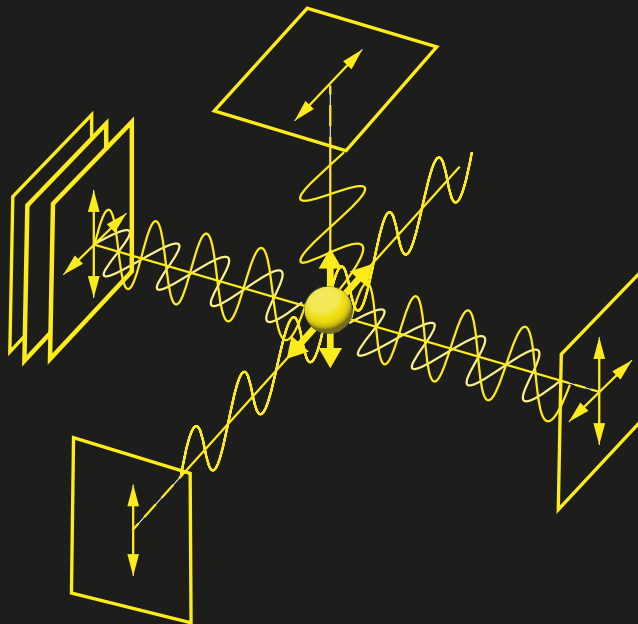


# Fotònica

Curs introductor



Jose Trull

**UPCGRAU 80**



UNIVERSITAT POLITÈCNICA  
DE CATALUNYA  
BARCELONATECH



# Fotònica

## Curs introductor

Jose Trull

Amb el suport de



Traducció del llibre: *Photonics. An introductory course*

Traductor: Matt Elmore

Primera edició: juny de 2024

© Jose Trull, 2024  
© Iniciativa Digital Politècnica, 2024  
Oficina de Publicacions Acadèmiques Digitals de la UPC  
Edifici K2M, Planta S1, Despacho S103-S104  
Jordi Girona 1-3, 08034 Barcelona  
Tel.: 934 015 885  
[www.upc.edu/idp](http://www.upc.edu/idp)  
E-mail: [info.idp@upc.edu](mailto:info.idp@upc.edu)

Producció: Service Point  
Pau Casals, 161-163  
08820 El Prat de Llobregat (Barcelona)

ISBN:978-84-10008-63-2  
ISBN digital: 978-84-10008-64-9  
DL: B 13490-2024  
DOI: [10.5821/ebook-9788410008649](https://doi.org/10.5821/ebook-9788410008649)

Qualsevol forma de reproducció, distribució, comunicació pública o transformació d'aquesta obra només es pot fer amb l'autorització dels seus titulars, excepte l'excepció prevista a la llei.

# Índex

<b>Índex</b> .....	5
<b>Pròleg</b> .....	7
<b>1. Propietats fonamentals de la llum</b> .....	9
Introducció .....	9
1.1 Descripció clàssica de les ones de llum .....	10
1.2 Solucions bàsiques de l'equació d'ona escalar .....	13
1.3 Representació vectorial de les ones de llum. Polarització.....	17
1.4 Conservació de l'energia. Intensitat .....	24
1.5 Relacions entre el moment i la pressió de radiació.....	29
1.6 Problemes resolts .....	31
1.7 Problemes plantejats .....	45
<b>2. Models bàsics de feixos òptics</b> .....	49
Introducció .....	49
2.1 Equació de Helmholtz i els feixos òptics .....	50
2.2 Equació d'ona paraxial per a feixos òptics.....	51
2.3 Solucions bàsiques de l'equació d'ona paraxial .....	53
2.4 Propietats bàsiques dels feixos gaussians .....	57
2.5 L'efecte d'una lent sobre un feix gaussià.....	65
2.6 Solucions generals de l'equació d'ona paraxial.....	70
2.7 Problemes resolts .....	73
2.8 Problemes plantejats .....	85
<b>3. Emissió de llum i interacció entre llum i matèria</b> .....	87
Introducció .....	87
3.1 Emissió de llum des d'un dipol.....	90
3.2 Propietats de la radiació dels dipols harmònics.....	96
3.3 Interacció entre un àtom individual i un camp de llum incident.....	105
3.4 Equacions de Maxwell en medis macroscòpics.....	113
3.5 Relacions d'energia en medis materials .....	129
3.6 Problemes resolts .....	129
3.7 Problemes plantejats .....	144



<b>4. Òptica de cristalls</b> .....	147
Introducció .....	147
4.1 Modes normals de propagació per medis birefringents .....	148
Solucions bàsiques.....	150
4.2 Estat de polarització dels modes normals .....	154
4.3 Propagació dels raigs per cristalls uniaxials.....	157
4.4 Aplicacions de la propagació d'ones en cristalls uniaxials .....	162
4.5 Problemes resolts .....	167
4.6 Problemes plantejats .....	183
<b>5. Propagació de polsos de llum</b> .....	187
Introducció .....	187
5.1 Descripció matemàtica dels polsos de llum .....	188
5.2 Durada i amplada de banda del pols.....	191
5.3 Freqüència instantània i xirp .....	194
5.4 Propagació de polsos òptics en medis dispersius .....	195
5.5 Problemes resolts .....	203
5.6 Problemes plantejats .....	216
<b>6. Fenòmens bàsics de difracció</b> .....	219
Introducció .....	219
6.1 Representació de l'espectre angular dels feixos òptics.....	221
6.2 El concepte de freqüència espacial.....	226
6.3 La connexió entre la representació de l'espectre angular i la teoria escalar de la difracció de Rayleigh-Sommerfeld.....	227
6.4 Teoria de la difracció en l'aproximació de Fresnel i Fraunhofer .....	229
6.5 Transformades de Fourier per lents: introducció al processament d'imatges .....	234
6.6 Límit de resolució en sistemes òptics.....	239
6.7 Difracció a partir d'una matriu d'elements periòdics .....	240
6.8 Problemes resolts .....	243
6.9 Problemes plantejats .....	254
<b>Apèndix</b> .....	157
A. El làser .....	257
B. Radiació clàssica de dipols elementals .....	261
C. Model de Lorentz d'oscil·lació de l'electró .....	266
D. Propietats bàsiques de les transformades de Fourier .....	268
E. Patró de difracció d'una obertura circular .....	270
F. Transformades de Fourier mitjançant lents .....	272

# Pròleg

*Què és la llum. Ens veuríem obligats a confessar que no existeix res de definit per si mateix que pugui dur aquest nom. Si aquest nom no es pot donar a l'agent extern, que hem d'anomenar radiació, i si no acceptem que la veritable llum és l'operació realitzada en fotometria per a fins experimentals i tècnics... Llavors no existeix res que flueixi, entre psíquic i fantasmagòric, que puguem anomenar llum.*

*A la paraula llum només li resta un significat, a saber, l'absència de foscor, el mateix significat que li atribuïen els filòsofs fa dos mil anys.*

Ronchi. "La naturalesa de la llum"

La **fotònica** és una ciència que tracta les aplicacions de la llum en la ciència i la tecnologia. Partint d'una arrel comuna, podem incloure una àmplia varietat de branques d'estudi diferents, com ara les comunicacions òptiques, el processament de materials, la detecció òptica, la metrologia, La formació d'imatges, la microscopia, la biofotònica, l'òptica no lineal, la nanofotònica, la plasmònica, l'electrònica quàntica, la teoria del làser i moltes altres. Diverses aplicacions de la fotònica es poden implementar en diversos camps generals, des de l'enginyeria fins a les telecomunicacions, la medicina, la informàtica, l'aviació, la construcció i tants d'altres.

Les bases del nostre coneixement de l'òptica es remunten a molts segles enrere. La principal raó de la relativament llarga història d'aquest camp és probablement que gairebé tota la nostra percepció sensorial del món que ens envolta arriba directament a través del mecanisme de la visió. La història de l'òptica és testimoni dels immensos esforços de molts científics eminents: Alhazen, Newton, Fermat, Fresnel, Young, Rayleigh, Kirchhoff, Huygens i molts altres; tots ells "van aportar una mica de llum" (i també van projectar algunes ombres) sobre la naturalesa de la llum. Les seves contribucions van consolidar els camps de l'òptica geomètrica, la instrumentació òptica i l'òptica ondulatòria durant els segles XVIII i XIX.

