \cos\varphi d\varphi = \int_{-\theta}^{\gamma} (1 - \varepsilon \cos\varphi)^{-3} \cos\varphi d\varphi = I_5^*$$

Se obtiene:

$$F_y = R \cdot P_i^* \cos\varphi \Big|_{-\theta}^{\gamma} - \frac{6\mu \cdot \omega \cdot R^3}{\bar{h}^2} \left[I_4^* - I_5^* \frac{I_2^*}{I_3^*} \right]$$

ecuación que puede representarse como:

$$F_y = R \cdot P_i^* \cos\varphi \Big|_{-\theta}^{\gamma} - \frac{6\mu \cdot \omega \cdot R}{\psi^2} \left[I_4^* - I_5^* \frac{I_2^*}{I_3^*} \right]$$

El primer sumando del segundo término de esta ecuación, definido entre los límites $-\theta$ y γ , tiene un valor nulo, dado que estos dos ángulos son, en realidad, el mismo. Así, la ecuación precedente queda del modo siguiente:

$$F_y = \frac{6\mu \cdot \omega \cdot R}{\psi^2} \left[I_5^* \frac{I_2^*}{I_3^*} - I_4^* \right]$$

El par necesario para hacer girar el eje se puede determinar hallando inicialmente los esfuerzos cortantes que actúan sobre el eje:



$$\tau = \mu \left[\frac{\partial V_x}{\partial y} \right]_{y=h_\phi} = \mu \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial P^*}{\partial x} \frac{1}{2\mu} \cdot y(y-h_\phi) + \frac{\omega \cdot R \cdot y}{h} \right]_{y=h_\phi}$$

$$\tau = \mu \cdot \omega \cdot R \left[\frac{1}{h_\phi} + \frac{\partial P^*}{\partial x} \frac{1}{2\mu} \frac{h_\phi}{\omega \cdot R} \right]$$

Sustituyendo $\frac{\partial P^*}{\partial x}$ por su valor:

$$\tau = \mu \cdot \omega \cdot R \left[\frac{1}{h_\phi} + 6\mu \cdot \omega \cdot R \left(\frac{1}{h_\phi^2} - \frac{\bar{h}}{h_\phi^3} \frac{I_2^*}{I_3^*} \right) \frac{1}{2\mu} \frac{h_\phi}{\omega \cdot R} \right]$$

$$\tau = \mu \cdot \omega \cdot R \left[\frac{1}{h_\phi} + 3 \cdot \left(\frac{1}{h_\phi} - \frac{\bar{h}}{h_\phi^2} \frac{I_2^*}{I_3^*} \right) \right]$$

$$\tau = \mu \cdot \omega \cdot R \left[\frac{4}{h_\phi} - 3 \frac{\bar{h}}{h_\phi^2} \frac{I_2^*}{I_3^*} \right]$$

El par sobre el eje, por unidad de longitud, será:

$$T = \int_{-0}^{\gamma} \tau \cdot R^2 d\phi = \int_{-0}^{\gamma} \frac{\mu \cdot \omega \cdot R^3}{\bar{h}} \left[\frac{4}{h_\phi} \bar{h} - 3 \frac{\bar{h}^2}{h_\phi^2} \frac{I_2^*}{I_3^*} \right] d\phi$$

$$T = \frac{\mu \cdot \omega \cdot R^3}{\bar{h}} \left[4 \cdot I_1^* - 3 \cdot \frac{I_2^{*2}}{I_3^*} \right]$$

donde:

$$\int_{-0}^{\gamma} \frac{\bar{h}}{h_\phi} d\phi = \int_{-0}^{\gamma} (1 - \varepsilon \cos \phi)^{-1} d\phi = I_1^*$$

La potencia necesaria para hacer girar el eje será $W = T \cdot \omega$, en consecuencia:

$$W = \frac{\mu \cdot \omega^2 \cdot R^3}{\bar{h}} \left[4 \cdot I_1^* - 3 \cdot \frac{I_2^{*2}}{I_3^*} \right]$$

3(a). Los siguientes apartados se han realizado para tres distintas parejas de valores de R_s y R (caso 1, caso 2 y caso 3). Para cada pareja de valores, se han definido cinco valores de excentricidad.

Los resultados obtenidos se compararán al final del problema para poder comprender cómo influyen las dimensiones del eje, del estátor y de las excentricidades en la presión de la ranura de entrada, el número de Sommerfeld y la longitud de los cojinetes.

CASO 1:

Para poder calcular la presión necesaria en la ranura de entrada, inicialmente se grafica la distribución de presiones en función de la posición angular; seguidamente, se establece la presión mínima en cada caso para evitar que se produzca el fenómeno de la cavitación en el cojinete.

Los datos de partida son:

- $R_{s1} = 40,1 \text{ mm}$; $R_1 = 40 \text{ mm}$
- $\mu = 0,02 \frac{\text{kg}}{\text{ms}}$
- $\omega = 30000 \text{ rpm} \rightarrow 30000 \text{ rpm} \cdot \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} \cdot \frac{2\pi \text{ rad}}{1 \text{ rev}} = 1000\pi \text{ rad / s}$
- $\theta = -40^\circ = -\frac{2\pi}{9} \text{ rad}$; posición de la ranura.

Para estas condiciones de partida, se estudian las excentricidades siguientes:

$$e_1 = 50 \text{ } \mu\text{m} ; e_2 = 30 \text{ } \mu\text{m} ; e_3 = 10 \text{ } \mu\text{m} ; e_4 = 5 \text{ } \mu\text{m} ; e_5 = 1 \text{ } \mu\text{m}$$

La excentricidad máxima será $\bar{h}_1 = R_{s1} - R_1 = 0,1 \text{ mm}$

La excentricidad máxima adimensional se define: $\psi_{11} = \frac{\bar{h}_1}{R_1} = \frac{0,1}{40} = 0,0025$

Las diversas excentricidades relativas consideradas son:

$$\varepsilon_{11} = \frac{e_1}{\bar{h}_1} = \frac{0,050}{0,1} = 0,5$$

$$\varepsilon_{21} = \frac{e_2}{\bar{h}_1} = \frac{0,030}{0,1} = 0,3$$

$$\varepsilon_{31} = \frac{e_3}{\bar{h}_1} = \frac{0,010}{0,1} = 0,1$$

$$\varepsilon_{41} = \frac{e_4}{\bar{h}_1} = \frac{0,0050}{0,1} = 0,05$$



$$\varepsilon_{s1} = \frac{e_5}{h_1} = \frac{0,0010}{0,1} = 0,01$$

Para determinar la distribución de presiones en función de la posición angular, se utiliza la ecuación hallada en el apartado 1.

$$P^* = P_{\text{entrada}}^* + \frac{6 \mu \omega}{\psi_{11}^2} \left[I_{2P}^* - I_{3P}^* \frac{I_2^*}{I_3^*} \right]$$

La P_{entrada}^* es la presión en la ranura de entrada, presión que se desea determinar para cada caso. Así, a priori, se determinará la distribución de presiones sin considerar dicha presión, es decir, la expresión a utilizar es:

$$P^* = \frac{6 \cdot 0,02 \cdot 1000\pi}{0,0025^2} \left[I_{2P}^* - I_{3P}^* \frac{I_2^*}{I_3^*} \right]$$

Recuérdese que, en esta expresión, las integrales I_{2P}^* y I_{3P}^* son las que dependen de la posición angular genérica, es decir:

$$I_{2P}^* = \int_{-\frac{2\pi}{9}}^{\varphi_i} (1 - \varepsilon \cos\varphi)^{-2} d\varphi = \int_{-\frac{2\pi}{9}}^{\varphi_i} (1 - \varepsilon \cos\varphi)^{-2} d\varphi$$

$$I_{3P}^* = \int_{-\frac{2\pi}{9}}^{\varphi_i} (1 - \varepsilon \cos\varphi)^{-3} d\varphi = \int_{-\frac{2\pi}{9}}^{\varphi_i} (1 - \varepsilon \cos\varphi)^{-3} d\varphi$$

Sustituyendo para las diversas excentricidades en la ecuación de la distribución de presiones, se obtiene:

$$P_{i11}^* = 6,032 \cdot 10^7 \left[\int_{-\frac{2\pi}{9}}^{\varphi_i} (1 - 0,5 \cos\varphi)^{-2} d\varphi - \frac{9,674}{14,510} \int_{-\frac{2\pi}{9}}^{\varphi_i} (1 - 0,5 \cos\varphi)^{-3} d\varphi \right]$$

$$P_{i21}^* = 6,032 \cdot 10^7 \left[\int_{-\frac{2\pi}{9}}^{\varphi_i} (1 - 0,3 \cos\varphi)^{-2} d\varphi - \frac{7,238}{8,312} \int_{-\frac{2\pi}{9}}^{\varphi_i} (1 - 0,3 \cos\varphi)^{-3} d\varphi \right]$$

$$P_{i31}^* = 6,032 \cdot 10^7 \left[\int_{-\frac{2\pi}{9}}^{\varphi_i} (1 - 0,1 \cos\varphi)^{-2} d\varphi - \frac{6,379}{6,475} \int_{-\frac{2\pi}{9}}^{\varphi_i} (1 - 0,1 \cos\varphi)^{-3} d\varphi \right]$$

$$P_{i41}^* = 6,032 \cdot 10^7 \left[\int_{-\frac{2\pi}{9}}^{\varphi_i} (1 - 0,05 \cos\varphi)^{-2} d\varphi - \frac{6,307}{6,331} \int_{-\frac{2\pi}{9}}^{\varphi_i} (1 - 0,05 \cos\varphi)^{-3} d\varphi \right]$$



$$P_{i51}^* = 6,032 \cdot 10^7 \left[\int_{-\frac{2\pi}{9}}^{\varphi_i} (1 - 0,01 \cos \varphi)^{-2} d\varphi - \frac{6,284}{6,285} \int_{-\frac{2\pi}{9}}^{\varphi_i} (1 - 0,01 \cos \varphi)^{-3} d\varphi \right]$$

La representación gráfica de estas cinco distribuciones de presión en función de la posición angular se muestra en la figura 7.4. Es interesante observar que, a medida que la excentricidad aumenta, la presión máxima y la mínima también aumentan.

Las diversas integraciones se han realizado con MATLAB®.

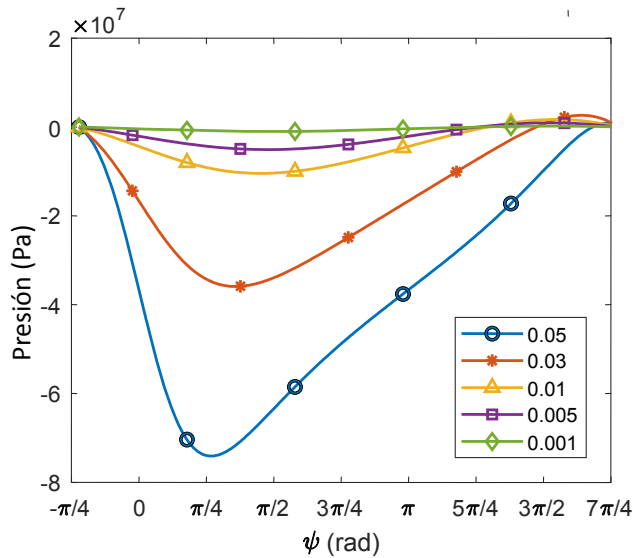


Fig. 7.4
Distribución de
presiones para
las diferentes
excentricidades
elegidas

La presión mínima en la película de fluido, en función de las excentricidades evaluadas, es:

$$P_{i11minima}^* = -7,406 \cdot 10^7 \text{ Pa}$$

$$P_{i21minima}^* = -3,589 \cdot 10^7 \text{ Pa}$$

$$P_{i31minima}^* = -1,042 \cdot 10^7 \text{ Pa}$$

$$P_{i41minima}^* = -5,074 \cdot 10^6 \text{ Pa}$$

$$P_{i51minima}^* = -9,954 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

Obsérvese que esta presión mínima, en sentido positivo, es la presión requerida en la ranura de entrada, como mínimo, para evitar la aparición de cavitación en el cojinete.

$$P_{entrada}^* - |P_{minima}^*| > P_{cav}$$



P_{cav} = presión mínima de aparición de cavitación. En los casos analizados, $P_{\text{cav}} = 0 \text{ Pa}$

Véase que esto es equivalente a desplazar las curvas de la figura 7.4 para que el valor mínimo de todas ellas sea de 0 Pa.

4(a). En este apartado se ha de diseñar la longitud que los cojinetes han de tener para que dos de ellos puedan soportar una fuerza de 18000 N girando a 30000 rpm.

En uno de los apartados anteriores, se ha determinado la ecuación que caracteriza la fuerza por unidad de longitud F . La longitud del cojinete se determina:

$$F_{\text{tot}} = F \cdot L$$

donde L es la longitud que se está buscando.

Puesto que se necesitan dos cojinetes para soportar el peso del motor, la longitud de cada uno se define:

$$L = \frac{1}{2} \cdot \frac{F_{\text{tot}}}{F}$$

$$L = \frac{1}{2} \cdot \frac{18000}{\frac{6 \mu \omega R}{\psi^2} \left[I_5^* \frac{I_2^*}{I_3^*} - I_4^* \right]}$$

Una vez calculadas estas integrales, mediante MATLAB®, se obtienen las diferentes longitudes del cojinete en función de la excentricidad elegida.

$$L_{11} = 0,231 \text{ cm}$$

$$L_{21} = 0,395 \text{ cm}$$

$$L_{31} = 1,187 \text{ cm}$$

$$L_{41} = 2,375 \text{ cm}$$

$$L_{51} = 11,874 \text{ cm}$$

5(a). En este apartado se pide relacionar la fuerza de sustentación por unidad de longitud del cojinete y el número de Sommerfeld con la velocidad de giro y la excentricidad del cojinete. La ecuación que caracterizaba la fuerza de sustentación era:

$$F = \frac{6 \mu \omega R}{\psi^2} \left[I_5^* \frac{I_2^*}{I_3^*} - I_4^* \right]$$

Véase que la fuerza de sustentación por unidad de longitud del cojinete tiene una relación lineal con la velocidad de giro. Para una excentricidad de $e_1 = 50 \mu\text{m}$, la fuerza de sustentación toma el valor de:

$$F = \frac{6 \cdot 0,02 \cdot 40 \cdot 10^{-3}}{0,0025^2} \left[9,674 \cdot \frac{9,674}{14,511} - 4,837 \right] \omega$$

$$F = 1238,22 \omega$$

Al realizar el mismo proceso para las diferentes excentricidades, se observa que la pendiente de la fuerza de sustentación en función de la velocidad de giro aumenta con la excentricidad.

La fuerza de sustentación por unidad de longitud del cojinete en función de la excentricidad se define como

$$F = \frac{6 \mu \omega R_k}{\psi^2} \left[\frac{\int_{-\frac{2\pi}{9}}^{\frac{16\pi}{9}} \left(1 - \frac{e}{h_k} \cdot \cos\varphi\right)^{-3} \cos\varphi \, d\varphi \int_{-\frac{2\pi}{9}}^{\frac{16\pi}{9}} \left(1 - \frac{e}{h_k} \cdot \cos\varphi\right)^{-2} \, d\varphi}{\int_{-\frac{2\pi}{9}}^{\frac{16\pi}{9}} \left(1 - \frac{e}{h_k} \cdot \cos\varphi\right)^{-3} \, d\varphi} \right]$$

Para este primer caso, se tiene:

$$R_{s1} = R_1 + \bar{h}_1$$

$$\bar{h}_1 = R_{s1} - R_1 = 0,1 \text{ mm}$$

Realizando las integrales de la fuerza de sustentación con el software MATLAB®, se obtiene la gráfica 5. Obsérvese que, cuando la excentricidad se acerca a la excentricidad máxima, la fuerza de sustentación crece exponencialmente.

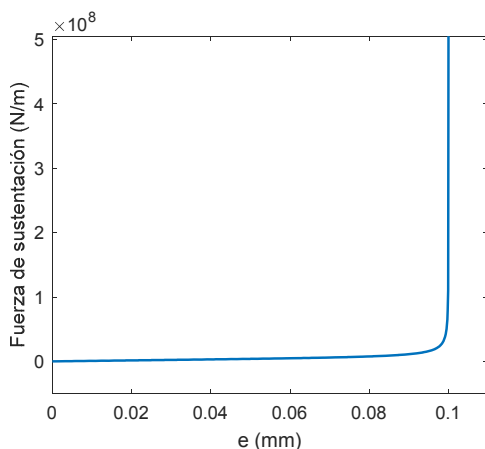


Fig. 7.5
Fuerza de sustentación en (newtons/m) en función de la excentricidad



El número de Sommerfeld (S_0) se define como:

$$S_0 = F_y \frac{\psi^2}{\mu \omega R}$$

Sustituyendo el valor de la fuerza de sustentación, se tiene:

$$S_0 = \frac{6 \mu \omega R}{\psi^2} \left[I_5^* \frac{I_2^*}{I_3^*} - I_4^* \right] \frac{\psi^2}{\mu \omega R}$$

de donde:

$$S_0 = 6 \left[I_5^* \frac{I_2^*}{I_3^*} - I_4^* \right]$$

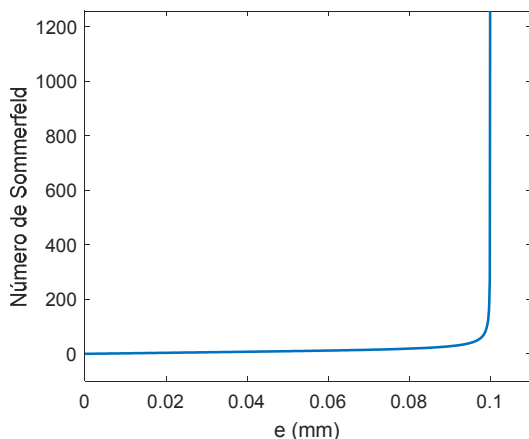
Obsérvese que el número de Sommerfeld no depende de la velocidad de giro; depende únicamente de la excentricidad del cojinete: a mayor excentricidad, mayor es el número de Sommerfeld.

El número de Sommerfeld en función de la excentricidad viene dado por:

$$S_0 = 6 \left[\frac{\int_{-\frac{2\pi}{9}}^{\frac{16\pi}{9}} \left(1 - \frac{e}{\bar{h}_j} \cos \varphi\right)^{-3} \cos \varphi \, d\varphi \int_{-\frac{2\pi}{9}}^{\frac{16\pi}{9}} \left(1 - \frac{e}{\bar{h}_j} \cos \varphi\right)^{-2} \, d\varphi}{\int_{-\frac{2\pi}{9}}^{\frac{16\pi}{9}} \left(1 - \frac{e}{\bar{h}_j} \cos \varphi\right)^{-3} \, d\varphi} - \int_{-\frac{2\pi}{9}}^{\frac{16\pi}{9}} \left(1 - \frac{e}{\bar{h}_j} \cos \varphi\right)^{-2} \cos \varphi \, d\varphi \right]$$

Recordando que para, este primer caso, $\bar{h}_1 = 0,1 \text{ mm}$, y realizando las integraciones mediante el software MATLAB®, se obtiene la gráfica 6.

Fig. 7.6
Número de
Sommerfeld en
función de la
excentricidad





En adelante, se realizarán de nuevo los apartados 3, 4 y 5 del problema para el caso 2, en que el radio del estátor toma el valor de 40,05 mm.

CASO 2:

3(b). En este caso, los valores del eje y del estátor son: $R_2 = 40 \text{ mm}$; $R_{s2} = 40,05 \text{ mm}$.

La excentricidad máxima para este segundo caso vale: $\bar{h}_2 = R_{s2} - R_2 = 0,05 \text{ mm}$

La excentricidad máxima adimensional se define: $\psi_{22} = \frac{\bar{h}_2}{R_2} = \frac{0,05}{40} = 0,00125$

Utilizando las mismas excentricidades absolutas que para el caso precedente, las diversas excentricidades relativas serán:

$$\begin{aligned}\epsilon_{12} &= \frac{e_1}{h_2} = \frac{0,050}{0,05} = 1 \\ \epsilon_{22} &= \frac{e_2}{h_2} = \frac{0,030}{0,05} = 0,6 \\ \epsilon_{32} &= \frac{e_3}{h_2} = \frac{0,010}{0,05} = 0,2 \\ \epsilon_{42} &= \frac{e_4}{h_2} = \frac{0,0050}{0,05} = 0,1 \\ \epsilon_{52} &= \frac{e_5}{h_2} = \frac{0,0010}{0,05} = 0,02\end{aligned}$$

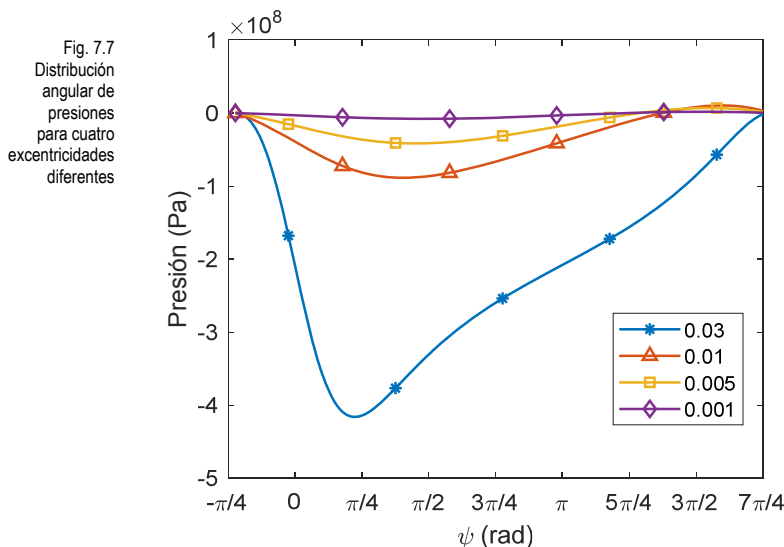
La distribución de presiones a lo largo de la película de fluido y en función de las diversas excentricidades relativas se define como:

$$\begin{aligned}P_{i12}^* &= 2,413 \cdot 10^8 \left[\int_{-\frac{2\pi}{9}}^{\varphi_i} (1 - 1 \cos \varphi)^{-2} d\varphi - \frac{\infty}{\infty} \int_{-\frac{2\pi}{9}}^{\varphi_i} (1 - 1 \cos \varphi)^{-3} d\varphi \right] \\ P_{i22}^* &= 2,413 \cdot 10^8 \left[\int_{-\frac{2\pi}{9}}^{\varphi_i} (1 - 0,6 \cos \varphi)^{-2} d\varphi - \frac{12,272}{22,626} \int_{-\frac{2\pi}{9}}^{\varphi_i} (1 - 0,6 \cos \varphi)^{-3} d\varphi \right] \\ P_{i32}^* &= 2,413 \cdot 10^8 \left[\int_{-\frac{2\pi}{9}}^{\varphi_i} (1 - 0,2 \cos \varphi)^{-2} d\varphi - \frac{6,680}{7,097} \int_{-\frac{2\pi}{9}}^{\varphi_i} (1 - 0,2 \cos \varphi)^{-3} d\varphi \right] \\ P_{i42}^* &= 2,413 \cdot 10^8 \left[\int_{-\frac{2\pi}{9}}^{\varphi_i} (1 - 0,1 \cos \varphi)^{-2} d\varphi - \frac{6,379}{6,475} \int_{-\frac{2\pi}{9}}^{\varphi_i} (1 - 0,1 \cos \varphi)^{-3} d\varphi \right] \\ P_{i52}^* &= 2,413 \cdot 10^8 \left[\int_{-\frac{2\pi}{9}}^{\varphi_i} (1 - 0,02 \cos \varphi)^{-2} d\varphi - \frac{6,287}{6,291} \int_{-\frac{2\pi}{9}}^{\varphi_i} (1 - 0,02 \cos \varphi)^{-3} d\varphi \right]\end{aligned}$$



En este punto, es interesante observar que puesto que la excentricidad relativa $\varepsilon_{12} = 1$, es decir, el eje está en contacto con la carcasa, la teoría indica que la distribución de presiones P_{i12}^* tiende a infinito, con lo cual la fuerza de sustentación del cojinete tenderá asimismo a ser infinita. Esta es la razón que explica por qué en la figura siguiente solo aparecen cuatro curvas.

Graficando estas cuatro ecuaciones restantes en función del ángulo φ , se obtiene la figura 7.7. Obsérvese que solo aparecen cuatro de las curvas, la curva correspondiente a la excentricidad máxima da lugar a una presión que tiende a infinito.



El valor de las presiones mínimas en función de la excentricidad es:

$$P_{i22minima}^* = -4,160 \cdot 10^8 \text{ Pa}$$

$$P_{i32minima}^* = -8,870 \cdot 10^7 \text{ Pa}$$

$$P_{i42minima}^* = -4,169 \cdot 10^7 \text{ Pa}$$

$$P_{i52minima}^* = -8,001 \cdot 10^6 \text{ Pa}$$

Estas presiones, en valor positivo, serían las presiones mínimas en cada caso, que debería haber en la ranura de entrada para evitar que se produzca cavitación en el cojinete.

4(b). Las diversas longitudes del cojinete se determinan mediante la expresión:

$$L = \frac{1}{2} \cdot \frac{18000}{\frac{6 \mu \omega R}{\psi^2} \left[\frac{I_5^* I_2^*}{I_3^*} - I_4^* \right]}$$

Sustituyendo los valores correspondientes e integrando mediante MATLAB®, se obtiene:

$$L_{12} = \text{Indefinido cm (longitud prácticamente cero)}$$

$$L_{22} = 0,047 \text{ cm}$$

$$L_{32} = 0,148 \text{ cm}$$

$$L_{42} = 0,297 \text{ cm}$$

$$L_{52} = 1,484 \text{ cm}$$

Véase que la longitud de estos cojinetes, independientemente de la excentricidad elegida, es demasiado pequeña, lo cual indica que las dimensiones del estátor son poco apropiadas, que la excentricidad máxima es demasiado pequeña.

5(b). Ya se ha visto en el apartado anterior que la fuerza de sustentación por unidad de longitud es directamente proporcional a la velocidad angular del eje; la ecuación que caracterizaba esta relación era:

$$F = \frac{6 \mu \omega R}{\psi^2} \left[I_5^* \frac{I_2^*}{I_3^*} - I_4^* \right]$$

Sustituyendo los valores que caracterizan este apartado y graficando el resultado en función de la excentricidad, se obtiene la gráfica 8. Obsérvese que, para la excentricidad máxima, la fuerza de sustentación en función de la velocidad angular daría lugar a una línea vertical.

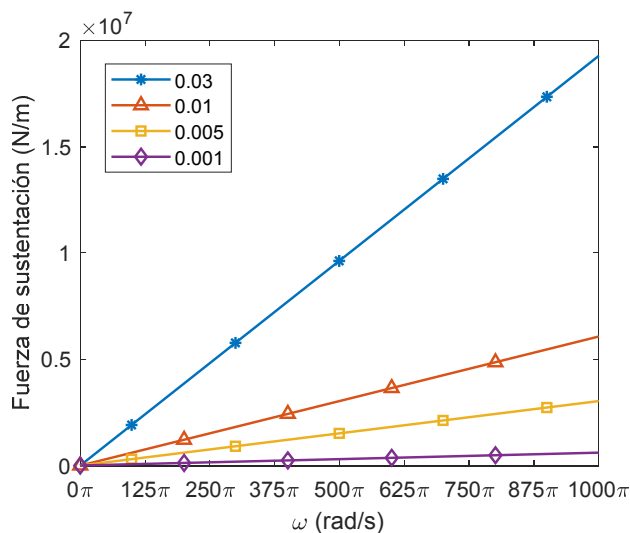


Fig. 7.8
Fuerza de sustentación por unidad de longitud para el caso 2, en función de la velocidad angular y para las diversas excentricidades estudiadas



Recuérdese que la ecuación que relacionaba la fuerza de sustentación por unidad de longitud en función de la excentricidad era:

$$F = \frac{6 \mu \omega R}{\psi^2} \left[\frac{\int_{-\frac{2\pi}{9}}^{\frac{16\pi}{9}} \left(1 - \frac{e}{h} \cos \varphi\right)^{-3} \cos \varphi \, d\varphi}{\int_{-\frac{2\pi}{9}}^{\frac{16\pi}{9}} \left(1 - \frac{e}{h} \cos \varphi\right)^{-3} \, d\varphi} - \int_{-\frac{2\pi}{9}}^{\frac{16\pi}{9}} \left(1 - \frac{e}{h} \cos \varphi\right)^{-2} \cos \varphi \, d\varphi \right]$$

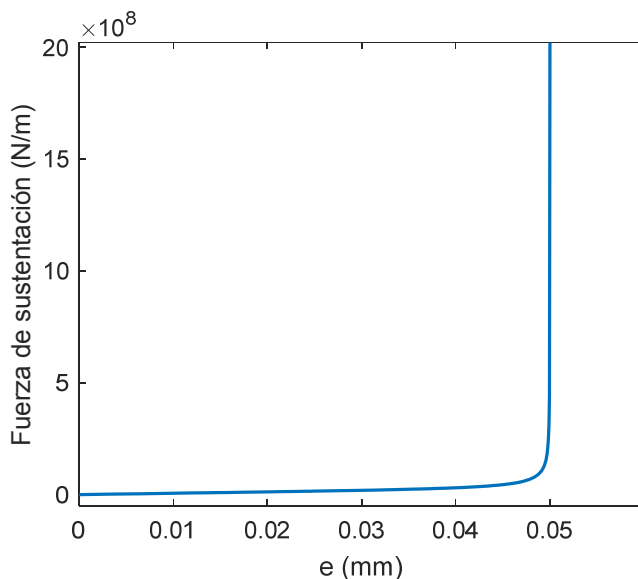
Recuérdese asimismo, que para el presente caso 2 la excentricidad máxima vale:

$$R_{s2} = R_2 + \bar{h}_2$$

$$\bar{h}_2 = R_{s2} - R_2 = 0,05 \text{ mm}$$

La representación gráfica de la ecuación que caracteriza la fuerza en función de la excentricidad se detalla en la gráfica 9.

Fig. 7.9
Fuerza de
sustentación
(newtons/m)
para el caso 2
en función de
la excentricidad
del cojinete



Ya se ha visto en el caso 1 que el número de Sommerfeld no es función de la velocidad angular, únicamente es función de la excentricidad. La ecuación que caracteriza esta dependencia es:

$$S_0 = 6 \left[I_5^* \frac{I_2^*}{I_3^*} - I_4^* \right]$$

$$S_0 = 6 \left[\frac{\int_{-\frac{2\pi}{9}}^{\frac{16\pi}{9}} \left(1 - \frac{e}{h_j} \cos \varphi\right)^{-3} \cos \varphi \, d\varphi \int_{-\frac{2\pi}{9}}^{\frac{16\pi}{9}} \left(1 - \frac{e}{h_j} \cos \varphi\right)^{-2} \, d\varphi}{\int_{-\frac{2\pi}{9}}^{\frac{16\pi}{9}} \left(1 - \frac{e}{h_j} \cos \varphi\right)^{-3} \, d\varphi} - \int_{-\frac{2\pi}{9}}^{\frac{16\pi}{9}} \left(1 - \frac{e}{h_j} \cos \varphi\right)^{-2} \cos \varphi \, d\varphi \right]$$

La representación gráfica de esta ecuación está representada en la figura 7.10.

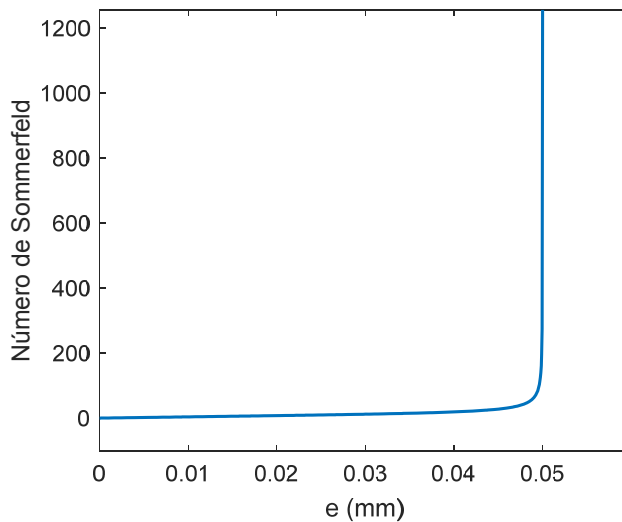


Fig. 7.10
Número de
Sommerfeld en
función de la
excentricidad

CASO 3:

3(c). Con el fin de conseguir una disminución de la presión en la ranura de entrada, se define este tercer caso, un radio para el estátor de 150 micras mayor que el del rotor. Los demás parámetros: velocidad de giro, viscosidad del fluido, peso del motor, etc. siguen siendo los mismos que los utilizados en los dos apartados precedentes. Se estudiarán las mismas cinco excentricidades que en los dos apartados anteriores.

En este caso, los valores del eje y del estátor son: $R_{s3} = 40,15 \text{ mm}$; $R_3 = 40 \text{ mm}$

La excentricidad máxima para este segundo caso vale: $\bar{h}_3 = R_{s3} - R_3 = 0,15 \text{ mm}$

La excentricidad máxima adimensional se define: $\psi_{33} = \frac{\bar{h}_3}{R_3} = \frac{0,15}{40} = 0,00375$



Utilizando las mismas excentricidades absolutas que para el caso precedente, las diversas excentricidades relativas serán:

$$\varepsilon_{13} = \frac{e_1}{h_3} = \frac{0,050}{0,15} = 0,3\hat{}$$

$$\varepsilon_{23} = \frac{e_2}{h_3} = \frac{0,030}{0,15} = 0,2$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{e_3}{h_3} = \frac{0,010}{0,15} = 0,06\hat{}$$

$$\varepsilon_{43} = \frac{e_4}{h_3} = \frac{0,0050}{0,15} = 0,03\hat{}$$

$$\varepsilon_{53} = \frac{e_5}{h_3} = \frac{0,0010}{0,15} = 0,006\hat{}$$

Las ecuaciones que caracterizan la distribución de presiones a lo largo del cojinete y para las diferentes excentricidades estudiadas se definen:

$$P_{i13}^* = 2,681 \cdot 10^7 \left[\begin{aligned} &\int_{-\frac{2\pi}{9}}^{\varphi_i} (1 - 0,3\hat{} \cos\varphi)^{-2} d\varphi \\ &- \frac{7,497}{8,903} \int_{-\frac{2\pi}{9}}^{\varphi_i} (1 - 0,3\hat{} \cos\varphi)^{-3} d\varphi \end{aligned} \right]$$

$$P_{i23}^* = 2,681 \cdot 10^7 \left[\begin{aligned} &\int_{-\frac{2\pi}{9}}^{\varphi_i} (1 - 0,2 \cos\varphi)^{-2} d\varphi \\ &- \frac{6,680}{7,097} \int_{-\frac{2\pi}{9}}^{\varphi_i} (1 - 0,2 \cos\varphi)^{-3} d\varphi \end{aligned} \right]$$

$$P_{i33}^* = 2,681 \cdot 10^7 \left[\begin{aligned} &\int_{-\frac{2\pi}{9}}^{\varphi_i} (1 - 0,06\hat{} \cos\varphi)^{-2} d\varphi \\ &- \frac{6,325}{6,368} \int_{-\frac{2\pi}{9}}^{\varphi_i} (1 - 0,06\hat{} \cos\varphi)^{-3} d\varphi \end{aligned} \right]$$

$$P_{i43}^* = 2,681 \cdot 10^7 \left[\begin{aligned} &\int_{-\frac{2\pi}{9}}^{\varphi_i} (1 - 0,03\hat{} \cos\varphi)^{-2} d\varphi \\ &- \frac{6,294}{6,304} \int_{-\frac{2\pi}{9}}^{\varphi_i} (1 - 0,03\hat{} \cos\varphi)^{-3} d\varphi \end{aligned} \right]$$

$$P_{i53}^* = 2,681 \cdot 10^7 \left[\int_{-\frac{2\pi}{9}}^{\varphi_i} (1 - 0,006 \cos \varphi)^{-2} d\varphi - \frac{6,284}{6,284} \int_{-\frac{2\pi}{9}}^{\varphi_i} (1 - 0,006 \cos \varphi)^{-3} d\varphi \right]$$

La representación de estas ecuaciones en función de la posición angular se muestra en la figura 7.11.

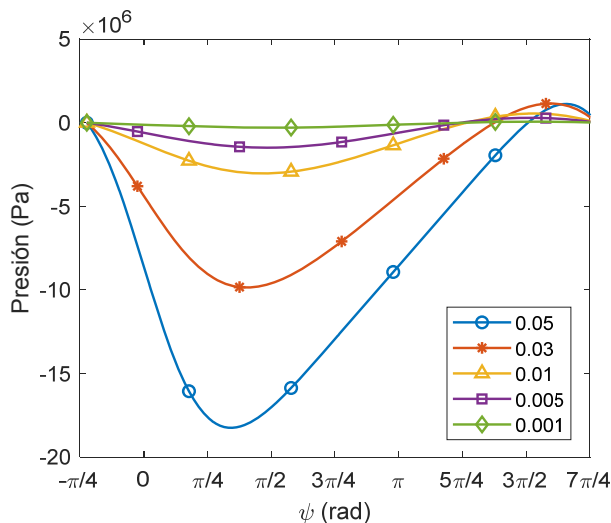


Fig. 7.11
Distribución de presiones en función de la posición angular y para las diferentes excentricidades estudiadas

Las presiones mínimas son, en este caso:

$$P_{i13minima}^* = -1,824 \cdot 10^7 \text{ Pa}$$

$$P_{i23minima}^* = -9,856 \cdot 10^6 \text{ Pa}$$

$$P_{i33minima}^* = -3,033 \cdot 10^6 \text{ Pa}$$

$$P_{i43minima}^* = -1,491 \cdot 10^6 \text{ Pa}$$

$$P_{i53minima}^* = -2,945 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

Procede comentar, de nuevo, que estas presiones en valor positivo indican cuál ha de ser, en cada caso, la presión mínima necesaria en la ranura de entrada, para evitar que se produzca cavitación en el cojinete.

4(c). La longitud del cojinete se determina del modo siguiente:



$$L = \frac{1}{2} \cdot \frac{18000}{\frac{6 \mu \omega R}{\psi^2} \left[I_5^* \frac{I_2^*}{I_3^*} - I_4^* \right]}$$

Una vez calculadas estas integrales para cada una de las excentricidades objeto de estudio, se obtiene:

$$L_{13} = 0,798 \text{ cm}$$

$$L_{23} = 1,335 \text{ cm}$$

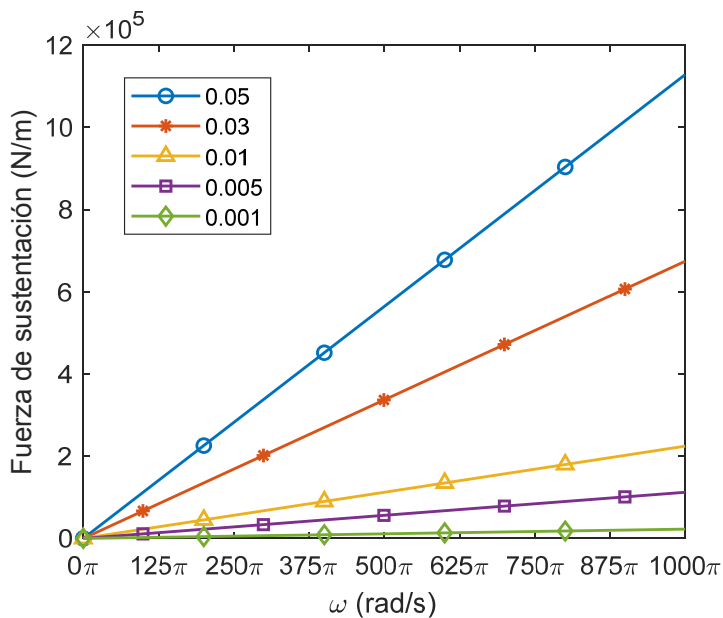
$$L_{33} = 4,007 \text{ cm}$$

$$L_{43} = 8,015 \text{ cm}$$

$$L_{53} = 40,073 \text{ cm}$$

5(c). En los apartados anteriores, ya se ha visto que la fuerza de sustentación por unidad de longitud varía linealmente con la velocidad de giro. La figura 7.12 muestra esta fuerza de sustentación en función de la velocidad angular y para las diferentes excentricidades evaluadas.

Fig. 7.12
Fuerza
de sustentación
en (newtons/m)
para el caso 3



La fuerza de sustentación por unidad de longitud en función de la excentricidad se definía como:

$$F = \frac{6 \mu \omega R}{\psi^2} \left[\frac{\int_{-\frac{2\pi}{9}}^{\frac{16\pi}{9}} \left(1 - \frac{e}{h} \cdot \cos\varphi\right)^{-3} \cos\varphi \, d\varphi \int_{-\frac{2\pi}{9}}^{\frac{16\pi}{9}} \left(1 - \frac{e}{h} \cdot \cos\varphi\right)^{-2} \, d\varphi}{\int_{-\frac{2\pi}{9}}^{\frac{16\pi}{9}} \left(1 - \frac{e}{h} \cdot \cos\varphi\right)^{-3} \, d\varphi} - \int_{-\frac{2\pi}{9}}^{\frac{16\pi}{9}} \left(1 - \frac{e}{h} \cdot \cos\varphi\right)^{-2} \cos\varphi \, d\varphi \right]$$

La representación gráfica de esta ecuación se ha presentado en la figura 7.13.

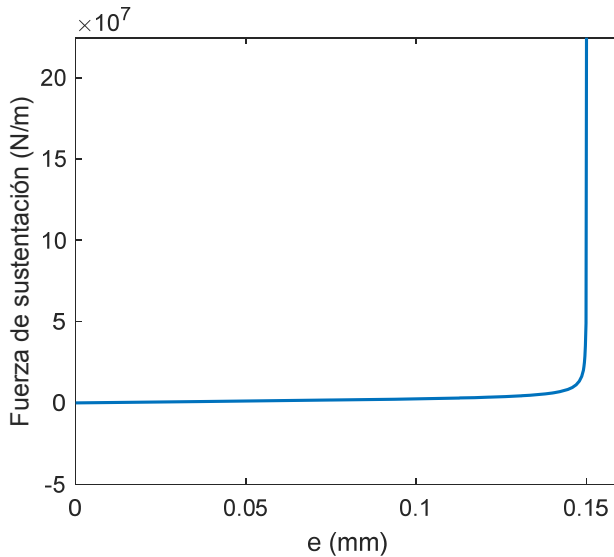


Fig. 7.13
Fuerza de sustentación en (*newtons/m*) en función de la excentricidad, caso 3

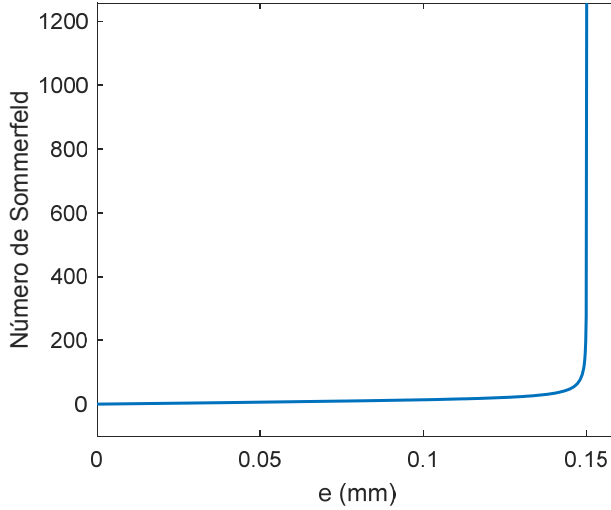
El número de Sommerfeld no es función de la velocidad de giro. El número de Sommerfeld en función de la excentricidad viene dado por:

$$S_0 = 6 \left[\frac{\int_{-\frac{2\pi}{9}}^{\frac{16\pi}{9}} \left(1 - \frac{e}{h} \cdot \cos\varphi\right)^{-3} \cos\varphi \, d\varphi \int_{-\frac{2\pi}{9}}^{\frac{16\pi}{9}} \left(1 - \frac{e}{h} \cdot \cos\varphi\right)^{-2} \, d\varphi}{\int_{-\frac{2\pi}{9}}^{\frac{16\pi}{9}} \left(1 - \frac{e}{h} \cdot \cos\varphi\right)^{-3} \, d\varphi} - \int_{-\frac{2\pi}{9}}^{\frac{16\pi}{9}} \left(1 - \frac{e}{h} \cdot \cos\varphi\right)^{-2} \cos\varphi \, d\varphi \right]$$

La figura 7.14 muestra la representación gráfica de esta ecuación para el presente caso.



Fig. 7.14
Número de
Sommerfeld en
función de la
excentricidad,
caso 3



Comparación de los tres casos

Las gráficas de la presión en función de la posición angular muestran que, cuanto menor es el valor de la excentricidad, menor es la presión necesaria para evitar la cavitación y también es menor la fuerza de sustentación.

Otra manera de hallar la presión mínima, sin necesidad de graficar la presión en función del ángulo para cada excentricidad, consiste en determinar para qué ángulo existe un mínimo en la función que define la presión. A tal efecto, es imprescindible tener en cuenta que esta función ha de ser continua y derivable. Recordando la expresión que define la presión en función del ángulo, si $P_{\text{entrada}}^* = 0$:

$$P^*(\varphi) = \frac{6 \mu \omega}{\Psi_{11}^2} \left[I_{2P}^* - I_{3P}^* \frac{I_2^*}{I_3^*} \right] \text{ tal que } \varphi \in [-2\pi/9, 16\pi/9]$$

Una condición necesaria que debe cumplirse para que exista un mínimo relativo en un punto intermedio entre los extremos del dominio determinado es: $\frac{dP^*}{d\varphi} = 0$. La variación de la presión respecto del ángulo hallada anteriormente:

$$\frac{dP^*}{d\varphi} = 6\mu \cdot \omega \cdot R^2 \left[\frac{1}{\bar{h}_\varphi^2} - \frac{\bar{h}_3}{\bar{h}_\varphi^3} \frac{I_2^*}{I_3^*} \right] = \frac{6\mu \cdot \omega \cdot R^2}{\bar{h}_3^2} \left[\frac{1}{(1 - \varepsilon \cdot \cos\varphi)^2} - \frac{1}{(1 - \varepsilon \cdot \cos\varphi)^3} \frac{I_2^*}{I_3^*} \right]$$



$$\text{Si } \frac{dP^*}{d\varphi} = 0,$$

$$\frac{dP^*}{d\varphi} = \frac{6\mu \cdot \omega \cdot R^2}{h_3^2} \left[\frac{1}{(1 - \varepsilon \cdot \cos\varphi)^2} - \frac{1}{(1 - \varepsilon \cdot \cos\varphi)^3} \frac{I_2^*}{I_3^*} \right] = 0$$

Resolviendo la ecuación y aislando, se obtiene que el ángulo para el cual la presión es mínima es:

$$\varphi_{P_{\min}} = \arccos \left(\frac{1}{\varepsilon} \left(1 - \frac{I_2^*}{I_3^*} \right) \right)$$

Cabe destacar que la presión será mínima en el ángulo $\varphi_{P_{\min}}$ si se cumple uno de los criterios siguientes:

Criterio de la primera derivada

Si la primera derivada de la función P^* evaluada en un ángulo inmediatamente anterior a $\varphi_{P_{\min}}$ es negativa, y la primera derivada de la función P^* evaluada en un ángulo inmediatamente posterior a $\varphi_{P_{\min}}$ es positiva, la presión evaluada en el ángulo $\varphi_{P_{\min}}$ será mínima.

$$\frac{dP^*}{d\varphi}(\varphi_{P_{\min}} - d\varphi) < 0 \quad \text{y} \quad \frac{dP^*}{d\varphi}(\varphi_{P_{\min}} + d\varphi) > 0 \Rightarrow P^* \text{ es mínima en } \varphi = \varphi_{P_{\min}}$$

Criterio de la segunda derivada

Si la segunda derivada de la función P^* evaluada en el ángulo $\varphi_{P_{\min}}$ es positiva, la presión evaluada en el ángulo $\varphi_{P_{\min}}$ será mínima.

$$\frac{d^2P^*}{d\varphi^2}(\varphi_{P_{\min}}) > 0 \Rightarrow P^* \text{ es mínima en } \varphi = \varphi_{P_{\min}}$$

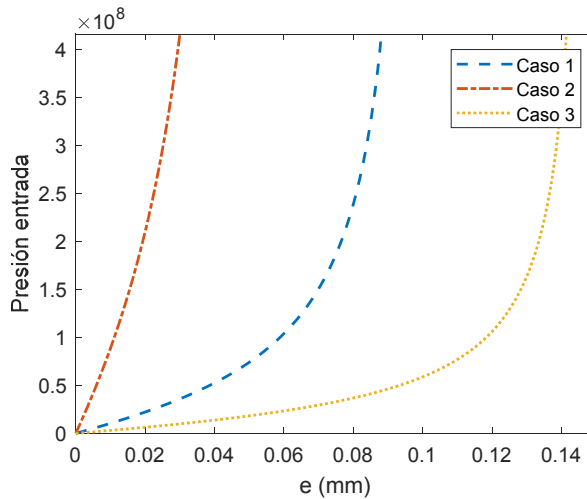


Una vez determinado el ángulo y comprobado que se trata de un mínimo, la presión mínima resulta de sustituir este ángulo φ_{pmin} en la expresión que define la presión en función del ángulo; $P^*(\varphi_{pmin})$:

$$P^*(\varphi_{pmin}) = \frac{6 \mu \omega}{\psi_{11}^2} \left[\int_{-\theta}^{\varphi_{pmin}} (1 - \varepsilon \cos \varphi)^{-2} d\varphi - \left(\int_{-\theta}^{\varphi_{pmin}} (1 - \varepsilon \cos \varphi)^{-3} d\varphi \right) \frac{I_2^*}{I_3^*} \right]$$

Utilizando este último procedimiento para hallar la presión mínima y, en definitiva, la presión de entrada, se realiza un gráfico que muestra esta presión para cada una de las excentricidades en los tres casos estudiados:

Fig. 7.15



La longitud del cojinete ha de ser del mismo orden de magnitud que su diámetro. Observando los resultados obtenidos en los tres casos estudiados, cabe concluir que una buena elección sería:

$$R_{s3} = 40,15 \text{ mm} ; R_3 = 40 \text{ mm} ; y e_4 = 0,005 \text{ mm}$$

Con esta configuración, se obtiene una longitud de:

$$L_{43} = 8,015 \text{ cm}$$

y una presión en la ranura de entrada de:

$$P_{\text{entrada } 43}^* = 1,491 \cdot 10^6 \text{ Pa}$$

Estudiando los distintos valores de longitud que se han obtenido, se ve que la longitud aumenta a medida que la excentricidad disminuye. Cuanto menor es la excentricidad,

menor es la fuerza de sustentación por unidad de longitud del cojinete y, por tanto, este ha de ser más largo. Para unos mismos valores de excentricidad, la longitud es más grande cuanto mayor es la excentricidad máxima que el cojinete permite.

Estas dos conclusiones se pueden ver en el gráfico siguiente:

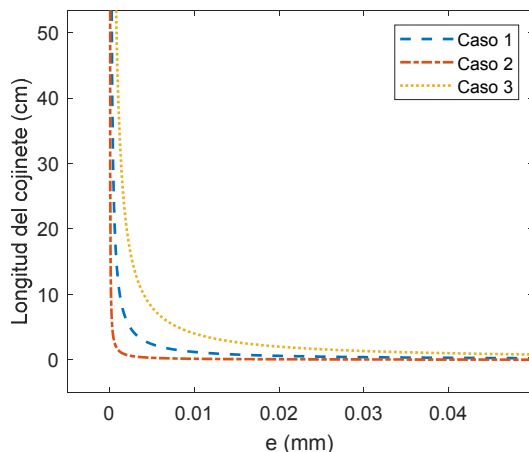


Fig. 7.16

Se ha visto que la fuerza de sustentación es directamente proporcional a la velocidad angular. La fuerza de sustentación disminuye a medida que disminuye la excentricidad.

Observando las tres gráficas que caracterizan la fuerza de sustentación por unidad de longitud en función de la excentricidad (v. figura siguiente), se puede ver que la fuerza tiende a infinito cuando el rotor está casi en contacto con la pared del estátor. Cabe tener presente que estos resultados son completamente teóricos y que, en realidad, la fuerza no puede llegar a ser tan elevada. Obsérvese que la fuerza de sustentación aumenta más rápidamente cuanto menor es la excentricidad máxima del cojinete.

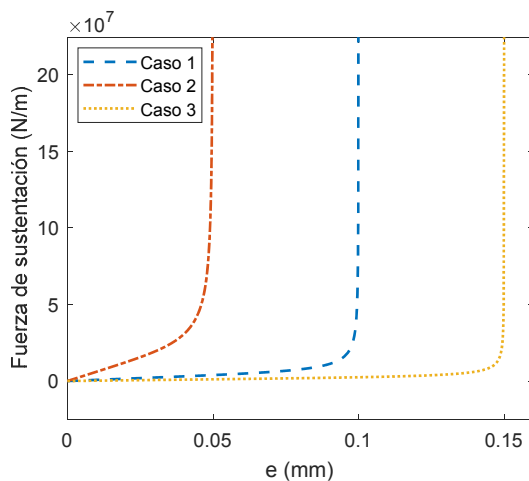


Fig. 7.17



Problema 8

Enunciado

En los procesos de aterrizaje y de despegue de las aeronaves, se producen vórtices que se generan originariamente bajo las alas de estas naves. Dichos vórtices interaccionan con el suelo y crean campos de presiones y velocidades que, de hecho, perturban el despegue y/o el aterrizaje de aeronaves más pequeñas. En este problema, se pide:

1. Determinar inicialmente la ecuación de Bernouilli para flujo potencial
2. Definir el concepto de vorticidad y el flujo de vorticidad
3. Determinar, utilizando la teoría potencial, el colectivo de ecuaciones que, para el caso de tener dos vórtices paralelos y cercanos al suelo, definan el campo de velocidades y presiones en cualquier punto del vórtice bidimensional y del suelo. Partiendo de las expresiones genéricas halladas, se requiere asimismo determinar las expresiones particulares que caracterizan el campo de presiones y velocidades sobre el suelo.
4. Representar gráficamente la distribución de presiones y el flujo de vorticidad sobre la placa plana, la evolución de la posición del vórtice, las velocidades horizontales y verticales del vórtice y el campo de velocidades a lo largo del tiempo. La posición y las velocidades de los vórtices se deben comparar para diferentes velocidades no perturbadas.