Inicialment, l'electricitat, el magnetisme i l'òptica es concebien com a disciplines científiques independents durant un llarg període de temps, fins que les obres de Maxwell i Hertz, entre d'altres, van establir les bases per a l'estudi de l'emissió de



radiació electromagnètica per part de càrregues oscil·lants, unificant així els camps de l'electromagnètica i l'òptica en reconèixer que la llum forma part de l'espectre d'ones electromagnètiques. Intentos posteriors de descriure el procés de radiació de cossos negres mitjançant les lleis estàndard de la física van romandre sense èxit fins que Planck va formular la seva hipòtesi de l'emissió i absorció de quants de llum mentre que, de manera paral·lela, Einstein va introduir els processos bàsics d'interacció entre la llum i la matèria, donant-se així el tret de sortida a l'òptica quàntica.

Un pas important en el desenvolupament del camp de la fotònica es va produir amb la descoberta del làser el 1960. Això va provocar un augment del nombre de possibles usos d'aquesta font de llum gràcies a la seva direccionalitat, coherència, amplada espectral i intensitat. Des d'aleshores, el nombre d'aplicacions proposades ha crescut incessantment i, per tant, ha donat lloc a nous temes i idees que eren impensables pocs anys enrere.

Aquest llibre va sorgir amb la idea de fer de suport per als estudiants que cursen el Grau d'Enginyeria Física a la UPC. La sola idea de cobrir en un sol semestre totes les diferents àrees que conformen el camp actual de la fotònica, ni que fos de manera superficial, seria una tasca inabastable. I més si tenim en compte que la recerca actual es segueix expandint contínuament per gairebé cada una de les branques de l'ampli camp que és la fotònica. Això demana que l'estudiant tingui una base sòlida en òptica i electromagnetisme. I tot i que aquest llibre no cobreix les tècniques fonamentals de les aplicacions de la fotònica, sí que constitueix un punt de partida sòlid per familiaritzar-se amb els conceptes i models bàsics que s'utilitzen àmpliament en el camp.

Aquest llibre assumeix que l'estudiant té un coneixement bàsic de la teoria electromagnètica i cobreix diferents temes relacionats amb les propietats de la interacció coherent de la llum amb la matèria en el marc de l'electrodinàmica clàssica. Hi ha alguns temes interessants que han estat omesos del programa, però que es podrien tractar en una segona part d'aquesta assignatura; incloent l'extensió d'aquests conceptes als fenòmens incoherents, els efectes d'interferència i els postulats bàsics de l'òptica quàntica, entre d'altres. Al final de cada capítol s'inclouen varis problemes resolts per tal d'ajudar els estudiants a assimilar els conceptes teòrics. I per a aquells estudiants que desitgin aprofundir en les fascinants idees d'aquest camp, la bibliografia del final inclou tant la literatura bàsica com la més especialitzada.

Finalment, voldria agrair a les persones que em van ajudar i van estar al meu costat durant la realització d'aquest projecte. Als meus col·legues i amics, Ramón Vilaseca, Crina Cojocarú i Ramón Herrero, els estic agraït pels seus consells, comentaris útils i l'encoratjament continu per transformar una idea original en realitat. Als meus alumnes, per les seves opinions i comentaris útils sobre el contingut de l'assignatura, que van resultar ser indispensables. A Miguel Ángel Trull, que em va ajudar a dissenyar i crear la majoria de les figures, li estic eternament agraït. Finalment, a la meua família; sense el seu suport incondicional i una paciència infinita tot això no hauria estat possible.

A Terrassa, novembre del 2020.

# Propietats fonamentals de la llum

## Introducció

La **fotònica** es relaciona essencialment amb la teoria de la interacció entre la llum i la matèria. L'estudi d'aquesta interacció implica descriure diferents graus d'aproximació, i qualsevol descripció precisa depèn del problema particular sota estudi. Les diverses aproximacions es poden classificar segons la manera en què cada model tracta la llum i la matèria.

Llum	Matèria	Model
Equacions clàssiques de Maxwell	Equacions clàssiques de la matèria	Electrodinàmica clàssica
Equacions clàssiques de Maxwell	Matriu de densitat quàntica	Model semi-clàssic
Quantització del camp electromagnètic quàntic	Matriu de densitat quàntica	Electrodinàmica quàntica

En aquesta primera lliçó, revisarem breument les principals propietats de la llum des d'una perspectiva clàssica. Dins d'aquest marc, la llum es considera una ona electromagnètica (EM) generada per càrregues oscil·lants que es poden descriure mitjançant les equacions de Maxwell. Tot i que algunes propietats són generalment comunes a les ones EM a tot l'espectre EM, també existeixen algunes propietats específiques que es tornen més rellevants en regions particulars. Alguns exemples:

- Les característiques d'emissió i absorció de la radiació difereixen dràsticament. Per a longituds d'ona molt llargues a la regió de les ones de ràdio, antenes individuals poden irradiar ones EM que es semblen molt a les emissions d'un dipol individual. A mesura que la longitud d'ona esdevé més curta i ens desplaçem cap a les regions d'infraroig, visible i ultraviolat, les emissions es



converteixen en un problema de molts cossos on qualsevol radiació emesa és el resultat de la superposició de milions d'emissors, el que altera significativament les propietats de la radiació òptica resultant.

- Els aspectes quàntics de la radiació es tornen significatius en aquestes gammes de freqüències altes, i cal tenir-los en compte per descriure adequadament els processos d'emissió i absorció de la llum.
- A freqüències encara més altes a la regió de raigs X i més enllà, emergeixen nous mecanismes rellevants a mesura que el valor de la longitud d'ona es redueix a una mida atòmica comparable. Aquests règims qüestionen la idoneïtat d'utilitzar tant el model del camp mitjà de l'electrodinàmica clàssica (capítol 3) com l'aproximació elèctrica dipolar.
- Les ones es generen de maneres radicalment diferents. Es pot fer una distinció ampla entre les ones que es generen artificialment mitjançant dispositius electrònics (com ara ràdio, televisió i microones) i les ones generades de manera natural (com ara les emeses per la matèria).

Aquesta assignatura aborda l'estudi de l'espectre EM, específicament la gamma que compren les regions d'infraroig proper (IR), visible (VIS) i ultraviolat (UV), totes elles comparteixen algunes propietats comunes. Aquestes similituds es corresponen amb les oscil·lacions del material atòmic, les propietats de coherència i la manera com la matèria absorbeix aquesta forma de radiació.

Els valors de longitud d'ona en aquesta regió de l'espectre es resumeixen a la Figura

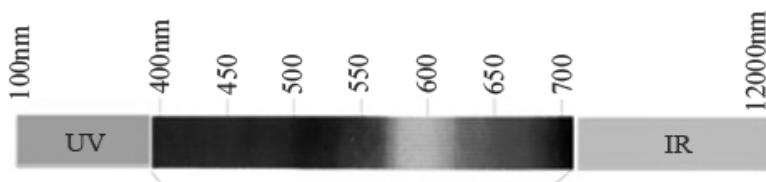


Figura 1.1 L'espectre electromagnètic a la regió de l'UV, la llum visible i l'IR

## 1.1 Descripció clàssica de les ones de llum

Les càrregues oscil·lants irradien camps electromagnètics. Les equacions microscòpiques de Maxwell proporcionen el model matemàtic que descriu els camps elèctrics i magnètics que irradia un conjunt de càrregues elementals ( $\rho$ ), les corrents ( $\mathbf{j}$ ), la seva propagació i la seva interacció amb la matèria. Aquestes equacions són:



$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad [1.1A] \qquad \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad [1.1C]$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad [1.1B] \qquad \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad [1.1D]$$

on  $\epsilon_0$  és la permitivitat dielèctrica i  $\mu_0$  és la permeabilitat magnètica del buit.

### ◆ Nota

En aquesta assignatura farem servir el sistema d'unitats MKS racionalitzat. Les unitats dels camps i les quantitats relacionades són les següents:

Camp elèctric: $[E] = \text{V/m}$	Camp magnètic: $[B] = \text{T}$
Densitat de polarització: $[P] = \text{C/m}^2$	Intensitat magnètica: $[H] = \text{A/m}$
Vector de desplaçament: $[D] = \text{C/m}^2$	Densitat de moment magnètic: $[M] = \text{A/m}$
Permitivitat dielèctrica: $[\epsilon_0] = \text{C}^2/\text{Nm}^2$	Permeabilitat magnètica: $[\mu_0] = \text{Tm/A}$
$\epsilon_0 = 1/(4\pi \cdot 9 \cdot 10^9) \text{ C}^2/\text{Nm}^2$	$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Tm/A}$

Per a una discussió detallada dels sistemes d'unitats alternatius per a la fotònica (principalment les unitats gaussianes), podeu consultar el llibre de Jackson, J.D. (1962). “*Classical Electrodynamics*”. John Wiley & Sons.