Resolución

1. Determinación de la ecuación de Bernouilli para flujo potencial

Distribución de presiones causada por un flujo vorticular sobre una superficie plana paralela al eje del vórtice.

La distribución de presiones a lo largo del eje x , puede determinarse utilizando la ecuación de Bernouilli para flujo potencial, la cual puede obtenerse partiendo de la ecuación de Navier-Stokes. Dicha ecuación para fluido incompresible, adopta la forma:

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V}\nabla)\vec{V} \right) = -\nabla P + \rho \vec{g} + \mu \nabla^2 \vec{V} \quad (1)$$

Recordando las relaciones vectoriales:

$$\vec{V} \times (\nabla \times \vec{V}) = \vec{V} \times \text{rot} \vec{V} = \text{grad} \frac{V^2}{2} - \vec{V} \cdot \text{grad} \vec{V} = \nabla \left(\frac{V^2}{2} \right) - (\vec{V}\nabla)\vec{V} \quad (2)$$



$$\text{rot } \text{rot } \vec{V} = \text{grad } \text{div } \vec{V} - \nabla^2 \vec{V} \quad (3)$$

Sustituyendo las ecuaciones 2 y 3 en 1, se obtiene:

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{V^2}{2} \right) - \vec{V} \times \text{rot } \vec{V} \right) = -\nabla P + \rho \vec{g} + \mu [\text{grad } \text{div } \vec{V} - \text{rot } \text{rot } \vec{V}] \quad (4)$$

Asumiendo el flujo como potencial, se ha de cumplir, $\text{rot } \vec{V} = 0$, de donde:

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{V^2}{2} \right) \right) = -\nabla P + \rho \vec{g} + \mu [\text{grad } \text{div } \vec{V}] \quad (5)$$

Por otro lado, para flujo incompresible, se tiene que $\nabla \cdot \vec{V} = 0$, y se obtiene:

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{V^2}{2} \right) \right) = -\nabla P + \rho \vec{g} \quad (6)$$

Dividiendo por la densidad:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \nabla \left[\left(\frac{V^2}{2} \right) + \left(\frac{P}{\rho} \right) \right] = \vec{g} \quad (7)$$

De acuerdo con la teoría potencial, $\text{rot } \vec{V} = 0 \equiv \vec{V} = \nabla \phi$, siendo ϕ el potencial de velocidades, de donde:

$$\frac{\partial \nabla \phi}{\partial t} + \nabla \left[\left(\frac{V^2}{2} \right) + \left(\frac{P}{\rho} \right) \right] = \vec{g} \quad (8)$$

Esta ecuación puede presentarse también como:

$$\nabla \left[\frac{\partial \phi}{\partial t} + \left(\frac{V^2}{2} \right) + \left(\frac{P}{\rho} \right) \right] = \vec{g} \quad (9)$$

Las fuerzas gravitacionales pueden expresarse como $\vec{g} = -\nabla U = -\nabla (gh)$, siendo h la posición de un punto genérico *versus* un plano establecido, de donde:

$$\nabla \left[\frac{\partial \phi}{\partial t} + \left(\frac{V^2}{2} \right) + \left(\frac{P}{\rho} \right) + (g \cdot h) \right] = 0 \quad (10)$$

La integración de esta ecuación tiene como resultado:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \left(\frac{V^2}{2} \right) + \left(\frac{P}{\rho} \right) + (g \cdot h) = \text{cte.} \quad (11)$$



La ecuación 11 también puede expresarse como:

$$\frac{\partial(\phi_2 - \phi_1)}{\partial t} + \left(\frac{V_2^2 - V_1^2}{2} \right) + \left(\frac{P_2 - P_1}{\rho} \right) + g(h_2 - h_1) = 0 \quad (12)$$

Para el caso objeto de estudio, las fuerzas gravitacionales juegan un papel insignificante, con lo cual:

$$\frac{\partial(\phi_2 - \phi_1)}{\partial t} + \left(\frac{V_2^2 - V_1^2}{2} \right) + \left(\frac{P_2 - P_1}{\rho} \right) = 0 \quad (13)$$

ecuación que también puede expresarse como:

$$\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + \left(\rho \frac{V^2}{2} \right) + P = P_0 \quad (14)$$

donde P_0 representa la presión total en un punto genérico.

Las ecuaciones 11-14 se denominan *ecuaciones de Bernouilli para flujo potencial* y evalúan la energía existente en un punto genérico en comparación con la energía asociada al fluido en otro punto conocido. Por tanto, estas ecuaciones han de aplicarse entre dos puntos situados en una misma línea de corriente. Si uno de estos dos puntos está situado sobre una superficie horizontal, se tiene:

$$\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_{\text{wall}} + \left(\rho \frac{V_{\text{wall}}^2}{2} \right) + P_{(x)} = P_0 \quad (15)$$

Con el fin de determinar la presión a lo largo de la placa plana, $P_{(x)}$, es necesario hallar la velocidad V_{wall} , así como la variación temporal del potencial de velocidades $\frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_{\text{wall}}$ sobre la superficie horizontal.

2. Definiciones de vorticidad y flujo de vorticidad

La ecuación de Navier-Stokes para fluido incompresible, dada como ecuación 1, puede extenderse en dirección x y adopta la forma:

$$\rho \left(\frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial X} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial Y} + V_z \frac{\partial V_x}{\partial Z} \right) = - \frac{\partial P}{\partial X} + \rho g_x + \mu \left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial Z^2} \right) \quad (16)$$

La ecuación de continuidad para fluido incompresible se representa:

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0 = \frac{\partial V_x}{\partial X} + \frac{\partial V_y}{\partial Y} + \frac{\partial V_z}{\partial Z} \quad (17)$$



Para el presente estudio, en flujo bidimensional, puesto que se quiere evaluar la velocidad del fluido sobre una placa plana, se puede asumir: $V_z = 0$; $V_Y = 0$; $V_X \neq 0$

con lo cual la ecuación de continuidad adoptará la forma: $\frac{\partial V_X}{\partial X} = 0$

Así, la ecuación de Navier-Stokes a lo largo del eje x adoptará la forma:

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial X}\bigg|_{\text{wall}} + \rho g_X + \mu \left(\frac{\partial^2 V_X}{\partial Y^2} \right)\bigg|_{\text{wall}} \quad (18)$$

Considerando que las fuerzas gravitacionales son muy poco relevantes en este estudio, se tiene:

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial X}\bigg|_{\text{wall}} + \mu \left(\frac{\partial^2 V_X}{\partial Y^2} \right)\bigg|_{\text{wall}} \quad (19)$$

El subíndice *wall* clarifica que esta ecuación es aplicable a una placa plana situada a lo largo del eje x . Véase que se han considerado las condiciones de flujo deslizante sobre la placa plana.

Por otro lado, la vorticidad del fluido $\vec{\varepsilon} = \text{rot}\vec{V}$ se puede dar en tres dimensiones como:

$$\nabla \times \vec{V} = \begin{bmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial X} & \frac{\partial}{\partial Y} & \frac{\partial}{\partial Z} \\ V_X & V_Y & V_Z \end{bmatrix} = \left(\frac{\partial V_Z}{\partial Y} - \frac{\partial V_Y}{\partial Z} \right) \hat{i} + \left(\frac{\partial V_X}{\partial Z} - \frac{\partial V_Z}{\partial X} \right) \hat{j} + \left(\frac{\partial V_Y}{\partial X} - \frac{\partial V_X}{\partial Y} \right) \hat{k} \quad (20)$$

Considerando las mismas condiciones de contorno que las utilizadas hasta el momento, $V_z = 0$, $V_Y = 0$, $V_X \neq 0$, la ecuación 20 para la dirección $\hat{k}$, adoptará la forma:

$$\varepsilon_z = \left(-\frac{\partial V_X}{\partial Y} \right) \hat{k} \quad (21)$$

Combinando las ecuaciones 19 y 21, resulta:

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial X}\bigg|_{\text{wall}} - \mu \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial Y} \right)\bigg|_{\text{wall}} \quad (22)$$

ecuación que relaciona la variación de presión a lo largo de la placa horizontal con la ratio de vorticidad a lo largo de un eje situado perpendicularmente a la placa. Algunos autores definen el concepto de flujo de vorticidad como ε_f , de donde:

$$\varepsilon_f = \frac{\partial P}{\partial X}\bigg|_{\text{wall}} = -\mu \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial Y} \right)\bigg|_{\text{wall}} \quad (23)$$

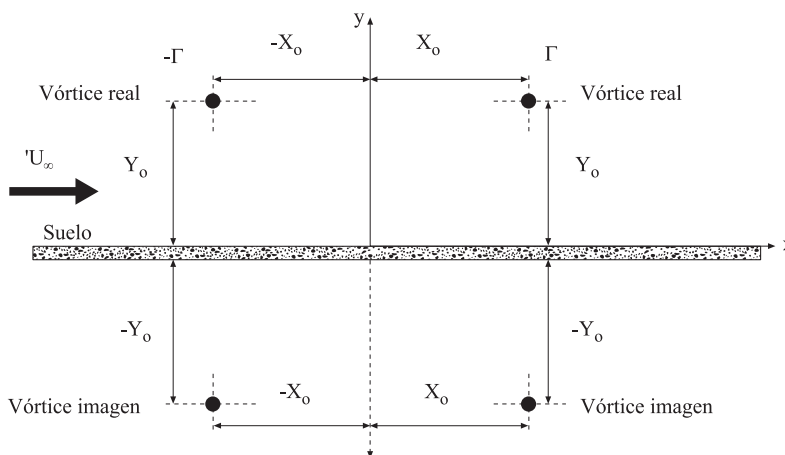


La ecuación 23 puede utilizarse para graficar el flujo de vorticidad a lo largo de la placa plana horizontal.

3. Distribución de velocidades y variación temporal del potencial de velocidades en un punto genérico del plano del fluido y sobre una superficie plana

El campo de fluido objeto de estudio, consiste en dos vórtices localizados sobre una superficie plana. La posición del centro de cada vórtice, viene dada, para un sistema de coordenadas cartesianas, como $Z_0 = (X_0, Y_0)$; $Z_1 = (-X_0, Y_0)$. En la figura 8.1, puede verse asimismo la posición de los dos vórtices imagen, cuyos centros están definidos por las coordenadas $Z_0^* = (X_0, -Y_0)$; $Z_1^* = (-X_0, -Y_0)$:

Fig. 8.1
Representación
esquemática de los
dos vórtices reales
y de los dos
vórtices imagen



Para determinar la velocidad del fluido sobre la placa (suelo), V_{wall} , se utiliza la teoría potencial. Esta teoría se aplicará inicialmente a los dos vórtices (real e imagen) situados a la derecha de la figura 8.1 y, posteriormente, a los otros dos vórtices localizados en la parte izquierda de dicha figura.

Consideremos, inicialmente, los dos vórtices (real e imagen) situados en las posiciones $Z_0 = (X_0, Y_0)$ y su imagen $Z_0^* = (X_0, -Y_0)$.

La función potencial de este par de vórtices se define como:

$$f(Z) = U_\infty Z + \frac{i}{2} \frac{\Gamma}{\pi} \ln \left(\frac{Z - Z_0^*}{Z - Z_0} \right) \quad (24)$$

donde Γ es la circulación asociada a cada vórtice.

La relación entre la función potencial compleja, el potencial de velocidades ϕ y la función de corriente ψ se define como

$$f(Z) = \phi + i\psi \quad (25)$$



Así, para los dos vórtices situados en la parte derecha del plano, la función potencial compleja adopta la forma:

$$\begin{aligned} f(Z) &= U_{\infty} Z + \frac{i}{2} \frac{\Gamma}{\pi} \ln \left(\frac{(X+iY)-(X_0-iY_0)}{(X+iY)-(X_0+iY_0)} \right) \\ &= U_{\infty} (X+iY) + \frac{i}{2} \frac{\Gamma}{\pi} \ln \left(\frac{(X-X_0)+i(Y+Y_0)}{(X-X_0)+i(Y-Y_0)} \right) \end{aligned} \quad (26)$$

Esta ecuación puede expresarse como:

$$\begin{aligned} f(Z) &= U_{\infty} (X+iY) + \frac{i}{2} \frac{\Gamma}{\pi} \ln \left((X-X_0)+i(Y+Y_0) \right) \\ &\quad - \frac{i}{2} \frac{\Gamma}{\pi} \ln \left((X-X_0)+i(Y-Y_0) \right) \end{aligned} \quad (27)$$

Recuérdese que el logaritmo de una función compleja puede representarse como:

$$\ln(Z) = \ln|Z| + i\theta \quad (28)$$

donde $|Z| = (Z \bar{Z})^{1/2} = (X^2 + Y^2)^{1/2}$ representa la función compleja y θ es el ángulo de un punto genérico *versus* el sistema de coordenadas cartesiano elegido.

La ecuación 27 puede representarse como:

$$\begin{aligned} f(Z) &= U_{\infty} (X+iY) + \frac{i}{2} \frac{\Gamma}{\pi} \left[\ln |(X-X_0)+i(Y+Y_0)| + i \operatorname{arctg} \left(\frac{Y+Y_0}{X-X_0} \right) \right] \\ &\quad - \frac{i}{2} \frac{\Gamma}{\pi} \left[\ln |(X-X_0)+i(Y-Y_0)| + i \operatorname{arctg} \left(\frac{Y-Y_0}{X-X_0} \right) \right] \end{aligned} \quad (29)$$

Una vez los términos logarítmicos de la ecuación 29 han sido multiplicados por su conjugado y se han separado las partes real e imaginaria, se obtiene:

$$\phi(x, y) = U_{\infty} X - \frac{\Gamma}{2} \frac{\Gamma}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{Y+Y_0}{X-X_0} \right) + \frac{\Gamma}{2} \frac{\Gamma}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{Y-Y_0}{X-X_0} \right) \quad (30)$$

$$\psi(x, y) = U_{\infty} Y + \frac{\Gamma}{4} \frac{\Gamma}{\pi} \left[\ln \left[(X-X_0)^2 + (Y+Y_0)^2 \right] - \ln \left[(X-X_0)^2 + (Y-Y_0)^2 \right] \right] \quad (31)$$

De acuerdo con la teoría potencial, la relación entre la velocidad potencial (o potencial de velocidades) ϕ , la función de corriente ψ y las velocidades del fluido V_X y V_Y se define:

$$V_X = U = \frac{\partial \phi}{\partial X} = \frac{\partial \psi}{\partial Y}; \quad V_Y = V = \frac{\partial \phi}{\partial Y} = -\frac{\partial \psi}{\partial X}; \quad (32)$$

con lo cual la distribución de velocidades en las direcciones X e Y se define como:



$$U = V_{X_R} = \frac{\partial \psi}{\partial Y} = U_{\infty} + \frac{\Gamma}{2\pi} \left[\frac{(Y + Y_0)}{(X - X_0)^2 + (Y + Y_0)^2} - \frac{(Y - Y_0)}{(X - X_0)^2 + (Y - Y_0)^2} \right] \quad (33)$$

$$V = V_{Y_R} = -\frac{\partial \psi}{\partial X} = -\frac{\Gamma}{2\pi} \left[\frac{(X - X_0)}{(X - X_0)^2 + (Y + Y_0)^2} - \frac{(X - X_0)}{(X - X_0)^2 + (Y - Y_0)^2} \right] \quad (34)$$

Las ecuaciones 33 y 34 proporcionan las velocidades del fluido V_X e V_Y en cualquier punto del campo del fluido, cuando se consideran únicamente los dos vórtices de la derecha.

Para determinar las velocidades del fluido sobre la superficie sólida, V_X e V_Y , únicamente es necesario considerar $Y = 0$ en las ecuaciones 33 y 34. El resultado es:

$$V_{X_R} = U_{\infty} + \frac{\Gamma}{\pi} \left[\frac{Y_0}{(X - X_0)^2 + Y_0^2} \right] \quad (35)$$

$$V_{Y_R} = 0 \quad (36)$$

Procediendo del mismo modo para los dos vórtices situados en la parte izquierda de la figura 8.1, en que las posiciones coordenadas de sus centros son $Z_1 = (-X_0; Y_0)$, $Z_1^* = (-X_0; -Y_0)$, la función potencial compleja adopta la forma siguiente (las coordenadas de estos dos nuevos puntos ya han sido sustituidas en la ecuación):

$$f(Z) = \frac{i}{2} \frac{\Gamma}{\pi} \ln \left(\frac{(X + iY) - (-X_0 - iY_0)}{(X + iY) - (-X_0 + iY_0)} \right) = \frac{i}{2} \frac{\Gamma}{\pi} \ln \left(\frac{(X + X_0) + i(Y + Y_0)}{(X + X_0) + i(Y - Y_0)} \right) \quad (37)$$

(Obsérvese que la velocidad no perturbada U_{∞} ya ha sido considerada en la función compleja que definía los dos vórtices de la derecha y, dado que la teoría potencial es una teoría lineal, dicha velocidad ahora no debe introducirse de nuevo.)

Véase que la circulación presentada en la ecuación 37 ha de tener un signo diferente al de la circulación utilizada en la ecuación 26, con lo cual el signo de la circulación de la ecuación 37 ha de ser negativo.

La ecuación 37 puede expresarse como:

$$f(Z) = \frac{i}{2} \frac{\Gamma}{\pi} \ln((X + X_0) + i(Y + Y_0)) - \frac{i}{2} \frac{\Gamma}{\pi} \ln((X + X_0) + i(Y - Y_0)) \quad (38)$$

Considerando la forma compleja de los términos logarítmicos, se tiene:

$$f(Z) = \frac{i}{2} \frac{\Gamma}{\pi} \left[\ln|(X + X_0) + i(Y + Y_0)| + i \operatorname{arctg} \left(\frac{Y + Y_0}{X + X_0} \right) \right] - \frac{i}{2} \frac{\Gamma}{\pi} \left[\ln|(X + X_0) + i(Y - Y_0)| + i \operatorname{arctg} \left(\frac{Y - Y_0}{X + X_0} \right) \right] \quad (39)$$



La solución de esta ecuación da lugar a:

$$\phi(x, y) = -\frac{\Gamma}{2\pi} \arctg\left(\frac{Y+Y_0}{X+X_0}\right) + \frac{\Gamma}{2\pi} \arctg\left(\frac{Y-Y_0}{X+X_0}\right) \quad (40)$$

(Obsérvese que el valor de la circulación aún es considerado positivo, cuando en realidad es negativo.)

$$\psi(x, y) = \frac{\Gamma}{4\pi} \left[\ln\left[(X+X_0)^2 + (Y+Y_0)^2\right] - \ln\left[(X+X_0)^2 + (Y-Y_0)^2\right] \right] \quad (41)$$

Recuérdese lo que se ha definido en la ecuación 32, las velocidades V_X e V_Y resultan:

$$U = V_{X_L} = \frac{\partial\phi}{\partial X} = \frac{\partial\psi}{\partial Y} = \frac{\Gamma}{2\pi} \left[\frac{(Y+Y_0)}{(X+X_0)^2 + (Y+Y_0)^2} - \frac{(Y-Y_0)}{(X+X_0)^2 + (Y-Y_0)^2} \right] \quad (42)$$

$$V = V_{Y_L} = \frac{\partial\phi}{\partial Y} = -\frac{\partial\psi}{\partial X} = -\frac{\Gamma}{2\pi} \left[\frac{(X+X_0)}{(X+X_0)^2 + (Y+Y_0)^2} - \frac{(X+X_0)}{(X+X_0)^2 + (Y-Y_0)^2} \right] \quad (43)$$

Es necesario recordar que el valor de la circulación en las ecuaciones 42 y 43 es, en realidad, negativo.

Las velocidades del fluido V_X e V_Y sobre la superficie plana, debidas a los dos vórtices (real e imaginario) de la izquierda, se determinan considerando $Y = 0$ en las ecuaciones 42 y 43. El resultado es:

$$U = V_{X_L} = \frac{-\Gamma}{\pi} \left[\frac{Y_0}{(X+X_0)^2 + Y_0^2} \right] \quad (44)$$

(Obsérvese que ahora se ha incluido el signo real de la circulación.)

$$V = V_{Y_L} = 0 \quad (45)$$

Con el fin de calcular la velocidad total sobre la superficie estática, es necesario considerar el efecto del conjunto total de vórtices sobre la superficie plana. Así:

$V_{\text{wall}} = V_{X_T} = V_{X_R} + V_{X_L}$, con lo cual:

$$V_{\text{wall}} = V_{X_T} = U_{\infty} + \frac{\Gamma}{\pi} \left[\frac{Y_0}{(X-X_0)^2 + Y_0^2} \right] + \left[\frac{-\Gamma}{\pi} \left[\frac{Y_0}{(X+X_0)^2 + Y_0^2} \right] \right] \quad (46)$$

ecuación que se puede expresar como:

$$V_{\text{wall}} = V_{X_T} = U_{\infty} + \frac{\Gamma}{\pi} \left[\frac{4X X_0 Y_0}{(X^2 + X_0^2 + Y_0^2)^2 - 4X^2 X_0^2} \right] = U_{\infty} + \frac{4\Gamma}{\pi} \left[\frac{X X_0 Y_0}{B} \right] \quad (47)$$



Véase que la ecuación 47 da la velocidad del fluido a lo largo del eje X y encima de la superficie plana. Las ecuaciones genéricas que dan la distribución de velocidades V_X e V_Y en cualquier punto del plano, X,Y, se obtienen de la combinación de las ecuaciones genéricas 33 y 42 para V_X y 34 y 43 para V_Y .

Cálculo de las ecuaciones de velocidad mediante la utilización del sistema total de vórtices en una única ecuación.

Es interesante remarcar que el procedimiento utilizado para desarrollar la ecuación 46 puede acortarse mediante el cálculo del efecto causado por los cuatro vórtices en una sola ecuación. La función potencial compleja que considera el efecto de los cuatro vórtices adopta la forma:

$$f(Z) = U_{\infty} Z + \frac{i}{2} \frac{\Gamma}{\pi} \ln \left(\frac{Z - Z_0^*}{Z - Z_0} \right) - \frac{i}{2} \frac{\Gamma}{\pi} \ln \left(\frac{Z - Z_1^*}{Z - Z_1} \right) \quad (48)$$

El valor negativo que se ha dado al segundo de los términos es para considerar el valor negativo de la circulación.

Cuando se sustituyen las coordenadas de los vórtices en la ecuación 48, se obtiene:

$$f(Z) = U_{\infty} Z + \frac{i}{2} \frac{\Gamma}{\pi} \ln \left(\frac{(X + iY) - (X_0 - iY_0)}{(X + iY) - (X_0 + iY_0)} \right) - \frac{i}{2} \frac{\Gamma}{\pi} \ln \left(\frac{(X + iY) - (-X - iY_0)}{(X + iY) - (-X_0 + iY_0)} \right) \quad (49)$$

Esta ecuación puede presentarse también como:

$$f(Z) = U_{\infty} (X + iY) + \frac{i}{2} \frac{\Gamma}{\pi} \ln \left(\frac{(X - X_0) + i(Y + Y_0)}{(X - X_0) + i(Y - Y_0)} \right) - \frac{i}{2} \frac{\Gamma}{\pi} \ln \left(\frac{(X + X_0) + i(Y + Y_0)}{(X + X_0) + i(Y - Y_0)} \right) \quad (50)$$

Extendiendo los términos logarítmicos, se tiene:

$$f(Z) = U_{\infty} (X + iY) + \frac{i}{2} \frac{\Gamma}{\pi} \left[\ln((X - X_0) + i(Y + Y_0)) - \ln((X - X_0) + i(Y - Y_0)) \right] - \frac{i}{2} \frac{\Gamma}{\pi} \left[\ln((X + X_0) + i(Y + Y_0)) - \ln((X + X_0) + i(Y - Y_0)) \right] \quad (51)$$



Recordando el concepto de logaritmo de una función compleja, se tiene:

$$\begin{aligned}
 f(Z) = U_{\infty}(X + iY) \\
 + \frac{i}{2} \frac{\Gamma}{\pi} \left[\ln |(X - X_0) + i(Y + Y_0)| + i \operatorname{arctg} \left(\frac{Y + Y_0}{X - X_0} \right) \right. \\
 \left. - \left[\ln |(X - X_0) + i(Y - Y_0)| + i \operatorname{arctg} \left(\frac{Y - Y_0}{X - X_0} \right) \right] \right] \\
 - \frac{i}{2} \frac{\Gamma}{\pi} \left[\ln |(X + X_0) + i(Y + Y_0)| + i \operatorname{arctg} \left(\frac{Y + Y_0}{X + X_0} \right) \right. \\
 \left. - \left[\ln |(X + X_0) + i(Y - Y_0)| + i \operatorname{arctg} \left(\frac{Y - Y_0}{X + X_0} \right) \right] \right]
 \end{aligned} \quad (52)$$

Extrayendo de la ecuación 52 los términos reales e imaginarios, se tiene:

$$\begin{aligned}
 \phi(x, y) = U_{\infty} X - \frac{\Gamma}{2} \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{Y + Y_0}{X - X_0} \right) + \frac{\Gamma}{2} \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{Y - Y_0}{X - X_0} \right) \\
 + \frac{\Gamma}{2} \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{Y + Y_0}{X + X_0} \right) - \frac{\Gamma}{2} \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{Y - Y_0}{X + X_0} \right)
 \end{aligned} \quad (53)$$

$$\begin{aligned}
 \psi(x, y) = U_{\infty} Y + \frac{\Gamma}{4} \frac{1}{\pi} \left[\ln [(X - X_0)^2 + (Y + Y_0)^2] - \ln [(X - X_0)^2 + (Y - Y_0)^2] \right. \\
 \left. + \ln [(X + X_0)^2 + (Y - Y_0)^2] - \ln [(X + X_0)^2 + (Y + Y_0)^2] \right]
 \end{aligned} \quad (54)$$

Recordando la relación existente para el flujo potencial entre las funciones potencial y de corriente con las velocidades del fluido en las direcciones X e Y (v. ecuación 32), se obtiene:

$$\begin{aligned}
 V_{X_T} = \frac{\partial \psi}{\partial Y} = U_{\infty} + \frac{\Gamma}{2} \frac{1}{\pi} \left[\frac{(Y + Y_0)}{(X - X_0)^2 + (Y + Y_0)^2} - \frac{(Y - Y_0)}{(X - X_0)^2 + (Y - Y_0)^2} \right. \\
 \left. + \frac{(Y - Y_0)}{(X + X_0)^2 + (Y - Y_0)^2} - \frac{(Y + Y_0)}{(X + X_0)^2 + (Y + Y_0)^2} \right]
 \end{aligned} \quad (55)$$

(Obsérvese que se ha considerado el signo real de la circulación para cada uno de los vórtices.)

$$\begin{aligned}
 V = V_{Y_T} = -\frac{\partial \psi}{\partial X} = -\frac{\Gamma}{2} \frac{1}{\pi} \left[\frac{(X - X_0)}{(X - X_0)^2 + (Y + Y_0)^2} - \frac{(X - X_0)}{(X - X_0)^2 + (Y - Y_0)^2} \right. \\
 \left. + \frac{(X + X_0)}{(X + X_0)^2 + (Y - Y_0)^2} - \frac{(X + X_0)}{(X + X_0)^2 + (Y + Y_0)^2} \right]
 \end{aligned} \quad (56)$$

Las ecuaciones 55 y 56 son capaces de dar la velocidad del fluido en las direcciones X e Y, y, para cualquier punto del campo fluido bidimensional, también se considera el



efecto de todos los vórtices existentes. Véase que estas dos ecuaciones podrían ampliarse para un número genérico de vórtices.

Dado que lo que se pide en el problema es la velocidad del fluido sobre la superficie plana, para obtener el resultado requerido basta con sustituir el valor de $Y = 0$ en las ecuaciones 55 y 56, y se obtiene:

$$V_{\text{wall}} = V_{X_T} = U_{\infty} + \frac{4\Gamma}{\pi} \left[\frac{X - X_0}{B} \frac{Y_0}{B} \right] \quad (57)$$

$$V = V_{Y_T} = 0 \quad (58)$$

Obsérvese que la ecuación 57 es la misma que la ecuación 47, y que la ecuación 58 produce el mismo resultado que las ecuaciones 36 y 48, determinadas mediante el procedimiento anterior.

Cálculo de la variación temporal de la función potencial de velocidades ϕ denominada velocidad potencial

Con el fin de considerar todos los términos involucrados en la ecuación 15, es necesario determinar la velocidad potencial $\left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_{\text{wall}}$. Este término considera la variación temporal de la posición de los vórtices, con lo cual no es necesario que se considere cuando se quieren estudiar vórtices estacionarios.

Matemáticamente, la velocidad temporal del potencial de velocidades, para un flujo vorticular dado, puede representarse del modo siguiente:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial X_0} \frac{\partial X_0}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial Y_0} \frac{\partial Y_0}{\partial t} \quad (59)$$

En este caso, la ecuación ha de calcularse sobre la placa plana, con lo cual se puede establecer:

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_{\text{wall}} = \left. \frac{\partial \phi}{\partial X_0} \right|_{\text{wall}} \frac{\partial X_0}{\partial t} + \left. \frac{\partial \phi}{\partial Y_0} \right|_{\text{wall}} \frac{\partial Y_0}{\partial t} \quad (60)$$

Hay que tener presente que los parámetros X_0 e Y_0 representan la posición del centro del vórtice real. (Se ha elegido el vórtice de la derecha, con el fin de determinar su velocidad de desplazamiento.)

La ecuación 60 puede aplicarse a cada uno de los dos vórtices reales y posteriormente sumar los resultados obtenidos (v. ecuación 63), o bien directamente al conjunto



de vórtices, siempre que se determine previamente la función potencial de velocidades de dicho conjunto de vórtices; en este caso, se aplicará directamente la ecuación 59 o la 60.

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_{(R)} + \frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_{(L)} \quad (61)$$

En cualquier caso, debe recordarse que cada término lleva asociada su circulación.

Cálculo de la velocidad del vórtice

Los términos $\frac{\partial X_0}{\partial t}$ y $\frac{\partial Y_0}{\partial t}$ de la ecuación 59 representan la velocidad del vórtice real de la derecha con respecto al sistema de coordenadas central X, Y. Para determinar dichos términos, hay que considerar el efecto que los otros tres vórtices causan sobre el vórtice elegido. Para realizar dicha operación, es necesario determinar la denominada *función potencial reducida*, que se define como:

$$\phi^* + i\psi^* = f^*(z) = U_\infty \left[Z + \frac{i}{2} \frac{\Gamma}{\pi} \ln(Z - Z_0^*) - \frac{i}{2} \frac{\Gamma}{\pi} \ln\left(\frac{Z - Z_1^*}{Z - Z_1}\right) \right] \quad (62)$$

siendo: $Z_0^* = (X_0 - iY_0)$; $Z_1 = (-X_0 + iY_0)$; $Z_1^* = (-X_0 - iY_0)$; $Z = (X + iY)$

Sustituyendo las diferentes coordenadas de los tres vórtices en la ecuación 62, se obtiene:

$$\begin{aligned} \phi^* + i\psi^* = f^*(z) = U_\infty \left[(X + iY) + \frac{i}{2} \frac{\Gamma}{\pi} \ln((X + iY) - (X_0 - iY_0)) \right. \\ \left. - \frac{i}{2} \frac{\Gamma}{\pi} \ln\left(\frac{(X + iY) - (-X_0 - iY_0)}{(X + iY) - (-X_0 + iY_0)}\right) \right] \end{aligned} \quad (63)$$

$$\begin{aligned} \phi^* + i\psi^* = f^*(z) = U_\infty \left[(X + iY) + \frac{i}{2} \frac{\Gamma}{\pi} \ln((X - X_0) + i(Y + Y_0)) \right. \\ \left. - \frac{i}{2} \frac{\Gamma}{\pi} \ln\left(\frac{(X + X_0) + i(Y + Y_0)}{(X + X_0) + i(Y - Y_0)}\right) \right] \end{aligned} \quad (64)$$

$$\begin{aligned} \phi^* + i\psi^* = f^*(z) = U_\infty \left[X + iU_\infty Y + \frac{i}{2} \frac{\Gamma}{\pi} \ln((X - X_0) + i(Y + Y_0)) \right. \\ \left. - \frac{i}{2} \frac{\Gamma}{\pi} \ln((X + X_0) + i(Y + Y_0)) + \frac{i}{2\pi} \ln((X + X_0) + i(Y - Y_0)) \right] \end{aligned} \quad (65)$$



$$\begin{aligned}\phi^* + i\psi^* = U_\infty X + iU_\infty Y + \frac{i}{2} \frac{\Gamma}{\pi} \left[\ln|(X - X_0) + i(Y + Y_0)| + i \operatorname{arctg} \left(\frac{(Y + Y_0)}{X - X_0} \right) \right] \\ - \frac{i}{2} \frac{\Gamma}{\pi} \left[\ln|(X + X_0) + i(Y + Y_0)| + i \operatorname{arctg} \left(\frac{(Y + Y_0)}{(X + X_0)} \right) \right] \\ + \frac{i}{2} \frac{\Gamma}{\pi} \left[\ln|(X + X_0) + i(Y - Y_0)| + i \operatorname{arctg} \left(\frac{(Y - Y_0)}{(X + X_0)} \right) \right]\end{aligned}\quad (66)$$

con lo cual:

$$\begin{aligned}\phi^* = U_\infty X - \frac{\Gamma}{2\pi} \left[\operatorname{arctg} \left(\frac{(Y + Y_0)}{(X - X_0)} \right) \right] + \frac{\Gamma}{2\pi} \left[\operatorname{arctg} \left(\frac{(Y + Y_0)}{(X + X_0)} \right) \right] + \\ \frac{\Gamma}{2\pi} \left[\operatorname{arctg} \left(\frac{(Y - Y_0)}{(X + X_0)} \right) \right]\end{aligned}\quad (67)$$

$$\begin{aligned}\psi^* = U_\infty Y + \frac{\Gamma}{4\pi} \ln((X - X_0)^2 + (Y + Y_0)^2) - \frac{\Gamma}{4\pi} \ln((X + X_0)^2 + (Y + Y_0)^2) \\ + \frac{\Gamma}{4\pi} \ln((X + X_0)^2 + (Y - Y_0)^2)\end{aligned}\quad (68)$$

La velocidad del vórtice localizado en el punto (X_0, Y_0) se define como:

$$U_0 = \frac{\partial X_0}{\partial t} = \frac{\partial \phi^*}{\partial X} \Big|_{\substack{X=X_0 \\ Y=Y_0}} = \frac{\partial \psi^*}{\partial Y} \Big|_{\substack{X=X_0 \\ Y=Y_0}} \quad (69)$$

$$V_0 = \frac{\partial Y_0}{\partial t} = \frac{\partial \phi^*}{\partial Y} \Big|_{\substack{X=X_0 \\ Y=Y_0}} = - \frac{\partial \psi^*}{\partial X} \Big|_{\substack{X=X_0 \\ Y=Y_0}} \quad (70)$$

Derivando las funciones potencial y de corriente (v. ecuaciones 67 y 68), se obtiene:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi^*}{\partial X} = \frac{\partial \psi^*}{\partial Y} = U_\infty + \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{(Y + Y_0)}{(X - X_0)^2 + (Y + Y_0)^2} - \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{(Y + Y_0)}{(X + X_0)^2 + (Y + Y_0)^2} \\ + \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{(Y - Y_0)}{(X + X_0)^2 + (Y - Y_0)^2}\end{aligned}\quad (71)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi^*}{\partial Y} = - \frac{\partial \psi^*}{\partial X} = - \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{(X - X_0)}{(X - X_0)^2 + (Y + Y_0)^2} + \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{(X + X_0)}{(X + X_0)^2 + (Y + Y_0)^2} \\ - \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{(X + X_0)}{(X + X_0)^2 + (Y - Y_0)^2}\end{aligned}\quad (72)$$



sustituyendo $X = X_0$ e $Y = Y_0$ en las ecuaciones 71 y 72, se obtiene:

$$U_0 = \frac{\partial X_0}{\partial t} = \frac{\partial \phi^*}{\partial X} \Big|_{\substack{X=X_0 \\ Y=Y_0}} = \frac{\partial \psi^*}{\partial Y} \Big|_{\substack{X=X_0 \\ Y=Y_0}} = U_\infty + \frac{\Gamma}{4\pi Y_0} - \frac{\Gamma}{4\pi} \left(\frac{Y_0}{X_0^2 + Y_0^2} \right) =$$

$$= U_\infty + \frac{\Gamma}{4\pi} \left[\frac{X_0^2}{Y_0(X_0^2 + Y_0^2)} \right] \quad (73)$$

$$V_0 = \frac{\partial Y_0}{\partial t} = \frac{\partial \phi^*}{\partial Y} \Big|_{\substack{X=X_0 \\ Y=Y_0}} = -\frac{\partial \psi^*}{\partial X} \Big|_{\substack{X=X_0 \\ Y=Y_0}} = \frac{\Gamma}{4\pi} \left(\frac{X_0}{X_0^2 + Y_0^2} \right) - \frac{\Gamma}{4\pi X_0} =$$

$$= \frac{\Gamma}{4\pi} \left[\frac{-Y_0^2}{X_0(X_0^2 + Y_0^2)} \right] \quad (74)$$

Las ecuaciones 73 y 74 dan la velocidad del vórtice respecto a los ejes X e Y, respectivamente. Recuértese que el vórtice analizado se halla inicialmente en el punto $X = X_0$, $Y = Y_0$, y su velocidad de desplazamiento es debida al efecto que los otros tres vórtices causan sobre el elegido.

Cálculo de los términos $\frac{\partial \phi}{\partial X_0}$ y $\frac{\partial \phi}{\partial Y_0}$

Para calcular los últimos dos términos necesarios para evaluar completamente las ecuaciones 59 y 60, se ha de calcular la función potencial ϕ , que considera el efecto de los cuatro vórtices, y posteriormente derivarse con respecto a X_0 y Y_0 ; dicha función potencial de velocidades ya ha sido determinada previamente, y viene definida como la ecuación 53. La ecuación 54 proporcionaba, asimismo, la función de corriente ψ generada por el conjunto de los cuatro vórtices.

Derivando la ecuación 53 con respecto a X_0 y Y_0 , se obtiene:

$$\frac{\partial \phi}{\partial X_0} = -\frac{\Gamma}{2\pi} \frac{(Y + Y_0)}{(X - X_0)^2 + (Y + Y_0)^2} + \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{(Y - Y_0)}{(X - X_0)^2 + (Y - Y_0)^2}$$

$$- \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{(Y + Y_0)}{(X + X_0)^2 + (Y + Y_0)^2} + \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{(Y - Y_0)}{(X + X_0)^2 + (Y - Y_0)^2} \quad (75)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial Y_0} = -\frac{\Gamma}{2\pi} \frac{(X - X_0)}{(X - X_0)^2 + (Y + Y_0)^2} - \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{(X - X_0)}{(X - X_0)^2 + (Y - Y_0)^2}$$

$$+ \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{(X + X_0)}{(X + X_0)^2 + (Y + Y_0)^2} + \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{(X + X_0)}{(X + X_0)^2 + (Y - Y_0)^2} \quad (76)$$



En realidad, y de acuerdo con la ecuación 60, estos dos términos (v. ecuaciones 75 y 76) han de ser evaluados sobre la superficie plana que separa los vórtices reales con los imaginarios. Ello significa que las ecuaciones 75 y 76 han de evaluarse cuando $Y = 0$, y se obtiene:

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial X_0} \right|_{Y=0} = -\frac{\Gamma}{2\pi} \frac{(Y_0)}{(X-X_0)^2 + (Y_0)^2} + \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{(-Y_0)}{(X-X_0)^2 + (-Y_0)^2} - \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{(Y_0)}{(X+X_0)^2 + (Y_0)^2} + \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{(-Y_0)}{(X+X_0)^2 + (Y_0)^2} \quad (77)$$

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial X_0} \right|_{Y=0} = -\frac{\Gamma}{\pi} \frac{(Y_0)}{(X-X_0)^2 + (Y_0)^2} - \frac{\Gamma}{\pi} \frac{(Y_0)}{(X+X_0)^2 + (Y_0)^2} \quad (78)$$

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial X_0} \right|_{Y=0} = -\frac{\Gamma Y_0}{\pi} \frac{2(X^2 + X_0^2 + Y_0^2)}{((X-X_0)^2 + Y_0^2)((X+X_0)^2 + Y_0^2)} \quad (79)$$

Procediendo del mismo modo con la ecuación 76, se obtiene:

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial Y_0} \right|_{Y=0} = -\frac{\Gamma}{2\pi} \frac{(X-X_0)}{(X-X_0)^2 + (Y_0)^2} - \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{(X-X_0)}{(X-X_0)^2 + (Y_0)^2} + \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{(X+X_0)}{(X+X_0)^2 + (Y_0)^2} + \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{(X+X_0)}{(X+X_0)^2 + (Y_0)^2} \quad (80)$$

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial Y_0} \right|_{Y=0} = -\frac{\Gamma}{\pi} \frac{(X-X_0)}{(X-X_0)^2 + (Y_0)^2} + \frac{\Gamma}{\pi} \frac{(X+X_0)}{(X+X_0)^2 + (Y_0)^2} \quad (81)$$

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial Y_0} \right|_{Y=0} = \frac{\Gamma X_0}{\pi} \frac{2(-X^2 + X_0^2 + Y_0^2)}{((X-X_0)^2 + Y_0^2)((X+X_0)^2 + Y_0^2)} \quad (82)$$

Es necesario puntualizar que, al llevar a término las derivaciones precedentes, debe recordarse la consideración siguiente

$$: \frac{\partial \phi}{\partial X_0} \neq \frac{\partial \psi}{\partial Y_0}; \text{ y } \frac{\partial \phi}{\partial Y_0} \neq -\frac{\partial \psi}{\partial X_0}$$

A partir de este punto, se utilizará esta relación:

$$((X-X_0)^2 + Y_0^2)((X+X_0)^2 + Y_0^2) = B \quad (83)$$



Cálculo final de la ecuación 60

Para determinar el resultado final de la ecuación 60, basta con sustituir los diferentes términos hallados en esta ecuación. Dichos términos están definidos en las ecuaciones 79, 82, 73 y 74. El resultado de la sustitución es:

La ecuación 62 era:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_{\text{wall}} &= \frac{\partial \phi}{\partial X_0} \Big|_{\text{wall}} \frac{\partial X_0}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial Y_0} \Big|_{\text{wall}} \frac{\partial Y_0}{\partial t} \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_{Y=0} &= -\frac{\Gamma}{\pi} \frac{Y_0}{2} \left(\frac{X^2 + X_0^2 + Y_0^2}{B} \right) \left[U_\infty + \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{1}{Y_0} - \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{Y_0}{(X_0^2 + Y_0^2)} \right] \\ &\quad + \frac{2}{\pi} \frac{\Gamma X_0}{2} \left(\frac{(-X^2 + Y_0^2 + X_0^2)}{B} \right) \left[\frac{\Gamma}{4\pi} \frac{X_0}{(X_0^2 + Y_0^2)} - \frac{\Gamma}{4\pi X_0} \right] \end{aligned} \quad (84)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_{Y=0} &= -\frac{\Gamma}{\pi} \frac{Y_0}{2} \frac{U_\infty}{2} \left(\frac{X^2 + X_0^2 + Y_0^2}{B} \right) - \frac{\Gamma^2}{2\pi^2} \left(\frac{X^2 + X_0^2 + Y_0^2}{B} \right) \\ &\quad + \frac{\Gamma^2 Y_0^2}{2\pi^2} \left(\frac{X^2 + Y_0^2 + X_0^2}{B(X_0^2 + Y_0^2)} \right) + \frac{\Gamma^2 X_0^2}{2\pi^2} \left(\frac{-X^2 + Y_0^2 + X_0^2}{B(X_0^2 + Y_0^2)} \right) - \frac{\Gamma^2}{2\pi^2} \left(\frac{-X^2 + Y_0^2 + X_0^2}{B} \right) \end{aligned} \quad (85)$$

Reordenando, se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_{Y=0} &= -\frac{\Gamma}{\pi} \frac{Y_0}{2} \frac{U_\infty}{2} \left(\frac{X^2 + X_0^2 + Y_0^2}{B} \right) - \frac{\Gamma^2}{2\pi^2 B} (2(X_0^2 + Y_0^2)) \\ &\quad + \frac{\Gamma^2}{2\pi^2 B(X_0^2 + Y_0^2)} (X^2(Y_0^2 - X_0^2) + (X_0^2 + Y_0^2)^2) \end{aligned} \quad (86)$$

ecuación que se puede expresar como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_{Y=0} &= -\frac{\Gamma}{\pi} \frac{Y_0}{2} \frac{U_\infty}{2} \left(\frac{X^2 + X_0^2 + Y_0^2}{B} \right) + \\ &\quad \frac{\Gamma^2}{2\pi^2 B(X_0^2 + Y_0^2)} (X^2(Y_0^2 - X_0^2) - (X_0^2 + Y_0^2)^2) \end{aligned} \quad (87)$$

ecuación que caracteriza la variación temporal de la función potencial.

Generalización de la ecuación 60, ecuación 59

Si, en vez de determinar el término $\frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_{\text{wall}}$ sobre la superficie plana, se quiere hallar el

término genérico $\frac{\partial \phi}{\partial t}$ en un punto cualquiera del campo fluido, término que está defini-



do en la ecuación 59, es necesario seguir el mismo procedimiento que el que se ha utilizado para hallar el término definido en la ecuación 60.

La ecuación 59 adoptaba la forma $\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial X_0} \frac{\partial X_0}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial Y_0} \frac{\partial Y_0}{\partial t}$.

Los términos que dan la velocidad del vórtice, $\frac{\partial X_0}{\partial t}$ y $\frac{\partial Y_0}{\partial t}$, son los mismos que se han hallado previamente y están definidos en las ecuaciones 73 y 74. Pero ahora no es necesario que los términos $\frac{\partial \phi}{\partial X_0}$ y $\frac{\partial \phi}{\partial Y_0}$ sean evaluados en el punto $Y = 0$, dado que en la ecuación 59 estos términos se definen de forma genérica. La forma genérica de estos dos términos fue determinada en las ecuaciones 75 y 76. Sustituyendo las ecuaciones 73, 74, 75 y 76 en la ecuación 59, se obtiene la forma genérica de la variación temporal de la función potencial de velocidades, que es:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial t} = & \left(-\frac{\Gamma}{2\pi} \frac{(Y+Y_0)}{(X-X_0)^2 + (Y+Y_0)^2} + \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{(Y-Y_0)}{(X-X_0)^2 + (Y-Y_0)^2} \right. \\ & \left. - \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{(Y+Y_0)}{(X+X_0)^2 + (Y+Y_0)^2} + \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{(Y-Y_0)}{(X+X_0)^2 + (Y-Y_0)^2} \right) \\ & \left[U_\infty + \frac{\Gamma}{4\pi Y_0} - \frac{\Gamma}{4\pi} \left(\frac{Y_0}{X_0^2 + Y_0^2} \right) \right] + \\ & \left(\frac{\Gamma}{2\pi} \frac{(X-X_0)}{(X-X_0)^2 + (Y+Y_0)^2} - \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{(X-X_0)}{(X-X_0)^2 + (Y-Y_0)^2} \right. \\ & \left. + \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{(X+X_0)}{(X+X_0)^2 + (Y+Y_0)^2} + \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{(X+X_0)}{(X+X_0)^2 + (Y-Y_0)^2} \right) \\ & \left[\frac{\Gamma}{4\pi} \left(\frac{X_0}{X_0^2 + Y_0^2} \right) - \frac{\Gamma}{4\pi X_0} \right] \end{aligned} \quad (88)$$

Distribución genérica de presiones. El caso de los vórtices estacionarios

La ecuación 14 es capaz de determinar la presión en cualquier punto del campo fluido, en función de la magnitud de la velocidad del fluido en dicho punto y de la variación temporal del potencial de velocidades. Para el caso de que se quieran considerar vórtices estáticos, el término que caracteriza la variación temporal de la velocidad potencial debe considerarse nulo y la ecuación resultante tendrá la forma:

$$\left(\rho \frac{V^2}{2} \right) + P = P_0 \quad (89)$$



donde:

$$V^2 = V_X^2 + V_Y^2 \quad (90)$$

Las ecuaciones que caracterizan las velocidades V_X e V_Y en cualquier punto del campo fluido ya se han hallado anteriormente y se han definido en las ecuaciones 55 y 56. Dichas expresiones tomaban la forma:

$$V_{X_T} = \frac{\partial \psi}{\partial Y} = U_\infty + \frac{\Gamma}{2\pi} \left[\frac{(Y + Y_0)}{(X - X_0)^2 + (Y + Y_0)^2} - \frac{(Y - Y_0)}{(X - X_0)^2 + (Y - Y_0)^2} + \frac{(Y - Y_0)}{(X + X_0)^2 + (Y - Y_0)^2} - \frac{(Y + Y_0)}{(X + X_0)^2 + (Y + Y_0)^2} \right] \quad (55)$$

$$V_{Y_T} = V = -\frac{\partial \psi}{\partial X} = -\frac{\Gamma}{2\pi} \left[\frac{(X - X_0)}{(X - X_0)^2 + (Y + Y_0)^2} - \frac{(X - X_0)}{(X - X_0)^2 + (Y - Y_0)^2} + \frac{(X + X_0)}{(X + X_0)^2 + (Y - Y_0)^2} - \frac{(X + X_0)}{(X + X_0)^2 + (Y + Y_0)^2} \right] \quad (56)$$

con lo cual la presión en cualquier punto del campo de fluido bidimensional se calculará sustituyendo las ecuaciones 55 y 56 en la ecuación 90 y esta, en la ecuación 89. Si, además, en estas ecuaciones se asigna a la coordenada Y el valor $Y = 0$, entonces se obtendrá la presión a lo largo del eje X situado sobre la placa plana horizontal.

Distribución genérica de presiones. El caso de los vórtices en movimiento (dinámicos)

La evaluación completa de la ecuación 14 implica considerar el término que caracteriza la variación temporal del potencial de velocidades, con lo cual la ecuación 88 deberá implementarse conforme a los términos ya hallados de la ecuación 14. Dicha ecuación era:

$$\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + \left(\rho \frac{V^2}{2} \right) + P = P_0 \quad (14)$$

Distribución de presiones sobre la superficie plana horizontal. El caso de los vórtices dinámicos.

Si se quiere evaluar la distribución de presiones sobre la placa plana, teniendo en cuenta, además, el posible desplazamiento de los vórtices, la ecuación que debe utilizarse es la 15, que adoptaba la forma:

$$\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_{\text{wall}} + \left(\rho \frac{V_{\text{wall}}^2}{2} \right) + P_{(x)} = P_0 \quad (15)$$

Los diferentes términos de esta ecuación ya fueron definidos en las ecuaciones 87 y 57. Cuando estas dos ecuaciones son sustituidas en la ecuación 15, y considerando el caso particular en que $U_\infty = 0$, se obtiene:



$$P - P_0 = -\frac{\rho_0}{2\pi^2} \Gamma^2 \left[\left(\frac{4X}{B} \frac{X_0}{Y_0} \right)^2 + \frac{A}{B(X_0^2 + Y_0^2)} \right] \quad (91)$$

$$\text{donde se ha definido:} \quad A = X^2(Y_0^2 - X_0^2) - (X_0^2 + Y_0^2)^2 \quad (92)$$

La ecuación 91 caracteriza la distribución de presiones a lo largo del eje X, situado sobre la placa plana horizontal (suelo), considerando que no existe corriente de fluido no perturbada $U_\infty = 0$.

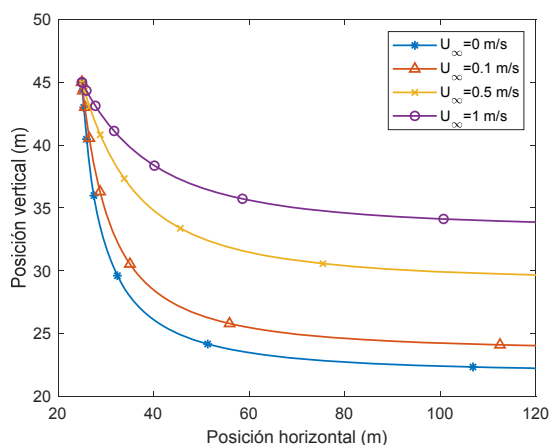
4. Representación gráfica

Supóngase que se tienen dos vórtices situados paralelamente sobre una superficie plana (suelo) y que el centro de dichos vórtices está situado en los puntos $Z_0 = (X_0, Y_0) = (25, 45)$ y $Z_0^* = (-X_0, Y_0) = (-25, 45)$. Si, por ejemplo, se quiere saber cuál es el desplazamiento de dichos vórtices debido a su interacción mutua, incluso para diferentes velocidades no perturbadas del fluido, se deben integrar las ecuaciones 74 y 75 de forma numérica, teniendo en cuenta la posición inicial de los vórtices, las condiciones de contorno y las propiedades físicas asociadas. Tomando los valores de la circulación y la

densidad del fluido como $\Gamma = 350 \left(\frac{\text{m}^2}{\text{s}} \right)$; $\rho_0 = 1.2 \left(\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right)$, la evolución de la posición

del vórtice para diferentes velocidades no perturbadas se define en la figura siguiente.

Fig. 8.2
Posición del vórtice
dependiendo de la
iteración con su homólogo
y de la velocidad
no perturbada
del fluido.
Circulación constante.
Posición inicial del vórtice.
 $Z_0 = (X_0; Y_0) = (25, 45)$.



Obsérvese que, a medida que la velocidad no perturbada aumenta, el vórtice tiende a desplazarse en la dirección de dicha velocidad. Representando gráficamente la velocidad horizontal y vertical a lo largo del tiempo para diferentes valores de velocidad no perturbada, (v. figura 8.3), se observa que, a medida que esta velocidad no perturbada

aumenta, las velocidades horizontal y vertical de desplazamiento del vórtice también aumentan. Véase además que la velocidad horizontal alcanza un valor prácticamente constante a los 200 s y parece tender a un valor asintótico. La velocidad vertical a partir de los 200 s es nula.

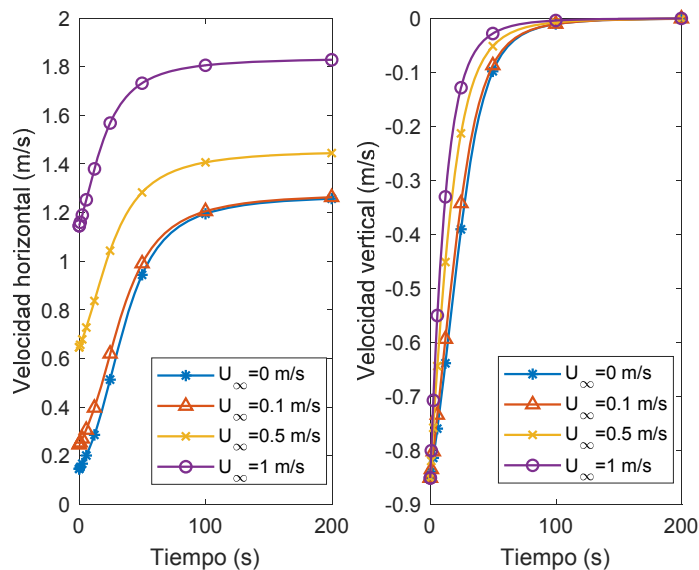


Fig. 8.3
Evolución de la velocidad horizontal y vertical del vórtice dependiendo de la velocidad no perturbada del fluido. Circulación constante. Posición inicial del vórtice. $Z_0 = (X_0; Y_0) = (25, 45)$.

La figura 8.4 presenta la distribución de presiones a lo largo del eje x y sobre la placa plana (suelo). Esta distribución ha sido obtenida a partir de la ecuación 91 para el caso de que $U_\infty = 0$. Es interesante observar que la presión mínima aparece en un punto situado justamente debajo de la posición del centro del vórtice. La figura 8.5 presenta el flujo de vorticidad sobre la placa plana, caracterizado por la ecuación 23.

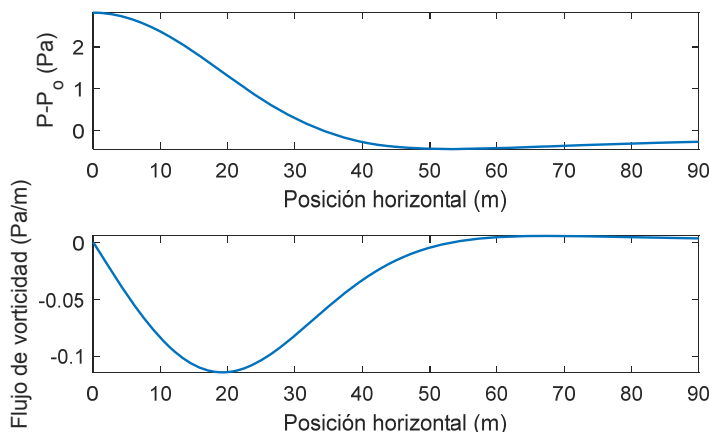


Fig. 8.4
Distribución de presiones sobre la placa plana y a lo largo del eje x . Ecuación 91. $Z_0 = (X_0; Y_0) = (25, 45)$. $U_\infty = 0$

Fig. 8.5
Flujo de vorticidad calculado mediante la ecuación 23. $Z_0 = (X_0; Y_0) = (25, 45)$. $U_\infty = 0$

Las figuras 8.6 y 8.7 presentan la distribución de presiones y el flujo de vorticidad determinados mediante las ecuaciones 89 y 23, respectivamente. Las mismas condiciones que se han utilizado para hallar las figuras 8.4 y 8.5 se utilizan también ahora. Véa-



se que la posición horizontal para la cual la presión es mínima coincide con la posición vertical del centro del vórtice y con el cambio de tendencia del flujo de vorticidad, que es el punto de pendiente máxima.

Fig. 8.6
Distribución de presiones
sobre la placa plana
y a lo largo del eje x.
Ecuación 89.
 $Z_0 = (X_0; Y_0) = (25, 45)$,
 $U_\infty = 0$

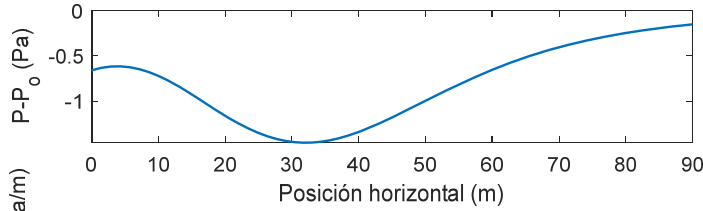
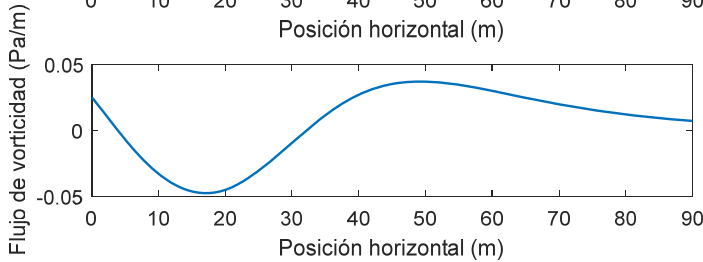


Fig. 8.7
Flujo de vorticidad
calculado mediante
la ecuación 23 y basado
en la distribución de
presiones presentada en
la figura 8.4.
 $Z_0 = (X_0; Y_0) = (25, 45)$,
 $U_\infty = 0$



En los cálculos anteriores, se ha considerado que la circulación se mantiene constante a lo largo del tiempo. En realidad, el efecto de la viscosidad del fluido genera un decaimiento de la circulación del vórtice a lo largo del tiempo; en consecuencia, tanto el campo de velocidades como la distribución de presiones quedan afectadas. Para tener en cuenta esta variación temporal de la circulación, se introduce un modelo simple, definido en la referencia [1], que caracteriza la evolución de la circulación a lo largo del tiempo:

$$\Gamma(t) = \Gamma_{\text{inicial}} \cdot e^{\left(-\frac{t}{T_{e-1}}\right)}$$

donde:

Γ_{inicial} : circulación inicial en $t = 0$ s. En el presente estudio, se considera $\Gamma_{\text{inicial}} = 350 \text{ m}^2/\text{s}$, T_{e-1} : constante de tiempo que se determina de forma experimental. En este caso, se adopta un valor de 125 s, valor del mismo orden de magnitud que el utilizado en la referencia [1].

Una vez definida la circulación en función del tiempo, es posible determinar la evolución de la posición de los vórtices. Las ecuaciones 74 y 75 deberán integrarse utilizando las mismas condiciones iniciales y propiedades físicas que las anteriores, pero introduciendo el valor de circulación correspondiente a cada instante de tiempo. A continuación, se presenta la gráfica que caracteriza la posición del vórtice para diferentes velocidades no perturbadas. Comparando las figuras 8.8 y 8.2, se concluye que el decaimiento temporal de la circulación (para el caso elegido) afecta ligeramente la posi-

ción del vórtice; de hecho, el efecto del decaimiento temporal de la circulación se observa mejor cuando se comparan las velocidades horizontal y vertical del vórtice en función del tiempo (v. figuras 8.9 y 8.3). En la figura 8.9, se representan las velocidades horizontal y vertical a lo largo del tiempo para diferentes valores de la velocidad no perturbada y considerando el decaimiento temporal de la circulación. Obsérvese que la velocidad horizontal alcanza un máximo y justo después disminuye hasta situarse en valores incluso similares a las condiciones iniciales. A diferencia del caso anterior, en que no se tenía en cuenta el efecto de la viscosidad y la circulación permanecía constante, en este caso la circulación disminuye, con lo cual la velocidad de desplazamiento del vórtice también disminuye y, en definitiva, el vórtice no tiene un desplazamiento horizontal indefinido.

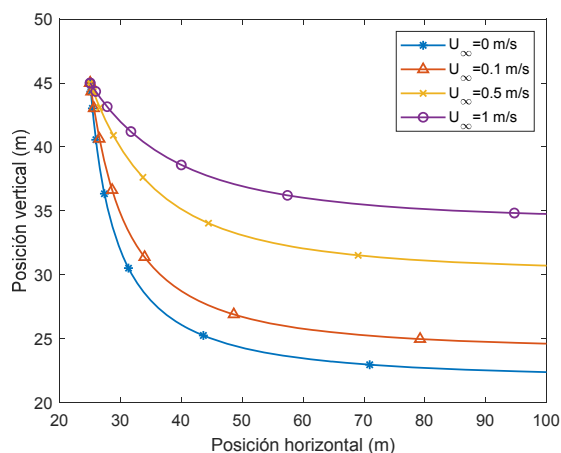


Fig. 8.8
Posición del vórtice dependiendo de la iteración con su homólogo y la velocidad no perturbada del fluido. Posición inicial del vórtice. $Z_0 = (X_0; Y_0) = (25, 45)$.

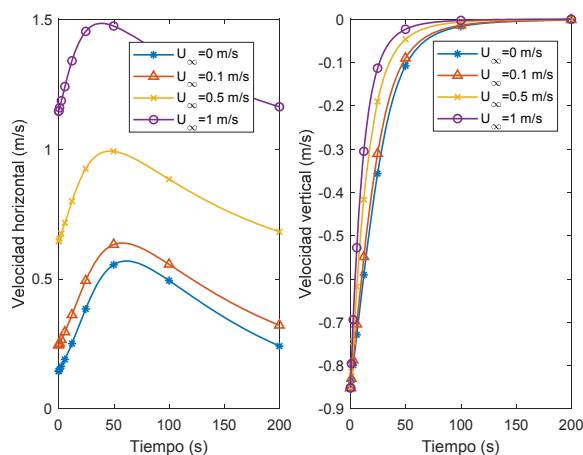


Fig. 8.9
Evolución de las velocidades horizontal y vertical del vórtice dependiendo la velocidad no perturbada del fluido. Circulación con decaimiento temporal. Posición inicial del vórtice. $Z_0 = (X_0; Y_0) = (25, 45)$.

Una vez determinadas la posición de los vórtices y la circulación en cada instante temporal, a partir de las ecuaciones 55 y 56 es posible definir el campo de velocidades. Asimismo, es importante definir un dominio de discretización en los dos ejes para poder calcular punto a punto cada una de las dos componentes de velocidad.



En las figuras siguientes, se muestra la evolución del campo de velocidades partiendo de un instante inicial $t = 0$ y mostrando cada 30 segundos aproximadamente el campo calculado. Es importante tener en consideración que el cálculo se ha realizado en incrementos de tiempo de 0.4 segundos, pero únicamente se ha graficado cinco instantes de tiempo. La velocidad no perturbada empleada en el cálculo para obtener las siguientes gráficas es nula, la circulación se ha considerado temporalmente dependiente.

Fig. 8.10
Campo de
velocidades
y distribución
de presiones.
 $U_{\infty} = 0$, $t = 0$ s

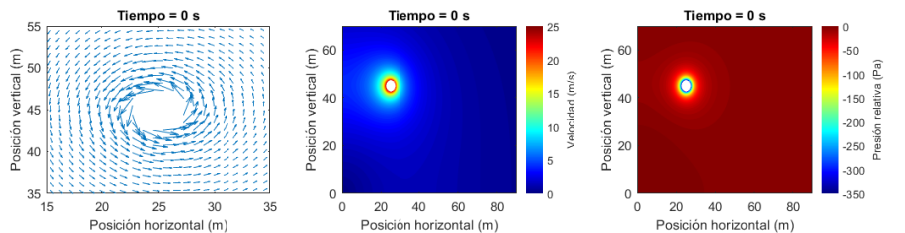


Fig. 8.11
Campo de
velocidades
y distribución
de presiones.
 $U_{\infty} = 0$, $t = 30$ s

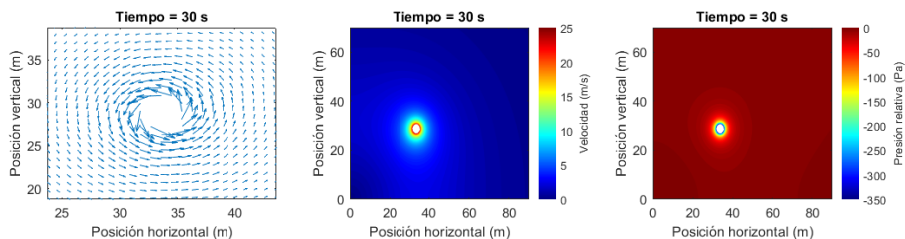


Fig. 8.12
Campo de
velocidades
y distribución
de presiones.
 $U_{\infty} = 0$, $t = 60$ s

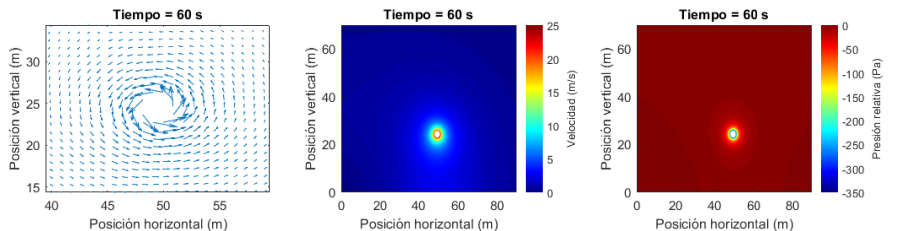


Fig. 8.13
Campo de
velocidades
y distribución
de presiones.
 $U_{\infty} = 0$, $t = 90$ s

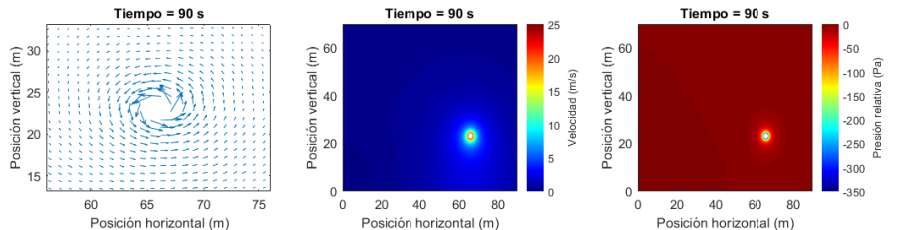
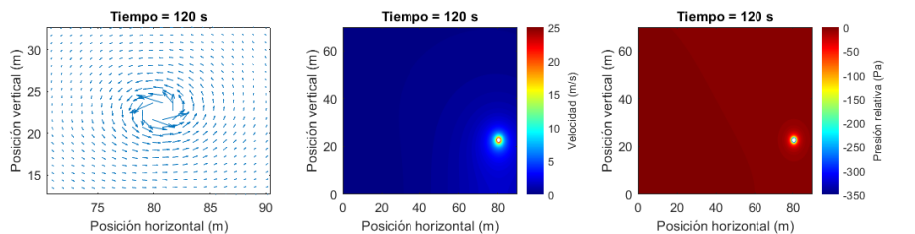


Fig. 8.14
Campo de
velocidades
y distribución
de presiones.
 $U_{\infty} = 0$, $t = 120$ s





En las figuras 8.10-8.14, el radio del vórtice se ha definido de tal manera que, en el dominio interior del vórtice, las velocidades tangenciales interiores al radio del vórtice son superiores a 25 m/s, con lo cual la velocidad en el interior del vórtice se ha considerado constante e igual a 25 m/s. Obsérvese que, a medida que el tiempo es mayor, el radio del vórtice disminuye porque la circulación decae a lo largo del tiempo. Véase que la presión mínima está localizada en el centro del vórtice, y que el campo de presiones afectado por el vórtice se reduce temporalmente. Ello es debido al decaimiento temporal de la circulación.

- [1] Smalikho, I. N. (2019): “Taking into Account the Ground Effect on Aircraft Wake Vortices When Estimating Their Circulation from Lidar Measurements”. *Atmospheric and Oceanic Optics*, 32(6): 686–700, noviembre. DOI:10.1134/S1024856019060149.



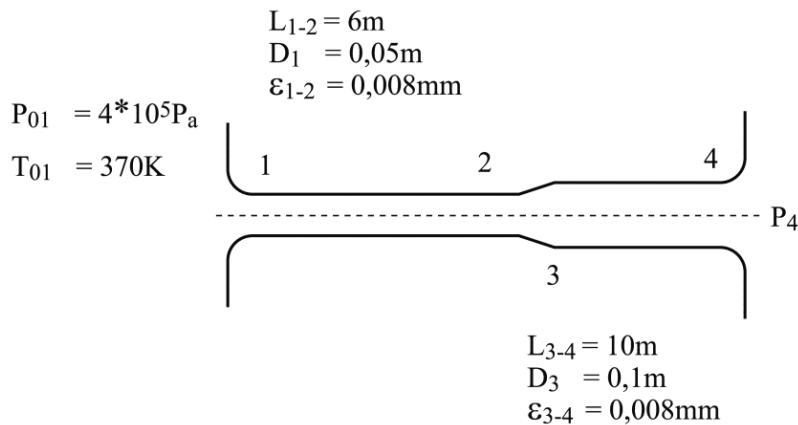
Problema 9

Enunciado

El esquema de la figura 9.1 muestra dos depósitos unidos por un conducto de 2 secciones diferentes. Las longitudes, los diámetros y la rugosidad absoluta de cada conducto se especifican en el esquema adjunto. También se indican las condiciones de presión y temperatura. Se considera que el fluido de trabajo es aire $R = 287 \text{ J/(kg K)}$ y que el flujo es de Fanno. En las condiciones de presión del depósito derecho que se detallan en cada uno de los apartados siguientes, se pide determinar el número de Mach en los puntos 1, 2, 3 y 4, el caudal másico circulante y la distribución de presiones y temperaturas en los puntos definidos.

- 1.- Presión estática en el punto 4, $P_4 = 10^5 \text{ Pa}$
- 2.- Presión estática en el punto 4, $P_4 = 0.4 \cdot 10^5 \text{ Pa}$
- 3.- Presión estática en el punto 4, $P_4 = 3 \cdot 10^5 \text{ Pa}$
- 4.- Realizar un programa que permita resolver el enunciado de forma genérica, es decir, para cualquier relación de presiones, geometría y rugosidad del conducto. Obsérvese que es imprescindible que el depósito a mayor presión esté unido al conducto de menor diámetro para que se cumpla la situación de flujo a través de una tobera divergente.

Fig. 9.1



Resolución

CASO 1:

Presión estática en el punto 4, $P_4 = 10^5 \text{ Pa}$

En primer lugar, es necesario saber si, en las condiciones de presión dadas en los dos depósitos, el flujo estará bloqueado.



Si se considera que en el punto 2 el número de Mach es la unidad, en el punto 3 el número de Mach puede ser subsónico o supersónico. Si es subsónico, puede ser que exista una onda de choque entre los puntos 2 y 3; si es supersónico, puede que exista una onda de choque entre los puntos 3 y 4. En ambos casos el flujo en el punto 4 puede estar o no bloqueado; también podría ser que el flujo fuese supersónico entre 2 y 4 y no hubiese onda de choque. La relación de presión entre los dos extremos de los conductos es la que va a caracterizar la situación real existente.

Suponiendo $M_2 = 1$ y considerando flujo de Fanno, el número de Mach en el punto 1 se determinará partiendo de la expresión:

$$\frac{4C_f \Delta L}{D} = \frac{4C_f L_1^*}{D} - \frac{4C_f L_2^*}{D}$$

En la hipótesis de partida se establece que $L_2^* = 0$, de donde:

$$\frac{4C_f \Delta L}{D} = \frac{0.013 \cdot 6}{0.05} = 1.56$$

Véase que el factor de fricción $f = 4 C_f = 0.013$ se ha obtenido mediante el diagrama de Moody y partiendo de la relación:

$$\frac{\varepsilon_{1-2}}{D_1} = \frac{0.008}{50} = 0.00016$$

Además se supone que el número de Reynolds asociado al flujo es muy elevado ($\gg 10^5$). Esta nueva hipótesis deberá contrastarse.

De la siguiente relación y considerando un índice de politropía de $\gamma = 1.4$, se obtiene que el número de Mach en el punto 1 será de $M_1 = 0.45$.

$$\frac{4C_f L_{1-2}^*}{D} = \frac{0.013 \cdot 6}{0.05} = 1.56 = \frac{1 - M_1^2}{\gamma M_1^2} + \frac{\gamma + 1}{2\gamma} \ln \left(\frac{(\gamma + 1) M_1^2}{2 \left\{ 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2 \right\}} \right)$$

Sustituyendo el número de Mach del punto 1, en las siguientes expresiones, se obtiene la relación de las diversas variables entre los puntos 1 y 2.

$$\frac{P_1}{P^*} = \frac{P_1}{P_2} = \frac{1}{M_1} \left\{ \frac{\frac{\gamma + 1}{2}}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2} \right\}^{\frac{1}{2}} = 2.390; \quad \frac{P_{01}}{P_0^*} = \frac{P_{01}}{P_{02}} = \frac{1}{M_1} \left\{ \frac{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2}{\frac{\gamma + 1}{2}} \right\}^{\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}} = 1.450$$

Entre los puntos 2 y 3, se supone flujo isentrópico, partiendo de la relación de secciones

$$\frac{A_3}{A_2} = \frac{A_3}{A^*} = \frac{\frac{\pi}{4} \cdot 0.1^2}{\frac{\pi}{4} \cdot 0.05^2} = 4 = \frac{1}{M_3} \left\{ \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right) \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_3^2 \right) \right\}^{\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}}$$



Se obtendrá el número de Mach en el punto 3, que, como se ha dicho anteriormente, a priori, puede ser subsónico o supersónico. Los dos valores posibles son $M_3 = 0.1466$; $M_3 = 2.94$.

Suponiendo ahora flujo subsónico en el punto 3, las condiciones en el punto 4 se obtendrán aplicando la ecuación:

$$\frac{4C_f \Delta L}{D} = \frac{4C_f L_3^*}{D} - \frac{4C_f L_4^*}{D}$$

El coeficiente de fricción entre los puntos 3 y 4 se obtendrá mediante el diagrama de Moody y entrando con el valor de $\frac{\varepsilon_{3-4}}{D_3} = \frac{0.008}{100} = 0.00008$; al igual que en el conducto

anterior, se considera que el número de Reynolds asociado al fluido circulante es muy elevado. Se obtiene que $f = 4 C_f = 0.0115$; en consecuencia, se establece que $\frac{4C_f \Delta L}{D} = \frac{0.0115 \cdot 10}{0.1} = 1.15$

Mediante la ecuación que se enuncia a continuación, sustituyendo $M_3 = 0.1466$, se obtiene:

$$\frac{4C_f L_3^*}{D} = \frac{1-M_3^2}{\gamma M_3^2} + \frac{\gamma+1}{2\gamma} \ln \left(\frac{(\gamma+1)M_3^2}{2 \left\{ 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_3^2 \right\}} \right) = 29.4045$$

El número de Mach en el punto 4 se obtendrá partiendo de:

$$\frac{4C_f L_4^*}{D} = \frac{4C_f L_3^*}{D} - \frac{4C_f \Delta L}{D} = 29.4045 - 1.15 = 28.2545$$

En las condiciones expuestas hasta el momento, el número de Mach en el punto 4 se obtendrá mediante la ecuación siguiente:

$$28.2545 = \frac{1-M_4^2}{\gamma M_4^2} + \frac{\gamma+1}{2\gamma} \ln \left(\frac{(\gamma+1)M_4^2}{2 \left\{ 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_4^2 \right\}} \right)$$

de donde $M_4 = 0.149$

En este punto, se ha de valorar si la relación de presión real entre los extremos de los conductos es la apropiada para que exista flujo subsónico en los puntos 3 y 4. La

relación de presión de que se dispone es, $\frac{P_{01}}{P_4} = \frac{4 \cdot 10^5}{10^5} = 4$

Por otro lado, la relación teórica de presión necesaria para que, en el punto 2, el número de Mach sea la unidad y, en los puntos 1, 3 y 4, el flujo sea subsónico se define como:

$$\frac{P_{01}}{P_4} = \frac{P_{01}}{P_{02}} \frac{P_{02}}{P_{03}} \frac{P_{03}}{P_{04}} \frac{P_{04}}{P_4}$$



La primera relación se ha obtenido previamente y vale $\frac{P_{01}}{P_{02}} = 1.45$; entre los puntos 2 y 3, se ha considerado flujo isentrópico, con lo cual se concluye que $P_{02} = P_{03}$.

La relación $\frac{P_{03}}{P_{04}}$ se obtendrá de hallar las relaciones, $\frac{P_{03}}{P_{04}} = \frac{P_{03}}{P_0^*} \frac{P_0^*}{P_{04}}$, de donde se obtiene cada una de las relaciones restantes al sustituir el número de Mach de los puntos 3 y 4 en las expresiones:

$$\frac{P_{03}}{P_0^*} = \frac{1}{M_3} \left\{ \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_3^2}{\frac{\gamma+1}{2}} \right\}^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} = 3.999, \quad \frac{P_{04}}{P_0^*} = \frac{1}{M_4} \left\{ \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_4^2}{\frac{\gamma+1}{2}} \right\}^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} = 3.930$$

de donde:

$$\frac{P_{03}}{P_{04}} = \frac{P_{03}}{P_0^*} \frac{P_0^*}{P_{04}} = 3.999 \frac{1}{3.930} = 1.0177$$

Por último, la relación $\frac{P_{04}}{P_4}$ se obtendrá substituyendo el número de Mach del punto 4 en la ecuación:

$$\frac{P_{04}}{P_4} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_4^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = 1.0157$$

En consecuencia, la relación de presión requerida para que el flujo sea subsónico en todo el tramo comprendido entre los puntos 2 y 4 será:

$$\frac{P_{01}}{P_4} = \frac{P_{01}}{P_{02}} \frac{P_{02}}{P_{03}} \frac{P_{03}}{P_{04}} \frac{P_{04}}{P_4} = 1.45 \cdot 1 \cdot 1.018 \cdot 1.016 = 1.5$$

Se observa que el gradiente de presiones requerido es bastante menor que el disponible, con lo cual se concluye que el flujo estará bloqueado en el punto 2.

El paso siguiente será realizar de nuevo este apartado, pero considerando que en el punto 3 el flujo es supersónico, es decir, $M_3 = 2.94$.

En estas nuevas consideraciones, el número de Mach en el punto 4 se obtendrá mediante la relación:

$$\frac{4C_f \Delta L}{D} = \frac{4C_f L_3^*}{D} - \frac{4C_f L_4^*}{D}$$

Realizando las mismas hipótesis que las del apartado anterior en lo que respecta a la obtención del factor de fricción, para este caso se establece también que

$$\frac{4C_f \Delta L}{D} = \frac{0.0115 \cdot 10}{0.1} = 1.15.$$



Por otro lado, sustituyendo el nuevo número de Mach del punto 3 en la ecuación siguiente se obtiene:

$$\frac{4C_f L_3^*}{D} = \frac{1-M_3^2}{\gamma M_3^2} + \frac{\gamma+1}{2\gamma} \ln \left(\frac{(\gamma+1)M_3^2}{2 \left\{ 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_3^2 \right\}} \right) = 0.5129$$

En consecuencia:

$$\frac{4C_f L_4^*}{D} = \frac{4C_f L_3^*}{D} - \frac{4C_f \Delta L}{D} = 0.5129 - 1.15 = -0.6371$$

Claramente este resultado es imposible, lo cual indica que, si la longitud del conducto entre 3 y 4 es de 10m, no existirá flujo supersónico entre los puntos 3 y 4.

En el cálculo de la relación de presión entre los puntos 1 y 4, considerando el flujo subsónico entre 2 y 4, se ha obtenido una relación inferior a la real. En consecuencia, se afirma que el flujo estará bloqueado. Sin embargo, cuando se considera flujo supersónico entre los puntos 3 y 4, se observa que este flujo es imposible. Bajo estas consideraciones, se debe evaluar la posible existencia de una onda de choque en la tobera, o bien en el tramo de sección constante comprendido entre los puntos 3 y 4.

Para determinar la posible existencia de una onda de choque, se empieza determinando la relación de presiones necesaria para que la onda de choque se produzca en el punto 3. Así, será posible conocer si la onda de choque estará dentro de la tobera o en el tramo 3-4 y, finalmente, poderla situar.

En estas nuevas consideraciones, se supone de nuevo que $M_2 = 1$; M_1 y M_3 ya se han determinado previamente, $M_1 = 0.45$ y $M_3 = 2.94$. Como ahora se supone que en el punto 3 existe una onda de choque plana, el número de Mach detrás de la onda de choque M_{3bis} será:

$$M_{3bis} = \left[\frac{\frac{2}{\gamma-1} + M_3^2}{\frac{2\gamma}{\gamma-1} M_3^2 - 1} \right]^{\frac{1}{2}} = 0.4788$$

Entrando con este número de Mach en la expresión siguiente, se obtiene:

$$\frac{4C_f L_{3bis}^*}{D} = \frac{1-M_{3bis}^2}{\gamma M_{3bis}^2} + \frac{\gamma+1}{2\gamma} \ln \left(\frac{(\gamma+1)M_{3bis}^2}{2 \left\{ 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_{3bis}^2 \right\}} \right) = 1.2566$$

La relación entre los puntos 3bis y 4 será:

$$\frac{4C_f L_4^*}{D} = \frac{4C_f L_{3bis}^*}{D} - \frac{4C_f \Delta L}{D} = 1.2566 - \frac{0.0115 \cdot 10}{0.1} = 0.1082$$

El nuevo número de Mach en el punto 4 se determina mediante la expresión:

$$\frac{4C_f L_4^*}{D} = 0.1082 = \frac{1-M_4^2}{\gamma M_4^2} + \frac{\gamma+1}{2\gamma} \ln \left(\frac{(\gamma+1)M_4^2}{2 \left\{ 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_4^2 \right\}} \right)$$

de donde:

$$M_4 = 0.765$$

La relación de presiones de estancamiento entre los puntos 3 y 3bis se obtiene entrando con $M_3 = 2.94$ en la relación.

$$\frac{P_{03bis}}{P_{03}} = \left(\frac{\gamma+1}{2} M_3^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_3^2 \right)^{\frac{-\gamma}{\gamma-1}} \left(\frac{2\gamma}{1+\gamma} M_3^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right)^{\frac{-1}{\gamma-1}} = 0.3456$$

La relación $\frac{P_{03bis}}{P_{04}}$ se obtendrá de hallar las relaciones $\frac{P_{03bis}}{P_{04}} = \frac{P_{03bis}}{P_0^*} \frac{P_0^*}{P_{04}}$, de donde se obtiene cada una de las restantes sustituyendo el número de Mach en los puntos 3bis y 4, $M_{3bis} = 0.4788$, $M_4 = 0.765$, respectivamente, en las expresiones siguientes:

$$\frac{P_{03bis}}{P_0^*} = \frac{1}{M_3} \left\{ \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_3^2}{\frac{\gamma+1}{2}} \right\}^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} = 1.3826 \quad ; \quad \frac{P_{04}}{P_0^*} = \frac{1}{M_4} \left\{ \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_4^2}{\frac{\gamma+1}{2}} \right\}^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} = 1.0537$$

de donde:

$$\frac{P_{03bis}}{P_{04}} = \frac{P_{03bis}}{P_0^*} \frac{P_0^*}{P_{04}} = 1.3826 \frac{1}{1.0537} = 1.3114$$

Para $M_4 = 0.765$, se obtiene:

$$\frac{P_{04}}{P_4} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_4^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = 1.4734$$

El gradiente de presiones requerido para este caso considerado ha de ser de:

$$\frac{P_{01}}{P_4} = \frac{P_{01}}{P_{02}} \frac{P_{02}}{P_{03}} \frac{P_{03}}{P_{03bis}} \frac{P_{03bis}}{P_{04}} \frac{P_{04}}{P_4} = 1.45 \cdot 1 \cdot \frac{1}{0.3456} \cdot 1.3114 \cdot 1.4734 = 8.11$$

Puesto que la relación de presión teórica es mayor que la real, la onda de choque deberá estar situada entre los puntos 2 y 3.

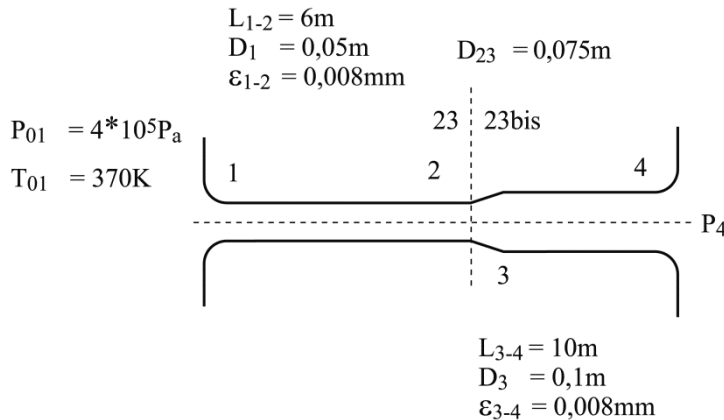
Para determinar la posición de la onda de choque, se realiza un proceso iterativo en el cual se utiliza el método de la bisección para situarla. En cada iteración, se define un



intervalo posible, lo cual implica definir los extremos inferior y superior, así como el punto intermedio donde se estima que se situará la onda de choque. En este caso, el dominio de cálculo está dentro de la tobera y, por tanto, definir la posición de la onda de choque es equivalente a definir en qué diámetro se encontrará.

En la primera iteración, se establece el diámetro de 0.05m como extremo inferior, es decir, el situado en el punto 2; el diámetro de 0.1m se define como extremo superior, es decir, situado en el punto 3, y la posición de la onda de choque, en la mitad de este intervalo, a un diámetro de 0.075 m.

Fig. 9.2
Esquema de la
instalación, con el
punto 3 situado en el
centro de la tobera,
donde ahora se
supone que existe
una onda de choque



Obsérvese que, en el punto 2, el número de Mach es la unidad, con lo cual el número de Mach en el punto 1 sigue siendo el mismo que el hallado en los apartados anteriores, $M_1 = 0.45$.

El número de Mach en el punto 23, situado ahora en la posición media de la tobera, resulta de la ecuación:

$$\frac{A_{23}}{A_2} = \frac{A_{23}}{A^*} = \frac{\frac{\pi}{4} * 0.075^2}{\frac{\pi}{4} * 0.05^2} = 2.25 = \frac{1}{M_{23}} \left\{ \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right) \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_{23}^2 \right) \right\}^{\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}}$$

de donde el número de Mach en el punto 23 será $M_{23} = 2.328$. Obsérvese que la ecuación da también como posible solución $M_{23} = 0.268$, pero este valor debe descartarse, puesto que en el nuevo punto 23 el número de Mach ha de ser supersónico.

El número de Mach en el punto 23bis ahora será:

$$M_{23\text{bis}} = \left[\frac{\frac{2}{\gamma - 1} + M_{23}^2}{\frac{2\gamma}{\gamma - 1} M_{23}^2 - 1} \right]^{\frac{1}{2}} = 0.531$$

El número de Mach en el punto 3 se determina a partir de la ecuación siguiente cuya única incógnita es M_3 :

$$\frac{A_3}{A_{23bis}} = \frac{\frac{\pi}{4} \cdot 0.1^2}{\frac{\pi}{4} \cdot 0.075^2} = \frac{M_{23bis}}{M_3} \left\{ \frac{1 + \left[\frac{(\gamma-1)}{2} \right] M_3^2}{1 + \left[\frac{(\gamma-1)}{2} \right] M_{23bis}^2} \right\}^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} = 1.778$$

de donde el número de Mach en el punto 3 será $M_3 = 0.264$. Obsérvese que la ecuación da también, como posible solución, $M_3 = 2.345$, pero este valor debe descartarse porque, si en el punto 23bis el número de Mach es subsónico, lo será también en el punto 3.

Para determinar el número de Mach en el punto 3, se puede calcular la relación siguiente:

$$\frac{4C_f L_3^*}{D} = \frac{1-M_3^2}{\gamma M_3^2} + \frac{\gamma+1}{2\gamma} \ln \left(\frac{(\gamma+1)M_3^2}{2 \left\{ 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_3^2 \right\}} \right) = 7.384$$

En consecuencia, entre los puntos 3 y 4, se establece:

$$\frac{4C_f L_3^*}{D} = \frac{4C_f L_3^*}{D} - \frac{4C_f \Delta L}{D} = 7.384 - \frac{0.0115 \cdot 10}{0.1} = 6.23$$

de donde el número de Mach en el punto 4 será:

$$\frac{4C_f L_4^*}{D} = 6.23 = \frac{1-M_4^2}{\gamma M_4^2} + \frac{\gamma+1}{2\gamma} \ln \left(\frac{(\gamma+1)M_4^2}{2 \left\{ 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_4^2 \right\}} \right)$$

$$M_4 = 0.282$$

La relación de presiones que se requiere para este considerando será:

$$\frac{P_{01}}{P_4} = \frac{P_{01}}{P_{02}} \frac{P_{02}}{P_{023}} \frac{P_{023}}{P_{23bis}} \frac{P_{23bis}}{P_{03}} \frac{P_{03}}{P_{04}} \frac{P_{04}}{P_4}$$

Al igual que en los apartados anteriores, entre los puntos 1 y 2 se establece $\frac{P_{01}}{P_{02}} = 1.45$.

Entre los puntos 2 y 23, se concluye que $P_{02} = P_{023}$ entre los puntos 23 y 23bis para $M_{23} = 2.328$, se establece:

$$\frac{P_{023bis}}{P_{023}} = \left(\frac{\gamma+1}{2} M_{23}^2 \right)^{\frac{\gamma}{(\gamma-1)}} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_{23}^2 \right)^{\frac{-\gamma}{(\gamma-1)}} \left(\frac{2\gamma}{1+\gamma} M_{23}^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right)^{\frac{-1}{(\gamma-1)}} = 0.571$$



Entre los puntos 23bis y 3, se tiene que $P_{023bis} = P_{03}$.

Entre los puntos 3 y 4, la relación de presión se obtiene a partir de la operación siguiente:

$$\frac{P_{03}}{P_{04}} = \frac{P_{03}}{P_0^*} \frac{P_0^*}{P_{04}}$$

de donde cada una de las relaciones restantes se determina sustituyendo el número de Mach en los puntos 3 y 4, $M_3 = 0.2642$, $M_4 = 0.282$, respectivamente, en las expresiones siguientes:

$$\frac{P_{03}}{P_0^*} = \frac{1}{M_3} \left\{ \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_3^2}{\frac{\gamma+1}{2}} \right\}^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} = 2.2837; \quad \frac{P_{04}}{P_0^*} = \frac{1}{M_4} \left\{ \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_4^2}{\frac{\gamma+1}{2}} \right\}^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} = 2.1509$$

de donde:

$$\frac{P_{03}}{P_{04}} = \frac{P_{03}}{P_0^*} \frac{P_0^*}{P_{04}} = 2.2837 \frac{1}{2.1509} = 1.062$$

Para $M_4 = 0.282$, se obtiene:

$$\frac{P_{04}}{P_4} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_4^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = 1.057$$

La relación de presión teórica requerida en este caso ha de ser:

$$\frac{P_{01}}{P_4} = \frac{P_{01}}{P_{02}} \frac{P_{02}}{P_{023}} \frac{P_{023}}{P_{23bis}} \frac{P_{23bis}}{P_{03}} \frac{P_{03}}{P_{04}} \frac{P_{04}}{P_4} = 1.45 \cdot 1 \cdot \frac{1}{0.571} \cdot 1 \cdot 1.062 \cdot 1.057 = 2.85$$

Dado que este gradiente de presiones es menor que el disponible se puede concluir que la onda de choque está situada entre los diámetros de 0.075m y 0.1m. Por tanto, para la iteración siguiente, el nuevo intervalo tendrá el diámetro de 0.075 m como extremo inferior y el diámetro de 0.1 m como extremo superior; finalmente, se estima el diámetro de 0.0875 m para situar la onda de choque, siguiendo el método de la bisección.

El proceso que se sigue en cada una de las iteraciones posteriores para determinar la sección exacta donde se crea la onda de choque es el mismo que el que se acaba de presentar. En la tabla siguiente se presentan cada uno de los intervalos resultantes para cada iteración, la sección estimada donde podría situarse la onda de choque y la relación de presión teórica asociada.

Iteración	Extremo inferior [m]	Extremo superior [m]	Diámetro estimado [m]	Relación de presión teórica calculada
1	0.05	0.1	0.075	2.85
2	0.075	0.1	0.0875	4.175
3	0.075	0.0875	0.0813	3.422
4	0.0813	0.0875	0.0844	3.769
5	0.0844	0.0875	0.0859	3.963
6	0.0859	0.0875	0.0867	4.067
7	0.0859	0.0867	0.0863	4.014
8	0.0859	0.0863	0.0861	3.988
9	0.0861	0.0863	0.0862	4.001

En la novena iteración, se ha obtenido una relación de presión teórica suficientemente próxima a la real para considerar que se ha hallado la solución. Los resultados obtenidos para situar la onda de choque, hallar los números de Mach y las relaciones de presión son los siguientes:

- Intervalo final para situar la onda de choque:
 - Extremo inferior: diámetro de 0.0861 m aproximadamente.
 - Extremo superior: diámetro de 0.0863 m aproximadamente.
 - Diámetro estimado donde queda situada la onda de choque en la tobera: 0.0862 m

- Números de Mach:

$$M_1 = 0.449; M_2 = 1; M_{23} = 2.628;$$

$$M_{23bis} = 0.502; M_3 = 0.345; M_4 = 0.393$$

- Relaciones de presión:

$$\frac{P_{01}}{P_{02}} = 1.45; \frac{P_{02}}{P_{023}} = 1; \frac{P_{023}}{P_{023bis}} = 2.224; \frac{P_{023bis}}{P_{03}} = 1; \frac{P_{03}}{P_{04}} = 1.115; \frac{P_{04}}{P_4} = 1.112$$

- Relación de presión teórica entre los puntos 1 y 4:

$$\frac{P_{01}}{P_4} = \frac{P_{01}}{P_{02}} \cdot \frac{P_{02}}{P_{023}} \cdot \frac{P_{023}}{P_{023bis}} \cdot \frac{P_{023bis}}{P_{03}} \cdot \frac{P_{03}}{P_{04}} \cdot \frac{P_{04}}{P_4} = 1.45 \cdot 1 \cdot 2.224 \cdot 1 \cdot 1.115 \cdot 1.112 \cong 4$$

- A partir de las relaciones de presión y conociendo la presión de estancamiento en el punto 1, es inmediato obtener las demás presiones en los puntos analizados:

$$P_{02} = P_{01} \cdot \frac{P_{02}}{P_{01}} = 4 \cdot \frac{1}{1.45} \cdot 10^5 \text{ Pa} = 2.76 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

$$P_{023} = P_{02} \cdot \frac{P_{023}}{P_{02}} = 2.76 \cdot 10^5 \cdot 1 = 2.76 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$



$$P_{023\text{bis}} = P_{023} \cdot \frac{P_{023\text{bis}}}{P_{023}} = 2.76 \cdot 10^5 \cdot \frac{1}{2.224} = 1.24 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

$$P_{03} = P_{023\text{bis}} \cdot \frac{P_{03}}{P_{023\text{bis}}} = 1.24 \cdot 10^5 \cdot 1 = 1.24 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

$$P_{04} = P_{03} \cdot \frac{P_{04}}{P_{03}} = 1.24 \cdot 10^5 \cdot \frac{1}{1.115} = 1.11 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

Conocidas las presiones de estancamiento en todos los puntos, las presiones estáticas se determinan mediante la ecuación:

$$\frac{P_0}{P} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$

Sustituyendo en esta expresión los números de Mach y las presiones de estancamiento existentes en cada punto, se obtiene la presión estática en dichos puntos:

$$P_1 = 3.48 \cdot 10^5 \text{ Pa}; P_2 = 1.46 \cdot 10^5 \text{ Pa}; P_{23} = 1.32 \cdot 10^5 \text{ Pa};$$

$$P_{23\text{bis}} = 1.04 \cdot 10^5 \text{ Pa}; P_3 = 1.14 \cdot 10^5 \text{ Pa}; P_4 = 1 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

La temperatura de estancamiento es igual en todos los puntos, $T_0 = 370 \text{ K}$. Por consiguiente, la temperatura estática en cada uno de los puntos de la instalación puede determinarse utilizando la ecuación:

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2$$

Sustituyendo en esta expresión los números de Mach y las temperaturas de estancamiento existentes en cada punto, se obtiene la temperatura estática en dichos puntos:

$$T_1 = 355.6 \text{ K}; T_2 = 308.3 \text{ K}; T_{23} = 155.4 \text{ K};$$

$$T_{23\text{bis}} = 352.3 \text{ K}; T_3 = 361.4 \text{ K}; T_4 = 358.2 \text{ K}$$

El caudal másico circulante se obtiene a partir de la expresión siguiente:

$$\dot{m} = \sqrt{\gamma} \left(\frac{P_0 A}{\sqrt{RT_0}} \right) M \left[1 + \left(\frac{\gamma - 1}{2} \right) M^2 \right]^{-\left(\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)} \right)}$$

Puesto que no depende de la posición y se mantiene constante en todo el conducto, es posible escoger cualquiera de los puntos analizados. Utilizando las condiciones del flujo en el punto 2, resulta:

$$\dot{m} = \sqrt{1.4} \left(\frac{2.76 \cdot 10^5 \cdot \pi \cdot \frac{0.05^2}{4}}{\sqrt{287 \cdot 370}} \right) \cdot 1 \cdot \left[1 + \left(\frac{1.4 - 1}{2} \right) 1^2 \right]^{-\left(\frac{1.4 + 1}{2(1.4 - 1)} \right)} \cong 1.14 \text{ kg/s}$$

Por último, es necesario verificar la hipótesis inicial, en que se establecía que el número de Reynolds es elevado ($\gg 10^5$), y que el factor de fricción sea correcto.

En los conductos de menor y mayor diámetro, el número de Reynolds se puede definir como:

$$Re = \frac{VD}{\nu} = \frac{VD\rho A}{\mu A} = \frac{\dot{m}D}{\mu \frac{\pi D^2}{4}} = \frac{\dot{m}4}{\pi D\mu}$$

Sustituyendo el caudal másico hallado anteriormente, el diámetro para cada conducto y la viscosidad dinámica ($\mu = 21.81 \cdot 10^{-6} \text{ kg/(m s)}$ a 370 K), resulta:

- Conducto de menor diámetro ($D = 0.05 \text{ m}$): $Re = 1.56 \cdot 10^6$
- Conducto de mayor diámetro ($D = 0.1 \text{ m}$): $Re = 7.82 \cdot 10^5$

Entrando en el diagrama de Moody con los valores de los números de Reynolds y sus respectivas rugosidades relativas, se obtiene, para el tramo 1-2, $f = 0.0137$ y, para el tramo 3-4, $f = 0.0135$. Especialmente en el tramo 3-4, el factor de fricción difiere considerablemente respecto al estimado inicialmente; en consecuencia, se deberían realizar de nuevo todos los cálculos con estos nuevos factores de fricción, ejercicio que se deja para el lector.

Nótese que los valores de Reynolds hallados son aproximados, ya que la viscosidad dinámica depende de la temperatura y de la presión. En este apartado y en los posteriores, se ha fijado su valor en $21.81 \cdot 10^{-6} \text{ kg/(m s)}$ a 370 K y presión atmosférica. La diferencia entre el valor real que tendría el número de Reynolds y la aproximación realizada no influye en los factores de fricción.

CASO 2:

Presión estática en el punto 4, $P_4 = 0.4 \cdot 10^5 \text{ Pa}$

Tal como se ha realizado en el apartado anterior, debe determinarse si el flujo está bloqueado en el punto 2. Dado que la única variable es la presión aguas abajo, y que es menor que la existente en el apartado precedente, el resultado del cálculo de la relación de presión teórica es el mismo que en el primer apartado:

$$\frac{P_{01}}{P_4} = 1.5.$$

La relación de presión real para este segundo apartado es:

$$\frac{P_{01}}{P_4} = 10$$

En consecuencia, como la relación de presión teórica es inferior a la real, se puede confirmar que el flujo está bloqueado en el punto 2.



En el apartado anterior, se ha determinado la relación de presiones necesaria para que exista una onda de choque en el punto 3. Dicha relación era $\frac{P_{01}}{P_4} = 8.11$, que en este

caso es inferior a la relación real $\frac{P_{01}}{P_4} = 10$, con lo cual puede concluirse que la onda de choque estará situada entre los puntos 3 y 4.

Bajo esta consideración, el flujo en el punto 3 debe ser supersónico y, como ya se ha comprobado, el flujo está bloqueado en el punto 2. En consecuencia, los números de Mach en los puntos 1, 2 y 3 son iguales a los calculados previamente teniendo en cuenta estas consideraciones: $M_1 = 0.45$, $M_2 = 1$ y $M_3 = 2.94$, respectivamente.

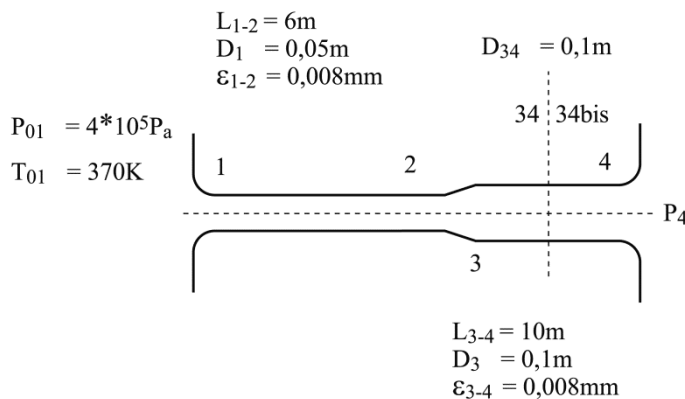
Para determinar la posición de la onda de choque, se realiza un proceso iterativo en el cual también se utiliza el método de la bisección para situarla. Por tanto, para cada iteración, se define un intervalo posible, y ello implica definir el extremo inferior, el superior y el punto intermedio donde se estima que se situará la onda de choque. En este caso, el dominio de cálculo está comprendido en el tramo de conducto situado entre los puntos 3 y 4, donde el diámetro se mantiene constante. En este caso, la posición de la onda de choque se define respecto a la posición del punto 3 (referencia cartesiana).

En la primera iteración, se establece el punto 3 como extremo inferior; el punto 4 como extremo superior, y la posición de la onda de choque en la mitad de este intervalo, a una distancia de 5 m respecto al punto 3.

Para el número de Mach en el punto 3, se puede calcular la relación siguiente:

$$\frac{4C_f L_3^*}{D} = \frac{1 - M_3^2}{\gamma M_3^2} + \frac{\gamma + 1}{2\gamma} \ln \left(\frac{(\gamma + 1) M_3^2}{2 \left\{ 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_3^2 \right\}} \right) = 0.5129$$

Fig. 9.3



En consecuencia, entre los puntos 3 y 34 (donde se ha situado la onda de choque), se establece:

$$\frac{4C_f L_{34}^*}{D} = \frac{4C_f L_3^*}{D} - \frac{4C_f \Delta L}{D} = 0.5129 - \frac{0.0115 \cdot 5}{0.1} = -0.0612$$

Este resultado es imposible. Esto significa que la distancia entre el punto 3 y el punto donde se ha situado la onda de choque es demasiado grande. En consecuencia, la onda de choque ha de estar situada en un punto intermedio entre el extremo inferior y la posición estimada en la primera iteración (a menos de 5 m respecto al punto 3). Siguiendo el criterio marcado por el método de la bisección, se vuelve a determinar un nuevo intervalo para situar la onda:

- Extremo inferior: en el punto 3
- Extremo superior: a 5 m respecto del punto 3
- Posición estimada de la onda: a 2.5 m del punto 3

Entre los puntos 3 y 34 (donde se ha situado la onda de choque), se establece:

$$\frac{4C_f L_{34}^*}{D} = \frac{4C_f L_3^*}{D} - \frac{4C_f \Delta L}{D} = 0.5129 - \frac{0.0115 \cdot 2.5}{0.1} = 0.2254$$

de donde el número de Mach en el punto 34 será:

$$\frac{4C_f L_{34}^*}{D} = 0.2254 = \frac{1 - M_{34}^2}{\gamma M_{34}^2} + \frac{\gamma + 1}{2\gamma} \ln \left(\frac{(\gamma + 1) M_{34}^2}{2 \left\{ 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_{34}^2 \right\}} \right)$$

$$M_{34} = 1.75$$

Tras la onda de choque, en el punto 34bis el número de Mach será:

$$M_{34bis} = \left[\frac{\frac{2}{\gamma - 1} + M_{34}^2}{\frac{2\gamma}{\gamma - 1} M_{34}^2 - 1} \right]^{\frac{1}{2}} = 0.6275$$

Para el número de Mach en el punto 34bis, se puede calcular la relación siguiente:

$$\frac{4C_f L_{34bis}^*}{D} = \frac{1 - M_{34bis}^2}{\gamma M_{34bis}^2} + \frac{\gamma + 1}{2\gamma} \ln \left(\frac{(\gamma + 1) M_{34bis}^2}{2 \left\{ 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_{34bis}^2 \right\}} \right) = 0.3921$$

Entre los puntos 34bis y 4 se establece:

$$\frac{4C_f L_4^*}{D} = \frac{4C_f L_{34bis}^*}{D} - \frac{4C_f \Delta L}{D} = 0.3921 - \frac{0.0115 \cdot 7.5}{0.1} = -0.4692$$

Este resultado también es imposible. Ello indica que la distancia de la onda de choque respecto al punto 3 sigue siendo demasiado grande. De nuevo, se define un nuevo intervalo y se pide estimar la posición de dicha onda. Este proceso se realiza tantas



veces como sea necesario hasta que $\frac{4C_f L_4^*}{D}$ sea positivo y, por tanto, el número de Mach en 4 sea calculable. En la tabla siguiente, se presentan los intervalos definidos, la posición estimada de la onda y la iteración correspondiente hasta hallar un valor positivo de $\frac{4C_f L_4^*}{D}$.