A partir de les equacions [1.1A] i [1.1D], podem obtenir fàcilment l'equació de continuïtat, que expressa la conservació de la càrrega:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad [1.2]$$

Aquestes equacions es completen amb l'equació de Newton-Lorentz per descriure la dinàmica de les partícules amb massa  $m_i$  i càrrega  $q_i$  que es troben sota la influència de les forces electromagnètiques exercides pels camps

$$m_i \frac{d^2 \vec{r}_i(t)}{dt^2} = q_i [\vec{E}(\vec{r}_i(t), t) + \vec{v}_i(t) \wedge \vec{B}(\vec{r}_i(t), t)] \quad [1.3]$$

(!) Aquest capítol abordarà les solucions bàsiques per a les ones electromagnètiques en el buit

A mesura que els camps irradien des de la regió de la font, poden propagar-se en el buit (on  $\rho$  i  $\vec{j}$  són iguals a zero) mentre transfereixen energia i moment.

La propagació del camp es regeix per les equacions de l'ona. Aquestes són derivades de l'equació [1.1] prenent l'operador rotacional de les equacions [1.1C] i [1.1D].



$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) = \vec{\nabla} \wedge \left( -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad [1.4A]$$

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) = \vec{\nabla} \wedge \left( \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \quad [1.4B]$$

Assumint la condició de propagació en el buit, la divergència dels camps elèctric i magnètic és zero. I podem escriure les equacions d'ona per als camps elèctric i magnètic en el buit de la manera següent:

$$\boxed{\begin{aligned} \nabla^2 \vec{E} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} &= 0 \\ \nabla^2 \vec{B} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} &= 0 \end{aligned}} \quad [1.4C]$$

A partir d'aquestes equacions, podem inferir que els camps elèctric i magnètic es propaguen fora de les regions de la font en el buit a una velocitat donada per

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

Com que aquestes són equacions vectorials, qualsevol de les components del camp (i qualsevol de les seves combinacions lineals) satisfarà l'equació d'ona escalar

$$\nabla^2 U(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = 0 \quad [1.5]$$

L'òptica ha de fer front a molts problemes que conserven les condicions de polarització o utilitzen radiació no polaritzada. En aquestes condicions, el caràcter vectorial de la radiació no és rellevant per a l'estudi de la propagació i, en canvi, s'utilitza una aproximació escalar de l'equació d'ona.

La funció escalar  $U$  pot representar qualsevol de les components dels camps elèctric i magnètic. En moltes situacions, és costum definir una funció escalar que estigui directament relacionada amb la intensitat òptica (una quantitat mesurable) a través de la relació  $I = |U|^2$ .

Per exemple, la relació entre la funció d'ona escalar i el mòdul del camp elèctric d'una ona plana hauria de ser  $|E|^2 = 2|U|^2/\varepsilon_0 c$  (com veurem més endavant en aquest capítol).



## 1.2 Solucions bàsiques de l'equació d'ona escalar

### 1.2.1 Solucions 1D: ones planes

Tenim en compte les ones que es propaguen al llarg de l'eix  $z$  mentre busquem solucions de la forma  $U(z,t)$ . En aquest cas,  $\partial U/\partial x = \partial U/\partial y = 0$ , i l'equació d'ona se simplifica així

$$\frac{\partial^2 U(z,t)}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U(z,t)}{\partial t^2} = 0 \quad [1.6A]$$

Una solució general a aquesta equació (veure la secció Problemes resolts) es pot escriure com:

$$U(z,t) = f_+(z-ct) + f_-(z+ct) \quad [1.6B]$$

on  $f_+$  i  $f_-$  corresponen a funcions arbitràries que es propaguen, respectivament, cap a la dreta o cap a l'esquerra, amb velocitat  $c$ .

La solució [1.6B] correspon al que es coneix com una **ona progressiva**. Hi ha d'altres solucions possibles de l'equació d'ona, com poden ser les solucions d'ones estacionàries, expressades com a  $U(z,t) = p(z)q(t)$ , que són separables.

En aquest punt, podem ser més específics quant a la funció  $f$  quan considerem com la llum irradia des dels àtoms. Com veurem al capítol 3, el model clàssic descriu l'emissió de llum com a dipòls oscil·lants que radien a freqüències de l'ordre de  $10^{15}$  Hz. Aquesta radiació es dissipa amb constants d'amortiment de l'ordre de  $10^{-7}$  segons (taxa d'amortiment de  $10^7$  Hz). Així, una típic feix de llum emès consistirà en una ona amortida amb moltes oscil·lacions sota la seva amplitud que decau.

En aquestes condicions, podem descriure l'emissió de llum utilitzant funcions harmòniques.

La solució de l'**ona plana** es pot escriure de la manera següent

$$U(z,t) = U_0 \cos(k(z-ct) + \phi) = U_0 \cos(kz - kct + \phi) \quad [1.7]$$

on  $U_0$  és una amplitud constant,  $k$  és el que anomenem **vector d'ona**, i  $\phi$  és la fase inicial que permet establir les condicions inicials.

D'aquesta expressió se'n deriven les següents propietats:

#### Periodicitat espacial

El període espacial s'anomena **longitud d'ona** i està relacionat amb el vector d'ona  $k$  de [1.7] per

$$U(z + \lambda, t) = U(z, t) \rightarrow \boxed{k = \frac{2\pi}{\lambda}}$$

**Periodicitat temporal**

La condició de periodicitat en el domini temporal dóna el **període**  $T$ :

$$U(z, t + T) = U(z, t) \rightarrow T = \frac{2\pi}{kc}$$

Com que el terme  $kc$  té unitats de freqüència, definim la **freqüència temporal**  $\omega$  mitjançant la relació

$$\omega = kc$$

Aquesta equació s'anomena **relació de dispersió** i juga un paper molt significatiu en la fotònica (principalment quan s'estudia com la llum es modifica per la presència de matèria).

La solució [1.7] representa una ona que es propaga al llarg de l'eix  $z$  amb una amplitud constant sobre plans perpendiculars a la direcció de propagació. Tot i que no representa una aproximació realista d'un feix de llum en la majoria de les situacions, jugarà un paper destacat en la teoria per estendre de manera convenient altres solucions.

Encara que la magnitud físicament rellevant sigui sempre la representació del camp real, en moltes situacions és molt més convenient treballar dins de la **representació complexa de l'ona plana**, que s'obté directament de [1.7]:

$$U(z, t) = U_o \cos(kz - \omega t + \phi) = \frac{U_o}{2} \left[ e^{i(kz - \omega t + \phi)} + e^{-i(kz - \omega t + \phi)} \right]$$

Aquesta expressió es pot reescriure com

$$\begin{aligned} U(z, t) &= \frac{U_o}{2} \left[ e^{i\phi} e^{i(kz - \omega t)} + e^{-i\phi} e^{-i(kz - \omega t)} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[ U_o^{(+)} e^{i(kz - \omega t)} + U_o^{(-)} e^{-i(kz - \omega t)} \right] = \frac{1}{2} \left[ U^{(+)} + U^{(-)} \right] \end{aligned}$$

definint així les variables següents.

**Amplitud complexa:**  $U_o^{(+)} = U_o e^{i\phi}$  i  $U_o^{(-)} = U_o e^{-i\phi}$

**Fase:**  $kz - \omega t$

**Senyal analític complex:**  $U^{(+)} = U_o^{(+)} e^{i(kz - \omega t)}$  i  $U^{(-)} = U_o^{(-)} e^{-i(kz - \omega t)}$

Les variables  $U^{(+)}$  and  $U^{(-)}$  no són independents, ja que la realitat dels camps imposa la condició  $U^{(+)} = [U^{(-)}]^*$  (el símbol \* representa la conjugació complexa).