Iteración	Extremo inferior (respecto al punto 3) [m]	Extremo superior (respecto al punto 3) [m]	Punto estimado de la onda (respecto al punto 3) [m]	$\frac{4C_f L_{34}^*}{D}$	$\frac{4C_f L_4^*}{D}$
1	0	10	5	-0.0612	No calculable
2	0	5	2.5	0.2258	-0.4692
3	0	2.5	1.25	0.3694	-0.2347
4	0	1.25	0.625	0.4412	-0.0778
5	0	0.625	0.3125	0.4770	0.0115

En la iteración 5, el intervalo definido es:

- Extremo inferior: en el punto 3
- Extremo superior: a 0.625 m del punto 3
- Posición estimada de la onda: a 0.3125 m del punto 3

Para esta posición de la onda, los números de Mach aguas arriba y aguas abajo de la onda calculados son $M_{34} = 2.73$ y $M_{34bis} = 0.49$, respectivamente.

La relación $\frac{4C_f L_4^*}{D}$ es 0.0115, mayor que 0 y, por tanto, es posible calcular el número de Mach en 4 resolviendo la ecuación siguiente:

$$0.0115 = \frac{1 - M_{34bis}^2}{\gamma M_{34bis}^2} + \frac{\gamma + 1}{2\gamma} \ln \left(\frac{(\gamma + 1) M_{34bis}^2}{2 \left\{ 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_{34bis}^2 \right\}} \right)$$

Entonces:

$$M_4 = 0.91$$

La relación de presión teórica entre los puntos 1 y 4 viene definida por los términos siguientes:

$$\frac{P_{01}}{P_4} = \frac{P_{01}}{P_{02}} \frac{P_{02}}{P_{03}} \frac{P_{03}}{P_{034}} \frac{P_{034}}{P_{034bis}} \frac{P_{034bis}}{P_{04}} \frac{P_{04}}{P_4}$$

De la misma manera que en los apartados anteriores donde el flujo estaba bloqueado en el punto 2, la relación de presión entre los puntos 1 y 2 es $\frac{P_{01}}{P_{02}} = 1.45$.

El flujo en la tobera es isentrópico y, por tanto, $P_{02} = P_{03}$ entonces $\frac{P_{02}}{P_{03}} = 1$.

La relación $\frac{P_{03}}{P_{034}}$ se define como:

$$\frac{P_{03}}{P_{034}} = \frac{P_{03}}{P_0^*} \frac{P_0^*}{P_{034}}$$

de donde cada una de las relaciones restantes se determina al sustituir el número de Mach en los puntos 3 y 34, $M_3 = 2.94$, $M_{34} = 2.73$, respectivamente, en las expresiones siguientes:

$$\frac{P_{03}}{P_0^*} = \frac{1}{M_3} \left\{ \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_3^2}{\frac{\gamma+1}{2}} \right\}^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} = 4 \quad ; \quad \frac{P_{034}}{P_0^*} = \frac{1}{M_{34}} \left\{ \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_{34}^2}{\frac{\gamma+1}{2}} \right\}^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} = 3.27$$

Entonces:

$$\frac{P_{03}}{P_{034}} = \frac{P_{03}}{P_0^*} \frac{P_0^*}{P_{034}} = 4 \cdot \frac{1}{3.27} = 1.223$$

Entre los puntos 34 y 34bis, para $M_{34} = 2.73$, se establece:

$$\frac{P_{034bis}}{P_{034}} = \left(\frac{\gamma+1}{2} M_{34}^2 \right)^{\frac{\gamma}{(\gamma-1)}} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_{34}^2 \right)^{\frac{-\gamma}{(\gamma-1)}} \left(\frac{2\gamma}{1+\gamma} M_{34}^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right)^{\frac{-1}{(\gamma-1)}} = 0.4136$$

La relación $\frac{P_{034bis}}{P_{034}}$ se define como:

$$\frac{P_{034bis}}{P_{04}} = \frac{P_{034bis}}{P_0^*} \frac{P_0^*}{P_{04}}$$

de donde cada una de las relaciones restantes se determina al sustituir el número de Mach en los puntos 34bis y 4, $M_{34bis} = 0.49$, $M_4 = 0.91$, respectivamente, en las expresiones siguientes.

$$\frac{P_{034bis}}{P_0^*} = \frac{1}{M_{34bis}} \left\{ \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_{34bis}^2}{\frac{\gamma+1}{2}} \right\}^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} = 1.3526$$



$$\frac{P_{04}}{P_0^*} = \frac{1}{M_4} \left\{ \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_4^2}{\frac{\gamma+1}{2}} \right\}^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} = 1.007$$

Entonces:

$$\frac{P_{034bis}}{P_0^*} = \frac{P_{034bis}}{P_0^*} \frac{P_0^*}{P_{04}} = 1.3526 \cdot \frac{1}{1.007} = 1.343$$

Si $M_4 = 0.91$:

$$\frac{P_{04}}{P_4} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_4^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = 1.71$$

En esta iteración, la relación de presión teórica resulta:

$$\frac{P_{01}}{P_4} = \frac{P_{01}}{P_{02}} \frac{P_{02}}{P_{03}} \frac{P_{03}}{P_{034}} \frac{P_{034}}{P_{034bis}} \frac{P_{034bis}}{P_{04}} \frac{P_{04}}{P_4} = 1.45 \cdot 1 \cdot 1.223 \cdot \frac{1}{0.4136} \cdot 1.343 \cdot 1.71 = 9.85$$

Obsérvese que la relación de presión teórica, (9.85) es muy próxima a la real (10). Ello implica que la onda de choque debe estar muy próxima a la situación estimada en la iteración actual. Véase que, si la relación teórica es inferior a la real, la onda estará situada en un punto intermedio entre el punto situado en la presente iteración y el extremo superior del intervalo definido también en ella. Por tanto, el paso siguiente será realizar el proceso expuesto en este apartado hasta que la relación de presión teórica sea igual a la real, o bien hasta que la onda de choque no pueda ser desplazada porque el flujo quede bloqueado en el punto 4.

Tras haber realizado 17 iteraciones para situar la onda de choque a través del método de la bisección, tal como se ha expuesto en este apartado, se han obtenido los resultados siguientes:

- Intervalo final para situar la onda de choque:
 - Extremo inferior: a 0.3229 m del punto 3, aproximadamente.
 - Extremo superior: a 0.3232 m del punto 3, aproximadamente
 - Posición estimada de la onda de choque: a 0.323 m del punto 3, aproximadamente
- Números de Mach:

$$M_1 = 0.449 ; M_2 = 1 ; M_3 = 2.94 ;$$

$$M_{34} = 2.72 ; M_{34bis} = 0.49 ; M_4 = 0.922$$

Obsérvese que, en este caso, el flujo no estaría bloqueado en el punto 4.

- Relaciones de presión:

$$\frac{P_{01}}{P_{02}} = 1.45; \frac{P_{02}}{P_{03}} = 1; \frac{P_{03}}{P_{034}} = 1.231;$$

$$\frac{P_{034}}{P_{034bis}} = 2.404; \frac{P_{034bis}}{P_{04}} = 1.3445; \frac{P_{04}}{P_4} = 1.7329$$

- Relación de presión teórica entre los puntos 1 y 4:

$$\frac{P_{01}}{P_4} = \frac{P_{01}}{P_{02}} \cdot \frac{P_{02}}{P_{03}} \cdot \frac{P_{03}}{P_{034}} \cdot \frac{P_{034}}{P_{034bis}} \cdot \frac{P_{034bis}}{P_{04}} \cdot \frac{P_{04}}{P_4} = 1.45 \cdot 1 \cdot 1.231 \cdot 2.404 \cdot 1.345 \cdot 1.733 \cong 10$$

A partir de las relaciones de presión y conociendo la presión de estancamiento en el punto 1, es inmediato obtener las demás presiones en los puntos analizados:

$$P_{02} = P_{01} \cdot \frac{P_{02}}{P_{01}} = 4 \cdot \frac{1}{1.45} \cdot 10^5 \text{ Pa} = 2.76 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

$$P_{03} = P_{02} \cdot \frac{P_{03}}{P_{02}} = 2.76 \cdot 10^5 \cdot 1 = 2.76 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

$$P_{034} = P_{03} \cdot \frac{P_{034}}{P_{03}} = 2.76 \cdot 10^5 \cdot \frac{1}{1.231} = 2.24 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

$$P_{034bis} = P_{034} \cdot \frac{P_{034bis}}{P_{034}} = 2.24 \cdot 10^5 \cdot \frac{1}{2.404} = 0.93 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

$$P_{04} = P_{034bis} \cdot \frac{P_{04}}{P_{034bis}} = 0.93 \cdot 10^5 \cdot \frac{1}{1.345} = 0.69 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

Conocidas las presiones de estancamiento en todos los puntos, las presiones estáticas se determinan mediante la ecuación:

$$\frac{P_0}{P} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$

Sustituyendo en esta expresión los números de Mach y las presiones de estancamiento existentes en cada punto, se obtiene la presión estática en dichos puntos:

$$P_1 = 3.48 \cdot 10^5 \text{ Pa}; P_2 = 1.46 \cdot 10^5 \text{ Pa}; P_3 = 8.22 \cdot 10^5 \text{ Pa};$$

$$P_{34} = 9.31 \cdot 10^5 \text{ Pa}; P_{34bis} = 7.89 \cdot 10^5 \text{ Pa}; P_4 = 0.4 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

La temperatura de estancamiento es igual en todos los puntos, $T_0 = 370 \text{ K}$. Por consiguiente, la temperatura estática en cada uno de los puntos de la instalación se puede determinar utilizando la ecuación.



$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2$$

Sustituyendo en esta expresión los números de Mach y las temperaturas de estancamiento existentes en cada punto, se obtiene la temperatura estática en dichos puntos:

$$T_1 = 355.6 \text{ K}; T_2 = 308.3 \text{ K}; T_3 = 138.6 \text{ K};$$

$$T_{34} = 149.1 \text{ K}; T_{34\text{bis}} = 352.8 \text{ K}; T_4 = 316.2 \text{ K}$$

El caudal másico circulante se obtiene a partir de la expresión siguiente:

$$\dot{m} = \sqrt{\gamma} \left(\frac{P_0 A}{\sqrt{RT_0}} \right) M \left[1 + \left(\frac{\gamma - 1}{2} \right) M^2 \right]^{\left(\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)} \right)}$$

Puesto que no depende de la posición, es decir, se mantiene constante en todo el conducto, es posible escoger cualquiera de los puntos analizados. Utilizando las condiciones del flujo en el punto 2, resulta:

$$\dot{m} = \sqrt{1.4} \left(\frac{2.76 \cdot 10^5 \cdot \pi \cdot \frac{0.05^2}{4}}{\sqrt{287 \cdot 370}} \right) \cdot 1 \cdot \left[1 + \left(\frac{1.4 - 1}{2} \right) 1^2 \right]^{\left(\frac{1.4 + 1}{2(1.4 - 1)} \right)} \cong 1.14 \text{ kg/s}$$

Obsérvese que, si el flujo está bloqueado, aumentar la diferencia de presión entre los extremos del conducto no afecta el caudal másico circulante entre los depósitos. Tanto en este apartado como en el anterior, el flujo está bloqueado y el caudal másico circulante es el mismo.

Los factores de fricción utilizados en este apartado son los mismos que los estimados al inicio del problema, con lo cual este apartado debe realizarse de nuevo utilizando los nuevos factores de fricción que se derivarán de determinar los números de Reynolds en los dos conductos y, junto con las respectivas rugosidades relativas, entrar en el diagrama de Moody para obtener los nuevos factores de fricción. Se deja este ejercicio para el lector.

CASO 3:

Presión estática en el punto 4, $P_4 = 3 \cdot 10^5 \text{ Pa}$

Del mismo modo que se ha realizado en apartados anteriores de este problema, se debe determinar si el flujo está bloqueado en el punto 2. Aplicando el mismo razonamiento que el utilizado en el apartado anterior, el resultado del cálculo de la relación de presión teórica ha de ser el mismo $\frac{P_{01}}{P_4} = 1.5$ ya que el procedimiento también es idéntico.

Sin embargo, como la relación de presión real también ha variado, podría darse el caso de que no estuviera bloqueado en el punto 2. La relación de presión real en este apartado es:

$$\frac{P_{01}}{P_4} = 1.3$$

En consecuencia, como la relación de presión teórica es superior a la real, se puede afirmar que el flujo no está bloqueado en el punto 2 y, por tanto, será subsónico en todo el conducto.

Con el propósito de hallar los valores de presión y temperatura en cada uno de los puntos, es necesario suponer, en primer lugar, un número de Mach en el punto 2 que estará comprendido entre 0 y 1. Esta suposición da lugar a realizar un proceso iterativo, utilizando también el método de la bisección, en que, para cada una de las estimaciones del número de Mach en 2, se calculan todas las magnitudes con el fin de verificar que la relación de presión teórica se aproxime al máximo a la relación de presión real.

En la primera iteración, se define un primer intervalo posible en que se encontrará el número de Mach en 2:

- Extremo inferior del intervalo: 0
- Extremo superior: 1
- Número de Mach estimado en el punto 2: 0.5

El número de Mach en el punto 1 se determinará partiendo de la expresión:

$$\frac{4C_f L_1^*}{D} = \frac{4C_f \Delta L}{D} + \frac{4C_f L_2^*}{D}$$

El término $\frac{4C_f \Delta L}{D}$ se estima como:

$$\frac{4C_f \Delta L}{D} = \frac{0.013 * 6}{0.05} = 1.56$$

Véase que el factor de fricción $f = 4 C_f$ se ha obtenido mediante el diagrama de Moody y partiendo de la relación:

$$\frac{\varepsilon_{l-2}}{D_1} = \frac{0.008}{50} = 0.00016$$

Se ha supuesto también que el número de Reynolds asociado al flujo es muy elevado ($>>10^5$). Esta nueva hipótesis deberá ser contrastada.

Si $M_2 = 0.5$, el término $\frac{4C_f L_2^*}{D}$ resulta:



$$\frac{4C_f L_2^*}{D} = \frac{1-M_2^2}{\gamma M_2^2} + \frac{\gamma+1}{2\gamma} \ln \left(\frac{(\gamma+1)M_2^2}{2 \left\{ 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2 \right\}} \right) = 1.069$$

En consecuencia:

$$\frac{4C_f L_1^*}{D} = \frac{4C_f \Delta L}{D} + \frac{4C_f L_2^*}{D} = 1.56 + 1.069 = 2.6$$

De la relación siguiente, y considerando un índice de politropía de $\gamma = 1.4$, se obtiene que el número de Mach en el punto 1 será de $M_1 = 0.38$.

$$\frac{4C_f L_1^*}{D} = 2.6 = \frac{1-M_1^2}{\gamma M_1^2} + \frac{\gamma+1}{2\gamma} \ln \left(\frac{(\gamma+1)M_1^2}{2 \left\{ 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2 \right\}} \right)$$

El número de Mach en el punto 3 se determinará a partir de la ecuación siguiente, cuya única incógnita es M_3 :

$$\frac{A_3}{A_2} = \frac{\frac{\pi}{4} \cdot 0.1^2}{\frac{\pi}{4} \cdot 0.05^2} = \frac{M_2}{M_3} \left\{ \frac{1 + \left[\frac{(\gamma-1)}{2} \right] M_3^2}{1 + \left[\frac{(\gamma-1)}{2} \right] M_2^2} \right\}^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} = 4$$

de donde el número de Mach en el punto 3 será $M_3 = 0.109$. Obsérvese que la ecuación da también como posible solución $M_3 = 3.25$, pero este valor debe descartarse porque M_3 ha de ser forzosamente subsónico.

El número de Mach en el punto 4 se obtendrá partiendo de:

$$\frac{4C_f L_4^*}{D} = \frac{4C_f L_3^*}{D} - \frac{4C_f \Delta L}{D} = 56.03 - 1.15 = 54.9$$

El coeficiente de fricción entre los puntos 3 y 4, se ha obtenido mediante el diagrama de Moody y entrando con el valor de $\frac{\varepsilon_{3-4}}{D_3} = \frac{0.008}{100} = 0.00008$. Al igual que en el conducto anterior, se considera que el número de Reynolds asociado al fluido circulante es superior a 10^5 . Esta hipótesis también debe contrastarse.

Se obtiene que $f = 4 C_f = 0.0115$, en consecuencia, se establece que

$$\frac{4C_f \Delta L}{D} = \frac{0.0115 \cdot 10}{0.1} = 1.15$$

En las condiciones expuestas hasta el momento, el número de Mach en el punto 4 se obtendrá mediante la ecuación:

$$54.9 = \frac{1 - M_4^2}{\gamma M_4^2} + \frac{\gamma + 1}{2\gamma} \ln \left(\frac{(\gamma + 1) M_4^2}{2 \left\{ 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_4^2 \right\}} \right)$$

de donde:

$$M_4 = 0.11$$

La relación de presión teórica en los puntos 1 y 4 viene definida por los términos siguientes:

$$\frac{P_{01}}{P_4} = \frac{P_{01}}{P_{02}} \frac{P_{02}}{P_{03}} \frac{P_{03}}{P_{04}} \frac{P_{04}}{P_4}$$

Entre los puntos 1 y 2, la relación de presión se obtiene a partir de la operación siguiente:

$$\frac{P_{01}}{P_{02}} = \frac{P_{01}}{P_0^*} \frac{P_0^*}{P_{02}}$$

de donde cada una de las relaciones restantes se determina al sustituir el número de Mach en los puntos 1 y 2 ($M_1 = 0.38$, $M_2 = 0.5$, respectivamente) en las expresiones siguientes:

$$\frac{P_{01}}{P_0^*} = \frac{1}{M_1} \left\{ \frac{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2}{\frac{\gamma + 1}{2}} \right\}^{\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}} = 1.65; \quad \frac{P_{02}}{P_0^*} = \frac{1}{M_2} \left\{ \frac{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_2^2}{\frac{\gamma + 1}{2}} \right\}^{\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}} = 1.34$$

de donde:

$$\frac{P_{01}}{P_{02}} = \frac{P_{01}}{P_0^*} \frac{P_0^*}{P_{02}} = 1.65 \frac{1}{1.34} = 1.23$$

En la tobera, el flujo es isentrópico; por tanto, $\frac{P_{02}}{P_{03}} = 1$

Entre los puntos 3 y 4, la relación de presión se obtiene a partir de la operación siguiente:

$$\frac{P_{03}}{P_{04}} = \frac{P_{03}}{P_0^*} \frac{P_0^*}{P_{04}}$$

de donde cada una de las relaciones restantes se determina al sustituir el número de Mach en los puntos 3 y 4 ($M_3 = 0.109$, $M_4 = 0.11$ respectivamente) en las expresiones siguientes:



$$\frac{P_{03}}{P_0^*} = \frac{1}{M_3} \left\{ \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_3^2}{\frac{\gamma+1}{2}} \right\}^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} = 5.36 \quad ; \quad \frac{P_{04}}{P_0^*} = \frac{1}{M_4} \left\{ \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_4^2}{\frac{\gamma+1}{2}} \right\}^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} = 5.31$$

de donde:

$$\frac{P_{03}}{P_{04}} = \frac{P_{03}}{P_0^*} \frac{P_0^*}{P_{04}} = 5.36 \frac{1}{5.31} = 1.01$$

Para $M_4 = 0.11$, se obtiene:

$$\frac{P_{04}}{P_4} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_4^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = 1.01$$

Sustituyendo las relaciones halladas, la relación de presión teórica entre 1 y 4 es:

$$\frac{P_{01}}{P_4} = \frac{P_{01}}{P_{02}} \frac{P_{02}}{P_{03}} \frac{P_{03}}{P_{04}} \frac{P_{04}}{P_4} = 1.23 \cdot 1 \cdot 1.01 \cdot 1.01 = 1.25$$

Obsérvese que la relación de presión teórica calculada entre los extremos del conducto es inferior a la relación de presión real. Ello implica que el valor del número de Mach en el punto 2 debe estar comprendido entre el extremo superior y la estimación de M_2 en la presente iteración. Por tanto, en la iteración siguiente, el intervalo posible en que se hallará el número de Mach en 2 será:

- Extremo inferior del intervalo: 0.5
- Extremo superior: 1
- Número de Mach estimado en el punto 2: 0.75

Este proceso iterativo debe llevarse a cabo hasta que finalmente la diferencia entre la relación de presión teórica y la relación de presión real sea prácticamente nula. En la tabla siguiente, se muestran los intervalos que resultan para cada iteración, la estimación del número de Mach realizada y la relación de presión teórica calculada hasta obtener una relación suficientemente próxima para darla como válida.

Iteración	Extremo inferior	Extremo superior	M_2 estimada	Relación de presión teórica calculada
1	0	1	0.5	1.25
2	0.5	1	0.75	1.43
3	0.5	0.75	0.625	1.35
4	0.5	0.625	0.5625	1.30
5	0.5625	0.625	0.5938	1.327
6	0.5938	0.625	0.6094	1.339
7	0.5938	0.6094	0.6016	1.333

Se ha considerado que la relación obtenida en la séptima iteración era suficientemente próxima a la real para concluir que se había llegado a la solución final. Los números de Mach y las relaciones de presión obtenidas son las siguientes:

- Números de Mach:

$$M_1 = 0.4146 ; M_2 = 0.6016 ; M_3 = 0.1231 ; M_4 = 0.1246$$

- Relaciones de presión:

$$\frac{P_{01}}{P_{02}} = 1.302 ; \frac{P_{02}}{P_{03}} = 1 ; \frac{P_{03}}{P_{04}} = 1.012 ; \frac{P_{04}}{P_4} = 1.011$$

- Relación de presión teórica entre los puntos 1 y 4:

$$\frac{P_{01}}{P_4} = \frac{P_{01}}{P_{02}} \cdot \frac{P_{02}}{P_{03}} \cdot \frac{P_{03}}{P_{04}} \cdot \frac{P_{04}}{P_4} = 1.302 \cdot 1 \cdot 1.012 \cdot 1.011 \cong 1.33$$

A partir de las relaciones de presión y conociendo la presión de estancamiento en el punto 1, es inmediato obtener las demás presiones en los puntos analizados:

$$P_{02} = P_{01} \cdot \frac{P_{02}}{P_{01}} = 4 \cdot \frac{1}{1.302} \cdot 10^5 \text{ Pa} = 3.07 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

$$P_{03} = P_{02} \cdot \frac{P_{03}}{P_{02}} = 3.07 \cdot 10^5 \cdot 1 = 3.07 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

$$P_{04} = P_{03} \cdot \frac{P_{04}}{P_{03}} = 3.07 \cdot 10^5 \cdot \frac{1}{1.012} = 3.03 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

$$P_4 = P_{04} \cdot \frac{P_4}{P_{04}} = 3.03 \cdot 10^5 \cdot \frac{1}{1.011} = 3 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

Conocidas las presiones de estancamiento en todos los puntos, las presiones estáticas se determinan mediante la ecuación:

$$\frac{P_0}{P} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$

Sustituyendo en esta expresión los números de Mach y las presiones de estancamiento existentes en cada punto, se obtiene la presión estática en dichos puntos:

$$P_1 = 3.55 \cdot 10^5 \text{ Pa} ; P_2 = 2.41 \cdot 10^5 \text{ Pa} ; P_3 = 3.04 \cdot 10^5 \text{ Pa} ; P_4 = 3 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

La temperatura de estancamiento es igual en todos los puntos, $T_0 = 370 \text{ K}$. Por consiguiente, la temperatura estática en cada uno de los puntos de la instalación se puede determinar utilizando la ecuación:

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2$$



Sustituyendo en esta expresión los números de Mach y las temperaturas de estancamiento existentes en cada punto, se obtiene la temperatura estática en dichos puntos:

$$T_1 = 357.7 \text{ K}; T_2 = 345.03 \text{ K}; T_3 = 368.88 \text{ K}; T_4 = 368.85 \text{ K}$$

El caudal másico circulante se obtiene a partir de la expresión siguiente:

$$\dot{m} = \sqrt{\gamma} \left(\frac{P_0 A}{\sqrt{RT_0}} \right) M \left[1 + \left(\frac{\gamma - 1}{2} \right) M^2 \right]^{-\left(\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)} \right)}$$

Utilizando las condiciones del flujo en el punto 2, resulta:

$$\dot{m} = \sqrt{1.4} \left(\frac{2.41 \cdot 10^5 \cdot \pi \cdot \frac{0.05^2}{4}}{\sqrt{287 \cdot 370}} \right) \cdot 0.6016 \cdot \left[1 + \left(\frac{1.4 - 1}{2} \right) 0.6016^2 \right]^{-\left(\frac{1.4 + 1}{2(1.4 - 1)} \right)} \cong 1.07 \text{ kg/s}$$

Por último, es necesario verificar la hipótesis inicial en que se establecía que el número de Reynolds es elevado ($\gg 10^5$) y que, en consecuencia, el factor de fricción sea correcto.

En los conductos de menor y mayor diámetro, el número de Reynolds se puede definir como:

$$Re = \frac{VD}{\nu} = \frac{VD\rho A}{\mu A} = \frac{\dot{m}D}{\mu \frac{\pi D^2}{4}} = \frac{\dot{m}4}{\pi D\mu}$$

Sustituyendo el caudal másico hallado anteriormente, la viscosidad dinámica ($\mu = 21.81 \cdot 10^{-6} \text{ kg/(m s)}$) y cada uno de los diámetros:

- Conducto de menor diámetro ($D = 0.05 \text{ m}$): $Re = 1.25 \cdot 10^6$
- Conducto de mayor diámetro ($D = 0.1 \text{ m}$): $Re = 6.24 \cdot 10^5$

Con estos valores del número de Reynolds y las respectivas rugosidades relativas, del diagrama de Moody se obtienen los factores de fricción siguientes; para el tramo 1-2, $f = 0.014$ y, para el tramo 3-4, $f = 0.0138$. Dado que en ambos tramos el factor de fricción difiere considerablemente respecto al estimado inicialmente, deberían volverse a realizar todos los cálculos de este apartado con estos nuevos factores de fricción, ejercicio que se deja para el lector.

CASO 4

Programa para resolver cualquiera de los casos posibles.

En el esquema siguiente, se especifica el proceso de ejecución del programa que permitiría resolver el enunciado de forma genérica. En el apéndice de este problema, se incluye un código de ejemplo en MATLAB®

Nótese que este esquema y, por tanto, el programa, únicamente podrá ejecutarse si el depósito a mayor presión está unido al extremo del conducto de menor diámetro. Esta condición es imprescindible para que se cumpla el contexto de flujo a través de una tobera divergente y, de este modo, todo el razonamiento y las instrucciones dadas sean válidos.

Las condiciones de contorno, las propiedades físicas y la geometría deben introducirse antes de iniciar los apartados siguientes:

- 1- Determinar si el flujo está bloqueado en el punto 2.
 - 1.1- Suponer que está bloqueado y, en consecuencia, imponer que el número de Mach en 2 es igual a 1.
 - 1.2- Calcular el número de Mach en 1 y determinar la presión y las temperaturas de estancamiento y estática en los puntos 1 y 2.
 - 1.3- Suponer que no hay onda de choque en ningún punto del conducto.
 - 1.4- Calcular el número de Mach en 3, y determinar la presión y las temperaturas de estancamiento y estática en este punto (bajo la hipótesis de flujo isentrópico).
En este cálculo, se obtienen dos soluciones para el número de Mach: una solución con Mach mayor que 1 y otra solución con Mach menor que 1.
 - 1.5- Calcular el número de Mach en 4 y determinar la presión y las temperaturas de estancamiento y estática en este punto.
Debido a que en el punto 3 se obtienen dos soluciones, se hallarán dos números de Mach en el punto 4. Incluso es posible que uno de estos valores tenga que ser descartado porque da un valor imposible.
Si, para las dos soluciones obtenidas en el punto 3, el número de Mach en el punto 4 no es calculable o su valor es imposible, el flujo no puede estar bloqueado en 2. (En este caso, véase el apartado 5)
 - 1.6- Determinar la relación de presión teórica entre los puntos 1 y 4. Entre las relaciones calculadas, en el caso de flujo subsónico en todo punto excepto en el punto 2, se debe considerar lo siguiente:
 - Si la relación de presión teórica es inferior a la relación de presión real, el flujo estará bloqueado en el punto 2 del conducto. En este caso, se deberá determinar la posible existencia de una onda de choque en la tobera o en el tramo definido entre los puntos 3 y 4. Proceder según se indica en el apartado 2 de este esquema.
 - Si la relación de presión teórica es superior a la relación de presión real, el flujo no estará bloqueado en el punto 2 y el flujo será subsónico en cualquier punto. En este caso, se deben recalcular todas las magnitudes como se menciona en el apartado 5 de este esquema. (Los cálculos y los procedimientos a realizar se indican en el apartado 5)
 - Si la diferencia entre la relación de presión teórica y la relación de presión real es prácticamente nula (p. ej., inferior a $1e-3$), el flujo



estará bloqueado en el punto 2 y, además, se habrá llegado a la solución. El flujo será subsónico en el primer conducto y en el segundo, así como en la tobera.

- 1.7 Determinar la relación de presión teórica entre los puntos 1 y 4. Entre las relaciones calculadas, en el caso de flujo supersónico en todo punto, excepto en el punto 2, debe considerarse lo siguiente:
 - Si la relación de presión teórica es inferior a la relación de presión real, el flujo estará bloqueado en el punto 2 del conducto; en los puntos 3 y 4, el flujo será supersónico y en el punto 4 existirá una expansión brusca del fluido.
 - Si la relación de presión teórica es superior a la relación de presión real, el flujo estará bloqueado en el punto 2; en el punto 4, el flujo será subsónico; en el punto 3, el flujo puede ser supersónico o no, y puede que existan ondas de choque entre 3 y 4, o bien en 3, o entre 2 y 3. Ir al apartado 2 del presente esquema.
 - Si la diferencia entre la relación de presión teórica y la relación de presión real es prácticamente nula (p. ej., inferior a $1e-3$), el flujo estará bloqueado en el punto 2 y, además, se habrá llegado a la solución. El flujo será subsónico en el primer conducto y supersónico en la tobera y en el segundo conducto.
- 2- Determinar la posición de la onda de choque sabiendo que el flujo está bloqueado en el punto 2 del conducto.
 - 2.1- Suponer que la onda de choque se produce en el punto 3 del conducto.
 - 2.2- Calcular el número de Mach aguas abajo de la onda de choque teniendo en cuenta que el número de Mach aguas arriba es supersónico y ha sido calculado en el apartado 1.4. Véase que los valores del número de Mach, la presión y la temperatura en los puntos 1 y 2 del conducto se mantienen.
 - 2.3- Calcular el número de Mach en 4, determinar la presión y las temperaturas de estancamiento y estática en este punto.

Si este número de Mach en 4 no es calculable, es posible que haya una onda de choque en la tobera. (Si se da este caso, véase el apartado 3 de este esquema).
 - 2.4- Determinar la relación de presión teórica entre los puntos 1 y 4. Entonces:
 - Si la relación de presión teórica es superior a la relación de presión real, es posible que haya una onda de choque en el interior de la tobera divergente, en un punto situado entre los puntos 2 y 3. (Los cálculos y los procedimientos a realizar para determinar la posición de la onda de choque en este tramo considerado, se especifican en el apartado 3.)
 - Si la relación de presión teórica es inferior a la relación de presión real, es posible que haya una onda de choque en punto situado entre los puntos 3 y 4 del conducto. Al mismo tiempo, se puede dar el caso de que el flujo se pueda llegar a bloquear en 4. (Los

cálculos y los procedimientos a realizar para determinar la posición de la onda de choque en este tramo considerado, se especifican en el apartado 4.)

- Si la diferencia entre la relación de presión teórica y la relación de presión real es prácticamente nula (p. ej., inferior a $1e-3$), existe una onda de choque en el punto 3 y, además, se habrá llegado a la solución.

3- Determinar en qué posición de la tobera (tramo del conducto entre los puntos 2 y 3) se encuentra la onda de choque y comprobar la relación de presión. Para determinar esta posición, se realiza el método de la bisección. Por tanto, para cada iteración será necesario definir un intervalo posible donde se situará la onda de choque. Ello implica definir los extremos superior e inferior del intervalo y el punto intermedio donde se estima que estará situada la onda de choque. Según el método de la bisección, este punto intermedio estará situado justo en la mitad del intervalo. A continuación, se presentan los pasos a seguir para determinar la posición de la onda de choque:

- 3.1- Suponer inicialmente que la onda de choque se encuentra en un punto intermedio entre 2 y 3. Se establece el punto 2 como el extremo inferior; el punto 3 como el extremo superior del intervalo inicial de cálculo para definir la posición, y, por último, se sitúa la posición de la onda de choque en la mitad de este intervalo.
- 3.2- Calcular el número de Mach aguas arriba y aguas abajo de la onda de choque en el punto estimado, intermedio a los dos extremos determinados del intervalo considerado. Se conservan los valores de las magnitudes en los puntos 1 y 2 del conducto.
- 3.3- Calcular de nuevo el número de Mach en los puntos 3 y 4. Además, determinar el valor de presión y de las temperaturas de estancamiento y estática en cada uno de los puntos.
- 3.4- Determinar la relación de presión teórica entre los puntos 1 y 4. Entonces:
 - Si la relación de presión teórica es inferior a la relación de presión real, la onda deberá estar situada en un punto intermedio entre la posición actual de la onda de choque y el extremo superior del intervalo definido en la presente iteración.
En este caso, se debe realizar una nueva iteración. (Volver al apartado 3.2.)
 - Si la relación de presión teórica es inferior a la relación de presión real y el número de Mach en el punto 4 es muy próximo a la unidad, $1-M_4 < \delta$, el flujo estará bloqueado en el punto 4, la onda estará situada en el punto calculado y el fluido experimentará una expansión al llegar al segundo depósito.
 - Si la relación de presión teórica es superior a la relación de presión real, la onda deberá estar situada en un punto intermedio entre la posición actual de la onda de choque y el extremo inferior del



intervalo definido en la presente iteración. En este caso, se debe realizar una nueva iteración (volver al apartado 3.2.)

- Si la diferencia entre la relación de presión teórica y la relación de presión real es prácticamente nula (p. ej., inferior a $1e-3$), la onda estará situada en el punto de cálculo.
- 4- Determinar en qué posición del conducto comprendido entre 3 y 4 se encuentra la onda de choque y comprobar la relación de presión. Para determinar esta posición, se realiza el método de la bisección. Por tanto, para cada iteración es necesario definir un intervalo posible donde se situará la onda de choque. Ello implica definir los extremos superior e inferior del intervalo y el punto intermedio donde se estima que estará situada la onda de choque. Según el método de la bisección, este punto intermedio estará situado justo en la mitad del intervalo. A continuación, se presentan los pasos a seguir para determinar la posición de la onda de choque:
- 4.1- Suponer inicialmente que la onda de choque se encuentra en un punto intermedio entre los puntos 3 y 4. Se establece el punto 3 como extremo inferior, el punto 4 como extremo superior del intervalo inicial de cálculo para definir la posición, y, por último, se sitúa la posición de la onda de choque en la mitad de este intervalo.
 - 4.2- Calcular el número de Mach aguas arriba y aguas abajo de la onda de choque en el punto estimado, intermedio a los dos extremos determinados. Se conservan los valores de las magnitudes en los puntos 1, 2 y 3 (supersónico) del conducto.
 - 4.3- Calcular el número de Mach en el punto 4. Además, determinar el valor de la presión y las temperaturas de estancamiento y estática en cada uno de los puntos.
- Nota para los apartados 4.2 y 4.3.** En el cálculo del número de Mach aguas arriba o en el punto 4, es posible que la solución no converja. Ello se debe a que la diferencia de longitud entre el extremo inferior y el punto donde se ha situado la onda de choque es demasiado grande. En este caso, es necesario estimar una nueva posición, que estará en un punto intermedio entre el extremo inferior y la posición anterior de cálculo. Consecutivamente, realizar lo indicado en los apartados 4.2 y 4.3. Si se vuelve a dar la no convergencia de la solución, se deben realizar de nuevo los pasos definidos en esta nota.
- 4.4- Determinar la relación de presión teórica entre los puntos 1 y 4. Entonces:
 - Si la relación de presión teórica es inferior a la relación de presión real y el número de Mach en el punto 4 no es próximo a la unidad, la onda deberá estar situada en un punto intermedio entre el calculado y el extremo superior del tramo de cálculo. En este caso, se debe realizar una nueva iteración (volver al apartado 4.2)
 - Si la relación de presión teórica es inferior a la relación de presión real y la posición estimada de la onda de choque en la presente iteración se encuentra en el punto 4, ello significa que el flujo será

supersónico entre los puntos 2 y 4 y, en consecuencia, no existirá onda de choque.

- Si la relación de presión teórica es inferior a la relación de presión real y el número de Mach en el punto 4 es muy próximo a la unidad, $1-M_4 < \delta$, el flujo estará bloqueado en el punto 4, la onda estará situada en el punto calculado y el fluido experimentará una expansión al llegar al segundo depósito.
- Si la relación de presión teórica es superior a la relación de presión real, la onda deberá estar situada en un punto intermedio entre el calculado y el extremo inferior del tramo de cálculo. En este caso, se debe realizar una nueva iteración (volver al apartado 4.2)
- Si la diferencia entre la relación de presión teórica y la relación de presión real es prácticamente nula (p. ej., inferior a $1e-3$), la onda estará situada en el punto de cálculo.

5- Determinar para el flujo subsónico el número de Mach, la presión y la temperatura en cada uno de los puntos definidos.

5.1- Suponer un primer valor para el número de Mach en 2, que estará comprendido entre 0 y 1, $0 < M_2 < 1$.

Para hallar M_2 y el resto de magnitudes se utiliza también el método de la bisección. Por tanto, el primer valor escogido para M_2 es 0.5 Mach. El extremo inferior es 0 y el extremo superior es 1.

5.2- Calcular el número de Mach en 1 y determinar la presión y las temperaturas de estancamiento y estática en los puntos 1 y 2.

5.3- Calcular el número de Mach en 3 y determinar la presión y las temperaturas de estancamiento y estática en este punto (en la hipótesis de flujo isentrópico)

Véase que ahora el número de Mach en el punto 3 ha de ser forzosamente subsónico.

5.4- Calcular el número de Mach en 4 y determinar la presión y las temperaturas de estancamiento y estática en este punto.

5.5- Determinar la relación de presión teórica entre los puntos 1 y 4. Entonces:

- Si la relación de presión teórica es superior a la relación de presión real, el número de Mach en 2 estará comprendido entre el extremo inferior y el número calculado. El nuevo extremo superior para la iteración siguiente será el número de Mach calculado en la iteración actual. Para este caso, se debe realizar una nueva iteración (volver al apartado 5.2)
- Si la relación de presión teórica es inferior a la relación de presión real, el número de Mach en 2 estará comprendido entre el extremo superior y el número calculado. El nuevo extremo inferior para la iteración siguiente será el número de Mach calculado en la iteración actual. Para este caso, se debe realizar una nueva iteración (volver al apartado 5.2)



- Si la diferencia entre la relación de presión teórica y la relación de presión real es prácticamente nula (p. ej., inferior a $1e-3$), se habrá determinado cuál es el número de Mach en el punto 2 y, además, se habrán hallado las demás magnitudes en todos los puntos de cálculo.



Problema 10

Enunciado

La figura 10.1 muestra el modelo de la aeronave hipersónica *X43*. Obsérvese que, en realidad, el vehículo consta de una cuña formada por dos planos inclinados en que la inclinación del plano inferior cambia a partir de una cierta coordenada X respecto del origen del aeroplano. La figura 10.2 muestra un esquema de las dimensiones y los ángulos estimados asociados a cada plano: véase que, en esta estimación la aeronave tiene 5 m de longitud y 1 m de anchura. El índice de adiabaticidad se supondrá, en todo momento, igual a $\gamma = 1.4$.

Suponiendo que se quiere que el avión vuele a un número de Mach 7 y a una altura de 30.000 m, donde se conoce que $P_0 = P_\infty = 1.197 \text{ Pa}$ y $T_0 = T_\infty = 226.5 \text{ K}$, se desea:

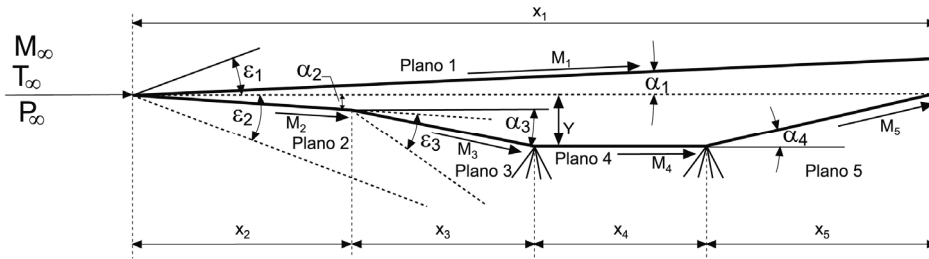
- 1.- Hallar el número de Mach, la inclinación de las ondas de choque oblicuas y las expansiones de Prandtl-Meyer sobre los planos correspondientes, omitiendo el plano vertical trasero del aeroplano.
- 2.- Estimar la presión y la temperatura existentes en cada uno de los planos inclinados.
- 3.- Calcular la fuerza de arrastre y sustentación que el fluido ejerce sobre el aeroplano, la potencia que deberían tener los motores para el caso definido en los apartados precedentes del problema.
- 4.- Definir un programa que determine todos los parámetros solicitados en los apartados anteriores y que, además, permita realizar los cálculos para diferentes velocidades de la aeronave, ángulos característicos del vehículo y condiciones termodinámicas del aire.



Fig. 10.1
Fotografía
aproximada
del avión
supersónico no
tripulado X43.
Fuente: NASA



Fig. 10.2
Esquema de las
dimensiones
estimadas y de los
ángulos asociados
a cada uno de los
planos inclinados



Las dimensiones conocidas son:

$X_1 = 5 \text{ m}$; $X_2 = 1.5 \text{ m}$; $X_3 = 1 \text{ m}$; $X_4 = 1 \text{ m}$; $X_5 = 1.5 \text{ m}$;

$\alpha_1 = 8^\circ$; $\alpha_2 = 12^\circ$; $\alpha_3 = 25^\circ$; $\alpha_4 = 30^\circ$;

Constante del aire, $R = 287 \text{ (J/(kg K))}$

Resolución

1, 2.- Puesto que los planos inclinados en la parte superior e inferior del vehículo poseen diferentes ángulos de inclinación, se realizará el estudio por separado.

1a, 2a. -Determinación de las características del fluido en la parte superior.

Partiendo del número de Mach aguas arriba, $M_\infty = 7$, y del ángulo de inclinación del plano superior, $\alpha_1 = 8^\circ$ ($\alpha_1 = 0.1396 \text{ rad}$), y utilizando la ecuación siguiente, se puede obtener el ángulo que formará la onda de choque oblicua respecto de la horizontal ε_1 .

$$\frac{1}{\tan \alpha_1} = \left[\frac{(\gamma + 1)}{2} \left(\frac{M_\infty^2}{M_\infty^2 \sin^2 \varepsilon_1 - 1} \right) - 1 \right] \tan \varepsilon_1 \quad (1)$$

Para resolver esta ecuación y obtener sus raíces, es necesario un dominio en que la ecuación no lineal sea continua. El límite inferior de este dominio vendrá definido por la condición de continuidad de la ecuación anterior.

$$M_\infty^2 \sin^2 \varepsilon_{\min} > 1$$

Por tanto, $\varepsilon_{\min}$ será:

$$\varepsilon_{\min} = \arcsin \left(\frac{1}{M_\infty} \right) = 0.1433 \text{ rad} = 8.213^\circ$$

El límite superior de este dominio será un ángulo igual o menor que el ángulo máximo posible para que la onda esté adherida. Este límite se determina mediante la expresión siguiente:

$$\varepsilon_{\max} = \arcsin \left(\sqrt{\frac{1}{\gamma M_\infty^2} \left\{ \frac{\gamma + 1}{4} M_\infty^2 - 1 + \left[(\gamma + 1) \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_\infty^2 + \frac{\gamma + 1}{16} M_\infty^4 \right) \right]^{\frac{1}{2}} \right\}} \right)$$



Sustituyendo valores, se obtiene:

$$\varepsilon_{\max} = 1.1716 \text{ rad} = 67.13^\circ$$

Resolviendo la ecuación 1 entre los límites establecidos $\varepsilon_1 \in (8.213^\circ, 67.13^\circ)$, se obtiene que el ángulo de inclinación de la onda de choque oblicua es:

$$\varepsilon_1 = 0.2525 \text{ rad} = 14.464^\circ$$

El número de Mach asociado al flujo incidente y perpendicular a la onda de choque, se obtiene mediante la relación siguiente: $M_{N\infty} = M_\infty \sin(\varepsilon_1)$; de donde $M_{N\infty} = 1.7484$.

El número de Mach después de la onda de choque y perpendicular al plano generado por esta será:

$$M_{N1}^2 = \frac{M_{N\infty}^2 + \left[\frac{2}{(\gamma-1)} \right]}{\left[\frac{2\gamma}{(\gamma-1)} \right] M_{N\infty}^2 - 1}; M_{N1} = 0.6285$$

Para obtener el número de Mach después de la onda de choque y paralelo a la superficie inclinada M_1 , se utiliza la ecuación:

$$M_1 = \frac{M_{N1}}{\sin(\varepsilon_1 - \alpha_1)} = \frac{0.6285}{\sin(0.2525 - 0.1396)} = 5.582$$

La presión y la temperatura sobre la superficie superior se determinan del modo siguiente:

$$\frac{P_1}{P_\infty} = \frac{2\gamma}{\gamma+1} M_{N\infty}^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} = \frac{2.8}{2.4} 1.7485^2 - \frac{0.4}{2.4} = 3.4$$

con lo cual la presión en el plano 1 será: $P_1 = 3.4 \cdot 1197 = 4069.7 \text{ Pa}$

$$\frac{T_1}{T_\infty} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_{N\infty}^2 \right) \left(\frac{2\gamma}{\gamma-1} M_{N\infty}^2 - 1 \right) \left(\frac{2(\gamma-1)}{(\gamma+1)^2 M_{N\infty}^2} \right) = 1.4934$$

$$T_1 = 226.5 \cdot 1.4934 = 338.3 \text{ K}$$

1b, 2b. -A partir de este punto, el proceso debe repetirse con el fin de determinar los números de Mach correspondientes a la parte inferior de la aeronave.

Determinación del número de Mach en la superficie 2. Para un número de Mach $M_\infty = 7$ y un ángulo de ataque $\alpha_2 = 12^\circ$ ($\alpha_2 = 0.2094 \text{ rad}$), (v. fig. 10.3), el ángulo de la onda de choque oblicua ε_2 será determinado mediante la expresión siguiente:

$$\frac{1}{\tan \alpha_2} = \left[\frac{(\gamma+1)}{2} \left(\frac{M_\infty^2}{M_\infty^2 \sin^2 \varepsilon_2 - 1} \right) - 1 \right] \tan \varepsilon_2 \quad (2)$$



Los límites inferior y superior de cálculo serán:

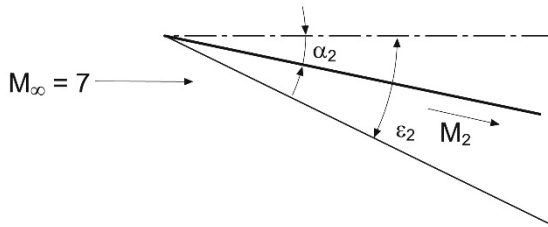
$$\varepsilon_{\min} = \arcsin\left(\frac{1}{M_{\infty}}\right) = 0.1433 \text{ rad} = 8.213^{\circ}$$

$$\varepsilon_{\max} = \arcsin\left(\sqrt{\frac{1}{\gamma M_{\infty}^2} \left\{ \frac{\gamma+1}{4} M_{\infty}^2 - 1 + \left[(\gamma+1) \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_{\infty}^2 + \frac{\gamma+1}{16} M_{\infty}^4 \right) \right]^{\frac{1}{2}} \right\}}\right)$$

$$\varepsilon_{\max} = 1.1716 \text{ rad} = 67.13^{\circ}$$

Estableciendo de nuevo el dominio: $\varepsilon_2 \in (8.213^{\circ}, 67.13^{\circ})$, a partir de la ecuación 2, se obtiene que el ángulo de la onda de choque oblicua ε_2 tomará un valor de $\varepsilon_2 = 0.3212$ rad; $\varepsilon_2 = 18.40^{\circ}$

Fig. 10.3
Esquema de
la onda de
choque en la
parte frontal
inferior de la
aeronave



El número de Mach normal a la onda de choque, se obtiene mediante la relación siguiente: $M_{N\infty(\text{inf})} = M_{\infty} \sin(\varepsilon_2)$, de donde $M_{N\infty(\text{inf})} = 2.21$.

El número de Mach después de la onda de choque y perpendicular al plano generado por esta será:

$$M_{N2}^2 = \frac{M_{N\infty(\text{inf})}^2 + \left[\frac{2}{(\gamma-1)} \right]}{\left[\frac{2\gamma}{(\gamma-1)} \right] M_{N\infty(\text{inf})}^2 - 1}; M_{N2} = 0.5457$$

El número de Mach paralelo a la superficie inclinada después de la onda de choque inferior, M_2 , se obtiene mediante la ecuación:

$$M_2 = \frac{M_{N2}}{\sin(\varepsilon_2 - \alpha_2)} = \frac{0.5457}{\sin(0.3212 - 0.2094)} = 4.893$$

La presión y la temperatura en la superficie inferior serán:

$$\frac{P_2}{P_{\infty}} = \frac{2\gamma}{\gamma+1} M_{N\infty(\text{inf})}^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} = \frac{2.8}{2.4} 2.21^2 - \frac{0.4}{2.4} = 5.531$$



con lo cual la presión en el plano 1 será: $P_2 = 5.531 \cdot 1197 = 6620.48 \text{ Pa}$

$$\frac{T_2}{T_\infty} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_{N\infty(\text{inf})}^2\right) \left(\frac{2\gamma}{\gamma-1} M_{N\infty(\text{inf})}^2 - 1\right) \left(\frac{2(\gamma-1)}{(\gamma+1)^2 M_{N\infty(\text{inf})}^2}\right) = 1.8656$$

$$T_2 = 226.5 \cdot 1.8657 = 422.6 \text{ K}$$

1c, 2c. -Determinación del número de Mach en la superficie 3, donde el ángulo de esta superficie con respecto a la horizontal es de $\alpha_3 = 25^\circ$. Las condiciones de partida son $M_2 = 4.893$, P_2 y T_2 , y el ángulo de inclinación que ve el flujo es de $\alpha_{3(\text{new})} = \alpha_3 - \alpha_2 = 13^\circ$ ($\alpha_{3(\text{new})} = 0.22689 \text{ rad}$).

Sustituyendo $M_2 = 4.893$ y $\alpha_{3(\text{new})} = 13^\circ$ en la ecuación siguiente:

$$\frac{1}{\tan \alpha_{3(\text{new})}} = \left[\frac{(\gamma+1)}{2} \left(\frac{M_2^2}{M_2^2 \sin^2 \varepsilon_3 - 1} \right) - 1 \right] \tan \varepsilon_3$$

El ángulo de inclinación de la onda de choque será: $\varepsilon_3 = 0.393 \text{ rad}$; $\varepsilon_3 = 22.51^\circ$. Nótese que este ángulo de inclinación de la onda de choque oblicua ha de ser medido con respecto a la dirección del flujo, es decir, la dirección del M_2 .

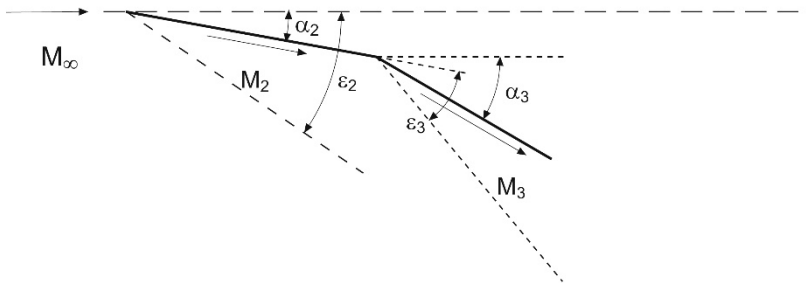


Fig. 10.4
Esquema de la segunda onda de choque en la parte inferior de la aeronave.

Para obtener el ángulo anterior, ε_3 , siguiendo el mismo procedimiento aplicado en anteriores superficies, ha sido necesario establecer el dominio de cálculo. Los límites que se han obtenido han sido los siguientes:

$$\varepsilon_{\min} = \text{asin} \left(\frac{1}{M_2} \right) = 0.2058 \text{ rad} = 11.8^\circ$$

$$\varepsilon_{\max} = \text{asin} \left(\sqrt{\frac{1}{\gamma M_2^2} \left\{ \frac{\gamma+1}{4} M_2^2 - 1 + \left[(\gamma+1) \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2 + \frac{\gamma+1}{16} M_2^4 \right) \right]^{\frac{1}{2}} \right\}} \right)$$

$$\varepsilon_{\max} = 1.1613 \text{ rad} = 66.54^\circ$$

El número de Mach normal a la onda de choque será: $M_{N(2-3)} = M_2 \sin(\varepsilon_3)$, de donde $M_{N(2-3)} = 1.873$.



El número de Mach después de la onda de choque y perpendicular al plano generado por esta será:

$$M_{N3}^2 = \frac{M_{N(2-3)}^2 + \left[\frac{2}{(\gamma-1)} \right]}{\left[\frac{2\gamma}{(\gamma-1)} \right] M_{N(2-3)}^2 - 1}; M_{N3} = 0.601$$

El número de Mach paralelo a la superficie inclinada después de la onda de choque inferior, M_3 , se obtiene mediante la ecuación:

$$M_3 = \frac{M_{N3}}{\sin(\epsilon_3 - \alpha_{3(\text{new})})} = \frac{0.601}{\sin(0.393 - 0.2269)} = 3.64$$

La presión y la temperatura existentes sobre la superficie número 3 son:

$$\frac{P_3}{P_2} = \frac{2\gamma}{\gamma+1} M_{N(2-3)}^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} = \frac{2.8}{2.4} 1.873^2 - \frac{0.4}{2.4} = 3.927$$

con lo cual la presión en el plano 1 será: $P_3 = 3.927 \cdot 6620.48 = 25998 \text{ Pa}$

$$\frac{T_3}{T_2} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_{N(2-3)}^2 \right) \left(\frac{2\gamma}{\gamma-1} M_{N(2-3)}^2 - 1 \right) \left(\frac{2(\gamma-1)}{(\gamma+1)^2 M_{N(2-3)}^2} \right) = 1.587$$

$$T_3 = 422.6 \cdot 1.587 = 670.7 \text{ K}$$

1d, 2d. -Determinación del número de Mach, la presión y la temperatura sobre la superficie horizontal 4.

Entre las secciones 3 y 4 aparecen ondas de expansión de Prandtl-Meyer, con lo cual el paso siguiente es determinar el ángulo $\eta_{3-4(\text{inf})}$ necesario para que, partiendo de un número de Mach la unidad, se obtenga el número de Mach $M_3 = 3.64$. De la ecuación siguiente, se obtiene $\eta_{3-4(\text{inf})} = 1.0589 \text{ rad}$; $\eta_{3-4(\text{inf})} = 60.672^\circ$.

$$\eta_{3-4(\text{inf})} = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \tan^{-1} \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1} (M_3^2 - 1)} - \tan^{-1} \sqrt{(M_3^2 - 1)}$$

El ángulo requerido para determinar el número de Mach M_4 será de:

$$\eta_{3-4(\text{inf}_2)} = \eta_{3-4(\text{inf})} + \alpha_3 = 60.672 + 25 = 85.672^\circ; \eta_{3-4(\text{inf}_2)} = 1.4953 \text{ rad}.$$

Sustituyendo este valor en la ecuación siguiente, se obtiene el número de Mach requerido.



$$\eta_{3-4(\text{inf}_2)} = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \tan^{-1} \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1} (M_4^2 - 1)} - \tan^{-1} \sqrt{(M_4^2 - 1)}$$

El resultado es $M_4 = 6.106$

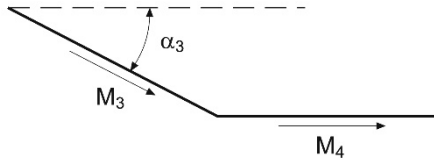


Fig. 10.5
Esquema de la
zona donde
aparece la
primera
expansión de
Prandtl-Meyer.

La presión y la temperatura sobre la superficie 4 se determinan partiendo de sus homólogas en la superficie 3 y utilizando las ecuaciones siguientes para flujo isentrópico.

$$\frac{T_4}{T_3} = \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_3^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_4^2} ; \quad \frac{P_4}{P_3} = \frac{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_3^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_4^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}$$

$$\frac{T_4}{T_3} = 0.4313 ; T_4 = 0.4313 \cdot 670.7 = 289.3 \text{ K}$$

$$\frac{P_4}{P_3} = 0.0527 ; P_4 = 0.0527 \cdot 25998 = 1370 \text{ Pa}$$

1e, 2e. -Por último, los parámetros asociados al flujo sobre el plano 5 se obtienen partiendo de los valores hallados sobre el plano 4 y considerando un proceso de expansión de Prandtl-Meyer.

Según Prandtl-Meyer, entre los planos 4 y 5 se procede inicialmente a determinar el ángulo $\eta_{4-5(\text{inf})}$ necesario para que, partiendo de un número de Mach la unidad, se obtenga el número de Mach $M_4 = 6.106$. De la ecuación siguiente, se obtiene:

$$\eta_{4-5(\text{inf})} = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \tan^{-1} \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1} (M_4^2 - 1)} - \tan^{-1} \sqrt{(M_4^2 - 1)}$$

$$\eta_{4-5(\text{inf})} = 1.495 \text{ rad}; \eta_{4-5(\text{inf})} = 85.672^\circ$$

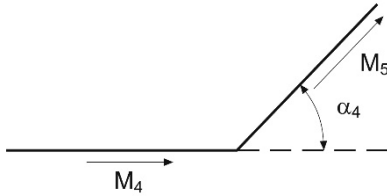
El ángulo requerido para determinar el número de Mach M_4 , será de:

$$\eta_{4-5(\text{inf}_2)} = \eta_{4-5(\text{inf})} + \alpha_4 = 85.672 + 30 = 110.672; \eta_{4-5(\text{inf}_2)} = 1.9316 \text{ rad.}$$

Sustituyendo este valor en la ecuación siguiente, se obtiene el número de Mach requerido.



Fig. 10.6
Esquema de la
zona donde
aparece la
segunda
expansión de
Prandtl-Meyer.



$$\eta_{4-5(\text{inf}_1)} = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \tan^{-1} \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1} (M_5^2 - 1)} - \tan^{-1} \sqrt{(M_5^2 - 1)}$$

El resultado es $M_5 = 14.355$

La presión y la temperatura sobre la superficie 5 se determinan partiendo de sus homólogas en la superficie 3 y utilizando las ecuaciones siguientes para flujo isentrópico.

$$\frac{T_5}{T_4} = \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_4^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_5^2} ; \quad \frac{P_5}{P_4} = \frac{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_4^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_5^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}$$

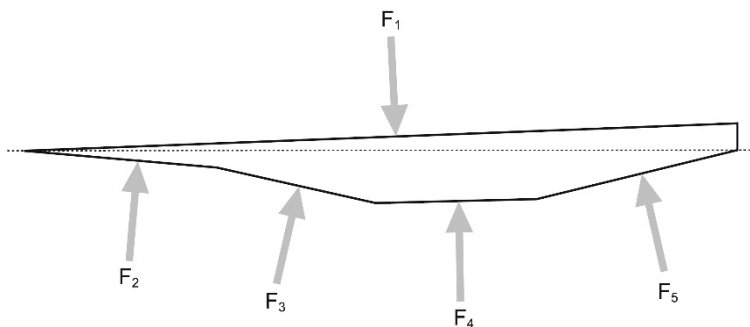
$$\frac{T_5}{T_4} = 0.2 ; T_5 = 0.2 \cdot 289.28 = 57.9 \text{ K}$$

$$\frac{P_5}{P_4} = 0.0036 ; P_5 = 0.0036 \cdot 1370.3 = 4.93 \text{ Pa}$$

Es importante observar la presión y la temperatura tan bajas que se obtienen sobre la superficie 5, con lo cual deberían replantearse las dimensiones de la aeronave.

- 3.- Las fuerzas de arrastre y sustentación sobre la aeronave se determinan partiendo de las presiones que actúan sobre cada una de las superficies. (No se considera la superficie trasera de la aeronave.)

Fig. 10.7
Esquema de
las diferentes
fuerzas que
actúan sobre
cada superficie
de la aeronave.





$$F_1 = P_1 \cdot (X_1 / \cos(\alpha_1)) = 4069.46 \cdot (5 / \cos(8^\circ)) = 20549 \text{ N}$$

$$F_2 = P_2 \cdot (X_2 / \cos(\alpha_2)) = 6620.48 \cdot (1.5 / \cos(12^\circ)) = 10153 \text{ N}$$

$$F_3 = P_3 \cdot (X_3 / \cos(\alpha_3)) = 25993 \cdot (1 / \cos(25^\circ)) = 28686 \text{ N}$$

$$F_4 = F_{4Y} = P_4 \cdot X_4 = 1570.9 \cdot 1 = 1370.3 \text{ N}$$

$$F_5 = P_5 \cdot (X_5 / \cos(\alpha_4)) = 1.47 \cdot (1.5 / \cos(30^\circ)) = 8.54 \text{ N}$$

$$F_{1X} = F_1 \cdot \sin(\alpha_1) = 2859.8 \text{ N} \quad ; \quad F_{1Y} = F_1 \cdot \cos(\alpha_1) = -20349 \text{ N}$$

$$F_{2X} = F_2 \cdot \sin(\alpha_2) = 2111 \text{ N} \quad ; \quad F_{2Y} = F_2 \cdot \cos(\alpha_2) = 9931.3 \text{ N}$$

$$F_{3X} = F_3 \cdot \sin(\alpha_3) = 12123 \text{ N} \quad ; \quad F_{3Y} = F_3 \cdot \cos(\alpha_3) = 25998 \text{ N}$$

$$F_{5X} = F_5 \cdot \sin(\alpha_4) = -4.27 \text{ N} \quad ; \quad F_{5Y} = F_5 \cdot \cos(\alpha_4) = 7.395 \text{ N}$$

Las fuerzas de arrastre y sustentación serán:

$$\text{Drag (fuerza de arrastre)} = F_{TX} = F_{1X} + F_{2X} + F_{3X} + F_{5X} = 17090 \text{ N}$$

$$\text{Lift (fuerza de sustentación)} = F_{TY} = F_{1Y} + F_{2Y} + F_{3Y} + F_{4Y} + F_{5Y} = 16958 \text{ N}$$

La potencia necesaria de los motores será:

$$\text{Recuérdese que: } M_\infty = \frac{V_\infty}{C} = \frac{V_\infty}{\sqrt{\gamma R T_\infty}} = \frac{V_\infty}{\sqrt{1.4 \cdot 287 \cdot 226.5}} = \frac{V_\infty}{301.67}$$

$$\dot{W} = F_{TX} \cdot V_\infty = 36088782.1 \text{ W} = 36089 \text{ kW}$$

4.- Los resultados finales que se han mostrado en los apartados anteriores han sido calculados mediante el programa que se presenta en el apéndice. Este código permite, además, modificar a voluntad cualquiera de los datos de partida del problema.

A continuación se presentan algunas de las gráficas que se pueden obtener mediante dicho programa:

4.a. -Variación de la velocidad del vehículo, es decir, el número de Mach M_∞ .
Las demás variables se mantienen constantes.

Las figuras 10.8 a 10.11, presentan respectivamente y en función del número de Mach de la corriente no perturbada M_∞ , los valores del número de Mach en cada una de las superficies de la aeronave, la presión que existe sobre cada superficie, las fuerzas de arrastre y sustentación que el fluido genera sobre el vehículo y la potencia necesaria en los motores.



Fig. 10.8
Número de Mach
en las distintas
superficies en
función de la
velocidad de la
aeronave (M_∞)

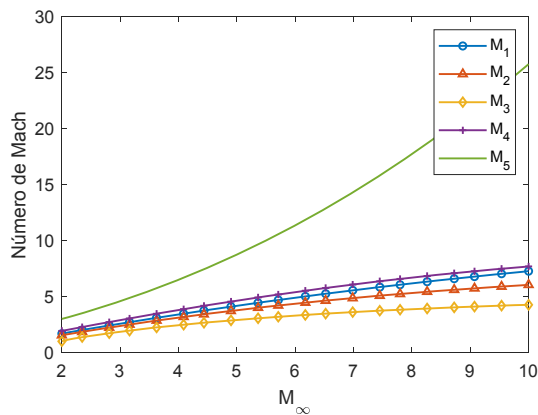


Fig. 10.9
Presión absoluta
en las distintas
superficies en
función de la
velocidad de la
aeronave (M_∞)

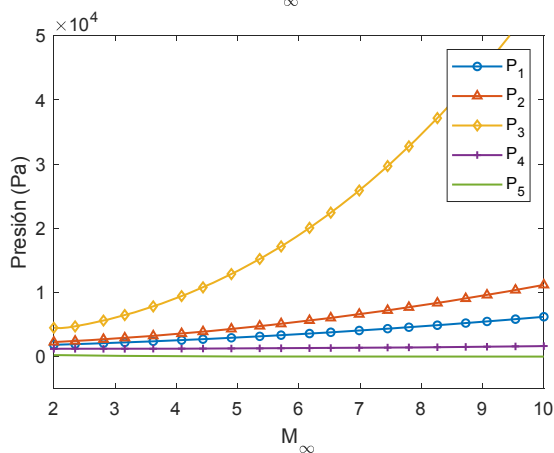


Fig. 10.10
Fuerzas de arrastre
y de sustentación
en función de la
velocidad de la
aeronave (M_∞)

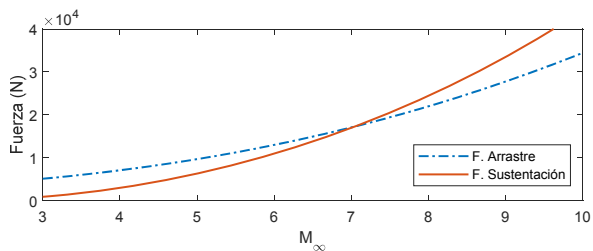
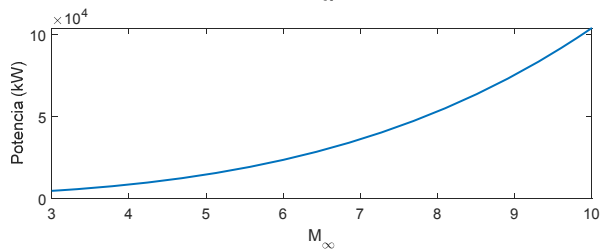


Fig. 10.11
Potencia necesaria
de los motores
en función de la
velocidad de la
aeronave (M_∞)



4.b. -Variación de los ángulos α_2 y α_3 tal que el grosor Y (grosor de la aeronave) se mantiene constante para las diferentes geometrías. Las demás variables se mantienen constantes.



Es necesario definir un intervalo de ángulos correcto de modo que el programa definido pueda calcular cada uno de los parámetros en las hipótesis previstas hasta ahora. Por tanto, se debe considerar lo siguiente:

- El ángulo α_2 mínimo ha de ser tal que $M_{N\infty(\text{inf})} > 1$.
- El ángulo α_2 máximo ha de ser $\alpha_2 \leq \tan^{-1}\left(\frac{Y}{X_2 + X_3}\right)$. Si superara este límite, la onda entre 2 y 3 sería de expansión (Prandtl-Meyer) y, en consecuencia, el algoritmo realizado no daría una solución correcta.

El procedimiento para determinar el ángulo α_2 mínimo es el siguiente:

- 1) Si $M_{N\infty(\text{inf})} > 1$, entonces $M_\infty \sin \varepsilon_2 > 1$. Para que la solución converja, es necesario que $M_\infty \sin \varepsilon_2$ sea estrictamente mayor que 1. Por ello, se impone que por ejemplo $M_\infty \sin \varepsilon_2 = 1.001$. Por tanto, $\varepsilon_2 = \sin^{-1} \frac{1.001}{M_\infty}$
- 2) Calculado ε_2 , es posible definir el ángulo α_2 mínimo, que se obtendrá mediante la ecuación 1.

$$\alpha_{2 \min} = \tan^{-1} \left\{ \left[\left[\frac{(\gamma+1)}{2} \left(\frac{M_\infty^2}{M_\infty^2 \sin^2 \varepsilon_2 - 1} \right) - 1 \right] \tan \varepsilon_2 \right]^{-1} \right\}$$

Si $M_\infty = 7$ y $\gamma = 1.4$, este intervalo será:

$$\alpha_2 \in [2.3554 \cdot 10^{-4}, 0.3043] \text{ rad}, \alpha_2 \in [0.0135^\circ, 17.43^\circ]$$

Para cada α_2 , se deberá determinar un ángulo α_3 tal que el grosor Y se mantenga constante. Este ángulo se calculará mediante la expresión siguiente:

$$\alpha_3 = \tan^{-1} \frac{Y - X_2 \tan \alpha_2}{X_3}$$

Una vez redefinidos estos dos ángulos, el algoritmo utilizado hasta ahora podrá ejecutarse y así obtener los parámetros para cada uno de los ángulos situados en el intervalo calculado.

A continuación, se presentan algunas de las gráficas que pueden obtenerse variando α_2 y, en consecuencia, α_3 . Las figuras 10.12 a 10.15 representan los mismos parámetros que los de las figuras 10.8 a 10.11, aunque ahora en función del ángulo α_2 . Véase que las fuerzas de arrastre y sustentación disminuyen al aumentar α_2 ; de hecho, para entender esta evolución hay que considerar la modificación que experimenta automáticamente α_3 cuando varía α_2 .



Fig. 10.12
Número de Mach
en las distintas
superficies
en función del
ángulo α_2

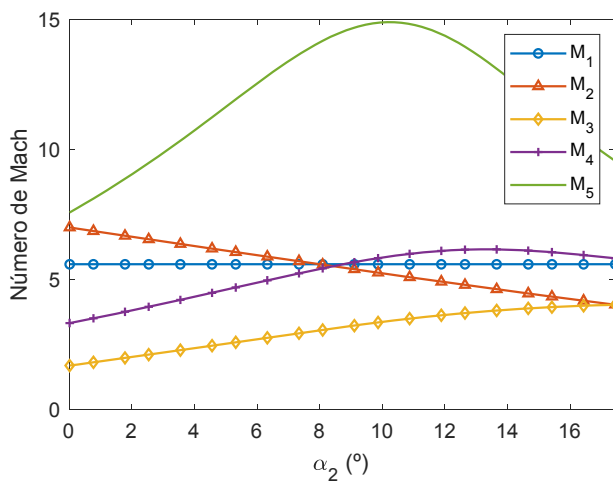


Fig. 10.13
Presión absoluta
en las distintas
superficies
en función del
ángulo α_2

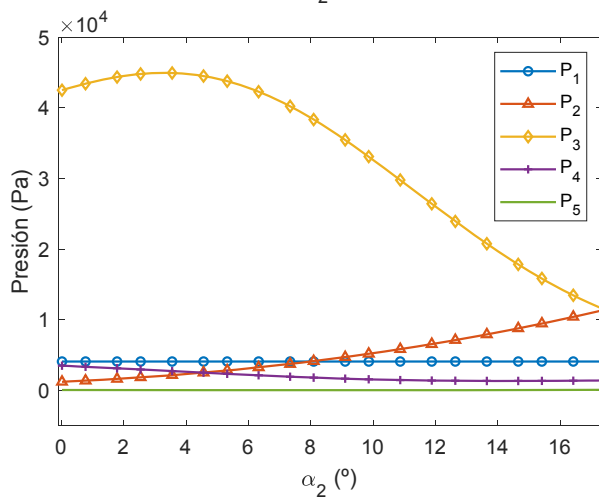


Fig. 10.14
Fuerzas de
arrastre y de
sustentación
en función del
ángulo α_2

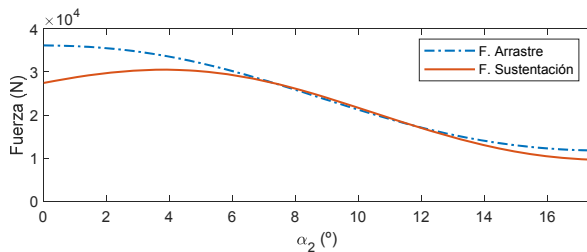
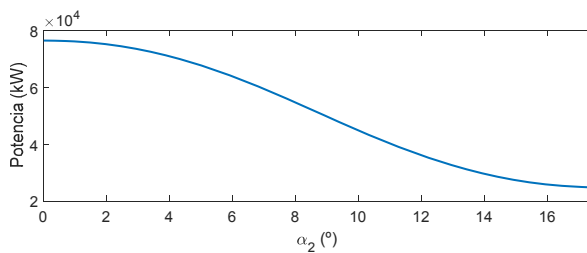


Fig. 10.15
Potencia
necesaria de
los motores
en función del
ángulo α_2



4.c. -Variación del ángulo α_1 , manteniendo constantes los demás parámetros característicos de la aeronave y las condiciones de contorno. Del mismo modo que en el apartado 4.b, es necesario definir un ángulo α_1 mínimo tal que $M_{N_\infty} > 1$. El procedimiento será análogo:

- 1) Si $M_{N_\infty} > 1$, entonces $M_\infty \sin \varepsilon_1 > 1$. Para que la solución converja, es necesario que $M_\infty \sin \varepsilon_1$ sea estrictamente mayor que 1. Por ello, se impone que por ejemplo, $M_\infty \sin \varepsilon_1 = 1.001$. Por tanto, $\varepsilon_1 = \sin^{-1} \frac{1.001}{M_\infty}$
- 2) Calculado ε_1 , es posible definir el ángulo α_1 mínimo que se obtendrá mediante la ecuación 1.

$$\alpha_{1 \min} = \tan^{-1} \left(\left\{ \left[\frac{(\gamma+1)}{2} \left(\frac{M_\infty^2}{M_\infty^2 \sin^2 \varepsilon_1 - 1} \right) - 1 \right] \tan \varepsilon_1 \right\}^{-1} \right)$$

Dado que $M_\infty = 7$, ε_1 será igual al ángulo calculado en el apartado anterior. En consecuencia, $\alpha_{1 \min}$ también será igual a $\alpha_{2 \min}$. Entonces:

$$\alpha_{1 \min} = 2.3554 \cdot 10^{-4} \text{ rad} = 0.0135^\circ$$

A diferencia del apartado 4.b, en este caso no se define un ángulo α_1 máximo. Se calculan los distintos parámetros entre un valor mínimo, citado anteriormente, y un valor máximo inferior a 90° . Una vez calculado, en la representación gráfica, concretamente en la figura 10.18, se visualiza a partir de qué ángulo, la fuerza de sustentación es negativa y, por tanto, la aeronave caería. De esta manera, es posible determinar un ángulo máximo de α_1 a partir del cual el cálculo de cualquier otro parámetro deja de tener significado. Obsérvese, además, que la modificación del ángulo α_1 implica que los números de Mach, las presiones y las temperaturas en las superficies 2, 3, 4 y 5 se mantienen constantes.

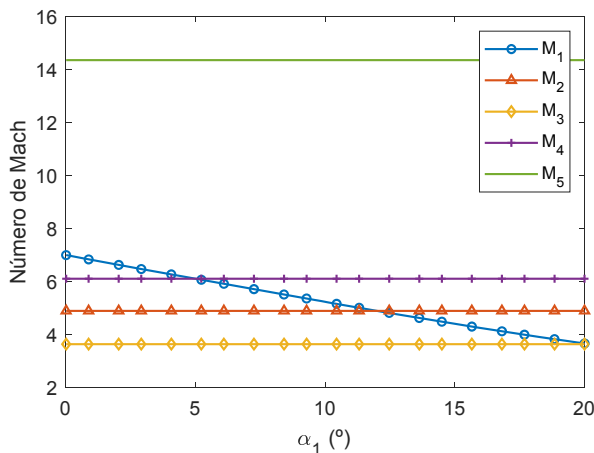


Fig. 10.16
Número de
Mach en
las distintas
superficies en
función del
ángulo α_1



Fig. 10.17
Presión
absoluta en
las distintas
superficies en
función del
ángulo α_1

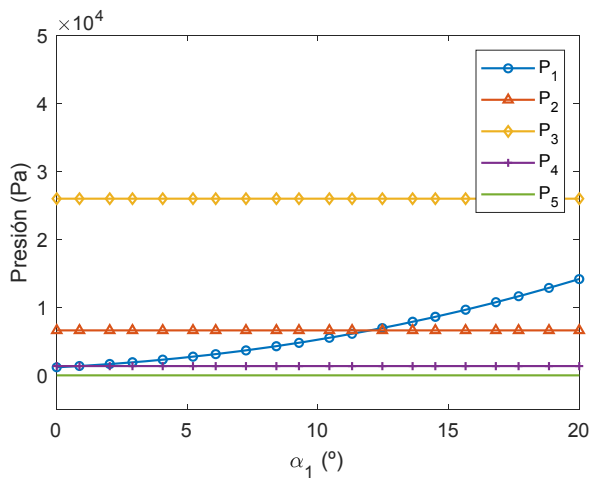


Fig. 10.18
Fuerza de
arrastre y de
sustentación
en función del
ángulo α_1

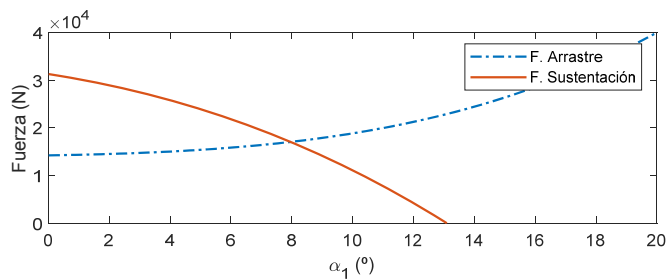
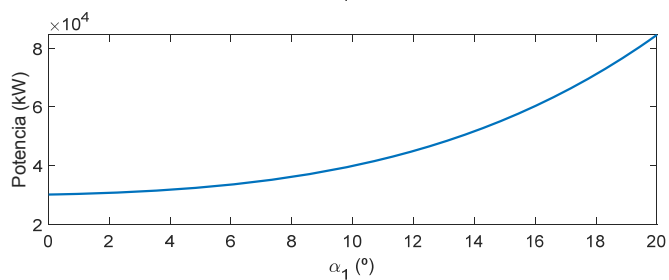


Fig. 10.19
Potencia
necesaria de
los motores en
función del
ángulo α_1









Apéndice

Los programas han sido realizados mediante MATLAB®. La versión empleada en el desarrollo del código es MATLAB® R2019b, aunque es perfectamente ejecutable en versiones anteriores y posteriores. En el problema 9, se ha utilizado una *toolbox* de MATLAB®. Por tanto, es necesario tener instalado el siguiente producto: Optimization Toolbox™.

Véase la documentación: <https://es.mathworks.com/help/>

Cada uno de los programas que se muestran a continuación, consta de un *script* principal y de otras funciones o *scripts* asociados que deberán guardarse en la misma carpeta del programa que se vaya a ejecutar, en el formato que corresponda.

Véase el uso de archivos y funciones en: <https://es.mathworks.com/support.html>

Cuando ejecute el programa, los resultados aparecerán en la *Command Window* y la representación gráfica en las figuras correspondientes. Los datos de partida introducidos en la definición de la geometría, las condiciones de contorno, las propiedades físicas y las condiciones iniciales, se corresponden con los que se han utilizado en cada problema. Sin embargo, pueden modificarse para conocer el comportamiento en otras condiciones.

Para más información sobre los productos MATLAB y Simulink, póngase en contacto con:

The MathWorks, Inc.
3 Apple Hill Drive
Natick, MA, 01760-2098 USA
Tel: 508-647-7000
Fax: 508-647-7001
E-mail: info@mathworks.com
Web: <https://www.mathworks.com>
Para comprar: <https://www.mathworks.com/store>
Para localizar la oficina más próxima:
<https://www.mathworks.com/company/worldwide>

Los programas del apéndice se pueden encontrar en:
<https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/90536-mecanica-de-fluidos-problemas-con-resolucion-numerica>



PROGRAMA DEL PROBLEMA 1

1. Script principal

```
% SCRIPT PRINCIPAL

clear all
clc
close all

global Rp Di Sp alpha Ao Vo l1 l2 l4 l6 l8 l10 l3 l5 l7 l9...
    l11 hs1 hs3 hs2 h1 h10 h2 h11 r1 r2 r3 r4...
    Pd w Cd B mu rho Ptank

% Geometria
% => La nomenclatura utilizada es la misma que en el problema
% => Las unidades utilizadas están en el sistema internacional

Rp=0.060;
D=0.014;
Di=D;
Sp=pi*((Di/2)^2);
Spi=pi*((0.008/2)^2);
alpha=20*pi/180;
Do=0.006;
Ao=pi*((Do/2)^2);
Vo=Spi*0.04+Sp*0.0005;
l1=0.002;
l2=0.0007;
l4=l2;
l6=l2;
l8=l2;
l10=l2;
l3=0.004;
l5=l3;
l7=l3;
l9=l3;
l11=0.019;
hs1=10*10^(-6);
hs3=hs1;
hs2=(0.4*10^(-3))+hs1;
h1=2*10^(-6);
h10=0.0004+h1; h2=h10; h3=h1; h4=h10; h5=h1; h6=h1;
h7=h10; h8=h1; h9=h10; h11=h1;
r1=0.005;
```

```

r2=0.0075;
r3=0.008;
r4=0.010;

% Definición de las condiciones de contorno y las propiedades físicas
% => La nomenclatura utilizada es la misma que en el problema
% => Las unidades utilizadas están en el sistema internacional
Pd=300*10^5;
Cd=0.6;
B=1.8*10^9;
tin=0;
mu=857*32*10^(-6);
pin=300*10^5;
rho=857;
Ptank=10^5;
w=2000*2*pi/60;
tfinal=pi/w;

%Resolución numérica

%%%%% PISTÓN ASCENDENTE
% - Con fugas y sin fugas
% - Caso inicial con hs=10 micras y hl=2 micras

[t,pres_conf,QL1,QL2,tls,pres_sinf] = Res_num_subida(tfinal,pin);
save('sin_con_QLh10')

% - Con fugas
% - Con otras distancias entre slipper y plato
% [ hs=20 micras y hs=25 micras ]
% - Se mantiene hl=2 micras

for hs1=[20,25]*10^(-6)
    hs3=hs1;
    hs2=(0.4*10^(-3))+hs1;
    [t,pres_conf,QL1,QL2] = Res_num_subida(tfinal,pin);
    save(['con_QLh' num2str(hs1*10^(6))])
end

% - Con fugas
% - Con otras distancias entre cilindro y pistón
% [ h=3 micras , h=4 micras y h=5 micras ]
% - Se mantiene hs=10 micras

hs1=10*10^(-6);
hs3=hs1;

```



```

hs2=(0.4*10^(-3))+hs1;

for h1=[3,4,5]*10^(-6)
    h10=0.0004+h1; h2=h10; h3=h1; h4=h10; h5=h1;
    h6=h1; h7=h10; h8=h1; h9=h10; h11=h1;
    [t,pres_conf,QL1,QL2] = Res_num_subida(tfinal,pin);
    save(['con_H' num2str(h1*10^(6))])
end

%%%%%% PISTÓN DESCENDENTE

hs1=10*10^(-6);
hs3=hs1;
hs2=(0.4*10^(-3))+hs1;
h1=2*10^(-6);
h10=0.0004+h1; h2=h10; h3=h1; h4=h10; h5=h1; h6=h1;
h7=h10; h8=h1; h9=h10; h11=h1;

%----> Si las condiciones son:
Pd=1*10^5;
pin=1*10^5;
[t,p_down, QL1] = Res_num_bajada(tfinal,pin);
save('down_1bar')

%----> Si se aumenta la presión en la entrada para evitar la cavitación:
Pd=7.5*10^5;
pin=7.5*10^5;
[t,p_down, QL2] = Res_num_bajada(tfinal,pin);
save('down_7_5bar')

%Representación gráfica
plots; % Ejecución del script 'plots.m'

```

1.1. Función 'Res_num_subida.m'

```

function [t,p_conf,QL1,QL2,ts,p_sinf] = Res_num_subida(tfinal,Pin)
% Resolución numérica del sistema de ecuaciones en el ascenso
% pin: presión inicial
% tfinal: tiempo final
% t: vector de tiempo (caso con fugas)
% p_conf: vector de presión durante la subida (caso con fugas)
% QL1: caudal volumétrico circulante de fuga entre pistón y cilindro
% QL2: caudal volumétrico circulante de fuga entre slipper y plato
% inclinado

```

```
% ts: vector de tiempo (caso sin fugas)
% p_sinf: vector de presión durante la subida (caso sin fugas)

global Rp Di Sp alpha Ao Vo l1 l2 l4 l6 l8 l10 l3 l5 l7 l9...
      l11 hs1 hs3 hs2 h1 h10 h2 h11 r1 r2 r3 r4...
      Pd w Cd B mu rho Ptank

%----Sin fugas
%-->CÁLCULO DE PRESIONES
%Resolución de la ecuación diferencial:
[t2,u2]=ode23('f2',linspace(0,0.0007833,1000),Pin);
[t21,u21]=ode23s('f2',linspace(0.0007833,0.01428,1000),u2(length(u2)));
[t22,u22]=ode23('f2',linspace(0.01428,tfinal,1000),u21(length(u21)));
ts=[t2' t21' t22']';
p_sinf=real([u2' u21' u22']');

%----Con fugas
%-->CÁLCULO DE PRESIONES
%Resolución de la ecuación diferencial:
[t4,u3]=ode23('f3_up',linspace(0,0.0008725,1000),300*10^5);
[t5,u4]=ode23s('f3_up',linspace(0.0008725,0.01428,1000),u3(length(u3)));
[t6,u5]=ode23('f3_up',linspace(0.01428,tfinal,1000),u4(length(u4)));
t=[t4' t5' t6']';
p_conf=real([u3' u4' u5']');

%-->CÁLCULO DE CAUDALES DE FUGAS
Q=zeros(1,length(t));
QL1=zeros(1,length(t));
QL2=zeros(1,length(t));

for i=1:length(t)
    p=p_conf(i);
    tc=t(i);
    Q(i)=Cd*Ao*sqrt(2*(p-Pd)/rho);
    QL1(i) = pi*Di*((-h1*Rp*tan(alpha)*sin(w*tc)*w)*(1/2))-...
        (1/12)*pi*Di*(Ptank-p-(6*Rp*tan(alpha)*(-sin(w*tc)))*...
        *w*mu*(h10-h1)*(l2+l4+l6+l8+l10)/h10^3)/(mu*...
        (l1+l2+l3+l4+l5+l6+l7+l8+l9+l10+l11-(0.195*10^(-1))*...
        (1/2)-Rp*tan(alpha)*cos(w*tc))/(h11^3)+mu*...
        (1/h2^3-1/h1^3)*(l2+l4+l6+l8+l10));
    QL2(i) = pi*(p-Ptank)/((6*mu)*((log(r2/r1)/(hs1^3))+...
        (log(r3/r2)/(hs2^3))+(log(r4/r3)/(hs3^3))));
end

end
```



1.1.1. Función 'f2.m'

```
function [du] = f2(t2,p)
% En esta función, se introduce la derivada de primer orden de la presión
% sin considerar las fugas. (Durante el ascenso)
% t2: tiempo
% p: presión
% du: derivada de la presión respecto del tiempo (sin fugas)

global Rp Di Sp alpha Ao Vo l1 l2 l4 l6 l8 l10 l3 l5 l7 l9...
      l11 hs1 hs3 hs2 h1 h10 h2 h11 r1 r2 r3 r4 Pd w Cd B mu rho Ptank

du=B*(-Cd*Ao*sqrt(2)*sqrt((p-Pd)/rho)+Sp*Rp*tan(alpha)*w*sin(w*t2))/...
    (Vo+Sp*Rp*tan(alpha)*(cos(w*t2)+1));
end
```

1.1.2. Función 'f3_up.m'

```
function [du] = f3_up(t3,p)
% En esta función, se introduce la derivada de primer orden de la presión
% considerando las fugas. (Durante el ascenso)
% t3: tiempo
% p: presión
% du: derivada de la presión respecto del tiempo (con fugas)

global Rp Di Sp alpha Ao Vo l1 l2 l4 l6 l8 l10 l3 l5 l7 l9...
      l11 hs1 hs3 hs2 h1 h10 h2 h11 r1 r2 r3 r4...
      Pd w Cd B mu rho Ptank

QL1 = pi*Di*((-h1*Rp*tan(alpha)*sin(w*t3)*w)*(1/2))-(1/12)*pi*Di*...
    (Ptank-p-(6*Rp*tan(alpha)*(-sin(w*t3)))*w*mu*(h10-h1)*(l2+l4+...
    l6+l8+l10)/h10^3)/(mu*(l1+l2+l3+l4+l5+l6+l7+l8+l9+l10+l11-...
    (0.195*10^(-1))*(1/2)-Rp*tan(alpha)*cos(w*t3))/(h11^3)+mu*...
    (1/h2^3-1/h1^3)*(l2+l4+l6+l8+l10));
QL2 = pi*(p-Ptank)/((6*mu)*(log(r2/r1)/hs1^3+...
    log(r3/r2)/hs2^3+log(r4/r3)/hs3^3));
du=B*(-Cd*Ao*sqrt(2)*sqrt((p-Pd)/rho)+Sp*Rp*tan(alpha)*w*...
    sin(w*t3)-QL1-QL2)/(Vo+Sp*Rp*tan(alpha)*(cos(w*t3)+1));
end
```

1.2 Función 'Res_num_bajada.m'

```
function [t,p_down,QL1,QL2] = Res_num_bajada(tfinal,pin)
% Resolución numérica del sistema de ecuaciones en el descenso
% pin: presión inicial
% tfinal: tiempo final
% t: vector de tiempo
% p_down: vector de presión durante la bajada
% QL1: caudal volumétrico circulante de fuga entre pistón y cilindro
% QL2: caudal volumétrico circulante de fuga entre slipper y plato
% inclinado

global Rp Di Sp alpha Ao Vo l1 l2 l4 l6 l8 l10 l3 l5 l7 l9...
      l11 hs1 hs3 hs2 h1 h10 h2 h11 r1 r2 r3 r4...
      Pd w Cd B mu rho Ptank

%-->CÁLCULO DE PRESIONES
%Resolución de la ecuación diferencial:

[t,p_down]=ode23('f3_down',linspace(0,tfinal,1000),pin);
p_down=real(p_down);
%-->CÁLCULO DE CAUDALES DE FUGAS
Q=zeros(1,length(t));
QL1=zeros(1,length(t));
QL2=zeros(1,length(t));

for i=1:length(t)
    p=p_down(i);
    tc=t(i);
    QL1(i)=pi*Di*((h1*Rp*tan(alpha)*sin(w*tc)*w)*(1/2))-...
        (1/12)*pi*Di*(Ptank-p-(6*Rp*tan(alpha)*(sin(w*tc)))*...
        w*mu*(h10-h1)*(l2+l4+l6+l8+l10)/h10^3)/(mu*(l1+l2+l3+...
        l4+l5+l6+l7+l8+l9+l10+l11-(0.195*10^(-1))*(1/2))-...
        Rp*tan(alpha)*cos(w*tc))/(h11^3)+mu*(1/h2^3-1/h1^3)*...
        (l2+l4+l6+l8+l10));
    QL2(i)=pi*(p-Ptank)/((6*mu)*(log(r2/r1)/hs1^3+...
        log(r3/r2)/hs2^3+log(r4/r3)/hs3^3));

end
end
```




1.2.1. Función 'f3_down.m'

```
function [du] = f3_down(t,p)
% En esta función, se introduce la derivada de primer orden de la presión
% considerando las fugas. (Durante el descenso)
% t: tiempo
% p: presión
% du: derivada de la presión respecto del tiempo (con fugas)

global Rp Di Sp alpha Ao Vo l1 l2 l4 l6 l8 l10 l3 l5 l7 l9...
    l11 hs1 hs3 hs2 h1 h10 h2 h11 r1 r2 r3 r4...
    Pd w Cd B mu rho Ptank

QL1=pi*Di*((h1*Rp*tan(alpha)*sin(w*t)*w)*(1/2))-(1/12)*pi*Di*...
    (Ptank-p-(6*Rp*tan(alpha)*(sin(w*t)))*w*mu*(h10-h1)*...
    (l2+l4+l6+l8+l10)/h10^3)/(mu*(l1+l2+l3+l4+l5+l6+l7+l8+l9+...
    l10+l11-(0.195*10^(-1))*(1/2)-Rp*tan(alpha)*cos(w*t))/...
    (h11^3)+mu*(1/h2^3-1/h1^3)*(l2+l4+l6+l8+l10));
QL2=pi*(p-Ptank)/((6*mu)*(log(r2/r1)/hs1^3+log(r3/r2)/...
    hs2^3+log(r4/r3)/hs3^3));
du=B*(+Cd*Ao*sqrt(2)*sqrt((Pd-p)/rho)-Sp*Rp*tan(alpha)*...
    w*sin(w*t)-QL1-QL2)/(Vo+Sp*Rp*tan(alpha)*(1-cos(w*t)));

end
```

1.3. Script 'plots.m'

```
close all
clear all

% Previamente, es necesario tener los datos de las integraciones
% guardados si SOLO se desea ver las gráficas, teniendo los
% cálculos hechos. Si se ejecuta el archivo principal,
% este script se ejecuta de forma automática.

fsize=11;
%Representación gráfica (CASO:PISTÓN ASCENDENTE)
%-----PRESIONES

load('sin_con_QLh10.mat')%carga datos hs=10 micras
figure(1)
plot(tls,pres_sinf)
hold on
```

```

plot(t,pres_conf)
xlabel('t(s)')
ylabel('Presión (Pa)')
legend('Sin fugas','Con fugas')

axes.ax1=gca; axes.ax1.FontSize=fsize;
figure(2)
%-----COMPARATIVA CON DIFERENTES DISTANCIAS ENTRE SLIPPER Y PLATO
%
%                               (PRESIONES)
plot(t,pres_conf)

load('con_QLh20.mat') %carga datos hs=20micras
hold on
plot(t,pres_conf)

load('con_QLh25.mat') %carga datos hs=25micras
hold on
plot(t,pres_conf)

XMIN= 0; XMAX=0.015;YMIN=.2815E8;YMAX=.308E8;
axis([XMIN XMAX YMIN YMAX ])
title('A diferentes distancias entre slipper y plato ')
xlabel('t(s)')
ylabel('Presión de la cámara (Pa)')
legend('h=10 \mum','h=20 \mum','h=25 \mum')
axes.ax2=gca; axes.ax2.FontSize=fsize;

%                               (CAUDALES)

figure(3)
subplot(2,1,1)
load('sin_con_QLh10.mat')
plot(t,QL1)
XMIN= 0; XMAX=0.015;YMIN=-2.1E-7;YMAX=.5E-7;
axis([XMIN XMAX YMIN YMAX ])
title('QL1')
xlabel('t(s)');
ylabel('Caudal QL1 (m^3 /s)');
axes.ax3=gca; axes.ax3.FontSize=fsize;

subplot(2,1,2)
plot(t,QL2)
title('QL2')
xlabel('t(s)');
ylabel('Caudal QL2 (m^3 /s)');
axes.ax4=gca; axes.ax4.FontSize=fsize;

```

233

```

hold on; plot(t,QL1)
figure(5)
hold on; plot(t,pres_conf)

[t,i]=unique(t);
fprintf(' \nSi hs=3 micras:\n - Para t=0, QL1=%.3em^3/s \n',QL1(1));
fprintf(' - Para t=0.0075, QL1=%.3em^3/s',interp1(t,QL1(i),0.0075));

load('con_H4') %carga datos h1=4 micras

figure(4); subplot(2,1,1);
hold on; plot(t,QL1)
figure(5)
hold on
plot(t,pres_conf)

[t,i]=unique(t);
fprintf(' \nSi hs=4 micras:\n - Para t=0, QL1=%.3em^3/s \n',QL1(1));
fprintf(' - Para t=0.0075, QL1=%.3em^3/s',interp1(t,QL1(i),0.0075));

load('con_H5') %carga datos h1=5 micras

figure(4); subplot(2,1,1);
hold on; plot(t,QL1)
figure(5)
hold on
plot(t,pres_conf)

[t,i]=unique(t);
fprintf(' \nSi hs=5 micras:\n - Para t=0, QL1=%.3em^3/s \n',QL1(1));
fprintf(' - Para t=0.0075, QL1=%.3em^3/s\n',interp1(t,QL1(i),0.0075));

figure(4)
subplot(2,1,1)
title('QL1 para diferentes distancias entre slipper y plato ');
xlabel('t(s)');
ylabel('Caudal QL1 (m^3 /s)');
legend('h=2 \mum','h=3 \mum','h=4 \mum','h=5 \mum');
figure(5)
title('Presión a diferentes distancias entre pistón y cilindro ')
xlabel('t(s)')
ylabel('Presión de la cámara (Pa)')
legend('h=2 \mum','h=3 \mum','h=4 \mum','h=5 \mum');

%Representación gráfica (CASO:PISTÓN DESCENDENTE)
% Si la presión de aspiración es de 1 bar

```

```
load('down_1bar')
figure(6)
plot(t,p_down)
xlabel('t(s)')
ylabel('Presión (Pa)')
title('Presión durante el descenso (Pentrada=1 bar)')
axes(ax8=gca; axes(ax8.FontSize=fsize);

% Si la presión de aspiración es de 7.5 bar
load('down_7_5bar')
figure(7)
plot(t,p_down)
xlabel('t(s)')
ylabel('Presión (Pa)')
title('Presión durante el descenso (Pentrada=7.5 bar)')
axes(ax9=gca; axes(ax9.FontSize=fsize);
```



PROGRAMA DEL PROBLEMA 2

1. Script principal

```
% SCRIPT PRINCIPAL
clc
clear all

global Sem Dp Sp ho Vp B gamma m g VN2in PN2in Pacin

%Tres casos
Dem1=130*10^(-3);
Dem2=120*10^(-3);
Dem3=110*10^(-3);
Dems=[Dem1 Dem2 Dem3];

%Propiedades físicas
% => La nomenclatura utilizada es la misma que en el problema
% => Las unidades utilizadas están en el sistema internacional

B=1.5*10^9;
gamma=1.4;
m=5;
g=9.81;
for i=1:3
    indice=i;
    %Geometria
    Dem=Dems(i);
    Sem=pi*(Dem^2)/4;
    Dp=0.055;
    Sp=pi*(Dp^2)/4;
    ho=0.2;
    %Condiciones de contorno y condiciones iniciales
    % => La nomenclatura utilizada es la misma que en el problema
    % => Las unidades utilizadas están en el sistema internacional

    VN2in=Sem*0.1;
    PN2in=10*10^5;
    Pacin=(PN2in*Sem+m*g)/Sem;
    w=1;
    tfinal=2*pi/w;
    yemin=0.65;
    uin=0;
    CI=[uin,yemin,Pacin,PN2in];
    % Resolución del sistema de ecuaciones diferenciales
```



```
[t,y]=ode23s(@ (t,x) sistodes(t,x, Dem), [0 2*tfinal], CI);
%Guarda los resultados
if i==1
    save('Datos_1');
elseif i==2
    save('Datos_2');
else
    save('Datos_3');
end
end
% Representación gráfica
plots % Ejecución del script 'plots.m'
```

1.1. Función 'sistodes.m'

```
function [ dxdt ] = sistodes(t,x, Dem)
% Derivadas de primer orden
% t: tiempo
% x: Variables que se integrarán:
%   => x(1): velocidad del émbolo
%   => x(2): posición del émbolo
%   => x(3): presión de la cámara de aceite
%   => x(4): presión de la cámara de nitrógeno
% dxdt: derivadas de primer orden de cada una de las variables:
%   => dxdt(1): aceleración del émbolo
%   => dxdt(2): velocidad del émbolo
%   => dxdt(3): variación de la presión de la cámara de aceite
%           respecto del tiempo
%   => dxdt(4): variación de la presión de la cámara de nitrógeno
%           respecto del tiempo

global Sem Dp Sp ho Vp B gamma m g VN2in PN2in Pacin

u=x(1);
y=x(2);
Pac=x(3);
PN2=x(4);
dxdt(1) = (-PN2*Sem+Pac*Sem-m*g)/m;
dxdt(2)=u;
dxdt(3) = (-Sp*Vp-Sem*u)*B/(Sem*y+(1/2)*Sp*ho*(1+cos(t)));
dxdt(4) = Sem*u*gamma*(PN2^((1/gamma)+1))/(VN2in*PN2in^(1/gamma));

dxdt=dxdt(:);
end
```



1.2. Script 'plots.m'

```
clear all
close all

% Previamente, es necesario tener los datos de las
% integraciones guardados si SOLO se desea ver las gráficas,
% teniendo los cálculos hechos. Si se ejecuta el archivo
% principal, este script se ejecuta de forma automática.

load('Datos_1.mat'); % Carga los datos del cálculo
                    % realizado con el diámetro mayor

figure(1);
subplot(2,1,1);
plot(t,y(:,1));
title('Velocidad del émbolo');
xlabel('Tiempo (s)');
ylabel('Velocidad (m/s)');
subplot(2,1,2);
plot(t,y(:,2));
title('Posición émbolo');
xlabel('Tiempo (s)');
ylabel('Desplazamiento y (m)');
figure(2);
subplot(2,1,1);
plot(t,y(:,3));
title('Aceite');
xlabel('Tiempo (s)');
ylabel('Presión (Pa)');
subplot(2,1,2);
plot(t,y(:,4));
title('Nitrógeno');
xlabel('Tiempo (s)');
ylabel('Presión (Pa)');
fprintf('\nPRESIONES MÁXIMAS OBTENIDAS SEGÚN EL DIÁMETRO DEL ÉMBOLO\n')
fprintf('\t-> Si Dem=%.2f mm, PN2max=%.2f bar, Pacmax=%.2f bar\n',...
        Dem1*1000,max(y(:,4))*1e-5,max(y(:,3))*1e-5)

load('Datos_2.mat'); % Carga los datos del cálculo
                    % realizado con el diámetro intermedio

figure(1);
subplot(2,1,1);
```




```

hold on; plot(t,y(:,1));

subplot(2,1,2);
hold on; plot(t,y(:,2));

figure(2);
subplot(2,1,1);
hold on; plot(t,y(:,3));

subplot(2,1,2);
hold on; plot(t,y(:,4));

fprintf('\t-> Si Dem=%.2f mm, PN2max=%.2f bar, Pacmax=%.2f bar\n',...
        Dem2*1000,max(y(:,4))*1e-5,max(y(:,3))*1e-5)

fsize=11;
load('Datos_3.mat'); % Carga los datos del cálculo
                      % realizado con el diámetro menor

figure(1);
subplot(2,1,1);
hold on; plot(t,y(:,1));
lgd.lgd1=legend(['D=' num2str(Dems(1)*10^3) ' mm'],...
               ['D=' num2str(Dems(2)*10^3) ' mm'], ['D=' ...
               num2str(Dems(3)*10^3) ' mm']);
axes.ax1=gca; axes.ax1.FontSize=fsize; axes.ax1.XLim=[0 4*pi];
subplot(2,1,2);
hold on; plot(t,y(:,2));
lgd.lgd2=legend(['D=' num2str(Dems(1)*10^3) ' mm'],...
               ['D=' num2str(Dems(2)*10^3) ' mm'], ['D=' ...
               num2str(Dems(3)*10^3) ' mm']);
axes.ax2=gca; axes.ax2.FontSize=fsize; axes.ax2.XLim=[0 4*pi];

figure(2);
subplot(2,1,1);
hold on; plot(t,y(:,3));
lgd.lgd3=legend(['D=' num2str(Dems(1)*10^3) ' mm'],...
               ['D=' num2str(Dems(2)*10^3) ' mm'], ['D=' ...
               num2str(Dems(3)*10^3) ' mm']);
axes.ax3=gca;
axes.ax3.FontSize=fsize; axes.ax3.XLim=[0 4*pi];
subplot(2,1,2);
hold on; plot(t,y(:,4));
lgd.lgd4=legend(['D=' num2str(Dems(1)*10^3) ' mm'],...
               ['D=' num2str(Dems(2)*10^3) ' mm'], ['D=' ...
               num2str(Dems(3)*10^3) ' mm']);
axes.ax4=gca; axes.ax4.FontSize=fsize; axes.ax4.XLim=[0 4*pi];

```



```
fprintf('\t-> Si Dem=%.2f mm, PN2max=%.2f bar, Pacmax=%.2f bar\n',...
       Dem3*1000,max(y(:,4))*1e-5,max(y(:,3))*1e-5)

load('Datos_2.mat')

figure(3);
subplot(2,2,1); plot(t,y(:,2));
title('Desplazamiento del émbolo');
xlabel('Tiempo (s)'); ylabel('Desplazamiento y (m)');
axes(ax5=gca); axes(ax5.XLim=[0 4*pi];
axes(ax5.FontSize=fsize;
subplot(2,2,2); plot(t,y(:,3));
title('Aceite'); xlabel('Tiempo (s)'); ylabel('Presión (Pa)');
axes(ax6=gca); axes(ax6.XLim=[0 4*pi];
axes(ax6.YLim=[0.5*10^6 2.5*10^6];
axes(ax6.FontSize=fsize;

subplot(2,2,3); plot(t,y(:,1));
axes(ax7=gca); axes(ax7.XLim=[0 4*pi]; axes(ax7.FontSize=fsize;
title('Velocidad del émbolo');
xlabel('Tiempo (s)');
ylabel('Velocidad (m/s)');
subplot(2,2,4); plot(t,y(:,4));
axes(ax8=gca); axes(ax8.XLim=[0 4*pi]; axes(ax8.FontSize=fsize;
title('Nitrógeno'); xlabel('Tiempo (s)'); ylabel('Presión (Pa)');
```