El senyal analític complex és l'expressió bàsica de la nostra solució d'ona plana, però hem de recordar que la solució física corresponent als camps reals es pot obtenir a partir d'aquesta mitjançant la relació



$$U(z,t) = \text{Re}[U^{(+)}] = \frac{1}{2}[U^{(+)} + U^{(-)}] \quad [1.8]$$

## 1.2.2 Solucions 3D

### Ones planes

A l'hora de treballar amb ones individuals, sempre podem definir un sistema de coordenades en què l'eix  $z$  correspongui a la direcció de propagació. No obstant això, moltes situacions impliquen la interacció de diverses ones que es propaguen en direccions diferents. El concepte d'ona plana es pot estendre de manera senzilla per incloure la propagació en direccions arbitràries a través de l'espai, com s'especifica a través del vector unitari  $\hat{u}$ , definint una representació vectorial del vector d'ona:

$$\vec{k} = k \cdot \hat{u} = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \hat{u} = (k_x \hat{i} + k_y \hat{j} + k_z \hat{k})$$

on  $\hat{u}$  es pot definir a partir dels cosinus directors o bé mitjançant coordenades esfèriques:

$$\hat{u} = (\cos \alpha \hat{i} + \cos \beta \hat{j} + \cos \gamma \hat{k}) = (\cos \phi \sin \theta \hat{i} + \sin \phi \sin \theta \hat{j} + \cos \theta \hat{k})$$

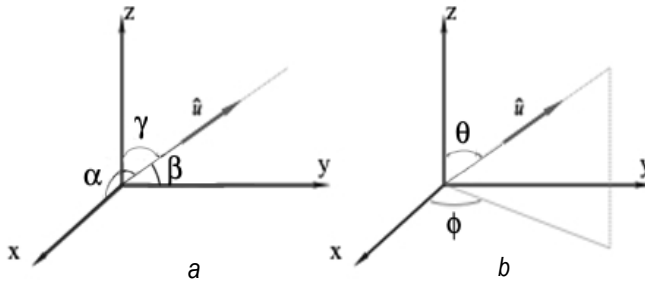


Figura 1.2 Representació d'un vector unitari a partir de: a) cosinus de la direcció. b) coordenades esfèriques.

Les components del vector d'ona es poden expressar com:

$$k_x = \frac{2\pi}{\lambda} \cos \alpha = \frac{2\pi}{\lambda_x} = 2\pi f_x$$

$$k_y = \frac{2\pi}{\lambda} \cos \beta = \frac{2\pi}{\lambda_y} = 2\pi f_y$$

$$k_z = \frac{2\pi}{\lambda} \cos \gamma = \frac{2\pi}{\lambda_z} = 2\pi f_z$$

on  $f_x$ ,  $f_y$  i  $f_z$  són les freqüències espacials. Aquestes freqüències es tractaran amb més detall amb els problemes de difracció del capítol 6.



## Ones esfèriques

La solució corresponent a ones esfèriques s'obté escrivint el laplaciana en coordenades esfèriques i assumint una solució amb simetria rotacional (amb  $\partial/\partial\phi = \partial/\partial\theta = 0$ ) (veure la secció Problemes resolts per més detalls).

$$\frac{\partial^2(rU)}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2(rU)}{\partial t^2} = 0 \quad [1.9]$$

Aquesta equació té solucions que són idèntiques a les de l'equació [1.6B]:

$$rU(r,t) = f_+(r-ct) + f_-(r+ct) \rightarrow U(r,t) = \frac{f_+(r-ct)}{r} + \frac{f_-(r+ct)}{r}$$

La solució harmònica esfèrica en la representació complexa s'obté de la mateixa manera descrita per a les ones planes:

$$U(r,t) = \frac{U_0}{r} \cos(kr - \omega t + \phi) = \frac{U_0}{2r} \left[ e^{i(kr - \omega t + \phi)} + e^{-i(kr - \omega t + \phi)} \right]$$

Aquesta expressió es pot reescriure així

$$U(r,t) = \frac{1}{2} \left[ \frac{U_0 e^{i\phi}}{r} e^{i(kr - \omega t)} + \frac{U_0 e^{-i\phi}}{r} e^{-i(kr - \omega t)} \right] = \frac{1}{2} \left[ \frac{U_0^{(+)}}{r} e^{i(kr - \omega t)} + \frac{U_0^{(-)}}{r} e^{-i(kr - \omega t)} \right]$$

$$U(r,t) = \text{Re}[U^{(+)}(r)e^{i(kr - \omega t)}]$$

Tal i com veurem, ni les ones planes ni les ones esfèriques constitueixen solucions adequades en la majoria de les situacions, ja que les ones planes s'estenen infinitament en l'espai i el temps, i les ones esfèriques no descriuen adequadament la llum emesa pels àtoms. Tot i això, les ones planes constitueixen una base adequada per descriure feixos òptics més complexos, i les ones esfèriques són útils per descriure el límit asimptòtic a grans distàncies de les fonts.

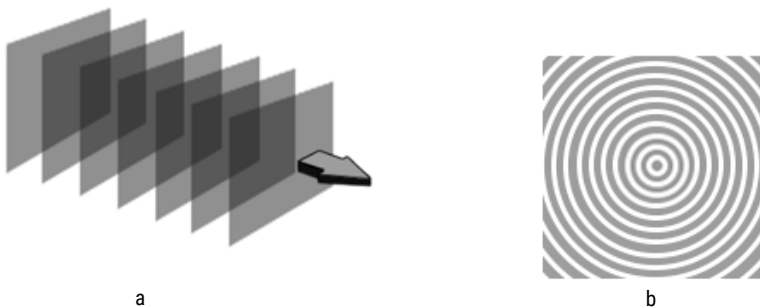


Figura 1.3 Representació esquemàtica: a) d'una ona plana escalar b) d'una ona esfèrica



### 1.3 Representació vectorial de les ones de llum. Polarització

A la secció anterior, vam definir les solucions escalars bàsiques de l'equació d'ona. No obstant això, aquesta aproximació no és adequada en moltes ocasions, i cal considerar el caràcter vectorial complet de les solucions d'ona per als camps elèctric i magnètic. Hem de recordar que aquests camps vectorials no són independents, ja que estan acoblats a través de les equacions de Maxwell.

Per estudiar les **solucions vectorials bàsiques d'ones planes de llum**, tenim en compte una solució d'ona plana per a un camp elèctric que està orientat en una direcció especificada pel vector unitari  $\hat{e}$ :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \text{Re}[\vec{E}^{(+)}(\vec{r}, t)] \quad \text{amb} \quad \vec{E}^{(+)}(\vec{r}, t) = \hat{e}E^{(+)}(\vec{r}, t)$$

Això es pot escriure a partir de les seves components cartesianes com

$$\vec{E}^{(+)}(\vec{r}, t) = (E_{0x}^{(+)}\hat{i} + E_{0y}^{(+)}\hat{j} + E_{0z}^{(+)}\hat{k})e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} \quad [1.10A]$$

Expressions equivalents es compleixen pel camp magnètic, que està orientat en una direcció especificada pel vector unitari  $\hat{b}$ :

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \text{Re}[\vec{B}^{(+)}(\vec{r}, t)] \quad \text{amb} \quad \vec{B}^{(+)}(\vec{r}, t) = \hat{b}B^{(+)}(\vec{r}, t)$$

$$\vec{B}^{(+)}(\vec{r}, t) = (B_{0x}^{(+)}\hat{i} + B_{0y}^{(+)}\hat{j} + B_{0z}^{(+)}\hat{k})e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} \quad [1.10B]$$

Sustituïnt les equacions de Maxwell [1.1A] (amb  $\rho = 0$ ) i [1.1B] dóna

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E}^{(+)} = 0 & \quad \rightarrow \quad i\vec{k} \cdot \vec{E}^{(+)} = 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B}^{(+)} = 0 & \quad \rightarrow \quad i\vec{k} \cdot \vec{B}^{(+)} = 0 \end{aligned}$$

Aquestes equacions defineixen una propietat geomètrica de les ones planes vectorials, indicant que tant el camp elèctric com el camp magnètic són perpendiculars a la direcció de propagació i, per tant, reflecteixen el caràcter transversal d'aquestes solucions.