PROGRAMA DEL PROBLEMA 3

1. Script principal

```
%SCRIPT PRINCIPAL
clear all
clc
close all

% Definición de la geometría
%--> Diámetros y superficies
Do=35*10^(-3); % Diámetro del pistón (m)
So=pi*(Do^2)/4; %Superficie del pistón (m^2)
Dem=55*10^(-3); %Diámetro del émbolo (m)
Sem=pi*(Dem^2)/4; %Superficie del émbolo (m^2)
St=Sem; %Superficie total (m^2)
Dag=5*10^(-3); %Diámetro del agujero (m)
Sag=pi*(Dag^2)/4; %Superficie del agujero (m^2)

%--> Longitudes definidas en el esquema:
Ho=105*10^(-3); %Longitud Ho (m)
H1=55*10^(-3); %Longitud H1 (m)
e=10*10^(-3); %Longitud del agujero (m)
Eemb=5*10^(-3); %Longitud Eemb (m)
Z=e+H1+Ho; %Suma de longitudes (m)
Ht=Z+140*10^(-3); %Longitud total (m)

%--> Relaciones entre diámetros y longitudes
reldD=Dag/Do; %Relación de diámetros
m=reldD^2; %Relación de diámetros al cuadrado
relLD=e/Dag; %Relación entre la longitud del agujero y su diámetro

% Definición de las condiciones de contorno y propiedades físicas
freq=20; %Frecuencia del pistón (Hz)
W=2*pi*freq; %Velocidad angular del pistón (rad/s)
Amp=2; %Amplitud de la velocidad (m/s)
A=Amp/W; %Amplitud de oscilación del pistón (m)
memb=0.1; % Masa del émbolo (kg)
g=9.81; %Gravedad (m/s^2)
gamma=1.4; % Constante adiabática para el nitrógeno
B=1.8*10^9; %Módulo de compresibilidad del aceite (Pa)
visc=42*10^(-6); %Viscosidad cinemática (m^2/s)
denac=0.870*1000; %Densidad del aceite (kg/m^3).
```



```
%(Es la densidad inicial)
visd=visc*denac; %Viscosidad dinámica (Pa·s)

Cd=0.7; %Coeficiente de descarga.
    %¡ATENCIÓN! Este valor es una aproximación inicial.
    %Para cada instante de tiempo, se calculará correctamente.

N=7; %Número de agujeros
vs=0.1; %Velocidad de Stribeck (m/s)
n=2; %Parámetro experimental
Fs=20; %Fuerza estática (N)
Fc=10; %Fuerza de Coulomb (N)
Fv=30; %Coeficiente de fricción viscosa (kg/s)

% Definición de las condiciones iniciales

PN2in=5*(10^5); %Presión inicial del nitrógeno (Pa)
Y2in=Z+60*10^(-3); %Posición inicial del émbolo (m)
VN2in=St*(Ht-Y2in-Eemb); % Volumen inicial de nitrógeno (m^3)
ulin=0; %Velocidad inicial del pistón (m/s)
Ylin=40*10^(-3); %Posición inicial del pistón (m)
u2in=0; %Velocidad inicial del émbolo (m/s)
Y2in=Z+60*10^(-3); %Posición inicial del émbolo (m)
Pac1in=(PN2in*Sem+g*memb)/Sem; %Presión inicial en la cámara inferior (Pa)
Pac2in=Pac1in; %Presión inicial en la cámara intermedia (Pa)
denin=denac; %Densidad inicial del aceite en las dos cámaras (kg/m^3)

% Resolución numérica del sistema
ResolNum; %Se ejecuta el script que resuelve numéricamente todo el sistema

%--> Comprobación
fx=N*Qag-ul*So;

% Representación grafica de la fuerza de amortiguamiento...

represent(t,y1,u1,y2,u2,Pac1,Pac2,PN2,den1,den2,...
    Qag,Rec,Famortcomp,Ffl,Do,false);

[Qmax indice]=max(Qag);
tQmax=t(indice);
[Pmax indice]=max(Pac1);
tPmax=t(indice);
[Famortmax indice]=max(Famortcomp);
tFmax=t(indice);

%--> Para diferentes diámetros del pistón

y(:,1)=linspace(15,45,4)*10^(-3);
```



```

for ii=1:length(y)
    Do=y(ii);
    So=pi*(Do^2)/4;
    reldD=Dag/Do;
    m=reldD^2;
    ResolNum
    z1(ii,:)=Famortcomp;
    z2(ii,:)=Ff1;
    [maxFamort(ii,1) maxFamort(ii,2)]=max(Famortcomp);
    QFmax(ii,1)=Qag(maxFamort(ii,2));
    maxFamort(ii,2)=t(maxFamort(ii,2));
    hold on
end
represent(t,y1,u1,y2,u2,Pac1,Pac2,PN2,den1,den2,...
    Qag,Rec,z1,z2,y,true);

%[[[ Nota en Command Window con alguno de los resultados
% numéricos comentados en los apartados 3 y 4:
% (Parte del código que permite la visualización)]]]

fprintf('\n%s\n','APARTADO 3:');
fprintf('\n\t%s %.3e %s \n',' - Caudal máximo por cada agujero:',...
    Qmax,'m^3/s');
fprintf('\t%s %.4f %s \n',' => Tiempo asociado',tQmax,'s');
fprintf(['\n\t%s %.3e %s \n',' - Presión máxima en la cámara'...
    '1 de aceite:'],Pmax,'Pa');
fprintf('\t%s %.4f %s \n',' => Tiempo asociado',tPmax,'s');
fprintf('\n\t%s %.3f %s \n',...
    '- Fuerza amortiguamiento máxima en la cámara 1 de aceite:',...
    Famortmax,'N');
fprintf('\t%s %.4f %s \n',' => Tiempo asociado',tFmax,'s');

fprintf('\n%s\n','APARTADO 4:');
fprintf('\n%s\n',['====='] ...
    'PARA DIFERENTES DIÁMETROS====='])

for i=1:length(y)

    fprintf('\n%s %.3f %s \n',...
        '====>>>> Con un diámetro del pistón de ',y(i),'metros')
    fprintf('\n\t%s %.2f %s \n',...
        'Fuerza de amortiguamiento máxima: ',maxFamort(i,1),' N')
    fprintf('\n\t%s %.4f %s \n',...
        'Tiempo asociado a esta fuerza máxima: ',maxFamort(i,2),' s')
    fprintf('\n\t%s %.3e %s \n\t%s \n',...
        'Caudal asociado a esta fuerza máxima: ',...
        QFmax(i),' m^3/s','(Por cada agujero)')

```



```
end

fprintf('\n\t\t\t%s\n', ['SUBA HACIA ARIIBA PARA VER TODOS' ...
    'LOS RESULTADOS NUMÉRICOS COMENTADOS'])
```

1.1. Script 'ResolNum.m'

```
%
%
% Este script incorpora toda la resolución numérica a partir de los datos
% dados en el script principal.
%
%
% Script ( 'ResolNum.m' ) debe ser guardado con este nombre junto con los
% demás archivos que componen todo el código.
%

tfinal=1/freq;

% Parámetros necesarios para la función ode23s
param(1)=Do;
param(2)=So;
param(3)=Dem;
param(4)=Sem;
param(5)=Dag;
param(6)=Sag;
param(7)=Ho;
param(8)=H1;
param(9)=e;
param(10)=Eemb;
param(11)=Ht;
param(12)=W;
param(13)=A;
param(14)=memb;
param(15)=g;
param(16)=gamma;
param(17)=Cd;
param(18)=N;
param(19)=PN2in;
param(20)=Y2in;
param(21)=Pac1in;
param(22)=denin;
param(23)=B;
```



```

param(24)=visc;
param(25)=Fc;
param(26)=Fs;
param(27)=vs;
param(28)=n;
param(29)=Fv;

CI(1)=Y1in;
CI(2)=u2in;
CI(3)=Y2in;
CI(4)=Pac1in;
CI(5)=Pac2in;

%%%==>      SUBIDA DEL PISTÓN
tfin=(1/2)*(tfinal);

%Cálculo de las variables Y1,Y2, V1,V2, P1, P2 en la subida
%NOTA: Pac1 y Pac2 es lo mismo que P1,P2(nomenclatura en el análisis).
% Si no se definen los errores relativos y absolutos, la función ode23s
% trabaja con los errores por defecto. Error rel: 1e-3. Error abs:1e-6.

%options=odeset('RelTol',1e-6,'AbsTol',1e-9);
[ts,ys]=ode23s(@ (ts,x) sistodessub(ts,x,param),[0 tfin], CI);
y1s=ys(:,1);
uls=A*W*sin(W*ts);
u2s=ys(:,2);
y2s=ys(:,3);
Pac1s=ys(:,4);
Pac2s=ys(:,5);

%%%Recálculo del resto de magnitudes para la subida

VN2s=(St*(Ht-Eemb-y2s));
PN2s= PN2in.* (VN2in./VN2s).^(gamma));
den1s=denin.*exp((Pac1s-Pac1in)./B);
den2s=denin.*exp((Pac2s-Pac1in)./B);

aux=Cd;
ok=true;
for i=1:length(uls)
    ok=true;

    for j=1:6

        dP1dt=real(-(N*Cd*sqrt(2*((Pac1s(i)/den1s(i))-(Pac2s(i)/den2s(i))))...
            /(1-(N^2)*(m^2)))*Sag-uls(i)*So)*B/(H1*St+Ho*So-So*y1s(i)));
        Qag=(B*So*uls(i)-dP1dt*(H1*St+Ho*So-So*y1s(i)))/(B*N);
    end
end

```



```
Re=abs(Dag.*Qag/(visc*Sag));
Cd=CD2mod2(Re,relLD,m);
end
Cds(i,1)=Cd;
Qags(i,1)=Qag;

end

%%%==>      BAJADA DEL PISTÓN

%%% Actualización de las condiciones iniciales

CI(1)=y1s(length(y1s));
CI(2)=u2s(length(u2s));
CI(3)=y2s(length(y2s));
CI(4)=Pac1s(length(Pac1s));
CI(5)=Pac2s(length(Pac2s));

%%% Actualización de los parámetros

%NOTA: Los parámetros del 1 al 16 se mantienen
param(19)=PN2s(length(PN2s));
param(20)=CI(3);
param(21)=CI(4);
param(22)=CI(5);
param(23)=den1s(end);
param(24)=den2s(end);
param(25)=B;
param(26)=visc;
param(27)=Fc;
param(28)=Fs;
param(29)=vs;
param(30)=n;
param(31)=Fv;

[tb,yb]=ode23s(@(t2,x) sistodesbaj(t2,x,param),[0 tfin], CI);

y1b=yb(:,1);
ulb=A*W*sin(W*tb+pi);
u2b=yb(:,2);
y2b=yb(:,3);

%%% Recálculo del resto de magnitudes para la bajada
VN2b=(St*(Ht-Eemb-y2b));
PN2b= PN2in.*(VN2in./VN2b).^(gamma);
Pac1b=yb(:,4);
```




```

Pac2b=yb(:,5);
den1b=den1s(end).*exp((Pac1b-CI(4))./B);
den2b=den2s(end).*exp((Pac2b-CI(5))./B);
clear dP2dt
for i=1:length(tb)
    if i>1 & i<length(tb)
        dP2dt(i,1)=(Pac2b(i+1)-Pac2b(i-1))/(tb(i+1)-tb(i-1));
    end
    if i==1
        dP2dt(1,1)=(Pac2b(2)-Pac2b(1))/(tb(2)-tb(1));
    end
    if i==length(tb)
        dP2dt(i,1)=(Pac2b(end)-Pac2b(end-1))/(tb(end)-tb(end-1));
    end
end

Qagb=-(B.*St*u2b+dP2dt.*St.*(y2b-Z))./(N*B);

%%% Se unen los vectores de subida y bajada
t=[ts' ts(end)+tb'];
y1=[y1s' y1b'];
u1=[u1s' u1b'];
y2=[y2s' y2b'];
u2=[u2s' u2b'];
PN2=[PN2s' PN2b'];
Pac1=[Pac1s' Pac1b'];
Pac2=[Pac2s' Pac2b'];
den1=[den1s' den1b'];
den2=[den2s' den2b'];
Qag=[Qags' -Qagb'];
Rec=Dag.*Qag/(visc*Sag);

%El siguiente fragmento de código se utiliza para que los vectores de las
%variables calculadas tengan la misma longitud:
taux=t;
t=[0:0.0001:tfinal];
[taux,index]=unique(taux);
y2=interp1(taux,y2(index),t);
y1=interp1(taux,y1(index),t);
u2=interp1(taux,u2(index),t);
u1=interp1(taux,u1(index),t);
Pac1=interp1(taux,Pac1(index),t);
Pac2=interp1(taux,Pac2(index),t);
PN2=interp1(taux,PN2(index),t);
den1=interp1(taux,den1(index),t);
den2=interp1(taux,den2(index),t);

```



```

Qag=interp1(taux,Qag(index),t);
Rec=interp1(taux,Rec(index),t);

%Fuerza de fricción
clear Ff1
for j=1:length(u1)
    if u1(j)>=0
        Ff1(j) = Fc+(Fs-Fc).*exp(-(abs((u1(j)./vs)).^2)+Fv*u1(j);

    else
        Ff1(j) = -(Fc+(Fs-Fc).*exp(-(abs((u1(j)./vs)).^2))+Fv*u1(j);

    end
end

%%%%Cálculo de la fuerza de amortiguación
%Una vez obtenida la presión P1 mediante el sistema,
%es directo calcular esta fuerza:

Famortcomp=(Pac1-Pac1(1))*So+Ff1;

```

1.1.1. Función 'sistodessub.m'

```

function [ dxdt ] = sistodessub( t,x,p )

% En esta función, se introducen las derivadas de primer orden
% de las variables que se desean calcular. Para ello es necesario
% tener los parámetros de la geometría, las condiciones de contorno
% y las propiedades físicas.

% t: tiempo
% x: variables que se integrarán:
%     => x(1): posición del pistón
%     => x(2): velocidad del émbolo
%     => x(3): posición del émbolo
%     => x(4): presión del aceite en la cámara 1
%     => x(5): presión del aceite en la cámara 2
% dxdt: derivadas de primer orden de cada una de las variables:
%     => dxdt(1): velocidad del pistón
%     => dxdt(2): aceleración del émbolo
%     => dxdt(3): velocidad del émbolo
%     => dxdt(4): variación de la presión del aceite en la cámara 1
%                respecto del tiempo

```



```
%      => dxdt(5): variación de la presión del aceite en la cámara 2
%
%      respecto del tiempo
% p: parámetros necesarios definidos en el script principal

Do=p(1);
So=p(2);
Dem=p(3);
Sem=p(4);
St=Sem;
Dag=p(5);
Sag=p(6);
Ho=p(7);
H1=p(8);
e=p(9);
Eemb=p(10);
Z=e+H1+Ho;
Ht=p(11);
W=p(12);
A=p(13);
memb=p(14);
g=p(15);
gamma=p(16);
Cd=p(17);
N=p(18);
PN2in=p(19);
Y2in=p(20);
Pacin=p(21);
denin=p(22);
B=p(23);
visc=p(24);
Fc=p(25);
Fs=p(26);
us=p(27);
n=p(28);
Fv=p(29);

y1=x(1); %Posición del pistón
u2=x(2); %Velocidad del émbolo
y2=x(3); %Posición del émbolo
Pac1=x(4); %Presión del aceite en la cámara 1
Pac2=x(5); %Presión del aceite en la cámara 2

Pac1in=Pacin;
den1=denin*exp((Pac1-Pacin)/B);
den2=denin*exp((Pac2-Pacin)/B);
```



```

VN2=St*(Ht-y2-Eemb);
VN2in=St*(Ht-Y2in-Eemb);

reldD=Dag/Do;
m=reldD^2;
relLD=e/Dag;

Ffr=(Fc+(Fs-Fc)*exp((-u2/us)^n)+Fv*u2);

dxdt(1)=A*W*sin(W*t);
u1=dxdt(1);
dxdt(2)=real(-(PN2in*(VN2in/(St*(Ht-Eemb-y2)))^gamma...
    *Sem-Pac2*Sem+memb*g)/memb);
dxdt(3)=u2;

for j=1:6
    %Bucle para aproximar de forma más precisa el valor de la
    %primera derivada teniendo una aproximación del Cd
    dxdt(4)=real(-(N*Cd*sqrt(2*((Pac1-Pac2)/den1)/(1-(N^2)*(m^2))))*...
        Sag-u1*So)*B/(H1*St+Ho*So-So*y1));

    Qag=(B*So*u1-dxdt(4)*(H1*St+Ho*So-So*y1))/(B*N);
    Re=abs(Dag.*Qag/(visc*Sag));
    Cd=CD2mod2(Re,relLD,m); %La función CD2mod2 calcula el Cd

    dxdt(5)=real(-(den1*N*Cd*sqrt(2*((Pac1-Pac2)/den1)/(1-(N^2)*(m^2))))*...
        Sag-den2*St*u2)*B/(den2*(St*(-y2+Z))));
end

dxdt=dxdt(:);
end

```

1.1.2. Función 'sistodesbaj.m'

```

function [ dxdt ] = sistodesbaj( t,x,p)
% En esta función, se introducen las derivadas de primer orden
% de las variables que se desean calcular. Para ello, es necesario
% tener los parámetros de la geometría, las condiciones de contorno
% y las propiedades físicas.

% t: tiempo

```



```
% x: variables que se integrarán:
%   => x(1): posición del pistón
%   => x(2): velocidad del émbolo
%   => x(3): posición del émbolo
%   => x(4): presión del aceite en la cámara 1
%   => x(5): presión del aceite en la cámara 2
% dxdt: derivadas de primer orden de cada una de las variables:
%   => dxdt(1): velocidad del pistón
%   => dxdt(2): aceleración del émbolo
%   => dxdt(3): velocidad del émbolo
%   => dxdt(4): variación de la presión del aceite en la cámara 1
%               respecto del tiempo
%   => dxdt(5): variación de la presión del aceite en la cámara 2
%               respecto del tiempo
% p: parámetros necesarios definidos en el script principal

Do=p(1);
So=p(2);
Dem=p(3);
Sem=p(4);
St=Sem;
Dag=p(5);
Sag=p(6);

Ho=p(7);
Hl=p(8);
e=p(9);
Eemb=p(10);
Z=e+Hl+Ho;
Ht=p(11);

W=p(12);
A=p(13);
memb=p(14);
g=p(15);
gamma=p(16);
Cd=p(17);
N=p(18);
PN2in=p(19);
Y2in=p(20);
Pac1in=p(21);
Pac2in=p(22);
denin1=p(23);
denin2=p(24);
B=p(25);
visc=p(26);
Fc=p(27);
```



```
Fs=p(28);
us=p(29);
n=p(30);
Fv=p(31);

y1=x(1);
u2=x(2);
y2=x(3);
Pac1=x(4); %Presión del aceite en la cámara 1
Pac2=x(5); %Presión del aceite en la cámara 2

reldD=Dag/Do;
m=reldD^2;
relLD=e/Dag;

den1=denin1*exp((Pac1-Pac1in)/B);
den2=denin2*exp((Pac2-Pac2in)/B);

VN2=St*(Ht-y2-Eemb);
VN2in=St*(Ht-Y2in-Eemb);

Ffr=(-Fc-(Fs-Fc)*exp((-u2/us)^n)+Fv*u2);

dxdt(1)=A*W*sin(W*t+pi);
u1=dxdt(1);
dxdt(2)=real(-(PN2in*(VN2in/(St*(Ht-Eemb-y2)))^gamma...
    *Sem-Pac2*Sem+memb*g)/memb);
dxdt(3)=u2;

for j=1:6

    dxdt(4)=real((den2*N*Cd*sqrt(2*((Pac2-Pac1)/den2)...
        /(1-(N^2)*(m^2)))*Sag+den1*u1*So)*B/(den1*(H1*St+Ho*So-So*y1)));

    Qag=-(B*So*u1-dxdt(4)*(H1*St+Ho*So-So*y1))/(B*N);
    Re=abs(Dag.*Qag/(visc*Sag));
    Cd=CD2mod2(Re,relLD,m);

    dxdt(5)=real((N*Cd*sqrt(2*((Pac2-Pac1)/den2)...
        /(1-(N^2)*(m^2)))*Sag+St*u2)*B/(St*(-y2+Z)));

end

dxdt=dxdt(:);
end
```



1.1.3. Función 'CD2mod2.m'

```
function Cd = CD2mod2(Re,relLD,m)
% Cálculo del coeficiente de descarga. Fuente: Artículo
% 'Discharge Coefficients for Incompressible Non-Cavitating Flow through
% Long Orifices'. Ecuaciones 4, 7 y 12 del artículo.

%Utilizando el método de la regla falsi:
diff=0.0001;
nodiff=true;
b=1;
a=0.5;
fa=-1./a+1./(.827-0.85e-2*relLD)+20.*a.*(1+2.25.*relLD)...
./ (sqrt(-m^2+1).*Re)-0.5e-2.*relLD...
./ ((1+7.5.*log(0.15e-3.*sqrt(-m^2+1).*Re./a).^2));
fb=-1./b+1./(.827-0.85e-2*relLD)+20.*b.*(1+2.25.*relLD)...
./ (sqrt(-m^2+1).*Re)-0.5e-2.*relLD...
./ ((1+7.5.*log(0.15e-3.*sqrt(-m^2+1).*Re./b).^2));
p=(a*fb-b*fa)/(fb-fa);
fp=-1./p+1./(.827-0.85e-2*relLD)+20.*p.*(1+2.25.*relLD)...
./ (sqrt(-m^2+1).*Re)-0.5e-2.*relLD...
./ ((1+7.5.*log(0.15e-3.*sqrt(-m^2+1).*Re./p).^2));
if Re<1
    Re=1;
    fa=-1./a+1./(.827-0.85e-2*relLD)+20.*a.*(1+2.25.*relLD)...
    ./ (sqrt(-m^2+1).*Re)-0.5e-2.*relLD...
    ./ ((1+7.5.*log(0.15e-3.*sqrt(-m^2+1).*Re./a).^2));
    fb=-1./b+1./(.827-0.85e-2*relLD)+20.*b.*(1+2.25.*relLD)...
    ./ (sqrt(-m^2+1).*Re)-0.5e-2.*relLD...
    ./ ((1+7.5.*log(0.15e-3.*sqrt(-m^2+1).*Re./b).^2));
    p=(a*fb-b*fa)/(fb-fa);
    fp=0;
    Cd=p;
else
if Re<1e4 & Re>1

if abs(fp)<diff
    nodiff=false;
    Cd=p;
end
while nodiff

    if fa*fp<0
        b=p;
    else
        a=p;
    end
end
```



```
fa=-1./a+1./(.827-0.85e-2*relLD)+20.*a.*(1+2.25.*relLD)...  
./ (sqrt(-m^2+1).*Re)-0.5e-2.*relLD...  
./ ((1+7.5.*log(0.15e-3.*sqrt(-m^2+1).*Re./a).^2));  
fb=-1./b+1./(.827-0.85e-2*relLD)+20.*b.*(1+2.25.*relLD)...  
./ (sqrt(-m^2+1).*Re)-0.5e-2.*relLD...  
./ ((1+7.5.*log(0.15e-3.*sqrt(-m^2+1).*Re./b).^2));  
p=(a*fb-b*fa)/(fb-fa);  
fp=-1./p+1./(.827-0.85e-2*relLD)+20.*p.*(1+2.25.*relLD)...  
./ (sqrt(-m^2+1).*Re)-0.5e-2.*relLD...  
./ ((1+7.5.*log(0.15e-3.*sqrt(-m^2+1).*Re./p).^2));  
if abs(fp)<diff  
    nodiff=false;  
    Cd=p;  
end  
  
end  
else  
Cd=0.827-0.85e-2*relLD;  
end  
end  
end
```

1.2. Función 'represent.m'

```
function [ ] = represent( t,y1,u1,y2,u2,Pac1,Pac2,PN2,den1,den2, Qag,  
Re,Famort,Ff1,Do,difdiam)  
% Representación gráfica  
k=1;  
TFuente=l2; %Tamaño de la fuente  
PointaxX=6; %Número de puntos del eje X  
PointaxY=7; %Número de puntos del eje Y  
  
if difdiam==false  
  
p.fig=figure(k);  
p.fig.Position=[1 93 757 635];  
  
subplot(3,1,1)  
p.dib(1)=plot(t,Pac1,'LineWidth',1.5);  
hold on  
grid on  
p.dib(2)=plot(t,Pac2,'LineWidth',1.5);  
p.dib(3)=plot(t,PN2,'LineWidth',1.5);
```




```

p.dib(1).Marker='^';
p.dib(2).Marker='o';
p.dib(3).Marker='*';

npuntos=25;
distpunt=fix(length(t)/25);
p.dib(1).MarkerIndices=(2:distpunt:length(t));
p.dib(2).MarkerIndices=(10:distpunt:length(t));
p.dib(3).MarkerIndices=(2:distpunt:length(t));

grid minor
axvect=axis;
ax=gca;
ax.XTick=(linspace(axvect(1),axvect(2),PointaxX));
ax.YTick=(linspace(axvect(3),axvect(4),5));
ax.FontSize=TFuente;
ax.YAxis.TickLabelFormat='%.3f';
ax.XAxis.TickLabelFormat='%.3f';

xlabel('Tiempo(s)')
ylabel('Presión (Pa)')
title('Presión cámara inferior (P1) e intermedia (P2)')
legend('P1','P2','PN2')

subplot(3,1,2)
plot(t,ul,'LineWidth',1.5)
hold on
grid on
grid minor

axvect=axis;
ax=gca;
ax.XTick=(linspace(axvect(1),axvect(2),PointaxX));
ax.YTick=(linspace(axvect(3),axvect(4),5));
ax.FontSize=TFuente;
ax.YAxis.TickLabelFormat='%.3f';
ax.XAxis.TickLabelFormat='%.3f';

xlabel('Tiempo (s)')
ylabel('Velocidad (m/s)')
title('Velocidad del pistón')

subplot(3,1,3)
plot(t,Qag,'LineWidth',1.5)
hold on; grid on; grid minor;

axvect=axis;

```



```
ax=gca;
ax.XTick=(linspace(axvect(1),axvect(2),PointaxX));
ax.YTick=(linspace(axvect(3),axvect(4),5));
ax.FontSize=TFuente;
ax.YAxis.TickLabelFormat='%.3f';
ax.XAxis.TickLabelFormat='%.3f';

xlabel('Tiempo (s)')
ylabel('Caudal (m^3/s)')
title('Caudal circulante a través de cada agujero')

k=k+1;
p=figure(k);
p.Position=[415 19 569 424];

plot(t,Famort,'LineWidth',1.8)
hold on; grid on; grid minor;

axvect=axis;
clear ax
ax=gca;
ax.XTick=(linspace(axvect(1),axvect(2),PointaxX));
ax.YTick=(linspace(axvect(3),axvect(4),PointaxY));
ax.FontSize=TFuente;
ax.YAxis.TickLabelFormat='%.1f';
ax.XAxis.TickLabelFormat='%.3f';

xlabel('Tiempo (s)')
ylabel('Fuerza de amortiguamiento (N)')

else
    p.fig=figure;
    p.fig.Position=[721 24 560 420];
    for i=1:length(Do)
        p.dib(i)=plot(t,Famort(i,:), 'LineWidth',1.5);
        hold on
    end

    p.dib(1).Marker='*';
    p.dib(1).MarkerIndices=(1:25:length(t));
    p.dib(2).Marker='+';
    p.dib(2).MarkerIndices=(1:25:length(t));
    p.dib(3).Marker='x';
    p.dib(3).MarkerIndices=(1:25:length(t));
    p.dib(4).Marker='o';
    p.dib(4).MarkerIndices=(1:25:length(t));
```



```

ax=gca;
axvect=axis;
ax.XTick=(linspace(axvect(1),axvect(2),6));
ax.YTick=(linspace(axvect(3),axvect(4),11));
ax.FontSize=12;
ax.YAxis.TickLabelFormat='%.1f';
ax.XAxis.TickLabelFormat='%.3f';

grid on; grid minor;
xlabel('Tiempo (s)')
ylabel('Fuerza de amortiguamiento (N)')

legend(['Do=' num2str(Do(1)) ' m'], ['Do=' num2str(Do(2)) ' m'], ...
        ['Do=' num2str(Do(3)) ' m'], ['Do=' num2str(Do(4)) ' m'])

p.fig=figure;
p.fig.Position=[720 308 560 420];
for i=1:length(Do)
    p.dib(i)=plot(t,Ffl(i,:), 'LineWidth',1.5);
    hold on
end
vector(:,1)=(2:50:500);
vector(:,2)=(36:50:500);
vector(:,3)=(24:50:500);
vector(:,4)=(12:50:500);

p.dib(1).Marker='*';
p.dib(1).MarkerIndices=vector(:,1);
p.dib(2).Marker='+';
p.dib(2).MarkerIndices=vector(:,2);
p.dib(3).Marker='x';
p.dib(3).MarkerIndices=vector(:,3);
p.dib(4).Marker='o';
p.dib(4).MarkerIndices=vector(:,4);

ax=gca;
axvect=axis;
ax.XTick=(linspace(axvect(1),axvect(2),PointaxX));
ax.YTick=(linspace(axvect(3),axvect(4),PointaxY));
ax.FontSize=12;
ax.YAxis.TickLabelFormat='%.1f';
ax.XAxis.TickLabelFormat='%.3f';

grid on; grid minor;
xlabel('Tiempo (s)')
ylabel('Fuerza de fricción (N)')

```



```
legend(['Do=' num2str(Do(1)) ' m'], ['Do=' num2str(Do(2)) ' m'], ...  
       ['Do=' num2str(Do(3)) ' m'], ['Do=' num2str(Do(4)) ' m'])  
  
end  
end
```



PROGRAMA DEL PROBLEMA 4

1. Script principal

```
%SCRIPT PRINCIPAL
clear all
close all
clc

% Definición de la geometría, propiedades físicas y condiciones de contorno
R=0.5; % Radio R (m)
avect=[0.07 0.085 0.1]; % Radio a (m) ==>Se incluyen los diferentes radios
b=0.05; % Radio b (m)
S=pi*b^2; % Superficie S (m^2)
denl=8000; % Densidad del material del conducto (kg/m^3)
rho=1000; % Densidad del fluido (kg/m^3)
Qo=0.0035; % Caudal inicial (m^3/s)
k=10; % Constante k (N·m·s)

i=1;
for a=avect
    fprintf('Grosor de pared: %.2f cm (a=%.3f m)\n', (a-b)*100,a)
    % Cálculo de la velocidad angular en régimen permanente
    wrp = 4*rho*R*S*((Qo*exp(5)/(2*S))^2)/(k+8*rho*S*R^2*Qo*exp(5)/(2*S));
    fprintf('\t - Velocidad angular en reg. permanente: %.2f rad/s\n',wrp)
    % Cálculo de la masa del conducto y del momento de inercia
    mcond=2*denl*pi^2*R*(a^2-b^2);
    Iz=(1/4)*(8*R^2+3*a^2+3*b^2)*mcond;
    fprintf('\t - Inercia en eje z: %.2f kg*m^2\n',Iz)
    % Resolución de la ecuación diferencial
    param=[R a b S denl mcond rho Qo k Iz]; % Parámetros de entrada en ode45

    % -->Condicion inicial para la primera ecuación diferencial
    wo=0;
    CI=wo;
    % -->Tiempo final (régimen permanente)
    tfinal=5;

    % -->Solución de la primera ecuación diferencial
    [t1,wrt1]=ode45(@ (t,x) f1(t,x,param),linspace(0,tfinal,1000),CI);
    % --->Condición inicial para la segunda ecuación diferencial
    CI=wrt1(end);
    to=tfinal;
    % -->Solución de la segunda ecuación diferencial
```

```

[t2,wrt2]=ode45( @(t2,x) f2(t2,x,param,to),...
    linspace(tfinal,tfinal+5,1000),CI);

% Se unen los vectores para obtener la solución total
t=[t1; t2];
w=[wrt1; wrt2];

% Cálculo del tiempo para llegar a régimen permanente
[ti,index]=unique(t);
trp=interp1(w(index),ti,wrp*0.998);
fprintf(['\t - Tiempo reg. perm. con error ' ...
    'del 0.2%%: %.2f segundos\n'],trp)

% Guarda datos
save(['Datos_caso_' num2str(i)])

% Representación gráfica
hold on;

if a==0.070
    figure(1)
    p{1}=plot(t1,wrt1,t2,wrt2,'LineWidth',1.5);
    ylabel('w (rad/s)');
    xlabel('t (s)');
    legend('ec. dif. 1','ec. dif. 2')
    grid minor
    ax=gca;
    ax.FontSize=12;
    p{1}(1).LineStyle='--';
    p{1}(2).LineStyle='-.';

end

figure(2)
hold on; p{2}(i)=plot(t,w,'LineWidth',1.5);
ylabel('w (rad/s)');
xlabel('t (s)');
ax=gca;
ax.FontSize=12;

i=i+1;
end

figure (2); legend(['a=' num2str(avect(1)) ' m'],...
    ['a=' num2str(avect(2)) ' m'],['a=' num2str(avect(3)) ' m'])
p{2}(1).Marker='^'; p{2}(1).MarkerIndices=(25:250:length(t));
p{2}(2).Marker='*'; p{2}(2).MarkerIndices=(185:250:length(t));
p{2}(3).Marker='o'; p{2}(3).MarkerIndices=(75:250:length(t));
grid minor

```



1.1. Función 'f1.m'

```
function [ dxdt ] = f1( t,x,param )
% Derivadas de primer orden
% t: tiempo
% x: variables que se integrarán:
%   => x(1): velocidad angular
% param: parámetros necesarios definidos en el script principal
% dxdt: derivadas de primer orden de cada una de las variables
%   => dxdt(1): aceleración angular

R=param(1);a=param(2);b=param(3);S=param(4);den1=param(5);m1=param(6);
rho=param(7);Qo=param(8);k=param(9); Iz= param(10);
w=x(1);
dxdt(1)=(-(-4*rho*R^2*Qo*exp(t)-k)*w-4*rho*R*S*(Qo*exp(t)/(2*S))^2-...
    rho*pi*R^2*Qo*exp(t))/(-4*pi*R^3*S*rho-Iz);
dxdt=dxdt(:);
end
```

1.2. Función 'f2.m'

```
function [ dxdt ] = f2( t,x,param,to )
% Derivadas de primer orden
% t: tiempo
% x: variables que se integrarán:
%   => x(1): velocidad angular
% param: parámetros necesarios definidos en el script principal
% dxdt: derivadas de primer orden de cada una de las variables
%   => dxdt(1): aceleración angular

R=param(1);a=param(2);b=param(3);S=param(4);den1=param(5);m1=param(6);
rho=param(7);Qo=param(8);k=param(9); Iz= param(10);
w=x(1);
dxdt(1)=(-(-4*rho*R^2*Qo*exp(to)-k)*w-4*rho*R*S*(Qo*exp(to)/(2*S))^2)/...
    (-4*pi*R^3*S*rho-Iz);
dxdt=dxdt(:);
end
```



PROGRAMA DEL PROBLEMA 5

1. Script principal

```
% SCRIPT PRINCIPAL

clear all
close all
clc

%NOTA: La nomenclatura utilizada es similar a la presentada en el problema.
% Las unidades de cada magnitud física están en el sistema internacional

% Geometría (CASO A)
rout=0.080;
ro=0.060;
H=0.001;
alpha=70*pi/180;
rext=ro+H;
rin=0.005;

% Otras constantes (CASO A)
a=cos(alpha);
b=log(ro./rin);
c=(H./(2*sin(alpha)))+ro;
D=(rout-ro)/cos(alpha);

% Condiciones de contorno y propiedades físicas (CASO A)
Pin=2e+5;
Pout=1e+5;
mu=857*32*10^(-6); % Viscosidad dinámica del aceite ISO 32

% Cálculo de la presión Po (CASO A)
Po= (Pout+Pin*log((ro+H/(2*sin(alpha))+D*cos(alpha))/(ro+H/...
    (2*sin(alpha))))/(cos(alpha)*log(ro/rin)))/(1+log((ro+H/...
    (2*sin(alpha))+D*cos(alpha))/(ro+H/(2*sin(alpha))))/...
    (cos(alpha)*log(ro/rin)));

% Caudal volumétrico (CASO A)
QtrcilA=-1/6*(Po-Pin)*pi*H^3/(mu*log(ro/rin));
fprintf('-----> CASO A\n')
fprintf('\t - Caudal circulante: %.2e m^3/s\n',QtrcilA)

%Distribución de presión en la zona cilíndrica (CASO A)
r2=(rin:0.001:ro);
```




```

Pc2=Pin+(Po-Pin)*log(r2/rin)*(1/b);
r=[0,r2];
Pcgen=[Pin,Pc2];

%Distribución de presión en la zona troncocónica (CASO A)
x=linspace(0,D,100);
PtrA=Po+(Po-Pin)*log((ro+H/(2*sin(alpha))+x*cos(alpha))/(ro+...
    H/(2*sin(alpha))))/(cos(alpha)*log(ro/rin));

%Fuerza de sustentación sobre la superficie cilíndrica (CASO A)
Fpc = Pin*pi*rin^2+Pin*pi*(-rin^2+ro^2)+2*pi*(Po-Pin)*...
    ((1/2)*ro^2*log(ro/rin)+1/4*(rin^2-ro^2))/log(ro/rin);
fprintf(['\t - Fuerza de sustentación sobre'...
    ' superficie cilíndrica: %.3f N\n'],Fpc)
fprintf('\t\t-> Debido a la presión: %.3f N\n',Fpc)
fprintf('\t\t-> Debido a los esfuerzos cortantes: %.1f N\n',0)

%Fuerza de sustentación sobre la superficie troncocónica (CASO A)
I1=2*Po*pi*(ro*D + D^2/2*cos(alpha))*cos(alpha);
I2p=ro*b*(a*D*log((a*D+c)/c)-a*D*c*log((a*D+c)/c))/a;
I2pp=b*(2*log((a*D+c)/c)*D^2*a^2-D^2*a^2+2*c*D*a-...
    2*c^2*log((a*D+c)/c))/(4*a);
I2=I2p+I2pp;
FptrA=I1+I2;
FctrA=-2*1/2*H*pi*sin(alpha)*(Po-Pin)*(D+H/(2*sin(alpha))*...
    cos(alpha))*log((ro+H*sin(alpha)/2)/(ro+D*cos(alpha)+...
    H*sin(alpha)/2))/log(ro/rin);
fprintf(['\t - Fuerza de sustentación sobre superficie' ...
    ' troncocónica: %.3f N\n'],FptrA+FctrA)
fprintf('\t\t-> Debido a la presión: %.3f N\n',FptrA)
fprintf('\t\t-> Debido a los esfuerzos cortantes: %.3f N\n',FctrA)

%Fuerza de sustentación total (CASO A)
FsustotalA=Fpc+FptrA+FctrA;
fprintf(['\t - Fuerza de sustentación TOTAL' ...
    ' (CASO A): %.3f N\n\n'],FsustotalA)

% Geometría (CASO B)
% Se añaden los datos de geometría necesarios para el caso de superficie
% cilíndrica
resf=(ro:0.01:30);
gamma_fin=asin(ro./resf);
gamma_in=atan((rin)./(resf+H));

% Otras constantes (CASO B)
A=cos(alpha);
B2=log(tan(gamma_fin/2)./tan(gamma_in/2));

```



```
C=(H./(2*sin(alpha)))+resf;

% Cálculo de la presión P2
% Nota: Para cada radio de esfera, habrá una presión P2 diferente
P2 = (Pout+Pin.*log((ro+H./(2*sin(alpha))+D*cos(alpha))./(...
    (ro+H./(2*sin(alpha))))/(cos(alpha)*log(tan((1/2).*gamma_fin)./(...
    tan((1/2).*gamma_in))))/(1+log((ro+H./(2*sin(alpha))+...
    D*cos(alpha))./(ro+H./(2*sin(alpha))))/(cos(alpha).*...
    log(tan((1/2).*gamma_fin)/tan((1/2).*gamma_in)))));

% Caudal volumétrico (CASO B)
% Nota: Para cada radio de esfera, habrá una caudal circulante distinto
fprintf('-----> CASO B\n')
fprintf(['Para cada radio de esfera, el caudal,' ...
    ' la distribución de presión, '])
fprintf(['las fuerzas de sustentación... varían.\n' ...
    ' A continuación, en el Command Window,'])
ind=2;
fprintf([' se presentan los resultados si el radio '...
    'de esfera fuera de %.2f cm \n'],resf(ind)*100)
QtrcilB=-1/6*(P2-Pin)*pi*H^3/(mu*log(tan(gamma_fin/2)/tan(gamma_in/2)));
fprintf('\t - Caudal circulante: %.2e m^3/s\n',QtrcilB(ind))

% Distribución de presión en la zona esférica y troncocónica (CASO B)
% Nota: Para cada radio de esfera, habrá una distribución de presión
% diferente.
Pesf=zeros(length(P2),2000)+Pin;
PtrB=zeros(length(P2),length(x));
gamma=zeros(length(P2),2000);
for i=1:length(resf)
    gammainicial=gamma_in(i);
    gammafinal=gamma_fin(i);
    gammal=linspace(0,gammainicial,1000);
    gamma2=linspace(gammainicial,gammafinal,1000);
    gamma(i,1:end)=[gammal,gamma2];
    B2p=log(tan(gammafinal/2)/tan(gammainicial/2));
    Pesf(i,1001:2000)=Pin+((P2(i)-Pin)./B2p).*...
        (log(tan(gamma2./2)/tan(gammainicial/2)));
    PtrB(i,1:length(x))=P2(i)+(P2(i)-Pin).*log((ro+H./(2*sin(alpha))+...
        x*cos(alpha))./(ro+H./(2*sin(alpha))))/(cos(alpha).*...
        log(tan(gamma_fin(i)/2)/tan(gamma_in(i)/2)));
end

% Fuerza de sustentación sobre la superficie esférica
% debida a la presión (en función del radio de la esfera)
Fpesf=zeros(1,length(gamma_fin));
indices=[];
```



```

for i=1:length(gamma_fin)
    dFpesf= @(x) ((P2(i)-Pin).*log(tan((1./2).*x)./...
        tan((1./2).*gamma_in(i)))./log(tan((1./2).*gamma_fin(i)))./...
        tan((1./2).*gamma_in(i)))).*((resf(i)).^2).*pi.*sin(2.*x);
    Fpesf(i)=integral(dFpesf,gamma_in(i),gamma_fin(i))+...
        Pin*pi*rin^2+0.5*Pin*pi*resf(i).^2.*...
        (cos(2*gamma_in(i))-cos(2*gamma_fin(i)));
    if resf(i)==2 | resf(i)==8 | resf(i)==30
        indices=[indices i];
    end
end

% Fuerza de sustentación sobre la superficie esférica
% debida a los esfuerzos cortantes (en función del radio de la esfera)
B1=2*pi*(P2-Pin)./B2;
Fcesf=+(B1./2)*H.*(resf.^2).*(1./(resf+H/2)).*...
    (cos(gamma_fin)-cos(gamma_in));
fprintf(['\t - Fuerza de sustentación sobre ' ...
    'superficie esférica: %.3f N\n'],Fpesf(ind)+Fcesf(ind))
fprintf('\t\t-> Debido a la presión: %.4f N\n',Fpesf(ind))
fprintf('\t\t-> Debido a los esfuerzos cortantes: %.3f N\n',Fcesf(ind))

% Fuerza de sustentación sobre la superficie troncocónica (CASO B)
% debida a la presión
I1=2*Po*pi*(ro*D + D^2/2*cos(alpha))*cos(alpha);
I2p=ro*B2.*(A*D*log((A*D+C)./C)-A*D+C.*log((A*D+C)./C))/A;
I2pp=B2.*(2*log((A*D+C)./C)*D^2*A^2-D^2*A^2+...
    2*C*D*A-2*C.^2.*log((A*D+C)./C))/(4*A);
I2=I2p+I2pp;
FptrB=I1+I2;

% Fuerza de sustentación sobre la superficie troncocónica (CASO B)
% debida a los esfuerzos cortantes
FctrB=-H*pi*sin(alpha)*(P2-Pin).*(D+H/(2*sin(alpha)*cos(alpha)))*...
    log((ro+H*sin(alpha)/2)/(ro+D*cos(alpha)+H*sin(alpha)/2))./...
    log(tan(gamma_fin/2)./tan(gamma_in/2));
fprintf(['\t - Fuerza de sustentación sobre' ...
    'superficie troncocónica: %.3f N\n'],FptrB(ind)+FctrB(ind))
fprintf('\t\t-> Debido a la presión: %.3f N\n',FptrB(ind))
fprintf('\t\t-> Debido a los esfuerzos cortantes: %.3f N\n',FctrB(ind))

% Fuerza de sustentación total (CASO B)
FsustotalB=Fpesf+Fcesf+FptrB+FctrB;
fprintf(['\t - Fuerza de sustentación TOTAL '...
    '(CASO B): %.3f N\n\n'],FsustotalB(ind))

% Otros resultados que se comentan en el apartado 3 del problema

```



```
fprintf(['---- Otros resultados que se comentan' ...
        ' en el apartado 3 del problema \n'])
fprintf('\t==>Fuerza de sustentación sobre superficie esférica debida a ')
fprintf(['la presión\n\t si los valores de radio ' ...
        'de esfera son elevados:\n'])
for i=indices
    fprintf('\t - Si resf = %.2f m, F = %.3f N\n\n',resf(i),Fpesf(i));
end
fprintf('=====SUBA PARA VER MÁS RESULTADOS=====\\n')

%Representación gráfica
fig{1}=figure(1);
fig{1}.Position=[41 309 699 480];
subplot(2,1,1)
plot(r,Pcgen,'LineWidth',1.7)
xlabel('r (m)'); ylabel('Presión (Pa)');
title('Distribución de presión en la zona cilíndrica (CASO A)');
ax=gca;
ax.FontSize=12;

subplot(2,1,2)
plot(x,PtrA,'LineWidth',1.7)
xlabel('x (m)'); ylabel('Presión (Pa)');
title('Distribución de presión en la zona cónica (CASO A)');
ax=gca;
ax.FontSize=12;

fig{2}=figure(2);
fig{2}.Position=[740 306 699 480];
subplot(2,1,1)
plot(gamma(ind,:)*180/pi,Pesf(ind,:), 'LineWidth',1.7)
xlabel('Ángulo \gamma (^o)'); ylabel('Presión (Pa)');
title('Distribución de presión en la zona esférica (CASO B)');
ax=gca;
ax.FontSize=12;

subplot(2,1,2)
plot(x,PtrB(ind,:), 'LineWidth',1.7)
xlabel('x (m)'); ylabel('Presión (Pa)');
title('Distribución de presión en la zona cónica (CASO B)');
ax=gca;
ax.FontSize=12;

fig{3}=figure(3);
fig{3}.Position=[211 317 1044 481];
plot(resf,Fpesf,'LineWidth',1.7)
xlabel('Radio de la esfera (m)'); ylabel('Fuerza (N)');
```



```
title_name=['Fuerza de sustentación debida a la presión'...
            ' en función del radio de la esfera'];
title(title_name);
ax=gca;
ax.XLim=[0,2];
ax.FontSize=12;

fig{4}=figure(4);
fig{4}.Position=[211 130 1044 481];
plot(resf,Fcesf,'LineWidth',1.7)
xlabel('Radio de la esfera (m)'); ylabel('Fuerza (N)');
title_name=['Fuerza de sustentación debida a los esfuerzos'...
            ' cortantes en función del radio de la esfera'];
title(title_name);
ax=gca;
ax.XLim=[0,2];
ax.FontSize=12;
```



PROGRAMA DEL PROBLEMA 6

1. Script principal

```
%SCRIPT PRINCIPAL

clear all
close all
clc

%%%% Apartados 1 y 2
% Geometría y propiedades físicas
% => La nomenclatura utilizada es la misma que en el problema
% => Las unidades utilizadas están en el sistema internacional

Rr=0.01;
R=0.01;
Ro=Rr+4*10^(-6);
H=4*10^(-6);
L=3*10^(-3);
gamma=40*pi/180;
delta=45*pi/180;
Rp=Rr+(R+H)*sin(gamma)-(R+H)*sin(gamma+delta);
mu=1.983*10^(-5);
params=[Rr R H gamma];

% Condiciones de contorno
% => La nomenclatura utilizada es la misma que en el problema
% => Las unidades utilizadas están en el sistema internacional

Pin=100*10^5;
Pout=1*10^5;
% Resolución de la integral Idelta
Idelta=integral(@(alpha) dI(alpha,params),0,delta);
% Constantes halladas
A=(log(Ro/Rr)*Ro^4-log(Ro/Rr)*Rr^4-Ro^4+2*Ro^2*Rr^2-Rr^4)/log(Ro/Rr);
P1=(-4*L*H^3*Pout/((3*A*(2*R+H))*Idelta)+Pin)/...
    (1-4*L*H^3/((3*A*(2*R+H))*Idelta));
Qcon=pi*H^3*(Pout-P1)/(6*mu*(2*R+H)*Idelta);
Qcil=-A*pi*(P1-Pin)/(8*mu*L);
% Definición de la distribución de presión en las dos zonas
%--->Zona cilíndrica
x=(0:0.001:L);
Pcil=(P1-Pin).*x/L+Pin;
%--->Zona cónica
ang=(0:0.0001:delta);
```



```

Pcon=zeros(1,length(ang));
Pcon(1)=P1;
for i=2:length(ang)
    Ialpha=integral(@(alpha) dI(alpha,params),0,ang(i)...
        , 'RelTol',1e-10, 'AbsTol',1e-10);
    Pcon(i)=(Pout-P1)*Ialpha/Idelta+P1;
end

% Fuerza horizontal debida a la presión
Fx=0; %Definición de la variable
for i=1:length(ang)-1
    % Este for se utiliza para realizar una integración numérica
    % Discretización:
    angprom=(ang(i)+ang(i+1))/2;
    Pconprom=(Pcon(i)+Pcon(i+1))/2;
    difang=ang(i+1)-ang(i);
    % Fuerza realizada sobre cada superficie discretizada
    Fxcalc=Pconprom*cos(gamma+angprom)*2*pi*(R+H)*...
        (Rr+(R+H)*(sin(gamma)-sin(gamma+angprom)))*difang;
    % Suma de fuerzas entre todas las superficies:
    Fx=Fx+Fxcalc;% Fuerza de presión
end
fprintf('Caudal zona cilíndrica: %.3e m^3/s \n',Qcil)
fprintf('Caudal zona cónica: %.3e m^3/s \n',Qcon)
fprintf('Fuerza de presión: %.3f N \n',Fx);

% Representación gráfica
figure(1)
figure(gcf)
plot(x,Pcil,'LineWidth',1.2)
xlabel('Coordenada horizontal (m)')
ylabel('Presión (Pa). Zona cilíndrica.')
ax=gca;
ax.FontSize=12;
figure(2)
figure(gcf)
ang=ang*180/pi;
plot(ang,Pcon,'LineWidth',1.2)
xlabel('Ángulo \alpha (^o)')
ylabel('Presión (Pa). Zona cónica.')
ax=gca;
ax.FontSize=12;

%%%%% Apartado 3

% Geometría

```



```
%R: Hace referencia al radio del cilindro, pero
%el valor sigue siendo el mismo
h=10*1e-6;
e=1e-6;

% Fuerza horizontal y vertical sobre el eje
delta=linspace(0,2*pi,1000);
w=5000;
[Fx_T,Fy_T] = Fx_T_Fy_T(delta,e,mu,w,R,h);

figure(3)
plot(delta*180/pi,Fx_T,'LineWidth',1.2);
xlabel('Ángulo \delta (°)');
ylabel('Fuerza horizontal F_{X\'T} [N/m]');
ylim([-3000 3000]); xlim([0 360]);
ax=gca;
ax.FontSize=12;ax.XTick=(0:60:360);

figure(4)
plot(delta*180/pi,Fy_T,'LineWidth',1.2);
xlabel('Ángulo \delta (°)');
ylabel('Fuerza vertical F_{Y\'T} [N/m]');
ylim([-3000 3000]); xlim([0 360]);
ax=gca;
ax.FontSize=12; ax.XTick=(0:60:360);

% Par restaurador total
ang_casos=[45, 225; ...
          90, 270; ...
          135, 315]; %Casos de estudio

e_max=e;

% Discretización del eje cilíndrico

n=500; % Número de porciones
i=1:n; % índices
e_vect=e_max*(1-(i-1)/n-1/2/n); %Excentricidad en el centro
                                %de cada porción
d=1/2-(i-1)/2/n-1/n/4; %Distancia respecto del centro
e_cent=[e_vect rot90(e_vect,2)]; %Vector total de excentricidades
d=[d rot90(d,2)]; %Vector total de distancias
Lx=linspace(-1/2+1/n/2,1/2-1/n/2,2*n); %Coordenada longitudinal
ang_cent=zeros(1,2*n); % Ángulo delta en el centro de cada porción

% Inicialización de variables
```




```

w_vect=linspace(0,5000,11); %Velocidades angulares
Mz_tot=zeros(3,length(w_vect));
plots=cell(1,3);

% Cálculo de los tres casos estudiados
linstyle=["-", "-", "--"];
for caso=1:3

    ang_extrem=[ang_casos(caso,1),ang_casos(caso,2)];
    ang_cent(1:n)=ang_extrem(1)*pi/180;
    ang_cent(n+1:end)=ang_extrem(2)*pi/180;

    Fyi=zeros(1,n);
    Mzi=zeros(1,n);

    for j=1:length(w_vect)
        w=w_vect(j);
        for i=1:length(d)
            [Fx_T,Fy_T] = Fx_T_Fy_T(ang_cent(i),e_cent(i),mu,w,R,h);
            Fyi(i)=Fy_T*(d(1)-d(2));
            if ang_cent(i)>pi/2 && ang_cent(i)<3*pi/2
                Mzi(i)=-Fyi(i)*d(i);
            else
                Mzi(i)=+Fyi(i)*d(i);
            end
        end
        Mz_tot(i,j)=sum(Mzi);

        if w_vect(j)==5000

            figure(5)
            plot(Lx,Fyi,'LineWidth',1.2); hold on;

            figure(6)
            plot(Lx,Mzi,linstyle(caso),'LineWidth',1.2); hold on;

        end
    end

    figure(7)
    plots{caso}=plot(w_vect,Mz_tot(i,:), '-o'); hold on;

end

figure(5)
legend('Caso 45^o-225^o','Caso 90^o-270^o',...
        'Caso 135^o-315^o')

```



```

xlabel('Coordenada longitudinal al eje (m)');
ylabel('Fuerza F_{Yi} (N/m)')
title('Fuerza F_{Yi} sobre cada porción (\omega = 5000 rad/s)')
ax=gca;
ax.FontSize=12;

figure(6)
legend('Caso 45^o-225^o', 'Caso 90^o-270^o', ...
       'Caso 135^o-315^o')
xlabel('Coordenada longitudinal al eje (m)');
ylabel('Momento generado por F_{Yi} (N·m)');
title('Momento M_{Zi} sobre cada porción (\omega = 5000 rad/s)')
ax=gca;
ax.FontSize=12;

figure(7)
plots{1}.MarkerIndices=(1:2:length(w_vect));
plots{3}.MarkerIndices=(2:2:length(w_vect));
legend('Caso 45^o-225^o', 'Caso 90^o-270^o', ...
       'Caso 135^o-315^o')
xlabel('Velocidad angular \omega (rad/s)');
ylabel('Par restaurador M_{ZoT} (N·m)/m');
ax=gca;
ax.FontSize=12;

```

1.1. Función 'dl.m'

```

function [ I ] = dI( alpha,params)
% Función a integrar respecto del ángulo
% alpha: ángulo
% params: parámetros necesarios definidos en el script principal
% I: expresión a integrar

Rr=params(1); R=params(2); H=params(3);
ga=params(4);

I=1./((2*R+H)*sin(ga+alpha)+(-2*H-2*R)*sin(ga)-2*Rr);

end

```



1.2. Función 'Fx_T_Fy_T.m'

```
function [Fx_T,Fy_T] = Fx_T_Fy_T(delta,e,mu,w,R,h)
%Función que calcula la fuerza horizontal y vertical sobre el eje
% delta: coordenada angular del eje respecto del centro
% e: excentricidad
% mu: viscosidad dinámica
% w: velocidad angular
% R: radio del eje
% h: diferencia entre el radio del estator y del eje
% Fx_T: fuerza horizontal sobre el eje
% Fy_T: fuerza vertical sobre el eje

psi=h/R;
epsilon=e/h;

% Integrales I1, I2, I3, I4, I5, I6, I7

I(1)=2*pi/sqrt(1-epsilon^2);
I(2)=2*pi/((1-epsilon^2)^(3/2));
I(3)=pi*(2+epsilon^2)/((1-epsilon^2)^(5/2));
I(4)=(I(2)-I(1))/epsilon;
I(5)=(I(3)-I(2))/epsilon;
I(6)=0;
I(7)=0;

% Fuerza horizontal y vertical sobre el eje

Fx_cil=(6*mu*w*R/psi^2)*(I(6)*I(3)-I(7)*I(2))/I(3);
Fy_cil=(6*mu*w*R/psi^2)*(I(2)*I(5)-I(3)*I(4))/I(3);

if isnan(Fy_cil)
    Fy_cil=0;
end

Fx_T=-Fy_cil*sin(delta)-Fx_cil*cos(delta);
Fy_T=Fy_cil*cos(delta)-Fx_cil*sin(delta);

end
```



PROGRAMA DEL PROBLEMA 7

1. Script principal

```
% SCRIPT PRINCIPAL

clear all
close all
clc

% => La nomenclatura utilizada es la misma que en el problema
% => Las unidades utilizadas están en el sistema internacional

% Geometría
Rs=[40.1 40.05 40.15]*1e-3;
e=[50 30 10 5 1]*1e-6;
R=0.040;
hp=Rs-R;
psi=hp/R;

%Condición de contorno y propiedades físicas
Pin=0*(10.^6);
w=1000*pi;
mu=0.02;
Pcav=0;

% Otras variables
n=1000; % Número de puntos por cada caso
fignum=0; %Variable para establecer una referencia en figuras
        % (utilizada en la representación gráfica)
Pentrada=zeros(length(Rs),length(e)); % Inicialización de variable
Pentrada_v=zeros(length(Rs),n); % Inicialización de variable
angin=zeros(length(Rs),length(e)); % Inicialización de variable
ang_pin=zeros(length(Rs),n); % Inicialización de variable
e_vect=zeros(length(Rs),n); % Inicialización de variable
Fsu2=zeros(length(Rs),n); % Inicialización de variable
L2=zeros(length(Rs),n); % Inicialización de variable
fig=cell(1,15);

%Resolución de los casos
for j=1:length(Rs)
    fprintf('>>>>>>>>> CASO %i\n',j)
    %Resolución de integrales
    anginicial=-2*pi/9; % Ángulo inicial
    angfinal=16*pi/9; % Ángulo final
```



```

anggen=linspace(anginicial,angfinal,n); % Ángulo genérico
w_vect=linspace(0,1000*pi,n);
P=zeros(length(anggen),length(e));
Fsu=zeros(length(w_vect),length(e));
i2p=zeros(1,length(anggen));
i3p=zeros(1,length(anggen));
norepresent=0;

for k=1:length(e)
    epsi=e(k)/hp(j);
    if abs(epsi-1)<0.001
        norepresent=k;
        Pentrada(j,k)=NaN;
    else
        di2dx=@(x) (1-epsi.*cos(x)).^(-2);
        di3dx=@(x) (1-epsi.*cos(x)).^(-3);
        di4dx=@(x) ((1-epsi*cos(x)).^(-2)).*cos(x);
        di5dx=@(x) ((1-epsi*cos(x)).^(-3)).*cos(x);
        for i= 1:length(anggen)
            i2p(i)=integral(di2dx,anginicial,anggen(i));
            i3p(i)=integral(di3dx,anginicial,anggen(i));
        end
        i2=integral(di2dx,anginicial,angfinal);
        i3=integral(di3dx,anginicial,angfinal);
        i4=integral(di4dx,anginicial,angfinal);
        i5=integral(di5dx,anginicial,angfinal);

        fprintf('--> Si e=%.3f mm:\n',e(k)*1e+3)
        fprintf('\ti2=%.4f\ti3=%.4f\t',i2,i3)

        % Distribución de presión en función del ángulo
        P(1:length(i2p),k)=Pin+(6*mu*w/psi(j)^2)*(i2p-(i2./i3)*(i3p));

        % Presión de entrada obtenida a partir de la gráfica
        Pentrada(j,k)=Pcav+abs(min(P(1:length(i2p),k)));

        fprintf('\tP%iimin=%.3e Pa\t',k,j,min(P(1:length(i2p),k)))

        % Fuerza de sustentación en función de la velocidad angular
        Fsu(1:length(w_vect),k)=...
            -(6*mu*R*w_vect/psi(j)^2)*(i4-i2*i5/i3);

        % Longitud del cojinete en función de la velocidad angular
        L1=18000./(2.*Fsu);
        fprintf('\tL%i=% .3f cm\n',k,j,interp1(w_vect,...
            L1(1:length(w_vect),k)*100,w))
    end
end

```



```
end
ex=e;

% Fuerza de sustentación en función de la excentricidad
e_vect(j,1:n)=linspace(0.00005*hp(j),hp(j)-0.00005*hp(j),n);
epsi=e_vect(j,:)/hp(j);
di2dx=@(x) (1-epsi.*cos(x)).^(-2);
di3dx=@(x) (1-epsi.*cos(x)).^(-3);
di4dx=@(x) ((1-epsi.*cos(x)).^(-2)).*cos(x);
di5dx=@(x) ((1-epsi.*cos(x)).^(-3)).*cos(x);
ii2=integral(di2dx,anginicial,angfinal,'ArrayValued',true);
ii3=integral(di3dx,anginicial,angfinal,'ArrayValued',true);
ii4=integral(di4dx,anginicial,angfinal,'ArrayValued',true);
ii5=integral(di5dx,anginicial,angfinal,'ArrayValued',true);

Fsu2(j,1:length(e_vect))=-(6*mu*R*w/psi(j)^2)*(ii4-ii2.*ii5./ii3);

% Longitud del cojinete en función de la excentricidad
L2(j,1:length(e_vect))=18000./(2.*Fsu2(j,1:length(e_vect)));

% Presión de entrada en función de la excentricidad

ang_pin(j,1:length(e_vect(j,:)))=acos((1-ii2./ii3)./epsi);
d2Pdang2=6*mu*w*(-2*epsi.*sin(ang_pin)./(1-epsi.*...
    cos(ang_pin)).^3+3*ii2.*epsi.*sin(ang_pin)./...
    (ii3.*(1-epsi.*cos(ang_pin)).^4))/psi(j).^2;
if isequal(d2Pdang2<0, zeros(length(Rs),n))
    di2dx=@(x) (1-epsi.*cos(x)).^(-2);
    di3dx=@(x) (1-epsi.*cos(x)).^(-3);
    for i=1:length(ang_pin)
        i2p(i)=integral(@(x) ...
            (1-epsi(i)*cos(x)).^(-2),anginicial,ang_pin(j,i));
        i3p(i)=integral(@(x) ...
            (1-epsi(i)*cos(x)).^(-3),anginicial,ang_pin(j,i));
    end
    Pentrada_v(j,1:length(e_vect(j,:)))=Pcav+...
        abs((6*mu*w/psi(j)^2)*(i2p-(ii2./ii3).*(i3p)));
else
    disp(['No se cumple el criterio de mínimo ' ...
        'relativo en al menos uno de los ángulos'])
end

% Número de Sommerfeld en función de la excentricidad
cte=(psi(j)^2)/(mu*w*R);
S=Fsu2(j,1:length(e_vect))*(psi(j)^2)/(mu*w*R);
S2=6*(-ii4+ii2.*ii5./ii3);
```



```

%Representación gráfica

cont=0;
fignum=fignum+2;
fig{fignum-1}=figure(fignum-1);
fig{fignum-1}.Position=[9+450*(j-1) 400 452 361];
fig{fignum}=figure(fignum);
fig{fignum}.Position=[9+450*(j-1) 375 452 361];

for i=1:k
    if norepresent==0
        leg{i,1}=num2str(ex(i)*1000);
        figure(fignum-1)
        p{1}(i)=plot(anggen,P(:,i),'LineWidth',1.25); hold on;
        figure(fignum)
        p{2}(i)=plot(w_vect,Fsu(:,i),'LineWidth',1.25); hold on;
    else
        if i==norepresent
            else
                cont=cont+1;
                leg{cont,1}=num2str(ex(i)*1000);
                figure(fignum-1)
                p{1}(i)=plot(anggen,P(:,i),'LineWidth',1.25); hold on;
                figure(fignum)
                p{2}(i)=plot(w_vect,Fsu(:,i),'LineWidth',1.25); hold on;
            end
        end
    end
end

p{1}(1).Marker='o'; p{2}(1).Marker='o';
p{1}(2).Marker='*'; p{2}(2).Marker='*';
p{1}(3).Marker='^'; p{2}(3).Marker='^';
p{1}(4).Marker='s'; p{2}(4).Marker='s';
p{1}(5).Marker='d'; p{2}(5).Marker='d';

np=5;

p{1}(1).MarkerIndices=(1:n/np:n);
p{2}(1).MarkerIndices=(1:n/np:n);
p{1}(2).MarkerIndices=(fix(0.5*n/np):n/np:n);
p{2}(2).MarkerIndices=(fix(0.5*n/np):n/np:n);
p{1}(3).MarkerIndices=(1:n/np:n);
p{2}(3).MarkerIndices=(1:n/np:n);
p{1}(4).MarkerIndices=(fix(0.5*n/np):n/np:n);
p{2}(4).MarkerIndices=(fix(0.5*n/np):n/np:n);
p{1}(5).MarkerIndices=(1:n/np:n);

```



```
p{2}(5).MarkerIndices=(1:n/np:n);

figure(fignum-1)
xlim([-pi/4 7*pi/4]); xticks(-pi/4:pi/4:7*pi/4)
xticklabels({'-\pi/4','0','\pi/4','\pi/2','3\pi/4','\pi','5\pi/4',...
            '3\pi/2','7\pi/4'})
xlabel('\psi (rad)'); ylabel('Presión (Pa)')
legend(leg)
ax=gca; ax.FontSize=11;

figure(fignum);

xlim([0 1000*pi]); xticks(0:125*pi:1000*pi)
xticklabels({'0\pi','125\pi','250\pi','375\pi','500\pi','625\pi',...
            '750\pi','875\pi','1000\pi'})
xlabel('\omega (rad/s)'); ylabel('Fuerza de sustentación (N/m)')
legend(leg)
ax=gca; ax.FontSize=11;

fignum=fignum+1;
fig{fignum}=figure(fignum);
fig{fignum}.Position=[9+450*(j-1) 350 452 361];

plot(e_vect(j,:)*1000,Fsu2(j,1:length(e_vect)),'LineWidth',1.5)
xlabel('e (mm)'); ylabel('Fuerza de sustentación (N/m)')
ax=gca; ax.FontSize=11; ax.XLim=[0 max(e_vect(j,:))*1000+0.01];
ax.YLim=[-0.5*1e+8 max(Fsu2(j,1:length(e_vect)))];

fignum=fignum+1;
fig{fignum}=figure(fignum);
fig{fignum}.Position=[9+450*(j-1) 325 452 361];

plot(e_vect(j,:)*1000,S,'LineWidth',1.5)
xlabel('e (mm)'); ylabel('Número de Sommerfeld')
ax=gca; ax.FontSize=11; ax.XLim=[0 max(e_vect(j,:))*1000+0.01];
ax.YLim=[-100 max(S)];
clear leg

end

fignum=fignum+1;
fig{fignum}=figure(fignum);
fig{fignum}.Position=[50 150 450 360];

for i=1:length(Rs)
    p{2}(i)=plot(e_vect(i,:)*1000,Pentrada_v(i,:), 'LineWidth',1.5);
```




```

        hold on
    end
    p{2}(1).LineStyle='--';
    p{2}(2).LineStyle='-.';
    p{2}(3).LineStyle=': ';

    xlabel('e (mm)'); ylabel('Presión entrada (Pa)')
    xlim([0 max(hp)*1000]); ylim([0 max(Pentrada,[],'all')]);
    legend('Caso 1','Caso 2', 'Caso 3')
    ax=gca; ax.FontSize=11;

    fignum=fignum+1;
    fig{fignum}=figure(fignum);
    fig{fignum}.Position=[500 150 450 360];

    for i=1:length(Rs)
        p{3}(i)=plot(e_vect(i,:)*1000,L2(i,:)*100,'LineWidth',1.5); hold on
    end
    p{3}(1).LineStyle='--';
    p{3}(2).LineStyle='-.';
    p{3}(3).LineStyle=': ';

    xlabel('e (mm)'); ylabel('Longitud del cojinete (cm)')
    xlim([-0.005 min(hp)*1000]); ylim([-5 max(L2(:,1))]);
    legend('Caso 1','Caso 2', 'Caso 3')
    ax=gca; ax.FontSize=11;

    fignum=fignum+1;
    fig{fignum}=figure(fignum);
    fig{fignum}.Position=[950 150 450 360];

    for i=1:length(Rs)
        p{4}(i)=plot(e_vect(i,:)*1000,Fsu2(i,:), 'LineWidth',1.5); hold on
    end
    p{4}(1).LineStyle='--';
    p{4}(2).LineStyle='-.';
    p{4}(3).LineStyle=': ';

    xlabel('e (mm)'); ylabel('Longitud del cojinete (cm)')
    xlim([-0.005 min(hp)*1000]); ylim([-5 max(L2,[],'all')]);
    xlabel('e (mm)'); ylabel('Fuerza de sustentación (N/m)')
    ax=gca; ax.FontSize=11; ax.XLim=[0 max(hp)*1000+0.01];
    ax.YLim=[-0.25*1e+8 min(Fsu2(:,end))];
    legend('Caso 1','Caso 2', 'Caso 3')

```



PROGRAMA DEL PROBLEMA 8

1. Script principal

```
%SCRIPT PRINCIPAL

clear all
close all
clc

% => La nomenclatura utilizada es la misma que en el problema
% => Las unidades utilizadas están en el sistema internacional

% Propiedades físicas y condiciones de contorno
Xo=25;
Yo=45;
rho=1.2;
Gamma=350;
x= linspace(0,90,500);
y= linspace(0,90,500);

% Distribución de presiones sobre la placa plana
% a lo largo del eje x (ec. 91)
AP_91= distr_P_down(Gamma,rho,x,Xo,Yo);

figure(1); subplot(2,1,1); plot(x,AP_91,'LineWidth',1.2)
xlabel('Posición horizontal (m)'); ylabel('P-P_o (Pa)')
xlim([0 90])
ax=gca; ax.FontSize=10;

% Flujo de vorticidad
Epsilon=diff(AP_91)./diff(x);

subplot(2,1,2); plot(x, [0 Epsilon],'LineWidth',1.2);
xlabel('Posición horizontal (m)'); ylabel('Flujo de vorticidad (Pa/m)')
xlim([0 90])
ax=gca; ax.FontSize=10;

% Velocidades sobre la placa plana
[Vx_1,Vy_1,V_1]=VxVy(0,Gamma,x,0,Xo,Yo);

% Distribución de presiones sobre la placa plana
% a lo largo del eje x (ec. 89)
AP_89=-rho*(V_1.^2)/2;
```



```

figure(2); subplot(2,1,1); plot(x,AP_89,'LineWidth',1.2)
xlabel('Posición horizontal (m)'); ylabel('P-P_o (Pa)')
xlim([0 90])
ax=gca; ax.FontSize=10;

% Flujo de vorticidad
Epsilon=diff(AP_89)./diff(x);

subplot(2,1,2);
plot(x,[Epsilon(1) Epsilon],'LineWidth',1.2);
xlabel('Posición horizontal (m)'); ylabel('Flujo de vorticidad (Pa/m)');
xlim([0 90])
ax=gca; ax.FontSize=10;

% Evolución a lo largo del tiempo

Gamma_o=Gamma; %Circulación inicial = Circulación definida anteriormente
Tel=125;
tfinal=200;

p=cell(2,4);
Uinf=[0 0.1 0.5 1];
markers=['*','^','x','o'];
t=linspace(0,tfinal,500);
dt=t(2)-t(1);
Uo=zeros(length(t),1); %Inicialización de variable
Vo=zeros(length(t),1); %Inicialización de variable

% ==> Con circulación constante a lo largo del tiempo:

for i=1:length(Uinf)

    % Integración numérica para hallar la posición del vórtice en función
    % del tiempo
    [t,VAR]=ode45(@(t,x) UoVo(t,x,Uinf(i),0,Gamma_o,false),t,[Xo, Yo]);
    x_vort=VAR(:,1);
    y_vort=VAR(:,2);
    clear VAR
    Uo=Uinf(i)+(Gamma./(4*pi)).*(x_vort.^2)./...
        (y_vort.*(x_vort.^2 + y_vort.^2));
    Vo=-(Gamma./(4*pi)).*y_vort.^2./(x_vort.*...
        (x_vort.^2 + y_vort.^2));

    % => Representación gráfica
    figure(3);
    p{i}=plot(x_vort,y_vort,'LineWidth',1.2); hold on;
    p{i}.Marker=markers(i);

```



```
p{i}.MarkerIndices=fix(logspace(0,log10(length(t)),10));
xlim([20,120]); ylim([20 50]);
xlabel('Posición horizontal (m)'); ylabel('Posición vertical (m)');
ax=gca; ax.FontSize=11;
figure(4)
subplot(1,2,1)
p{i}=plot(t,Uo,'LineWidth',1.2); hold on
p{i}.Marker=markers(i);
p{i}.MarkerIndices=fix(logspace(0,log10(length(t)),10));
xlabel('Tiempo (s)'); ylabel('Velocidad horizontal (m/s)')
ax=gca; ax.FontSize=11;
subplot(1,2,2)
p{i}=plot(t,Vo,'LineWidth',1.2); hold on
p{i}.Marker=markers(i);
p{i}.MarkerIndices=fix(logspace(0,log10(length(t)),10));
xlabel('Tiempo (s)'); ylabel('Velocidad vertical (m/s)')
ax=gca; ax.FontSize=11;
end
legend('U_{\infty}=0 m/s','U_{\infty}=0.1 m/s',...
       'U_{\infty}=0.5 m/s','U_{\infty}=1 m/s');
subplot(1,2,1)
legend('U_{\infty}=0 m/s','U_{\infty}=0.1 m/s',...
       'U_{\infty}=0.5 m/s','U_{\infty}=1 m/s');
figure(3)
legend('U_{\infty}=0 m/s','U_{\infty}=0.1 m/s',...
       'U_{\infty}=0.5 m/s','U_{\infty}=1 m/s');

% ==> Con circulación variable a lo largo del tiempo:

for i=1:length(Uinf)

    %%% Resolución mediante Euler:
    %%% (Nota: Utilizar el código que se introduce a continuación,
    %%% o bien el que no está comentado, es decir, el siguiente
    %%% sin comentar (sin %) es equivalente, los resultados
    %%% son muy similares.)
    %   x_vort=zeros(length(t),1);
    %   y_vort=zeros(length(t),1);
    %   Uo=zeros(length(t),1);
    %   Vo=zeros(length(t),1);
    %   x_vort(1)=Xo;
    %   y_vort(1)=Yo;
    %
    %   for j=1:length(t)-1
    %       Gamma=Gamma_o*exp(-t(j)/(Tel));
    %       Uo(j)=Uinf(i)+(Gamma/(4*pi))*(x_vort(j)^2)/(y_vort(j)...
    %           *(x_vort(j)^2 + y_vort(j)^2));
```



```
%      Vo(j)=-(Gamma/(4*pi))*y_vort(j)^2/(x_vort(j)...
%      *(x_vort(j)^2 + y_vort(j)^2));
%      x_vort(j+1)=x_vort(j)+Uo(j)*dt;
%      y_vort(j+1)=y_vort(j)+Vo(j)*dt;
%      end
%
%
% Resolución mediante la función ode45 de MATLAB
% Nota: Con ode45 es posible conseguir mayor grado de precisión
% ya que utiliza un método numérico de mayor orden
[t,VAR]=ode45(@ (t,x) UoVo(t,x,Uinf(i),Tel,Gamma_o,true),t,[Xo, Yo]);
Gamma=Gamma_o*exp(-t./(Tel));
x_vort=VAR(:,1);
y_vort=VAR(:,2);
clear VAR
Uo=Uinf(i)+(Gamma./(4*pi)).*(x_vort.^2)./(y_vort.*...
(x_vort.^2 + y_vort.^2));
Vo=-(Gamma./(4*pi)).*y_vort.^2./(x_vort.*(x_vort.^2 + y_vort.^2));
%
if Uinf(i)==0
    save('dataU0.mat','x_vort','y_vort','Vo','Uo')
end

% => Representación gráfica
figure(5);
p{i}=plot(x_vort,y_vort,'LineWidth',1.2); hold on;
p{i}.Marker=markers(i);
p{i}.MarkerIndices=fix(logspace(0,log10(length(t)),10));
xlim([20,100]); ylim([20 50]);
xlabel('Posición horizontal (m)'); ylabel('Posición vertical (m)');
ax=gca; ax.FontSize=11;
figure(6)
subplot(1,2,1)
p{i}=plot(t,Uo,'LineWidth',1.2); hold on
p{i}.Marker=markers(i);
p{i}.MarkerIndices=fix(logspace(0,log10(length(t)),10));
xlabel('Tiempo (s)'); ylabel('Velocidad horizontal (m/s)');
ax=gca; ax.FontSize=11;
subplot(1,2,2)
p{i}=plot(t,Vo,'LineWidth',1.2); hold on
p{i}.Marker=markers(i);
p{i}.MarkerIndices=fix(logspace(0,log10(length(t)),10));
xlabel('Tiempo (s)'); ylabel('Velocidad vertical (m/s)');
ax=gca; ax.FontSize=11;
end
legend('U_{\infty}=0 m/s','U_{\infty}=0.1 m/s',...
'U_{\infty}=0.5 m/s','U_{\infty}=1 m/s');
subplot(1,2,1)
```



```
legend('U_{\infty}=0 m/s','U_{\infty}=0.1 m/s',...
       'U_{\infty}=0.5 m/s','U_{\infty}=1 m/s');
figure(5)
legend('U_{\infty}=0 m/s','U_{\infty}=0.1 m/s',...
       'U_{\infty}=0.5 m/s','U_{\infty}=1 m/s');

clear p

load("dataU0.mat")
[X,Y] = meshgrid(x,y);
ind = fix(linspace(1,length(x),100));

t_sim = 120; % Tiempo final para la representación gráfica
ind_tiempo= find(t>=t_sim,1);
r=zeros(1,7);k=0;

for i=fix(linspace(1,ind_tiempo,5))
    k=k+1;
    % Campo de velocidades en un tiempo = t(i)
    [Vx,Vy,V,r(k)]=VxVy(0,Gamma(i),X,Y,x_vort(i),y_vort(i));

    % Distribución de presiones en un tiempo = t(i)
    AP=distr_P_gen(0,Gamma(i),rho,X,Y,x_vort(i),y_vort(i),V);

    % => Representación gráfica

    f=figure;
    f.Units='normalized';
    f.Position=[0.05 0.56 0.87 0.3];
    ax=gca; ax.FontSize=11;

    subplot(1,3,1)
    quiver(X(ind,ind),Y(ind,ind),Vx(ind,ind),Vy(ind,ind),2);
    xlabel('Posición horizontal (m)'); ylabel('Posición vertical (m)');
    title(['Tiempo = ' num2str(round(t(i),0)) ' s'])
    xlim([x_vort(i)-10 x_vort(i)+10]);ylim([y_vort(i)-10 y_vort(i)+10])
    ax=gca; ax.FontSize=11;

    subplot(1,3,2)
    contourf(X,Y,V,linspace(0,25,100),'LineStyle','none');
    xlabel('Posición horizontal (m)'); ylabel('Posición vertical (m)');
    title(['Tiempo = ' num2str(round(t(i),0)) ' s'])
    xlim([0 90]); ylim([0 70])
    ax=gca; ax.FontSize=11;
    colormap(jet);
    c=colorbar; c.Label.String='Velocidad (m/s)';
    c.Limits=[0 25];
```



```

shading interp;

subplot(1,3,3)
contourf(X,Y,AP,linspace(-350,0,100),'LineStyle','none');
xlabel('Posición horizontal (m)'); ylabel('Posición vertical (m)');
title(['Tiempo = ' num2str(round(t(i),0)) ' s'])
xlim([0 90]); ylim([0 70])
ax=gca; ax.FontSize=11;
colormap(jet);
c=colorbar; c.Label.String='Presión relativa (Pa)';
shading interp;

end

```

1.2. Función 'distr_P_down.m'

```

function AP = distr_P_down(Gamma,rho,X,Xo,Yo)
%Función para obtener la distribución de presión sobre la placa

% Uinf: velocidad no perturbada
% (Xo, Yo): posición del vórtice
% Gamma: circulación asociada al vórtice
% X: coordenada horizontal de la posición a calcular
% rho: densidad del aire
% AP: presión relativa

A=X.^2.*(-Xo^2 + Yo^2) - (Xo^2 + Yo^2).^2;
B=((X - Xo).^2 + Yo^2).*((X + Xo).^2 + Yo^2);
AP=-rho*Gamma^2/(2*pi^2).*((4*X*Xo*Yo./B).^2 + A./(B.*(Xo^2 + Yo^2)));

end

```

1.3. Función 'VxVy.m'

```

function [Vx,Vy,V,r] = VxVy(U,Gamma,X,Y,Xo,Yo)
% En esta función se calculan las velocidades del fluido (Vx, Vy)
% en las direcciones X,Y teniendo en cuenta la posición del vórtice Xo,Yo

% U: velocidad no perturbada
% (Xo, Yo): posición del vórtice
% Gamma: circulación asociada al vórtice

```



```
% X,Y: coordenadas de la posición a calcular
% r: radio del vórtice

Vx=U+Gamma/(2*pi)*((Y+Yo)/(X-Xo).^2+(Y+Yo).^2)-(Y-Yo)/...
    ((X-Xo).^2+(Y-Yo).^2)+(Y-Yo)/((X+Xo).^2+(Y-Yo).^2)-...
    (Y+Yo)/((X+Xo).^2+(Y+Yo).^2));

Vy=-Gamma/(2*pi)*((X-Xo)/(X-Xo).^2+(Y+Yo).^2)-(X-Xo)/...
    ((X-Xo).^2+(Y-Yo).^2)+(X+Xo)/((X+Xo).^2+(Y-Yo).^2)-...
    (X+Xo)/((X+Xo).^2+(Y+Yo).^2));

V=sqrt(Vx.^2+Vy.^2);

ind=find(V>25,1);
if length(V(:,1))>1 && length(V(1,:))>1
    r=sqrt((X(ind)-Xo)^2+(Y(ind)-Yo)^2);
    for i=1:length(V(:,1))
        for j=1:length(V(1,:))
            if ((X(i,j)-Xo)^2+(Y(i,j)-Yo)^2)<=(r)^2
                Vx(i,j)=NaN;
                Vy(i,j)=NaN;
                V(i,j)=NaN;
            end
        end
    end
end
end
end
```

1.4. Función 'UoVo.m'

```
function dxdt = UoVo(t,x,Uinf,Tel,Gamma_o,Variable)
% En esta función, se introducen las derivadas de primer orden
% de las variables que se desean calcular.

% t: tiempo
% x: variables que se integrarán
% => x(1): coordenada horizontal del vórtice
% => x(2): coordenada vertical del vórtice
% dxdt: derivadas de primer orden de cada una de las variables:
% => dxdt(1): velocidad horizontal del vórtice
% => dxdt(2): velocidad vertical del vórtice
% Uinf: velocidad no perturbada
% Tel: constante de tiempo
% Gamma_o: circulación inicial si se considera variable.
```




```
%      Si la circulación es constante, se considerara este valor
%      siempre
% Variable: variable de tipo booleana.
%      ==> Si la circulación es variable: Variable = true
%      ==> Si la circulación es constante: Variable = false

x_vort=x(1);
y_vort=x(2);
if Variable
    Gamma=Gamma_o*exp(-t/(Tel));
else
    Gamma=Gamma_o;
end
U=Uinf+(Gamma/(4*pi))*(x_vort^2)/(y_vort*(x_vort^2 + y_vort^2));
V=-(Gamma/(4*pi))*y_vort^2/(x_vort*(x_vort^2 + y_vort^2));
dxdt=[U;V];

end
```

1.5. Función 'distr_P_gen.m'

```
function AP = distr_P_gen(Uinf,Gamma,rho,X,Y,Xo,Yo,V_g)
%Función para obtener la distribución de presión en un punto genérico

% Uinf: velocidad no perturbada
% (Xo, Yo): posición del vórtice
% Gamma: circulación asociada al vórtice
% X,Y: coordenadas de la posición a calcular
% rho: densidad del aire
% V_g: velocidad en módulo en el punto genérico
% AP: presión relativa

dphidx=Gamma./(2*pi).*(-(Y+Yo)./((X-Xo).^2+(Y+Yo).^2)+...
    (Y-Yo)./((X-Xo).^2+(Y-Yo).^2)+(Y-Yo)./((X+Xo).^2+...
    (Y-Yo).^2)-(Y+Yo)./((X+Xo).^2+(Y+Yo).^2));

dphidy=Gamma./(2*pi).*(-(X-Xo)./((X-Xo).^2+(Y+Yo).^2)-...
    (X-Xo)./((X-Xo).^2+(Y-Yo).^2)+(X+Xo)./((X+Xo).^2+...
    (Y-Yo).^2)+(X+Xo)./((X+Xo).^2+(Y+Yo).^2));

U=Uinf+(Gamma/(4*pi))*(Xo^2)/(Yo*(Xo^2 + Yo^2));
V=-(Gamma/(4*pi))*Yo^2/(Xo*(Xo^2 + Yo^2));

dphidt=dphidx*U+dphidy*V;
```



```
AP=-rho*(dphidt+V_g.^2/2);
```

```
end
```



PROGRAMA DEL PROBLEMA 9

1. Script principal

```
% SCRIPT PRINCIPAL

format long
clc
clear all

global L12 L34 D1 D3 Sup1 Sup3 rE12 rE34 R Pol Tol gamma viscosdin

%%% Introducción de datos
% Geometria
L12=6; %Longitud de 1 a 2 (m)
L34=10; %Longitud de 3 a 4 (m)
D1=0.05; % Diámetro 1 (m)
D2=D1;
D3=0.1; % Diámetro 3 (m)
Sup1=pi*(D1^2)/4; % Superficie 1 (m^2)
Sup3=pi*(D3^2)/4; % Superficie 2 (m^2)
E12=0.008*10^(-3); % Rugosidad absoluta entre 1 y 2 (m)
E34=0.008*10^(-3); % Rugosidad absoluto entre 3 y 4 (m)
rE12=E12/D1; % Rugosidad relativa entre 1 y 2
rE34=E34/D3; % Rugosidad absoluto entre 3 y 4

% Propiedades físicas y condiciones de contorno
R=287; %Constante de los gases (J/kg*K)
Pol=4*10^5; %Presión de estancamiento en 1 (Pa)
Tol=370; %Temperatura de estancamiento en 1 (K)
gamma=1.4; %Índice de politropía
viscosdin=2.181*(10^(-5)); %Viscosidad dinámica del aire (Pa*s)
P4real=1*10^5;

To2=To1;
To3=To2;
To4=To3;

if Pol>P4real
%%% 1- Determinar si el flujo está bloqueado en el punto 2
% BAJO LA HIPÓTESIS: NÚMERO DE MACH EN 2 M2=1.

M2=1;

% Cálculo del número de Mach en el punto 1:
```



%Para el cálculo del número de Mach en 1, se realiza un bucle con el
%objetivo de hallar el número de Reynolds adecuado y, en consecuencia, el
%factor de fricción que más se ajuste. De esta manera, la hipótesis que se
%plantea en la resolución del enunciado, donde se supone un número de
%Reynolds elevado, se comprueba directamente en el inicio del programa.

```
M1=0.5; % Suposición inicial para el número de Mach 1
Rel=massflow(M1,Po1,Tol,Sup1,R,gamma)*D1/(Sup1*viscosdin);
i=0;
f1=frictionfact(Rel,rE12);
M1new=FannoMachNum(f1*L12/D1,gamma);
if length(M1new)>1
    M1new=M1new(1);
end

while abs(M1new-M1)>0.00001
    M1=M1new;
    Rel=massflow(M1,Po1,Tol,Sup1,R,gamma)*D1/(Sup1*viscosdin);
    f1=frictionfact(Rel,rE12);
    M1new=FannoMachNum(f1*L12/D1,gamma);
    if length(M1new)>1
        M1new=M1new(1);
    end
    i=i+1;
end
M1=M1new;
```

% Calculado M1, es posible hallar la presión y la temperatura
% en los puntos 1 y 2.

```
T1=Tol/relToT(M1,gamma);
P1=Po1/relPoP(M1,gamma);
P2=P1/Fannorel2P(M1,gamma);
Po2=Po1/Fannorel2Po(M1,gamma);
T2=T1/Fannorel2T(M1,gamma);
To2=To1;
```

% Cálculo del número de Mach en 3:

```
relA2A3=Sup3/Sup1;
M3=IsentMachNum(relA2A3,M2,gamma);
%Se obtienen dos soluciones para M3. Con esto, se obtienen dos posibles
%resultados para los puntos 3 y 4. Se descartara uno de ellos

Po3=Po2;
To3=To2;
```



```
% Cálculo del número de Mach en 4:
% También se calculan la temperatura y la presión en el punto 3
M4=[];
for i=1:length(M3)
    M=M3(i);
    fLD3=FannoIndvar(M,gamma);
    Re3=massflow(M3(i),Po3,To3,Sup3,R,gamma)*D3/(Sup3*viscosdin);
    f34=frictionfact(Re3,rE34);
    varindep=(fLD3-(f34*L34/D3));
    M4c=FannoMachNum(varindep,gamma);
    % ;Atención! En caso de que no sea posible obtener un numero de Mach en
    % 4 para uno de los números de Mach calculados en 3, el resultado de la
    % anterior función será NaN.
    if length(M4c)>1
        for k=1:2
            if M<1 & M4c(k)<1
                M4=[M4 M4c(k)];
            end
            if M>1 & M4c(k)>1
                M4=[M4 M4c(k)];
            end
        end
    else
        M4=[M4 M4c];
    end
end

P1=P1+zeros(1,length(M4));
P2=P2+zeros(1,length(M4));

T1=T1+zeros(1,length(M4));
T2=T2+zeros(1,length(M4));
To4=To3;
for i=1:length(M4)
    T3(i)=To3/relToT(M3(i),gamma);
    P3(i)=Po3/relPoP(M3(i),gamma);
    T4(i)=To4/relToT(M4(i),gamma);
end

M1=M1+zeros(1,length(M4));
M2=M2+zeros(1,length(M4));
M3=M3';
% Evaluación de relaciones de presión entre 1 y 4 (Po1/P4):

r14=zeros(1,length(M4));
for i=1:length(M4)
```



```
if M4(i)~=0
    r14(i)=(Po1/Po2)*(Po2/Po3)*Fannorel2Po(M3(i),gamma)*...
        (1/Fannorel2Po(M4(i),gamma))*relPoP(M4(i),gamma);
end
end
P4=Po1./r14;
if (M4(1)-1)<0.01
    fluj4bloqueado=true; %
else
    fluj4bloqueado=false;
end
fluj24supsonic=false; %Asignación inicial.
                        %Si el flujo entre 2 y 4 es supersónico,
                        %se determinará más adelante.
casomax=1+length(M4)*0.1;
CASO=[1.1:0.1:casomax];

ondchoq=zeros(1,length(CASO)); %Para indicar si se tiene en cuenta
%la onda de choque. En estos casos calculados no se ha tenido en
%cuenta; por ello, se rellena con ceros. Posteriormente,
%en los demás casos, si se tendrá en cuenta la onda de choque.
longsinond=length(M4); %Longitud del vector una vez realizado
                        %el cálculo sin onda de choque
indOK=0; %Índice utilizado para saber la posición del caso posible
        % - si indOK=0: inicialización de la variable o caso NO
        %             encontrado
        % - si indOK diferente de 0: posición del caso posible

clc

%%% Se añaden estos resultados en la tabla de resultados mostrada en el
%%% 'Command Window'.
comentario=''; %Variable para añadir cualquier comentario adicional

fprintf('%s',['=====']...
        '====='])
fprintf('%s',' HIPÓTESIS 1 M2=1 ')
fprintf('%s \n',['=====']...
        '====='])
fprintf('%s \n','=====>>>>> Sin onda de choque')
fprintf('%7s %14s %7s %7s %7s %7s ','CASO',...
        'Onda choque','M1','M2','M3','M4')
fprintf('%8s %7s %9s %8s %9s %7s %7s %7s ','...
        'P1','P2','P3','P4','T1','T2','T3','T4')
fprintf('%8s %10s %8s \n','r14','r14(real)','Posible')

for i=1:longsinond
```



```

if ondchoq(i)==0
    onda{i}='NO';
else onda{i}='SI';
end
if abs(r14(i)-Po1/P4real)>0.01 | r14(i)==0 | isnan(r14(i))
    if M3(i)>1 & M4(i)>1
        pos{i}='--'; %Significa que más adelante se comprobará si
        % realmente es supersónico entre 2 y 4 o no lo es.
    else
        if fluj4bloqueado
            pos{i}='SI';
            indok=i;
        else
            pos{i}='NO';
        end
    end
end
else
    pos{i}='SI';
    indok=i;
end
fprintf('%7.1f %10s %13.4f %5.0f %9.4f %7.4f ',...
        CASO(i),onda{i},M1(i),M2(i),M3(i),M4(i))
if isnan(P4(i))
    fprintf('%9.2e %7.2e %7.2e %5.2e ',P1(i),P2(i),P3(i),P4(i))
    fprintf('%11.2f %7.2f %7.2f %7.2f ',T1(i),T2(i),T3(i),T4(i))
    fprintf('%7.3f %8.2f %9s \n',r14(i),Po1/P4real,pos{i})
else
    fprintf('%9.2e %7.2e %7.2e %5.2e ',P1(i),P2(i),P3(i),P4(i))
    fprintf('%8.2f %7.2f %7.2f %7.2f ',T1(i),T2(i),T3(i),T4(i))
    fprintf('%7.3f %8.2f %9s \n',r14(i),Po1/P4real,pos{i})
end

end

for i=1:length(r14)
    if r14(i)<=Po1/P4real & ne(isnan(r14(i)),1)
        fprintf('\n%s \n',['El flujo está bloqueado en el ' ...
            'punto 2 ==> HIPÓTESIS 1 CORRECTA'])
        HIPOTESIS1=true;
        break
    else
        if r14(i)>Po1/P4real & ne(isnan(r14(i)),1) & M3(i)<1 & M4(i)<1
            fprintf('\n%s','El flujo NO está bloqueado en el punto 2')
            fprintf('%s \n',[' ==> HIPÓTESIS 1 NO ES '...
                'CORRECTA ==> El flujo es SUBSÓNICO'])
            HIPOTESIS1=false;
        end
    end
end

```



```
        break
    end
end
if isnan(r14(1))
    HIPOTESIS1=false;
end
end

if HIPOTESIS1==true %HIPOTESIS 1: El flujo está bloqueado en 2

if indOK==0
    %%% 2- Si la onda de choque se produjera en el punto 3

    for i=1:length(M3)
        if M3(i)>1 & M3(i)~=M3(i-1)

            % Cálculo del número de Mach aguas abajo de la onda de choque:

            M3bc=MNumNormShock(M3(i),gamma);
            M3b=M3bc;

            % Cálculo del número de Mach en el punto 4:
            %También se calculan las presiones y las temperaturas

            fLD3b=FannoIndvar(M3b,gamma);
            To3b=To3;
            T3b=T3(i)*r2TNormShock(M3(i),gamma);
            Po3=Po2;
            Po3b=Po3*r2PoNormShock(M3(i),gamma);
            P3b=Po3b/relPoP(M3b,gamma);
            Re3b=massflow(M3b,Po3b,To3b,Sup3,R,gamma)*D3/(Sup3*viscosdin);
            f34b=frictionfact(Re3b,rE34);
            varindep=(fLD3b-(f34b*L34/D3));
            M4c=FannoMachNum(varindep,gamma);

            % De esta última función se obtienen dos soluciones, M4c>1 y
            % M4c<21. Después de una onda de choque, el flujo es subsónico y, si
            % el flujo es de Fanno, como máximo se podrá bloquear, pero nunca
            % superar la unidad. La solución supersónica se descarta en la
            % tabla de resultados añadida en 'Command Window'

            for k=1:length(M4c)
                if M4c(k)<1
                    M3=[M3 M3(i)];
                    P3=[P3 P3(i)];
                    T3=[T3 T3(i)];
                    M4=[M4 M4c(k)];
                    T4=[T4 To4/relToT(M4c(k),gamma)];
                end
            end
        end
    end
end
```




```

        if isnan(M4c)
            M3=[M3 M3(i)];
            P3=[P3 P3(i)];
            T3=[T3 T3(i)];
            M4=[M4 M4c(k)];
            T4=[T4 To4/relToT(M4c(k),gamma)];
        end
    end
end
end

% Evaluación de relaciones de presión entre 1 y 4 (Po1/P4):

longconond3=length(M4); %longitud del vector M4 una vez incluido
                        %el cálculo con onda de choque en 3
for i=longsinond+1:length(M3)
    if M4(i)~=0
        for k=1:length(M3)
            if M3(k)>1
                M3sup=M3(k);
            end
        end
        r14(i)=(Po1/Po2)*(Po2/Po3)*(1/r2PoNormShock(M3sup,gamma))*...
            Fannorel2Po(M3b,gamma)*(1/Fannorel2Po(M4(i),gamma))*...
            *relPoP(M4(i),gamma);
    end
end

P1=P1(1)+zeros(1,length(M4));
P2=P2(1)+zeros(1,length(M4));
P4=[Po1./r14];

T1=T1(1)+zeros(1,length(M4));
T2=T2(1)+zeros(1,length(M4));

M1=M1(1)+zeros(1,length(M4));
M2=M2(1)+zeros(1,length(M4));

casomax=2+(longconond3-longsinond)*0.1;
CASO=[CASO 2.1:0.1:casomax];
ondchoq=[ondchoq 1+zeros(1,length(M4c))];

%%% Se añaden estos resultados en la tabla de resultados mostrada en el
%%% 'Command Window'.

fprintf('\n%s \n','=====>>>>>> Con onda de choque en el punto 3')
fprintf('%7s %14s %7s %7s %7s %9s %9s ','CASO',...

```



```
'Onda choque','M1','M2','M3','M3b','M4')
fprintf('%8s %8s %9s %9s %7s ','P1','P2','P3','P3bis','P4')
fprintf('%8s %7s %7s %8s %6s ','T1','T2','T3','T3bis','T4')
fprintf('%8s %11s %8s \n','r14','r14(real)','Posible')

for i=longsinond+1:longconond3

    if ondchoq(i)==0
        onda{i}='NO';
    else onda{i}='SI';
    end
    if abs(r14(i)-Pol/P4real)>0.01 | r14(i)==0 | isnan(r14(i))
        pos{i}='NO';
        if abs(r14(i)-Pol/P4real)<0.1
            pos{i}='NO*';
        end
    else
        pos{i}='SI';
        indOK=length(pos);
    end

    fprintf('%7.1f %10s %13.4f %5.0f %9.4f %9.4f %9.4f ',CASO(i),...
        onda{i},M1(i),M2(i),M3(i),M3b,M4(i))
    fprintf('%9.2e %7.2e %7.2e %7.2e %7.2e ',P1(i),P2(i),P3(i),P3b,P4(i))
    fprintf('%8.2f %7.2f %7.2f %7.2f %7.2f ',T1(i),T2(i),T3(i),T3b,T4(i))
    fprintf('%7.3f %7.3f %8s \n',r14(i),Pol/P4real,pos{i})
end

if ((r14(end)>Pol/P4real & abs(r14(end)-Pol/P4real)>0.001) | isnan(M4c))
    fprintf('\n %s\n',...
        'Es posible que haya una onda de choque entre el punto 2 y 3')
    fprintf('\n %s\n','(Calculando.....)')

%%% 3- Si la onda de choque se produce en la tobera (entre 2 y 3)

Dt=D2+(D3-D2)/2; % Diámetro inicial estimado
Dant=D2;% Extremo inferior inicial==> Diámetro inferior
Dpos=D3;% Extremo superior inicial==> Diámetro superior
okerror=false;
k=1;

while okerror==false

    % Cálculo del número de Mach aguas arriba y aguas abajo de la onda de
    % choque en el punto estimado:
    % También se calculan temperaturas y presiones
```



```

A2A23=( (Dt)^2) / ( (D2)^2);
M23=IsentMachNum(A2A23,1,gamma);
% M23 solo puede ser supersónico. Con la siguiente condición, se
% selecciona el valor supersónico de la solución calculada.
if M23(1)>1
    M23=M23(1);
elseif M23(2)>1
    M23=M23(2);
end
Po23=Po2;
P23=Po23/relPoP(M23,gamma);
Po23b=Po23*r2PoNormShock(M23,gamma);
To23=To2;
T23=To23/relToT(M23,gamma);
To23b=To23;
Po3p=Po23b;
To3p=To23b;
M23b=MNumNormShock(M23,gamma); %Solo se obtiene una solución de esta ec.
P23b=Po23b/relPoP(M23b,gamma);
T23b=To23b/relToT(M23b,gamma);

% Cálculo del número de Mach en el punto 2 y en el punto 3:
% También se calculan temperaturas y presiones
A23A3=( (D3)^2) / ( (Dt)^2);
M3c=IsentMachNum(A23A3,M23b,gamma); %Aparecen dos soluciones
%M23b es subsónico después de la onda de choque. Por tanto,
%si aumenta la sección, el número de Mach disminuye, no puede aumentar.
%Se selecciona cual es el valor de M3 siguiendo este criterio.
if M3c(1)<M23b
    M3c=M3c(1);
elseif M3c(2)<M23b
    M3c=M3c(2);
else
    Dcritico=Dt;
end
T3p=To3p/relToT(M3c,gamma);
P3p=Po3p/relPoP(M3c,gamma);
Re3p=massflow(M3b,Po3p,To3p,Sup3,R,gamma)*D3/(Sup3*viscosdin);
f34p=frictionfact(Re3p,rE34);
fLD3p=FannoIndvar(M3c,gamma);
varindep=(fLD3p-(f34p*L34/D3));
M4c=FannoMachNum(varindep,gamma); %Pueden aparecer dos soluciones.
% Se selecciona el valor que esté por debajo de 1 (subsónico):
if length(M4c)>1
    if M4c(1)<1
        M4c=M4c(1);
    elseif M4c(2)<1

```



```

        M4c=M4c(2);
    else Dt=Dant; break;
    end
end

% Evaluación de la relación de presión teórica entre el punto 1 y el punto 4:

r14p=(Po1/Po2)*(Po2/Po23)*(Po23/Po23b)*(Po23b/Po3p)...
    *Fannorel2Po(M3c,gamma)*(1/Fannorel2Po(M4c,gamma))...
    *relPoP(M4c,gamma);
if abs(r14p-Po1/P4real)/(Po1/P4real)<0.001
    okerror=true;
    P4p=Po1/r14p;
    Po4=P4p*relPoP(M4c,gamma);
else
    if r14p<Po1/P4real
        Dant=Dt;
        Dt=Dt+(Dpos-Dt)/2;
    else
        Dpos=Dt;
        Dt=Dant+(Dt-Dant)/2;
    end
    if abs(M4c-1)<0.01 | k>50
        %El flujo puede quedar bloqueado en el punto 4.
        okerror=true;
        fluj4bloqueado=true;
    else
        fluj4bloqueado=false;
    end
end

k=k+1;
end

r14=[r14 r14p];
P3=[P3 P3p];
T3=[T3 T3p];
P4=[Po1./r14];
M3=[M3 M3c];
M4=[M4 M4c];
T4=[T4 To4/relToT(M4c,gamma)];

P1=P1(1)+zeros(1,length(M4));
P2=P2(1)+zeros(1,length(M4));

T1=T1(1)+zeros(1,length(M4));
T2=T2(1)+zeros(1,length(M4));

M1=M1(1)+zeros(1,length(M4));
M2=M2(1)+zeros(1,length(M4));

```



```

CASO=[CASO 3];
ondchoq=[ondchoq 1];

fprintf('\n%s', '=====>>>>> Con onda de choque entre 2 y 3');
fprintf(' %10s%0.5f %s \n', 'con diámetro de sección calculado igual a '...
    ,Dt, 'metros');
fprintf('%7s %14s %7s %7s %7s %9s %8s %9s ', 'CASO', ...
    'Onda choque', 'M1', 'M2', 'M23', 'M23b', 'M3', 'M4');
fprintf('%8s %7s %9s %10s %7s %7s ', 'P1', 'P2', 'P23', 'P23b', 'P3', 'P4');
fprintf('%8s %7s %8s %7s %6s %7s ', 'T1', 'T2', 'T23', 'T23b', 'T3', 'T4');
fprintf('%9s %11s %8s \n', 'r14', 'r14(real)', 'Posible');

    if ondchoq(end)==0
        onda{end+1}='NO';
    else onda{end+1}='SI';
    end
    if (abs(r14(end)-Pol/P4real)>0.1 | r14(end)==0 | isnan(r14(end)))...
        & ne(fluju4bloqueado, true)
        pos{end+1}='NO';
    else
        pos{end+1}='SI';
        indOK=length(pos);

    end

    fprintf('%7.1f %10s %13.4f %5.0f %9.4f %9.4f %9.4f %9.4f ', ...
        CASO(end), onda(end), M1(end), M2(end), M23, M23b, M3(end), M4(end));
    fprintf('%9.2e %7.2e %7.2e %7.2e %7.2e %7.2e ', P1(end), P2(end), ...
        P23, P23b, P3(end), P4(end));
    fprintf('%7.2f %7.2f %7.2f %7.2f %7.2f %7.2f ', T1(end), T2(end), ...
        T23, T23b, T3(end), T4(end));
    fprintf('%8.3f %8.3f %8s \n', r14(end), Pol/P4real, pos{end});

%%% 4- Si la onda de choque se produjera entre los puntos 3 y 4:

else
    if pos{end}=='NO'
        fprintf('\n %s \n', ...
            'Es posible que haya onda de choque entre el punto 3 y 4')
        fprintf('\n %s\n', 'Calculando.....')

% Determina en qué posición del conducto comprendido entre 3 y 4 se
% encuentra la onda de choque:

```



```
for i=1:length(M3)
    if M3(i)>1 & M3(i)~=M3(i-1)
        L334=L34/2; %Suposición inicial
        L334inf=0; %Respecto del punto 3, la posición del extremo inferior
                     %inicial es nulo.
        L334sup=L34;%Respecto del punto 3, el extremo superior inicial
                     %es igual a la longitud del tramo 3-4.
        r14c=-999*1e+10; %Valor imposible (solo para iniciar el bucle)
        k=1;
        M4c=-1; %Valor imposible (solo para iniciar el bucle)
        fluj4bloqueado=false;
        fluj24supsonic=false;
    while (abs(r14c-Po1/P4real)>0.001 | isnan(r14c)) & (M4c<=1 | ...
        isnan(M4c)) & k<100 & ne(fluj4bloqueado,true) & ...
        ne(fluj24supsonic,true)

        % Cálculo del número de Mach aguas arriba y aguas abajo de la onda de
        % choque en el punto estimado:

        fL3=FannoIndvar(M3(i),gamma);
        %f34=0.0115;
        varindep=(fL3-(f34*L334/D3));
        M34c=FannoMachNum(varindep,gamma);
        if isnan(M34c)
            L334sup=L334;
            L334=(L334+L334inf)/2;
        else
            if length(M34c)>1
                M34=M34c(find(M34c>1,1));
            else
                M34=M34c;
            end

            M34bc=MNumNormShock(M34,gamma);
            M34b=M34bc;

        % Cálculo del número de Mach en el punto 4:

        fL34b=FannoIndvar(M34b,gamma);
        To34=To3;
        T34=To34/relToT(M34,gamma);
        T34b=T34*r2TNormShock(M34,gamma);
        To34b=To34;
        Po34=Po3*Fannorel2Po(M34,gamma)*(1/Fannorel2Po(M3(i),gamma));
        P34=Po34/relPoP(M34,gamma);
        Po34b=Po34*r2PoNormShock(M34,gamma);
```



```

P34b=Po34b/relPoP(M34b,gamma);
Re34b=massflow(M34b,Po34b,To34b,Sup3,R,gamma)*D3/(Sup3*viscosdin);
f34b=frictionfact(Re34b,rE34);
varindep=(fL34b-(f34b*(L34-L334)/D3));
M4c=FannoMachNum(varindep,gamma);
if isnan(M4c)
    L334sup=L334;
    L334=(L334+L334inf)/2;
else
    if length(M4c)>1
        if M4c(1)<1
            M4c=M4c(1);
        elseif M4c(2)<1
            M4c=M4c(2);
        end
    end
end

% Evaluación de la relación de presión teórica
% entre el punto 1 y el punto 4:

r14c=(Po1/Po2)*(Po2/Po3)*(Po3/Po34)*(Po34/Po34b)*...
    Fannorel2Po(M34b,gamma)*(1/Fannorel2Po(M4c,gamma))*...
    relPoP(M4c,gamma);
if abs(r14c-Po1/P4real)>0.001 & M4c<=1
    if r14c>Po1/P4real
        L334sup=L334;
        L334=(L334+L334inf)/2;

    else
        L334inf=L334;
        L334=(L334+L334sup)/2;

    end
end
if abs(1-M4c)<0.005 & r14c<Po1/P4real & ...
    abs(L334sup-L334inf)*100/L334inf<0.001
    fluj4bloqueado=true;
end
if abs(L334-L34)*100/L334inf<0.001
    %El flujo puede ser supersónico desde el punto 2 hasta el 4
    fluj24supsonic=true;

end
end

end
k=k+1;

```



```
end

M4=[M4 M4c];
T4=[T4 To4/relToT(M4c,gamma)];
r14=[r14 r14c];
T3=[T3 To4/relToT(M3(i),gamma)];
M3=[M3 M3(i)];
P3=[P3 P3(i)];

end

end

P1=P1(1)+zeros(1,length(M4));
P2=P2(1)+zeros(1,length(M4));
P4=[P01./r14];

T1=T1(1)+zeros(1,length(M4));
T2=T2(1)+zeros(1,length(M4));

M1=M1(1)+zeros(1,length(M4));
M2=M2(1)+zeros(1,length(M4));

CASO=[CASO 3];
ondchoq=[ondchoq 1];

fprintf('\n%s','=====>>>>> Con onda de choque entre 3 y 4')
fprintf([' %10s%0.3f %s \n','a una distancia '...
    'respecto del punto 3 igual a '],L334,'metros')
fprintf('%7s %14s %7s %7s %7s %9s %8s %9s ','CASO',...
    'Onda choque','M1','M2','M3','M34','M34b','M4');
fprintf('%8s %7s %9s %10s %7s %7s ','P1','P2','P3','P34','P34b','P4');
fprintf('%8s %7s %8s %7s %6s %7s ','T1','T2','T3','T34','T34b','T4');
fprintf('%9s %11s %8s \n','r14','r14(real)','Posible');
if ondchoq(end)==0
    onda{end+1}='NO';
else
    onda{end+1}='SI';
end
if (abs(r14(end)-P01/P4real)>0.01 | r14(end)==0 | isnan(r14(end)))...
    & ne(fluj4bloqueado,true) & ne(fluj24supsonic,false)
    pos{end+1}='NO';
else
    pos{end+1}='SI';
    indOK=length(pos);
end

if fluj24supsonic & abs(r14(2)-P01/P4real)

if r14(2)>P01/P4real
```




```

comentario=[comentario ...
    'Inmediatamente después al punto 4, se produce '];
comentario=[comentario 'una compresión brusca en el fluido'];
else
    if r14(2)<Po1/P4real
        comentario=[comentario ...
            'Inmediatamente después al punto 4, se produce '];
        comentario=[comentario ...
            'una expansión brusca en el fluido'];
    end
end
end

fprintf('%7.1f %10s %13.4f %5.0f %9.4f %9.4f %9.4f %9.4f ',...
    CASO(end),onda(end),M1(end),M2(end),M3(end),M34,M34b,M4(end));
fprintf('%9.2e %7.2e %7.2e %7.2e %7.2e %7.2e ',P1(end), P2(end),...
    P3(end),P34,P34b,P4(end));
fprintf('%7.2f %7.2f %7.2f %7.2f %7.2f %7.2f ',T1(end), T2(end),...
    T3(end),T34,T34b,T4(end));
fprintf('%8.3f %8.3f %8s \n',r14(end),Po1/P4real,pos(end));

if fluj24supsonic==true
    CASO=[CASO 4];
    ondchoq=[ondchoq 0];
    pos{2}='SI';
    indOK=2;
    fprintf('\n%s',...
        '=====>>>>> No hay onda de choque entre los puntos 3 y 4. ')
    fprintf('%s \n','El flujo es supersónico entre los puntos 2 y 4.')
    fprintf('%7s %14s %7s %7s %7s %9s ',...
        'CASO','Onda choque','M1','M2','M3','M4')
    fprintf('%8s %7s %9s %8s %9s %7s %7s %7s ',...
        'P1','P2','P3','P4','T1','T2','T3','T4')
    fprintf('%8s %10s %8s \n','r14','r14(real)','Posible')
    fprintf('%7.1f %10s %13.4f %7.4f %7.4f %7.4f ',...
        CASO(2),onda{2},M1(2),M2(2),M3(2),M4(2))
    fprintf('%9.2e %7.2e %7.2e %5.2e ',P1(2),P2(2),P3(2),P4(2))
    fprintf('%11.2f %7.2f %7.2f %7.2f %7.2f ',T1(2),T2(2),T3(2),T4(2))
    fprintf('%7.3f %8.2f %9s \n',r14(2),Po1/P4real,pos{2})

end

end

end

```



```
end
else

    %%% 5- Si el flujo es subsónico

    M2it=0.5; %Suposición inicial para iniciar el bucle
    M2inf=0;
    M2sup=1;
    [r14c,M1s,M3c,M4c,P1s,P2s,P3s]=Subsonico(M2it);
    i=1;

    while (abs(r14c(1)-Po1/P4real)>0.001 & i<100 | ...
        ne(isnan(r14c(1)),false)) & abs((M2sup-M2inf)/M2inf)>0.0001
        if isnan(r14c(1))
            M2sup=M2it;
            M2it=(M2inf+M2it)/2;
        else
            if r14c(1)>Po1/P4real
                M2sup=M2it;
                M2it=(M2inf+M2it)/2;
            else
                if r14c(1)<Po1/P4real
                    M2inf=M2it;
                    M2it=(M2sup+M2it)/2;
                end
            end
        end
        [r14c,M1s,M3c,M4c,P1s,P2s,P3s,P4s,T1s,T2s,T3s,T4s]=Subsonico(M2it);

        i=i+1;
    end
    if abs(1-M4c(1))<0.01
        fluj4bloqueado=true;
    else
        fluj4bloqueado=false
    end
    r14=[r14 r14c(1)];
    M1=[M1 M1s];
    M2=[M2 M2it];
    M3=[M3 M3c(1)];
    M4=[M4 M4c(1)];

    T1=[T1 T1s];
    T2=[T2 T2s];
    T3=[T3 T3s];
    T4=[T4 T4s];
```



```

P1=[P1 P1s];
P2=[P2 P2s];
P3=[P3 P3s(1)];
P4=[P01./r14];

casomax=2+(length(M4c(1)))*0.1;
CASO=[CASO 2.1:0.1:casomax];
ondchoq=[ondchoq zeros(1,length(CASO))];

fprintf('\n%s', ['====='] ...
        '====='])
fprintf('%s', ' HIPÓTESIS 2 M2<1 ')
fprintf('%s \n', ['====='] ...
        '====='])

fprintf('%s \n', '=====>>>>>> Subsónico en todo el conducto')
fprintf('%7s %14s %7s %7s %7s %7s ', ...
        'CASO', 'Onda choque', 'M1', 'M2', 'M3', 'M4')
fprintf('%8s %7s %9s %8s %9s %7s %7s %7s ', ...
        'P1', 'P2', 'P3', 'P4', 'T1', 'T2', 'T3', 'T4')
fprintf('%8s %10s %8s \n', 'r14', 'r14(real)', 'Posible')

for i=longsinond+1:length(CASO)
    if ondchoq(i)==0
        onda{i}='NO';
    else onda{i}='SI';
    end
    if abs(r14(i)-P01/P4real)>0.01 | r14(i)==0 | isnan(r14(i))
        if fluj4bloqueado
            pos{i}='SI';
            indOK=i;
        else
            pos{i}='NO';
        end
    else
        pos{i}='SI';
        indOK=i;
    end
    fprintf('%7.1f %10s %13.4f %7.4f %7.4f %7.4f ', ...
            CASO(i), onda{i}, M1(i), M2(i), M3(i), M4(i))
    fprintf('%9.2e %7.2e %7.2e %5.2e ', P1(i), P2(i), P3(i), P4(i))
    fprintf('%8.2f %7.2f %7.2f %7.2f ', T1(i), T2(i), T3(i), T4(i))
    fprintf('%7.3f %8.2f %9s \n', r14(i), P01/P4real, pos{i})

end
%
```



```
%
end

if fluj4bloqueado & abs(r14(end)-Pol/P4real)>0.01
    comentario='El flujo está bloqueado en 4. ';
    if r14(end)>Pol/P4real
        comentario=[comentario ...
            'Inmediatamente después al punto 4, se produce '];
        comentario=[comentario ...
            'una compresión brusca en el fluido.'];
    else
        if r14(end)<Pol/P4real
            comentario=[comentario ...
                'Inmediatamente después al punto 4, se produce '];
            comentario=[comentario ...
                'una expansión brusca en el fluido.'];
        end
    end
end

fprintf('\nEl caso posible es el %s. \n%s \n',...
    num2str(CASO(indOK)),comentario)
fprintf('El caudal másico circulante es: %.2f kg/s \n',...
    massflow(M1(indOK),Pol,Tol,Sup1,R,gamma))

else
    if Pol==P4real
        fprintf(['No hay diferencia de presión entre' ...
            ' los depósitos, no puede haber flujo entre ellos \n'])
    end
    if P4real>Pol
        fprintf(['ERROR: Este programa ha sido definido'...
            ' para flujos desde el punto 1 al 4 , NO al revés \n'])
        fprintf(['\t Por tanto, la presión en 1 debe'...
            ' ser mayor que en 4 para que el flujo vaya'...
            ' en el sentido programado \n'])
    end
end
end
```

1.2. Función 'Subsonico.m'

```
function [r14,M1,M3,M4,P1,P2,P3,P4,T1,T2,T3,T4] = Subsonico(M2)
% En caso SUBSÓNICO, dado el número de Mach en 2,
% se calcula el resto de magnitudes
% M1,M2,M3,M4: Número de Mach en 1,2,3,4 respectivamente
```



```
% P1,P2,P3,P4: presión estática en 1, 2, 3 y 4 respectivamente [Pa]
% T1,T2,T3,T4: temperatura estática en 1, 2, 3 y 4 respectivamente [K]
% r14: relación de presión entre 1 y 4

global L12 L34 D1 D3 Sup1 Sup3 rE12 rE34 R Po1 Tol gamma viscosdin

%%% Cálculo del número de Mach en 1
% De la misma manera que se realizó al principio del programa en el script
% principal, se realiza un bucle para determinar M1 junto con los valores
% correctos del número de Reynolds y el factor de fricción asociado

M1=0.5; %Suposición inicial
Re1=massflow(M1,Po1,Tol,Sup1,R,gamma)*D1/(Sup1*viscosdin);
i=0;
f1=frictionfact(Re1,rE12);
M1new=FannoMachNum(f1*L12/D1+FannoIndvar(M2,gamma),gamma);
if length(M1new)>1
    M1new=M1new(1);
end
while abs(M1new-M1)>0.0001
    M1=M1new;
    Re1=massflow(M1,Po1,Tol,Sup1,R,gamma)*D1/(Sup1*viscosdin);
    f1=frictionfact(Re1,rE12);
    M1new=FannoMachNum(f1*L12/D1+FannoIndvar(M2,gamma),gamma);
    i=i+1;
end
if length(M1new)>1
    M1new=M1new(1);
end
M1=M1new;
T1=Tol/relToT(M1,gamma);
P1=Po1/relPoP(M1,gamma);

%%% Relacion entre las magnitudes de los puntos 1 y 2 (flujo de Fanno)
P2=(P1/Fannorel2P(M1,gamma))*(Fannorel2P(M2,gamma));
Po2=(Po1/Fannorel2Po(M1,gamma))*(Fannorel2Po(M2,gamma));
T2=(T1/Fannorel2T(M1,gamma))*Fannorel2T(M2,gamma);
To2=To1;

%%% Cálculo del número de Mach en 3
relA2A3=Sup3/Sup1;
M3c=IsentMachNum(relA2A3,M2,gamma);
% Se obtienen dos soluciones para M3. Se descartará aquella cuyo número de
% Mach sea superior a la unidad, dado que, en este caso, se estudia el caso
% subsónico

Po3=Po2;
```



```
To3=To2;
To4=To3;

for i=1:length(M3c) %M3 debe ser forzosamente subsónico
    if M3c(i)<1
        M3=M3c(i);
    end
end
T3=To3/relToT(M3,gamma);
P3=Po3/relPoP(M3,gamma);

%%%% Cálculo del numero de Mach en 4

% M4=[];
fLD3=FannoIndvar(M3,gamma);
Re3=massflow(M3,Po3,To3,Sup3,R,gamma)*D3/(Sup3*viscosdin);
f34=frictionfact(Re3,rE34);
varindep=(fLD3-(f34*L34/D3));
M4c=FannoMachNum(varindep,gamma);

% ¡Atención! En caso de que no sea posible obtener un número de Mach en
% 4 para uno de los números de Mach calculados en 3, el resultado de la
% función anterior será NaN.

%%%% Evaluación de relaciones de presión entre 1 y 4 (Po1/P4)

M4=NaN;
for i=1:length(M4)
    if M4c(i)<1 & ne(isnan(M4c(i)),true)
        M4=M4c(i);
    end
end
r14=(Po1/Po2)*(Po2/Po3)*Fannorel2Po(M3,gamma)*...
    (1/Fannorel2Po(M4,gamma))*relPoP(M4,gamma);
T4=To4/relToT(M4,gamma);
P4=Po1/r14;

end
```

1.3. Función 'massflow.m'

```
function [Mflow] =massflow(M,Po,To,S,R,gamma)
%Flujo másico en un punto dado, M, Po, To y gamma
% M: número de Mach
```



```
% Po: presión de estancamiento [Pa]
% To: temperatura de estancamiento [K]
% gamma: índice de politropia
% Mflow: flujo másico [kg/s]

Mflow=((gamma/(R*To)) ^0.5)*Po*S*M*(1+((M^2)*(gamma-1)/2)) ^...
    (- (gamma+1)/(2*(gamma-1)));

end
```

1.4. Función 'frictionfact.m'

```
function [f] = frictionfact(Re,rE)
%Permite obtener el factor de fricción
% Re: número de Reynolds
% rE: rugosidad relativa
% f: factor de fricción
options=optimoptions('fsolve','Display','off');
if Re<=2500 % Condición de fluido viscoso a bajas velocidades
    sol= 64/Re; %Según Poiseuille
    f=sol;

else if 4500<Re<10000 & rE==0 %Condición de flujo turbulento
    %sin rugosidad (superficie suave)

    sol=0.316/(Re^(1/4));%Según Blasius
    f=sol;
end

end
if Re>10000 & rE==0 %Condición para flujo turbulento
    %completamente desarrollado sin rugosidad
    x0=[0.1;0];
    sol=fsolve(@ (x) f1(x,Re),x0,options);
    f=sol(1);
    return
end
if 4500<Re & Re<10000 & ne(rE,0) % Condición de flujo turbulento
    % con rugosidad

    x0=[0.01;0];
    sol=fsolve(@ (x) f2(x,Re,rE),x0,options);
    f=sol(1);
    return
end
```



```
if Re>10000 & ne(rE,0) % Condición para flujo turbulento
                        % completamente desarrollado con rugosidad

    x0=[0.1;0];
    sol=fsolve(@f3(x,Re,rE),x0,options);
    f=sol(1);
    return
end

end
```

1.4.1. Función 'f1.m'

```
function [fc] = f1(f,Re)
% Ecuación definida por Karman-Prandtl
fc(1)=2.*log10(Re.*(f(1).^(1/2))-0.8-1./(f(1).^(1/2)));
fc(2)=0;
end
```

1.4.2. Función 'f2.m'

```
function fc = f2(f,Re,rE)
% Ecuación definida por Colebrook
x=f(1);
fc(1)=1.14-2*log10(rE+9.35/(Re*sqrt(x)))-1/sqrt(x);
fc(2)=0;
end
```

1.4.3. Función 'f3.m'

```
function fc = f3(f,Re,rE)
% Ecuación definida por Karman-Prandtl
x=f(1);
fc(1)=2*log10(1/(2*rE))+1.74-1/sqrt(x);
fc(2)=0;
end
```




1.5. Función 'relPoP.m'

```
function [ rPoP ] = relPoP( M, gamma )
%Relación entre la presión de estancamiento y la presión estática EN UN PUNTO
%M: número de Mach en el punto
%gamma: índice de politropía
%rPoP: relación entre la presión de estancamiento y
      %la presión estática en el punto considerado

rPoP=(1+(1/2)*M^2*gamma-(1/2)*M^2)^(gamma/(gamma-1));

end
```

1.6. Función 'relToT.m'

```
function [ rToT ] = relToT( M,gamma )
%Relación entre temperatura de estancamiento y la temperatura estática EN UN PUNTO
%M: número de Mach en el punto
%gamma: índice de politropía
%rToT: relación entre la temperatura de estancamiento y
      %la temperatura estática en el punto considerado

rToT=(M^2*gamma-M^2+2)/2;

end
```

1.7. Función 'r2PoNormShock.m'

```
function [ r2Po ] = r2PoNormShock( M1, gamma )
% Relación de presiones de estancamiento aguas abajo y arriba de la onda
% Conociendo el número de Mach del fluido situado aguas arriba de la onda,
% mediante esta función se obtiene la relación de presiones
% de estancamiento: P2/P1
% M1: número de Mach aguas arriba de la onda de choque
% gamma: índice de politropía
% r2P: relación de presiones de estancamiento (Po2/Po1)
r2Po=(( (gamma+1)*(1/2))*M1^2)^(gamma/(gamma-1))*...
      (1+(gamma-1)*(1/2))*M1^2)^(-gamma/(gamma-1))*...
      (2*gamma*M1^2/(gamma+1)-(gamma-1)/(gamma+1))^(1/(gamma-1));

end
```



1.8. Función 'r2PNormShock.m'

```
function [ r2P ] = r2PNormShock( M1, gamma )
% Relación de presiones estáticas aguas abajo y arriba de la onda
% Conociendo el número de Mach del fluido situado aguas arriba de la onda,
% mediante esta función se obtiene la relación de presiones estáticas: P2/P1
% M1: número de Mach aguas arriba de la onda de choque
% gamma: índice de politropía
% r2P: relación de presiones estáticas (P2/P1)
r2P=2*gamma*M1^2/(gamma+1)-(gamma-1)/(gamma+1);
end
```

1.9. Función 'r2TNormShock.m'

```
function [ r2T ] = r2TNormShock( M1, gamma )
% Relación de temperaturas estáticas aguas abajo y arriba de la onda
% Conociendo el número de Mach del fluido situado aguas arriba de la onda,
% mediante esta función se obtiene la relación de temperaturas: T2/T1
% M1: número de Mach aguas arriba de la onda de choque
% gamma: índice de politropía
% r2T: relación de temperaturas estáticas (T2/T1)
r2T=(1+((gamma-1)*(1/2))*M1^2)*(2*gamma*M1^2/(gamma-1)-1)*(2*(gamma-1))/...
((gamma+1)^2*M1^2);
end
```

1.10. Función 'IsentMachNum.m'

```
function [ Msol ] = IsentMachNum(relA1A2,M1,gamma)
% Calcula el número de Mach en un punto sabiendo la relación
% de diámetros relA1A2=A2/A1, el número de Mach (M1) en uno de
% los puntos y el índice de politropía gamma

Mach=[0.01:0.00001:10];
k=1;
Msol=0;
for i=1:length(Mach)
    M2=Mach(i);
    fun=[M1*((1+((gamma-1)*(1/2))*M2^2)/(1+((gamma-1)*(1/2))*...
        M1^2))^((gamma+1)/(2*(gamma-1)))/M2]-relA1A2;
    ec(i)=fun;
end
```



```

    if i==1
        funant=fun;
    else
        if ec(i)*ec(i-1)<0
            Msol(k,1)=M2;
            k=k+1;
        end
    end
end
end
end

```

1.11. Función 'MNumNormShock.m'

```

function [ M2 ] = MNumNormShock( M1, gamma )
%Dado un número de Mach (supersónico), calcula el número de Mach
%depués de la onda de choque plana
%M1: número de Mach aguas arriba de la onda de choque
%M2: número de Mach aguas abajo de la onda de choque
% gamma: índice de politropía
M2= ( (M1^2+2/(gamma-1)) / (2*gamma*M1^2/(gamma-1)-1) )^(1/2);
end

```

1.12. Función 'Fannorel2Po.m'

```

function [ relPo1Po2 ] = Fannorel2Po( M,gamma )
% En el flujo de Fanno, relaciona la presión de estancamiento entre dos puntos
%M: número de Mach en el punto 1
% gamma: índice de politropía
% relPo1Po2=Po1/Po2 donde el flujo va de 1 a 2 (atención: no al revés)
% En el punto 2, hay la condición crítica M2=1;
relPo1Po2=((1+((gamma-1)*(1/2))*M^2)/((gamma+1)*...
(1/2)))^((gamma+1)/(2*(gamma-1)))/M;
end

```



1.13. Función 'Fannorel2P.m'

```
function [ relP1P2 ] = Fannorel2P( M,gamma )
% En el flujo de Fanno, relaciona la presión estática entre dos puntos
% M: número de Mach en el punto 1
% gamma: índice de politropía
% relP1P2=P1/P2, donde el flujo va de 1 a 2 (atención: no al revés)
% En el punto 2, hay la condición crítica M2=1;
relP1P2=((gamma+1)*(1/2))/(1+((gamma-1)*(1/2))*M^2)^(1/2)/M;
end
```

1.14. Función 'Fannorel2T.m'

```
function [ relT1T2 ] = Fannorel2T( M,gamma )
% En el flujo de Fanno, relaciona la temperatura estática entre dos puntos
% M: número de Mach en el punto 1
% gamma: índice de politropía
% relT1T2=T1/T2, donde el flujo va de 1 a 2 (atención: no al revés)
% En el punto 2, hay la condición crítica M2=1;
relT1T2=((gamma+1)*(1/2))/(1+((gamma-1)*(1/2))*M^2);
end
```

1.15. Función 'FannoIndvar.m'

```
function [ relMach ] = FannoIndvar( M,gamma )
% Calcula 4CfL/Dh conociendo el número de Mach .
% Recuerda que 4Cf=frictionfactor=f
% M: número de Mach en el punto 1
% gamma: índice de politropía
relMach=(-M^2+1)/(gamma*M^2)+(gamma+1)*log((gamma+1)*...
    M^2/(2*(1+((gamma-1)*(1/2))*M^2)))/(2*gamma);
end
```



1.16. Función 'FannoMachNum.m'

```
function [ Msol ] = FannoMachNum( varind,gamma )
% Se obtiene el número de Mach de un punto tomando como referencia
% otro punto en su condición crítica.

% varind= 4*Cf*Ax/D
% Msol: número de Mach resultante
ec=[];
Mach=(0.01:0.00001:10);
Msol=0;
k=1;
if varind>0
for i=1:length(Mach)
    M=Mach(i);
    fun=((-M^2+1)/(gamma*M^2)+(gamma+1)*log((gamma+1)*M^2/...
        (2*(1+((gamma-1)*(1/2))*M^2)))/(2*gamma))-varind;
    ec(i)=fun;
    if i==1
        funant=fun;
    else
        if ec(i)*ec(i-1)<0
            Msol(k,1)=M;
            k=k+1;
        end
    end
end
if Msol==0
    Msol=NaN;
end
else
    if varind==0
        Msol=1;
    else
        Msol=NaN;
    end
end
end
```



PROGRAMA DEL PROBLEMA 10

1. Script principal

```
% SCRIPT PRINCIPAL

clear all
close all
clc

%%%% Introducción de datos
% => La nomenclatura utilizada se corresponde a la del problema
% => Las unidades utilizadas están en el sistema Internacional

% Geometría

X=[5,1.5,1,1,1.5]; % Longitudes
alpha=[8,12,25,30]*pi/180; % Ángulo de inclinación del sólido

% Propiedades físicas y condiciones de contorno

R=287; % Constante del aire
gamma=1.4; % Constante politrópica

Po=1197; % Presión del aire a una altura de 30000 m
To=226.5; % Temperatura del aire a una altura de 30000 m

Mi=7; % Número de Mach aguas arriba

%%%% APARTADOS 1,2,3

fprintf(['\n===== APARTADOS 1,2,3'...
        ' =====\n'])

[M,P,T,F,Fx,Fy,drag,lift,power] = x_43_fun(X,Mi,alpha,gamma,Po,To,R);

%%%% NOTA: En Command Window, se mostrarán los resultados calculados hasta
%%%%      ahora

nombre_variables=["i","M_i","P_i(Pa)","T_i(K)"];
tabla_condiciones_fluido=table((1:5)',...
    M,P,T,'VariableNames',nombre_variables);
fprintf('\n -> Condiciones de velocidad, presión y temperatura:\n\n')
```



```

disp(tabla_condiciones_fluido)

nombre_variables_2=["i","F_i (N)","F_x_i (N)","F_y_i (N)"];
tabla_fuerzas=table(1:5)',F,Fx,Fy,'VariableNames',nombre_variables_2);
fprintf('\n -> Fuerzas sobre las superficies:\n\n')
disp(tabla_fuerzas)

fprintf('\t >>> Fuerza de arrastre:      %.0f N\n',drag)
fprintf('\t >>> Fuerza de sustentación: %.0f N\n',lift)
fprintf('\t >>> Potencia necesaria:      %.0f kW\n',power/1000)

fprintf(['====='] ...
'=====\\n']);
disp(' Programa ejecutándose ... ')
%%%% APARTADO 4

n=50; % Número de puntos

% >>>> Variando la velocidad de la aeronave
Mi_vect=linspace(2,10,n);

%Inicialización de variables
drag_vect=zeros(n,1);
lift_vect=drag_vect;
power_vect=drag_vect;
M_matrix=zeros(n,5);
P_matrix=zeros(n,5);

for i=1:n

    [M,P,T,F,Fx,Fy,drag,lift,power] = ...
        x_43_fun(X,Mi_vect(i),alpha,gamma,Po,To,R);
    drag_vect(i)=drag;
    lift_vect(i)=lift;
    power_vect(i)=power;

    for j=1:5
        M_matrix(i,j)=M(j);
        P_matrix(i,j)=P(j);
    end
end

markers=["-o","-^","-d","-+","-"];
markerind=fix(linspace(1,n,20));
f=cell(1,2);

for i=1:5

```



```
f{1}=figure(1);
plot(Mi_vect,M_matrix(:,i),markers(i),...
      'MarkerSize',4.5,'MarkerIndices',markerind,'LineWidth',1.2);
hold on

f{2}=figure(2);
plot(Mi_vect,P_matrix(:,i),markers(i),...
      'MarkerSize',4.5,'MarkerIndices',markerind,'LineWidth',1.2);
hold on

end

figure(1)

xlabel('M_{\infty}'); ylabel('Número de Mach');
legend('M_1','M_2','M_3','M_4','M_5'); ax=gca;
ax.FontSize=11;

figure(2)

xlabel('M_{\infty}'); ylabel('Presión (Pa)');
legend('P_1','P_2','P_3','P_4','P_5'); ax=gca;
ax.FontSize=11; ylim([-0.5,5]*1e+4);

f{1}.Units='Normalized'; f{1}.Position=[0.15 0.4 0.35 0.4];
f{2}.Units='Normalized'; f{2}.Position=[0.5 0.4 0.35 0.4];

figure
subplot(2,1,1)
plot(Mi_vect,drag_vect,'-','LineWidth',1.2)
hold on

plot(Mi_vect,lift_vect,'-','LineWidth',1.2)
hold on

xlabel('M_{\infty}'); ylabel('Fuerza (N)');
legend('F. Arrastre','F. Sustentación')
ylim([0, 4*1e+4]);

subplot(2,1,2)
plot(Mi_vect,power_vect/1000,'LineWidth',1.2)
xlabel('M_{\infty}'); ylabel('Potencia (kW)');

pause(0.1);
```




```
% >>>> Variando el ángulo alpha 1
% (Los demás ángulos se mantienen.)

alpha_new=alpha;
alpha_1_min = atan(((gamma+1)./2.*Mi.^2./(Mi.^2.*...
    (1.001/7).^2-1)-1).*tan(asin(1.001/7)))^-1);
alpha1_vect=linspace(alpha_1_min*180/pi,20,n)*pi/180;

for i=1:n

    alpha_new(1)=alpha1_vect(i);
    [M,P,T,F,Fx,Fy,drag,lift,power] = ...
        x_43_fun(X,Mi,alpha_new,gamma,Po,To,R);
    drag_vect(i)=drag;
    lift_vect(i)=lift;
    power_vect(i)=power;

    for j=1:5
        M_matrix(i,j)=M(j);
        P_matrix(i,j)=P(j);
    end

end

markers=["-o","-^","-d","-+","-"];
markerind=fix(linspace(1,n,20));

for i=1:5

    f{1}=figure(4);
    plot(alpha1_vect*180/pi,M_matrix(:,i),markers(i),...
        'MarkerSize',4.5,'MarkerIndices',markerind,'LineWidth',1.2);
    hold on

    f{2}=figure(5);
    plot(alpha1_vect*180/pi,P_matrix(:,i),markers(i),...
        'MarkerSize',4.5,'MarkerIndices',markerind,'LineWidth',1.2);
    hold on

end

figure(4)

xlabel('\alpha_{1} (°)'); ylabel('Número de Mach');
legend('M_1','M_2','M_3','M_4','M_5'); ax=gca;
ax.FontSize=11; xlim([0 alpha1_vect(end)*180/pi])
```



```
figure(5)

xlabel('\alpha_{1} (°)'); ylabel('Presión (Pa)');
legend('P_1','P_2','P_3','P_4','P_5'); ax=gca;
ax.FontSize=11; ylim([-0.5,5]*1e+4);
xlim([0 alphas_vect(end)*180/pi])

f{1}.Units='Normalized'; f{1}.Position=[0.15 0.4 0.35 0.4];
f{2}.Units='Normalized'; f{2}.Position=[0.5 0.4 0.35 0.4];

figure

subplot(2,1,1)
plot(alphas_vect*180/pi,drag_vect,'-','LineWidth',1.2)
hold on

plot(alphas_vect*180/pi,lift_vect,'-','LineWidth',1.2)
hold on
xlabel('\alpha_{1} (°)'); ylabel('Fuerza (N)');
legend('F. Arrastre','F. Sustentación')
ylim([0, 4*1e+4]); xlim([0 alphas_vect(end)*180/pi])

subplot(2,1,2)
plot(alphas_vect*180/pi,power_vect/1000,'LineWidth',1.2)
xlabel('\alpha_{1} (°)'); ylabel('Potencia (kW)');
xlim([0 alphas_vect(end)*180/pi])

pause(0.1)

% >>> Variando los ángulos 2 y 3, manteniendo el grosor Y
% (Los demás ángulos se mantienen.)

% Cálculos previos
Y=(X(2)*tan(alpha(2))+X(3)*tan(alpha(3)));

alpha_2_max=atan(Y/(X(2)+X(3))); % Ángulo alpha 2 máximo posible.
epsilon2_min = asin(1.001/7);
alpha_2_min = atan(((gamma+1)./2.*Mi.^2./(Mi.^2.*...
    sin(epsilon2_min).^2-1)-1).*tan(epsilon2_min))^-1);

alpha2_vect=linspace(alpha_2_min,alpha_2_max-1e-5,n);
    % Obsérvese que al ángulo máximo se le ha restado un valor
    % suficientemente pequeño para que posteriormente el caso límite sea
    % calculable.
alpha_new=alpha;

% Cálculo de los distintos casos para diferentes ángulos alpha 2 y 3
```



```
% (Los demás ángulos se mantienen.)

for i=1:n

    alpha_new(2)=alpha2_vect(i);
    alpha_new(3)=atan((Y-tan(alpha_new(2))*X(2))/X(3));
    [M,P,T,F,Fx,Fy,drag,lift,power] = ...
        x_43_fun(X,Mi,alpha_new,gamma,Po,To,R);
    drag_vect(i)=drag;
    lift_vect(i)=lift;
    power_vect(i)=power;

    for j=1:5
        M_matrix(i,j)=M(j);
        P_matrix(i,j)=P(j);
    end

end

markers=["-o","-^","-d","-+","-"];
markerind=fix(linspace(1,n,20));

for i=1:5

    f{1}=figure(7);
    plot(alpha2_vect*180/pi,M_matrix(:,i),markers(i),...
        'MarkerSize',4.5,'MarkerIndices',markerind,'LineWidth',1.2);
    hold on

    f{2}=figure(8);
    plot(alpha2_vect*180/pi,P_matrix(:,i),markers(i),...
        'MarkerSize',4.5,'MarkerIndices',markerind,'LineWidth',1.2);
    hold on

end

figure(7)

xlabel('\alpha_{2} (°)'); ylabel('Número de Mach');
legend('M_1','M_2','M_3','M_4','M_5'); ax=gca;
ax.FontSize=11; xlim([0 alpha_2_max*180/pi])

figure(8)

xlabel('\alpha_{2} (°)'); ylabel('Presión (Pa)');
legend('P_1','P_2','P_3','P_4','P_5'); ax=gca;
ax.FontSize=11; ylim([-0.5,5]*1e+4);
```



```
xlim([0 alpha_2_max*180/pi])

f{1}.Units='Normalized'; f{1}.Position=[0.15 0.4 0.35 0.4];
f{2}.Units='Normalized'; f{2}.Position=[0.5 0.4 0.35 0.4];

figure
subplot(2,1,1)

plot(alpha2_vect*180/pi,drag_vect,'-','LineWidth',1.2)
hold on

plot(alpha2_vect*180/pi,lift_vect,'-','LineWidth',1.2)
hold on

xlabel('\alpha_{2} (°)'); ylabel('Fuerza (N)');
legend('F. Arrastre','F. Sustentación')
ylim([0, 4*1e+4]); xlim([0 alpha_2_max*180/pi])

subplot(2,1,2)
plot(alpha2_vect*180/pi,power_vect/1000,'LineWidth',1.2)
xlabel('\alpha_{2} (°)'); ylabel('Potencia (kW)');
xlim([0 alpha_2_max*180/pi])

disp(' Fin del programa ')
disp([' SUBA HACIA ARRIBA EN COMMAND WINDOW PARA VER LOS '...
      'RESULTADOS DE LOS APARTADOS 1,2 y 3 '])
```

1.1. Función 'x_43_fun.m'

```
function [M,P,T,F,Fx,Fy,drag,lift,power] = x_43_fun(X,Mi,alpha,gamma,Po,To,R)

% Esta función calcula las variables de salida que se piden en el problema,
% apartados 1, 2 y 3. El objeto de su definición es poder utilizar el mismo
% algoritmo para calcular los apartados 1, 2, y 3 y los diferentes casos del
% apartado 4.

% X: coordenadas horizontales X1,X2,X3,X4,X5
% Mi: número de Mach en la entrada
% alpha: ángulos de inclinación
% gamma: constante politrópica
% Po: presión a una altura determinada
% To: temperatura a una altura determinada
```



```

% M: números de Mach en cada una de las superficies
% P: presión estática en cada superficie
% T: temperatura en cada superficie
% F: fuerzas generadas sobre cada superficie
% Fx: fuerzas de arrastre asociadas a cada una de las superficies
% Fy: fuerzas de sustentación asociadas a cada una de las superficies
% drag: fuerza de arrastre total
% lift: fuerza de sustentación total

%Inicialización de variables
M=zeros(5,1);
P=zeros(5,1);
T=zeros(5,1);
F=zeros(5,1);
Fx=zeros(5,1);
Fy=zeros(5,1);

% Determinación de las características del fluido en la parte superior:
% => Superficie 1
epsilon(1)=f_epsilon(alpha(1),gamma,Mi);
Mn_sup=Mi*sin(epsilon(1));

Mn(1)=MNumNormShock(Mn_sup,gamma);
M(1)=Mn(1)/sin(epsilon(1)-alpha(1));
P(1)=Po*r2PNormShock(Mn_sup,gamma);
T(1)=To*r2TNormShock(Mn_sup,gamma);

% Determinación de las características del fluido en la parte inferior:
% => Superficie 2

epsilon(2)=f_epsilon(alpha(2),gamma,Mi);
Mn_inf=Mi*sin(epsilon(2));

Mn(2)=MNumNormShock(Mn_inf,gamma);
M(2)=Mn(2)/sin(epsilon(2)-alpha(2));

P(2)=Po*r2PNormShock(Mn_inf,gamma);
T(2)=To*r2TNormShock(Mn_inf,gamma);

% => Superficie 3

epsilon(3)=f_epsilon(alpha(3)-alpha(2),gamma,M(2));
Mn_23=M(2)*sin(epsilon(3));

Mn(3)=MNumNormShock(Mn_23,gamma);
M(3)=Mn(3)/sin(epsilon(3)-(alpha(3)-alpha(2)));

```



```
P(3)=P(2)*r2PNormShock(Mn_23,gamma);
T(3)=T(2)*r2TNormShock(Mn_23,gamma);

% => Superficie 4

eta34_inf=f_eta(gamma,M(3),"eta");
eta34_inf_2=eta34_inf+alpha(3);

M(4)=f_eta(gamma,M(3),"M",eta34_inf_2);

P(4)=P(3)*relP_P_isent(M(3),M(4),gamma);
T(4)=T(3)*relT_T_isent(M(3),M(4),gamma);

% => Superficie 5

eta45_inf=f_eta(gamma,M(4),"eta");
eta45_inf_1=eta45_inf+alpha(3);

M(5)=f_eta(gamma,M(4),"M",eta45_inf_1);

P(5)=P(4)*relP_P_isent(M(4),M(5),gamma);
T(5)=T(4)*relT_T_isent(M(4),M(5),gamma);

% Fuerzas sobre la aeronave

for i=1:5
    if i<4
        F(i)=P(i)*X(i)/cos(alpha(i));
        Fx(i)=F(i)*sin(alpha(i));
        if i==1
            Fy(i)=-F(i)*cos(alpha(i));
        else
            Fy(i)=F(i)*cos(alpha(i));
        end
    else
        if i==4
            F(4)=P(4)*X(4);
            Fx(4)=0;
            Fy(4)=F(4);
        else
            F(5)=P(5)*X(5)/cos(alpha(4));
            Fx(5)=-F(5)*sin(alpha(4));
            Fy(5)=F(5)*cos(alpha(4));
        end
    end
end
```



```

end

drag=sum(Fx);
lift=sum(Fy);

% Potencia necesaria de los motores
V=Mi*sqrt(gamma*R*To);
power=drag*V;

end

```

1.1.1. Función 'f_epsilon.m'

```

function sol = f_epsilon(delta,gamma,M1)
% Función necesaria para obtener las raíces de la ecuación que permite
% determinar el ángulo épsilon.
% Épsilon: ángulo de la onda de choque oblicua respecto del eje
%           horizontal
% Delta: inclinación del sólido
% Gamma: índice de politropia
% M1: número de Mach entrante
% Sol: raíz hallada de la ecuación (solución Épsilon)

Aepsilon=1e-5; % Incremento del ángulo

Epsilon_min=asin(1/M1); % Ángulo mínimo sin presencia de discontinuidad
Epsilon_max=epsilon_max(M1,gamma); % Ángulo máximo
Epsilon=(Epsilon_min+Aepsilon:Aepsilon:Epsilon_max);

f = ((gamma+1)./2.*M1.^2./(M1.^2.*sin(Epsilon).^2-1)-1).*...
    tan(Epsilon)-1./tan(delta);
sol=zeros(1,2);
k=0;
for i=1:length(Epsilon)-1

    if f(i)*f(i+1)<0 && Epsilon(i)>delta
        k=k+1;
        sol(k)=(Epsilon(i)+Epsilon(i+1))/2;
    end
end

```



```
end
if k<2
    sol=sol(1);
end
end
```

1.1.2. Función 'MNumNormShock.m'

```
function [ M2 ] = MNumNormShock( M1, gamma )
%Dado un número de Mach (supersónico), calcula el número de Mach
%depués de la onda de choque.
% M1: número de Mach aguas arriba de la onda de choque
% M2: número de Mach aguas abajo de la onda de choque
% Gamma: índice de politropía
M2=( (M1^2+2/(gamma-1)) / (2*gamma*M1^2/(gamma-1)-1) )^(1/2);
end
```

1.1.3. Función 'r2PNormShock.m'

```
function [ r2P ] = r2PNormShock( M1, gamma )
% Relación de presiones estáticas aguas abajo y arriba de la onda
% Conociendo el número de Mach del fluido situado aguas arriba de la onda,
% mediante esta función se obtiene la relación de presiones estáticas: P2/P1
% M1: número de Mach aguas arriba de la onda de choque
% Gamma: índice de politropía
% r2P: relación de presiones estáticas (P2/P1)

r2P=2*gamma*M1^2/(gamma+1)-(gamma-1)/(gamma+1);
end
```

1.1.4. Función 'r2TNormShock.m'

```
function [ r2T ] = r2TNormShock( M1, gamma )
% Relación de temperaturas estáticas aguas abajo y arriba de la onda
% Conociendo el número de Mach del fluido situado aguas arriba de la onda,
% mediante esta función se obtiene la relación de temperaturas: T2/T1
% M1: número de Mach aguas arriba de la onda de choque
```




```
% Gamma: índice de politropía
% r2T: relación de temperaturas estáticas (T2/T1)
r2T=(1+((gamma-1)*(1/2))*M1^2)*(2*gamma*M1^2/(gamma-1)-1)*(2*(gamma-1))/...
    ((gamma+1)^2*M1^2);
end
```

1.1.5. Función 'f_eta.m'

```
function f= f_eta(gamma,M,choose_M_eta,eta_inf)
% Función necesaria para obtener el ángulo eta o el número de Mach
% en una onda de expansión de Prandtl-Meyer
%   Gamma: índice de politropía
%   M: número de Mach entrante
%   f: variable de salida
%   choose_M_eta:
%       => Si choose_M_eta es "eta"
%           la variable de salida f será eta (ángulo de Prandtl-Meyer)
%       => Si choose_M_eta es "M"
%           la variable de salida f será el número de Mach "M"
%   eta_inf: ángulo eta inferior partiendo de un número de Mach unitario

eta=sqrt((gamma+1)/(gamma-1))*atan(sqrt((gamma-1)...
    *(M.^2-1))./(gamma+1))-atan(sqrt((M.^2-1))); %Ángulo de Prandtl-Meyer
if choose_M_eta=="eta"
    f=eta;
else
    if choose_M_eta=="M"
        AM=1e-5;
        Msolve= (1:AM:100);
        f=sqrt((gamma+1)/(gamma-1))*atan(sqrt((gamma-1)...
            *(Msolve.^2-1))./(gamma+1))-atan(sqrt((Msolve.^2-1)))-eta_inf;
        for i=1:length(Msolve)-1
            if f(i)*f(i+1)<0 && Msolve(i)>M
                sol=(Msolve(i)+Msolve(i+1))/2;
            end
        end
        f=sol;
    end
end
```



1.1.6. Función 'relP_P_isent.m'

```
function P2P1 = relP_P_isent( M1,M2,gamma )
%Relación de presiones entre dos puntos si el flujo es isentrópico
%M: número de Mach en el punto
%Gamma: índice de politropía
%P2P1: relación entre la presión aguas abajo (P2) y aguas arriba (P1)

P2P1=((1+(1/2)*M1^2*gamma-(1/2)*M1^2)^(gamma/(gamma-1)))/...
      ((1+(1/2)*M2^2*gamma-(1/2)*M2^2)^(gamma/(gamma-1)));

end
```

1.1.7. Función 'relT_T_isent.m'

```
function T2T1 = relT_T_isent( M1,M2,gamma )
%Relación de temperaturas entre dos puntos si el flujo es isentrópico
%M: número de Mach en el punto
%Gamma: índice de politropía
%T2T1: relación entre la temperatura aguas abajo (T2) y aguas arriba (T1)

T2T1=((1+(1/2)*M1^2*gamma-(1/2)*M1^2))/...
      ((1+(1/2)*M2^2*gamma-(1/2)*M2^2));

end
```

1.1.8. Función 'epsilon_max.m'

```
function epsilon_maxima = epsilon_max(M1,gamma)
% Función que calcula el ángulo épsilon máximo
% M1: número de Mach entrante
% Gamma: constante politrópica
% Épsilon_máxima: ángulo épsilon máximo

epsilon_maxima=asin(sqrt(((gamma+1)/4*M1^2-1+((gamma+1)*(1+...
      (gamma-1)/2*M1^2+(gamma+1)/16*M1^4))^(1/2))/(gamma*M1^2)));

end
```







Nomenclatura

En cada uno de los problemas, se ha especificado la nomenclatura utilizada. En este apartado, se indica una nomenclatura generalizada.

a = aceleración [m/s^2]

$A = S$ = área [m^2]

C = velocidad del sonido [m/s]

C_d = coeficiente de descarga

C_D = coeficiente de arrastre / coeficiente de resistencia para la capa límite

C_f = coeficiente de fricción

C_L = coeficiente de sustentación

C_p = calor específico a presión constante [J/kg K]

C_v = calor específico a volumen constante [J/kg K]

D = fuerza de arrastre. [N] / diámetro [m]

e = espesor de la pared del conducto // excentricidad [m]

F = fuerza [N]

f = coeficiente de fricción // frecuencia [Hz]

g = aceleración gravitatoria [m/s^2]

$H = h = Z$ = nivel de referencia (cota) / altura [m]

h = entalpía [J/kg]



I = momento de inercia [kg/m^2]

J = jacobiano de la transformación

L = longitud [m] // Fuerza de sustentación [N]

$M = T$ = par [N m]

M = número de Mach

m = masa [kg]

$\dot{m}$ = caudal másico [kg/s]

$N = \dot{W}$ = potencia [W] [kW]

$P = p$ = presión [Pa]

P^* = presión reducida [Pa]

$Q = \dot{V}$ = caudal volumétrico [m^3/s]

$\dot{Q}$ = flujo de calor [J/s]

q = calor por unidad de masa [J/kg]

R, r = radio [m]

R = constante característica de cada gas [J/kg K]

Re = número de Reynolds

S = sección de paso [m^2]

S_o = número de Sommerfeld

s = entropía [J/kg K]

T = temperatura [$^{\circ}\text{C}$; K]

t = tiempo [s]

$U = V$ = velocidad del fluido [m/s]

$u = e$ = energía interna [J/kg]

V = velocidad [m/s]

$V_x = u$ = componente del vector velocidad en dirección x [m/s]

$V_y = v$ = componente del vector velocidad en dirección y [m/s]

$V_z = w$ = componente del vector velocidad en dirección z [m/s]

$\dot{W}$ = potencia [W] [kW]

$\forall$ = volumen [m^3]

X = posición horizontal [m]

Y = energía por unidad de masa [J/kg] // posición vertical [m]

Y_T = energía teórica por unidad de masa [J/kg]

Z = nivel de referencia (cota) [m]

α_T = coeficiente de expansión térmica [K^{-1}]

β = módulo de compresibilidad volumétrica [N/m^2]

Γ = circulación [m^2/s]

γ = índice de politropía

$\dot{\gamma}$ = velocidad de deformación angular [s^{-1}]

ε = rugosidad absoluta [m] // excentricidad [m]

η = rendimiento

μ = viscosidad dinámica [$kg/(s \cdot m)$]

ν = viscosidad cinemática [m^2/s]

ρ = densidad [kg/m^3]

τ = esfuerzo cortante [N/m^2]

υ = volumen específico [m^3/kg]

ϕ = función potencial [m^2/s]

ψ = función de corriente [m^2/s]

$\Omega = \xi$ = vorticidad

$\omega = \Omega$ = velocidad angular [rad/s]

Δx = variación de posición [m]



Δh = pérdidas de carga por rozamiento [m^2/s^2]

ΔP = variación de presión [N/m^2]

∇ = operador diferencial nabla; gradiente para un escalar,
divergencia para un vector [$1/\text{m}$]

∇^2 = operador diferencial laplaciano [$1/\text{m}^2$]







Bibliografía

- Anderson, John D. (1995): *Computational Fluid dynamics*. McGraw Hill.
- Anderson, John D. (2001): *Fundamentals of Aerodynamics*. McGraw Hill.
- Anderson, John D. (2003): *Modern compressible flow: With historical Perspective*. 3^a ed. Tata McGraw Hill.
- Ashley, Holt, Landahl, Marten (1985): *Aerodynamics of Wings and Bodies*. Dover Publications.
- Barrero, Ripoll, Antonio; Pérez-Saborid Sánchez-Pastor, Miguel (2005): *Fundamentos y aplicaciones de mecánica de fluidos*. McGraw Hill.
- Batchelor, G. K. (1997): *Introducción a la dinámica de fluidos*. Ministerio de Medio Ambiente.
- Bergadà, Josep M.; Kumar, Sushil (2014): *Fluid power, Mathematical Design of Several Components*. Nova Publishers.
- Bergadà, Josep M. (2017): *Mecánica de Fluidos. Breve introducción teórica con problemas resueltos*. 3^a ed. Iniciativa Digital Politècnica. UPC.
- Bertin, John J. (2002): *Aerodynamics for Engineers*. Prentice Hall.
- Crespo, Antonio. (2006): *Mecánica de Fluidos*. Thomson.
- Douglas, J. F.; Gasiorek, J. M.; Swaffield, J. A. (2001): *Fluid Mechanics*. Longman.
- Emanuel, George (1986): *Gasdynamics: Theory and Applications*. AIAA Education Series.



Fox, R. W.; McDonald, A.T. (1995): *Introducción a la mecánica de fluidos*. McGraw Hill.

Gerhart, P.; Gross, R.; Hochstein, J. (1995): *Fundamentos de mecánica de fluidos*. Addison Wesley 1995.

Gordillo Arias de Saavedra, J. M.; Riboux Acher, G.; Fernández García, J. M. (2017): *Introducción a la mecánica de fluidos*. Paraninfo.

Liepmann H. W.; Roshko, A. (1993): *Elements of Gasdynamics*. Dover Publications.

Liñán Martínez, A.; Rodríguez Fernández, M.; Higuera Antón, F. (2000a): *Mecánica de fluidos*. Publicaciones de la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Aeronáuticos.

Liñán Martínez, A.; Rodríguez Fernández, M. (2000b): *Mecánica de fluidos. (Segunda parte)*. Publicaciones de la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Aeronáuticos.

López Herrera, J. M.; Herrada, M.; Pérez-Saborid, M.; Barrero, A. (2005): *Problemas resueltos de mecánica de fluidos*. McGraw Hill.

Massey, B. S. (1989): *Fluid Mechanics*. Chapman & Hall.

Meseguer Ruiz, J.; Sanz Andrés, A. (2005): *Aerodinámica básica*. Universidad Politécnica de Madrid.

Milne-Thomson, L. M. (1973): *Theoretical Aerodynamics*. Dover Publications.

Moran, Jack (2003): *An Introduction to Theoretical and Computational Aerodynamics*. Dover Publications.

Pnueli, D.; Gutfinger, C. (1997): *Fluid Mechanics*. Cambridge University Press.

Prandtl, L.; Tietjems, O. G. (1957a): *Fundamentals of Hydro- and Aeromechanics*. Dover Publications.

Prandtl, L.; Tietjems, O. G. (1957b): *Applied Hydro and Aeromechanics*. Dover Publications.

Research & Education Association (1996): *Fluid Mechanics Problem Solvers*. REA.

- Schlichting, H.; Gersten, K. (2003): *Boundary-Layer Theory*. Springer.
- Shames, I. H. (1995): *Mecánica de fluidos*. McGraw Hill.
- Spurk, Joseph H. (1997a): *Fluid Mechanics*. Springer.
- Spurk, Joseph H. (1997b): *Fluid Mechanics. Problems and Solutions*. Springer.
- White Frank, M. (1988): *Mecánica de fluidos*. McGraw Hill.
- White Frank, M. (2004): *Mecánica de fluidos*. McGraw Hill.
- Zucrow, M. J; Hoffman, J. D. (1976): *Gas Dynamics*. Vol. 1. John Wiley & Sons.