Sustituïnt els camps donats per [1.10] a l'equació de Maxwell [1.1C] obtenim una relació entre el camp elèctric i el camp magnètic:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \wedge \vec{E}^{(+)} = -\frac{\partial \vec{B}^{(+)}}{\partial t} & \quad \rightarrow \quad i\vec{k} \wedge \vec{E}^{(+)} = i\omega \vec{B}^{(+)} \\ kE_0^{(+)}(\hat{u} \wedge \hat{e}) = \omega B_0^{(+)}\hat{b} \end{aligned}$$



### ◆ Nota

L'evolució dels camps electromagnètics en el domini espai-temporal està governada per les equacions de Maxwell, que són equacions diferencials de primer ordre. El camp elèctric en un punt determinat està relacionat amb el valor dels camps en punts pròxims. Una transformada de Fourier dels camps en els dominis espacial i temporal ens permet expressar els camps a partir de les seves freqüències espacials i temporals. A l'espai recíproc, les equacions de Maxwell es converteixen en relacions locals que mostren que cada component de Fourier del camp evoluciona independentment en medis lineals.

Les relacions entre els camps a l'espai i l'espai recíproc es donen per:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \vec{E}(\vec{k}, t) e^{i\vec{k}\vec{r}} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{E}(\vec{k}, t) = \int d^3r \vec{E}(\vec{r}, t) e^{i\vec{k}\vec{r}}$$

D'aquesta equació, s'obtenen dues conclusions de manera ràpida:

$$\begin{aligned} 1) \quad B_0^{(+)} &= \frac{k}{\omega} E_0^{(+)} = \frac{E_0^{(+)}}{c} \\ 2) \quad \hat{u} \wedge \hat{e} &= \hat{b} \quad \rightarrow \quad \hat{e} \wedge \hat{b} = \hat{u} \end{aligned} \quad [1.11]$$

Relació 1) proporciona la relació entre la magnitud del camp elèctric i del camp magnètic en una ona plana; mentre que la relació 2) fixa l'orientació relativa del camp elèctric, el camp magnètic i els vectors de propagació de l'ona. A més del caràcter transversal de l'ona electromagnètica plana, podem veure que el camp elèctric i el camp magnètic són perpendiculars entre si.

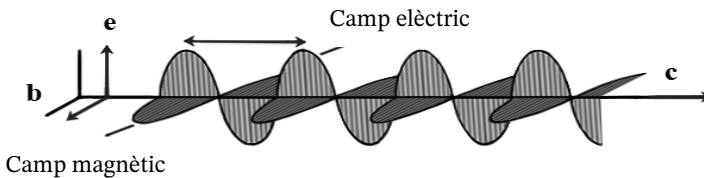


Figura 1.4 Representació d'una ona electromagnètica

No obstant, les solucions obtingudes encara permeten un grau d'independència addicional, ja que no hem fixat la direcció de l'oscil·lació del camp elèctric dins del pla que és perpendicular a la direcció de propagació de l'ona. Anomenarem aquest pla que conté els camps elèctric i magnètic el pla d'oscil·lació. L'evolució de l'oscil·lació del camp elèctric dins d'aquest pla dóna lloc a una nova propietat de la solució de l'ona: **l'estat de polarització**.



Per definir l'estat de polarització d'una ona, hem de considerar les possibles oscil·lacions del vector camp elèctric dins del pla d'oscil·lació. Qualsevol estat d'oscil·lació en un pla es pot obtenir com a superposició de dues oscil·lacions harmòniques perpendiculars (en aquest cas, amb freqüències idèntiques). Sense perdre generalitat, definim un sistema de coordenades en què la direcció de propagació té lloc al llarg de l'eix  $z$  i el pla d'oscil·lació està definit pel pla  $xy$ .

L'expressió [1.10 A] es particularitza en aquest cas com

$$\vec{E}^{(+)}(z,t) = [E_{0x} e^{i\phi_x} \hat{i} + E_{0y} e^{i\phi_y} \hat{j}] e^{i(kz - \omega t)} \quad [1.12A]$$

Una equació similar també es pot escriure per al camp magnètic. No obstant això, ja que ambdues camps estan completament vinculats a les expressions derivades prèviament, només necessitem treballar amb el camp elèctric i obtenir el camp magnètic resultant al final.

L'equació [1.12 A] es pot reescriure en la forma

$$\vec{E}^{(+)}(z,t) = E_0 e^{i\phi_x} \left[ \frac{E_{0x}}{E_0} \hat{i} + \frac{E_{0y}}{E_0} e^{i\delta} \hat{j} \right] e^{i(kz - \omega t)} \quad [1.12B]$$

on s'ha introduït el mòdul del camp elèctric  $E_0 = \sqrt{E_{0x}^2 + E_{0y}^2}$  i la fase relativa  $\delta = \phi_y - \phi_x$ .

Utilitzant la variable  $\theta$  per definir l'angle entre la direcció de l'oscil·lació del camp elèctric i l'eix  $x$ , escrivim finalment el camp elèctric com

$$\vec{E}^{(+)}(z,t) = E_0^{(+)} [\cos\theta \hat{i} + \sin\theta e^{i\delta} \hat{j}] e^{i(kz - \omega t)} \quad [1.12C]$$

en què  $E_0^{(+)}$  incorpora el terme de fase arbitrària  $e^{i\phi_x}$ . Qualsevol **estat de polarització** de l'ona electromagnètica plana es pot descriure mitjançant l'expressió [1.12C]. L'estat de polarització sol estar definit en termes d'un vector conegut com a **vector Jones**:

$$[J] = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ e^{i\delta} \sin\theta \end{bmatrix}$$

Per classificar adequadament els diferents estats de polarització de la llum, definim el **pla de vibració** com el pla que conté els vectors  $\hat{e}$  i  $\hat{u}$  en qualsevol instant de temps.

En el cas més general, la llum emesa per fonts tèrmiques i espectrals i per díodes emissors de llum no està polaritzada en el sentit que el pla de vibració canvia aleatòriament amb el temps en períodes de l'ordre de  $10^{-7}$  s. Això és una conseqüència de la



manera com es genera la llum a partir de les aquestes fonts, és a dir, que és emesa per molts dipòls radiants independents. En aquest cas, l'estat de polarització de la llum no està definit i estem al límit on l'aproximació de la funció escalar (definida a la secció anterior) és vàlida.

Aquesta mena d'emissió contrasta amb l'ona electromagnètica emesa, per exemple, per una antena, ja que aquest tipus d'ona es pot considerar una molt bona aproximació d'una ona plana polaritzada a gran distància.

Si de qualsevol manera podem establir una diferència de fase relativa  $\delta$  constant en el temps, obtenim un patró d'oscil·lació ben definit. En aquest cas, diem que la llum emesa està **polaritzada**.

### 1.3.1 Estats de polarització de la llum

#### Llum polaritzada linealment

La llum es defineix com a polaritzada linealment quan el camp elèctric oscil·la al llarg d'una línia definida per un angle  $\theta$  (el pla de vibració es manté constant durant la propagació). Per obtenir una ona polaritzada linealment, hem de fixar la fase relativa en els valors

$$\delta = 0 \quad \text{o} \quad \delta = \pi$$

Els vectors de Jones corresponents en aquest cas són reals i es poden escriure així:

$$[L_0(\theta)] = \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad [L_\pi(\theta)] = \begin{bmatrix} \cos \theta \\ -\sin \theta \end{bmatrix}$$

compleix la relació  $[L_\pi(\theta)] = [L_0(-\theta)]$ .

L'expressió del camp elèctric real és

$$\vec{E}(z,t) = \text{Re}[\vec{E}^{(+)}(z,t)] = E_0 (\cos \theta \hat{i} \pm \sin \theta \hat{j}) \cos(kz - \omega t + \phi_x) \quad [1.13]$$

en què els signes  $+$  i  $-$  fan referència a  $\delta = 0$  i  $\delta = \pi$ .

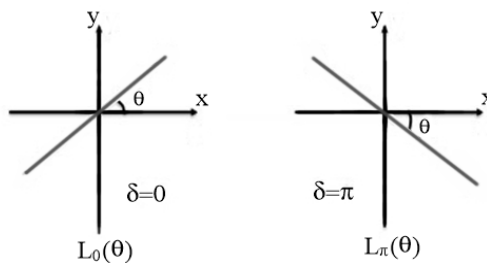


Figura 1.5 Estats de polarització lineal en el pla d'oscil·lació



## Llum polaritzada circularment

Un estat de polarització circular s'obté pel cas particular amb

$$E_{0x} = E_{0y} = E_0 ; \quad \delta = \pm\pi/2 ; \quad \theta = \pi/4 \text{ rad.}$$

Els vectors de Jones corresponents són

$$[C_R] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} \quad [C_L] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$$

i defineixen, respectivament, estats de polarització circular dret i circular esquerre. Es pot identificar immediatament el caràcter complex d'aquests vectors, que en principi no tenen cap interpretació física. No obstant això, sempre s'ha de tenir en compte que la representació complexa del camp és una eina útil per a càlculs, però sempre és necessari recuperar la magnitud físicament mesurable que correspon al camp elèctric real.

En aquestes condicions, el camp elèctric es el següent

$$\vec{E}^{(+)}(z,t) = E_0 e^{i\phi_x} (\hat{i} \mp i \hat{j}) e^{i(kz - \omega t)}$$

i

$$\vec{E}(z,t) = \text{Re}[\vec{E}^{(+)}(z,t)] = E_0 (\cos(kz - \omega t + \phi_x) \hat{i} \pm \sin(kz - \omega t + \phi_x) \hat{j}) \quad [1.14]$$

Una inspecció detinguda d'aquesta expressió mostra que, per a la polarització circular, el camp elèctric es propaga mantenint una amplitud constant  $E_0$  i el pla de vibració realitza un moviment circular al voltant de l'eix  $z$ .

Per a la polarització circular dreta, la punta del vector elèctric gira en sentit horari en funció del temps quan l'observa un observador que mira l'ona de llum a una posició fixa; mentre que la rotació en direcció contrària defineix l'estat de polarització circular esquerra. La direcció de la rotació és una funció del temps (en una posició fixa), i es mostra a la Figura 6.

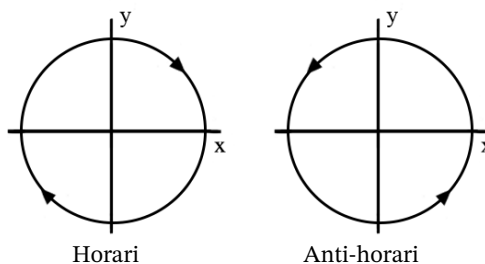


Figure 1.6 Estats de polarització circular. Rotació com a funció de temps en una posició  $z$  fixa



## Llum polaritzada de forma el·líptica

En el cas general d'una fase relativa (però constant) i un angle arbitrari, l'extrem del camp elèctric realitza un moviment el·líptic durant la propagació, a mesura que l'amplitud i les direccions d'oscil·lació canvien simultàniament.

L'expressió general per al moviment el·líptic es pot trobar amb l'equació [1.12A]. El camp real es pot escriure com segueix.

$$\vec{E} = \text{Re}[\vec{E}^{(+)}] = E_x \hat{i} + E_y \hat{j} = E_{ox} \cos(kz - \omega t + \phi_x) \hat{i} + E_{oy} \cos(kz - \omega t + \phi_y) \hat{j}$$

Components del camp:

$$E_x = E_{ox} (\cos(kz - \omega t) \cos \phi_x - \sin(kz - \omega t) \sin \phi_x)$$

$$E_y = E_{oy} (\cos(kz - \omega t) \cos \phi_y - \sin(kz - \omega t) \sin \phi_y)$$

Reordenant els termes:

$$\frac{E_x}{E_{ox}} \sin \phi_y - \frac{E_y}{E_{oy}} \sin \phi_x = \cos(kz - \omega t) \sin(\phi_y - \phi_x)$$

$$\frac{E_x}{E_{ox}} \cos \phi_y - \frac{E_y}{E_{oy}} \cos \phi_x = \sin(kz - \omega t) \sin(\phi_y - \phi_x)$$

Aquestes relacions es poden expressar com:

$$\frac{E_x^2}{E_{ox}^2} + \frac{E_y^2}{E_{oy}^2} - 2 \frac{E_x E_y}{E_{ox} E_{oy}} \cos(\delta) = \sin^2 \delta$$

Aquesta expressió representa l'equació per una el·lipse inscrita en un rectangle amb costats paral·lels a l'eix  $x$  i l'eix  $y$ , i dimensions  $2E_{ox}$  i  $2E_{oy}$ .

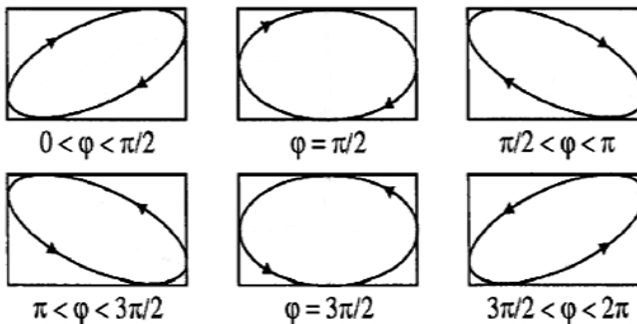


Figura 1.7 Estats de polarització el·líptica



### 1.3.2 Polaritzadors

Un polaritzador és qualsevol dispositiu utilitzat per obtenir llum polaritzada o canviar l'estat de la polarització de la llum. Podem analitzar l'efecte dels polaritzadors sobre la llum incident observant com el vector Jones corresponent es transforma mitjançant l'acció del polaritzador. L'efecte del polaritzador es descriu en termes d'una matriu característica (la matriu Jones).

#### Matriu de polaritzador lineal

Un polaritzador lineal es defineix per l'orientació de l'estat de polarització a la sortida. Aquest estat de sortida ha de ser proporcional al vector Jones unitari:

$$\hat{e}_{out} = \begin{pmatrix} \cos \theta_p \\ \sin \theta_p \end{pmatrix}$$

on  $\theta_p$  és l'angle de l'eix del polaritzador respecte a l'eix x. Per construir la matriu característica, suposem que l'acció del polaritzador sobre un estat d'entrada arbitrari caracteritzat pel vector Jones

$$\bar{e}_{in} = \begin{pmatrix} e_{in x} \\ e_{in y} \end{pmatrix}$$

és obtenir la projecció d'aquest estat inicial a l'estat de sortida:

$$\bar{e}_{out} = (\bar{e}_{in} \cdot \hat{e}_{out}) \cdot \hat{e}_{out} = (e_{in x} \cdot \cos \theta_p + e_{in y} \cdot \sin \theta_p) \begin{pmatrix} \cos \theta_p \\ \sin \theta_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_{in x} \cos^2 \theta_p + e_{in y} \cos \theta_p \sin \theta_p \\ e_{in x} \cos \theta_p \sin \theta_p + e_{in y} \sin^2 \theta_p \end{pmatrix}$$

Aquest resultat es pot expressar de la manera següent:

$$\bar{e}_{out} = \begin{pmatrix} \cos^2 \theta_p & \cos \theta_p \sin \theta_p \\ \cos \theta_p \sin \theta_p & \sin^2 \theta_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{in x} \\ e_{in y} \end{pmatrix} = L(\theta_p) \cdot \bar{e}_{in} \quad [1.15]$$

on  $L$  fa referència a la matriu característica que estàvem buscant (s'ha de tenir en compte que l'estat de sortida no necessita ser normalitzat, ja que la intensitat del feix de llum incident generalment serà diferent de la del feix de sortida).

► **Exemple 1:** Considerem l'acció del polaritzador lineal definit per  $L(\theta_p)$  sobre un feix de llum incident que està polaritzat linealment en un angle  $\theta$ .

$$\text{L'estat d'entrada és } \hat{e}_{in} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$$



El feix de sortida després del polaritzador lineal es descriurà pel vector Jones:

$$\begin{aligned}\bar{e}_{out} &= L(\theta_p) \cdot \hat{e}_{in} = \begin{pmatrix} \cos^2 \theta_p \cos \theta + \cos \theta_p \sin \theta_p \sin \theta \\ \cos \theta_p \sin \theta_p \cos \theta + \sin^2 \theta_p \sin \theta \end{pmatrix} = \\ &= (\cos \theta_p \cos \theta + \sin \theta_p \sin \theta) \cdot \begin{pmatrix} \cos \theta_p \\ \sin \theta_p \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\boxed{\bar{e}_{out} = \cos(\theta_p - \theta) \cdot \hat{e}_{out}}$$

La intensitat del feix de sortida serà proporcional a  $\bar{e}_{out} \cdot \bar{e}_{out}^*$

$I_{out} = \cos^2(\theta_p - \theta) I_{in}$ . Aquest resultat és conegut com la **Llei de Malus**.

- **Exemple 2:** Acció d'un polaritzador lineal sobre una llum polaritzada circularment.

En aquest cas, el feix d'entrada es descriu pel vector Jones:  $\bar{e}_{in} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \mp i \end{pmatrix}$

Aplicant l'equació [1.14] obtenim

$$\bar{e}_{out} = \frac{\cos \theta_p \pm i \sin \theta_p}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos \theta_p \\ \sin \theta_p \end{pmatrix} = \frac{e^{\pm i \theta_p}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos \theta_p \\ \sin \theta_p \end{pmatrix}$$

## 1.4 Conservació de l'energia. Intensitat

Moltes aplicacions en fotònica aprofiten el fet que les ones de llum poden transferir energia, moment lineal i moment angular. En aquesta secció, introduïrem les relacions bàsiques entre aquestes magnituds físiques i el camp electromagnètic.

Les relacions de conservació de l'energia s'obtenen a partir de les equacions de Maxwell [1.1C] i [1.1D]. Multiplicant (producte escalar) els dos costats de l'equació [1.1C] per el camp magnètic i de l'equació [1.1D] per el camp elèctric:

$$\begin{aligned}\vec{B} \cdot [1.1C] &\Rightarrow \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) = \vec{B} \cdot \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) \\ \vec{E} \cdot [1.1D] &\Rightarrow \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) = \vec{E} \cdot (\mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t})\end{aligned}$$

L'ús de la identitat vectorial  $\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \wedge \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{B})$  ens porta a l'expressió



$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \wedge \vec{B}) = -\vec{B} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \mu_0 \varepsilon_0 \vec{E} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \mu_0 \vec{j} \cdot \vec{E}$$

que es pot reescriure fàcilment de la manera següent:

$$\vec{\nabla} \cdot \left( \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \right) = -\frac{1}{2\mu_0} \frac{\partial B^2}{\partial t} - \frac{\varepsilon_0}{2} \frac{\partial E^2}{\partial t} - \vec{j} \cdot \vec{E}$$

[1.15A]

$$\vec{\nabla} \cdot \left( \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{B^2}{\mu_0} + \varepsilon_0 E^2 \right) \right) - \vec{j} \cdot \vec{E}$$

Per obtenir una visió física d'aquesta relació, analitzem les dimensions de cadascun dels termes:

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \right] &\rightarrow \frac{W}{m^2} \quad \text{Irradiància} \\ \left[ \frac{B^2}{\mu_0} + \varepsilon_0 E^2 \right] &\rightarrow \frac{J}{m^3} \quad \text{Densitat d'energia} \\ [\vec{j} \cdot \vec{E}] &\rightarrow \frac{W}{m^3} \quad \text{Densitat de potència} \end{aligned}$$

Definint les següents magnituds:

**Vector de Poynting:**  $\vec{S} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$

**Densitat d'energia del camp EM:**  $u = \frac{1}{2} \left( \frac{B^2}{\mu_0} + \varepsilon_0 E^2 \right)$

La relació [15A] es pot expressar de la manera següent

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{S} = -\frac{\partial u}{\partial t} - \vec{j} \cdot \vec{E}$$

Mitjançant la integració d'aquesta expressió sobre el volum de l'espai considerat i fent servir el teorema de la divergència, obtenim

$$\int \vec{\nabla} \cdot \vec{S} \, dV = -\int \frac{\partial u}{\partial t} \, dV - \int \vec{j} \cdot \vec{E} \, dV \quad \rightarrow \quad \boxed{\int \vec{S} \cdot d\vec{a} = -\frac{\partial U}{\partial t} - P} \quad [1.16A]$$

on  $d\vec{a}$  representa l'element de superfície al contorn del volum d'integració que apunta cap fora de la superfície,  $U$  és l'energia total del camp EM continguda dins del volum i  $P$  correspon a la potència total exercida sobre les càrregues pels camps dins del volum. Aquesta expressió constitueix la relació de conservació de l'energia del camp EM. En absència de càrregues, podem simplificar aquesta relació [1.16B].



$$\boxed{\int \vec{S} \cdot d\vec{a} + \frac{\partial U}{\partial t} = 0} \quad [1.16B]$$

L'energia que surt d'un determinat volum a través de la superfície que l'envolta provoca una disminució de l'energia EM total emmagatzemada dins del volum.

Mitjançant aquesta interpretació, el vector de Poynting representa l'irradiància de l'energia EM fora de la superfície. En altres paraules, és l'energia que es propaga en una direcció donada per unitat de temps i per unitat d'àrea.

#### ◆ Nota

La potència generada en un sistema de càrregues pel camp EM es pot calcular de la següent manera

$$\text{Treball elemental: } dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = [q\vec{E} + (q\vec{v} \wedge \vec{B})] \cdot d\vec{r} = q\vec{E} \cdot d\vec{r} = \int \rho\vec{E} \cdot d\vec{r}dV$$

$$\text{Potència: } \frac{dW}{dt} = \int \rho\vec{E} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dV = \int \rho\vec{E} \cdot \vec{v} dV = \int \vec{j} \cdot \vec{E} dV$$

### 1.4.1 El vector de Poynting d'ones harmòniques. Intensitat òptica

Calculem ara una expressió explícita per al vector de Poynting d'una ona plana. Per fer-ho, farem servir les expressions deduïdes a la secció 1.2 per a realitzar el producte vectorial dels camps.

!) Tractant-se d'una relació bilineal que implica el producte dels camps elèctric i magnètic, cal que tinguem cura en prendre el valor real dels camps quan es realitza el producte. Això és així perquè no podem utilitzar directament la representació complexa i prendre la part real al final degut al fet que  $\text{Re}[A \cdot B] \neq \text{Re}[A] \cdot \text{Re}[B]$ .

$$\vec{S} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{\text{Re}[\vec{E}^{(+)}] \wedge \text{Re}[\vec{B}^{(+)}]}{\mu_0}$$

Per a ones harmòniques:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \hat{e}E_0 \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \phi)$$

$$\Rightarrow \vec{S}(\vec{r}, t) = \frac{E_0 B_0}{\mu_0} \cos^2(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \phi) [\hat{e} \wedge \hat{b}]$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \hat{b}B_0 \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \phi)$$



Utilitzant [1.11]:

$$\vec{S}(\vec{r}, t) = \frac{E_0^2}{c\mu_0} \cos^2(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \phi) \hat{u} = \varepsilon_0 c E_0^2 \cos^2(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \phi) \hat{u}$$

D'aquesta expressió es poden deduir dues conseqüències importants:

- 1) Per a ones planes en medis isotròpics, el vector de Poynting  $\vec{i}$ , per tant, l'energia EM flueixen en la direcció del vector d'ona de propagació. Els fronts d'ona de fase (fase constant) són paral·lels als fronts d'ona d'energia constant.

(!) Això generalment no és cert quan la llum es propaga en medis anisotròpics, tal i com veurem al capítol 4.

- 2) El valor del vector de Poynting oscil·la amb la freqüència òptica  $\omega \approx 10^{15}$  Hz. Aquestes oscil·lacions són massa ràpides per ser resoltes per qualsevol detector electrònic, i, per tant, aquesta no és una quantitat directament mesurable. El resultat de qualsevol mesura real feta amb detectors òptics serà la senyal integrada durant un període de temps molt més llarg que el període d'una sola oscil·lació. Definim la **irradiança de la llum o intensitat òptica** (unitats  $\text{W}/\text{m}^2$ ) com la mitjana temporal del mòdul del vector de Poynting [1.17A].

$$I = \left\langle \left| \vec{S}(\vec{r}, t) \right| \right\rangle \quad [1.17A]$$

Per a la llum polaritzada linealment:

$$I = \left\langle \left| \vec{S} \right| \right\rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \varepsilon_0 c E_0^2 \cos^2(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \phi) dt$$

Utilitzant la identitat  $\cos^2 a = \frac{1}{2}[1 + \cos(2a)]$ , això dona com a resultat [1.17B].

$$I = \frac{\varepsilon_0 c E_0^2}{T} \int_0^T \frac{1}{2} [1 + \cos(2\vec{k}\vec{r} - 2\omega t + 2\phi)] dt = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c E_0^2 \quad [1.17B]$$

$$\boxed{I = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c E_0^2}$$

Per als camps amb dependència harmònica, es pot obtenir una expressió alternativa utilitzant directament la representació complexa (senyal analítica) (veure Problemes resolts):

$$I = \frac{1}{2} \text{Re} \left( \frac{E^{(+)} \wedge B^{(-)}}{\mu_0} \right) = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c |E_0^{(+)}|^2$$



► **Exemple 3:** Intensitat de la llum polaritzada circularment

Per a la polarització circular, el camp elèctric es pot escriure com (Equació [1.14]):

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = E_0 [\cos(kz - \omega t + \phi) \hat{i} + \sin(kz - \omega t + \phi) \hat{j}]$$

amb  $\hat{e} = (\cos(kz - \omega t + \phi) \hat{i} + \sin(kz - \omega t + \phi) \hat{j})$

El camp magnètic és:

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = B_0 \hat{b} = \frac{E_0}{c} (\hat{k} \wedge \hat{e}) = \frac{E_0}{c} [-\sin(kz - \omega t + \phi) \hat{i} + \cos(kz - \omega t + \phi) \hat{j}]$$

El vector de Poynting és

$$\vec{S} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \hat{k} \quad \Rightarrow \quad I = \langle |\vec{S}| \rangle = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} = \varepsilon_0 c E_0^2$$

Com es pot veure aquí, per a la llum polaritzada circularment, el vector de Poynting té una magnitud constant, ja que en aquest cas la dependència temporal s'inclou en els vectors de direcció unitària dels camps.

Per a la llum no polaritzada, la magnitud que li correspon des del punt de vista físic és la intensitat d'ona. Normalment, en aquestes situacions, la funció d'ona escalar s'identifica directament amb la intensitat de la llum a través de la relació  $I = |U|^2$ , tal i com s'ha vist prèviament. Les unitats de la funció d'ona escalar són, doncs,  $(\text{W}/\text{m}^2)^{1/2}$ .

Per a les solucions d'ona monocromàtiques, el camp elèctric s'estén en el temps des de  $-\infty$  fins a  $+\infty$ , i la intensitat és constant en el temps. A aquestes se les anomena fonts d'ona contínua (CW). Per a les fonts reals, la intensitat emesa no és constant sinó que fluctua al voltant d'un valor mitjà donat a causa del caràcter típic de la llum emesa pels àtoms (discutit en detall al capítol 3). Tot i això, els làsers reals són capaços de generar polsos de llum amb durades temporals que varien des de nanosegons fins a femtosegons. En aquest cas, el perfil d'intensitat del pols mostra una dependència temporal en escales de temps més grans que el període òptic  $T$ . Aquesta dependència temporal no és eliminada per la mitjana temporal obtinguda en el càlcul de la intensitat, ja que aquesta mitjana elimina les ràpides oscil·lacions del camp elèctric sota l'amplitud del pols. Aquestes qüestions es discutiran amb més detall al capítol 5. Quan es consideren solucions localitzades espacialment al capítol 2, veurem que la distribució de la llum d'un paquet d'ones en l'espai i el temps es pot expressar en termes d'una funció d'intensitat  $I(x, y, z, t)$ , que representa l'energia de la llum per unitat de temps i unitat d'àrea. De fet, en radiometria, la magnitud definida per aquesta definició correspon a l'irradiància, i el terme intensitat es reserva per a la distribució d'energia per unitat d'angle sòlid. No obstant això, en la teoria de la radiació òptica coherent, és costum referir-se a la intensitat, tal com l'hem introduït.



Sabent la distribució de la intensitat, podem determinar la potència òptica:

$$P(t) = \int I(\vec{r}, t) dS$$

i l'energia total del pols

$$Q = \int P(t) dt$$

## 1.5 Relacions entre el moment i la pressió de radiació

L'equació de conservació del moment lineal per a un sistema de partícules i camps es pot derivar de les equacions de Maxwell, començant amb l'equació de la força de Lorentz:

$$\vec{F} = \int (\rho \vec{E} + \vec{j} \wedge \vec{B}) dV$$

Escrivint  $\rho$  i  $\vec{j}$  a partir dels camps utilitzant les equacions [1.1A] i [1.1D], es troba la següent relació després d'uns pocs passos algebraics:

$$\frac{d\vec{G}_{mec}}{dt} + \frac{d\vec{G}_{EM}}{dt} = \int \vec{T} d\vec{a}$$

on

$$\vec{G}_{mec} = \sum_i m_i \vec{v}_i \quad \text{és el moment mecànic}$$

$$\vec{G}_{EM} = \epsilon_0 \int (\vec{E} \wedge \vec{B}) dV \quad \text{és el moment del camp EM i és el tensor d'energia d'estrès}$$

També podem definir el **moment angular** del camp electromagnètic:

$$\vec{J}_{EM} = \epsilon_0 \int \vec{r} \wedge (\vec{E} \wedge \vec{B}) dV$$

Tal i com podem demostrar, el moment angular total es pot descompondre en la suma de dues parts diferents: el moment angular orbital, relacionat amb l'evolució del vector de Poynting en el temps; i el moment angular d'espín, relacionat amb l'estat de polarització de la llum.

---

### ◆ Nota

Les radiacions poden exercir forces sobre objectes macroscòpics. Determinar aquestes forces és una qüestió complexa i va més enllà del contingut d'aquest curs. En essència, aquesta complexitat es deu al fet que l'expressió per al tensor d'energia-estrès ha de tenir en compte el camp total (incloent-hi la reflexió des de l'objecte) i no només el camp incident. Aquest és un tema molt interessant i rellevant quan es considera la interacció de la llum amb partícules microscòpiques, com en el camp de la nanofotònica. A més, forma la base de temes actuals en fotònica, com les pinces òptiques i les veles solars.

---



En la situació simplificada d'una ona plana incident en una superfície determinada, podem obtenir una expressió senzilla per a la pressió exercida per la llum sobre l'objecte. Introduïrem aquesta expressió bàsica sense més derivacions.

**Pressió de radiació;  $P_{rad}$ :**

$$P_{rad} = (1 + R) \frac{I}{c}$$

On  $R$  és la reflectivitat de la superfície,  $I$  és la intensitat de la llum incident sobre la superfície i  $c$  és la velocitat de la llum..

**Força de radiació;  $F_{rad}$ :**

La pressió de radiació que actua sobre la superfície exerceix una força,

$$F_{rad} = P_{rad} \cdot A = (1 + R) \frac{P}{c}$$

On  $P$  és la potència òptica del feix de llum.

**Transferència de moment;  $\Delta p$ :**

La transferència neta de moment és

$$\Delta p = F_{rad} \cdot \Delta t = (1 + R) \frac{Q}{c}$$

on  $Q$  correspon a l'energia de llum incident sobre la superfície.

Clàssicament, l'efecte de la pressió de radiació està relacionat amb el camp magnètic que actua sobre els electrons en moviment accelerats pel camp elèctric. Això no s'ha de confondre amb altres forces que actuen sobre les partícules, com les forces radiomètriques degudes als gradients tèrmics. Quan aquests gradients es creen per la il·luminació de la llum làser, l'efecte es coneix com a fotoforesi.

La pressió de radiació que actua sobre un mitjà amb una interfície estesa quan és il·luminada per la llum pot ser utilitzada per accelerar objectes si es poden negligir altres forces externes. Aquest efecte constitueix la base d'algunes idees per accelerar l'espai astronau darrere les veles solars (consulteu, per exemple, el projecte IKAROS de l'Agència d'Exploració Aeroespacial del Japó).

Per a les partícules més petites, les forces de pressió de radiació procedents de la llum visible contínua poden proporcionar pous potencials òptics estables, on les partícules poden ser capturades i accelerades (A. Ashkin, *Physical Review Letters*, 24, 156 (1970)). Ashkin i els seus col·laboradors van demostrar més tard (Ashkin et al., *Optics Letters*, 11, 288 (1986)) que, quan s'utilitzen feixos làser enfocats de manera ajustada, la presència d'un gradient de camp elèctric pot atrapar partícules microscòpiques a



prop de l'enfocament del feix. Això forma la base del concepte de les **pinces òptiques**, que s'utilitzen àmpliament avui dia per atrapar i manipular esferes dielèctriques, ADN, bacteris, partícules metàl·liques i altres.

Les partícules més petites que la longitud d'ona es poden descriure com dipols. Les forces sobre aquests dipols de la radiació monocromàtica tenen dues contribucions: una força dipolar que atrapa la partícula en la regió d'un gradient de camp elèctric més gran i una força de dispersió que mou la partícula en la direcció de la propagació del feix, la qual cosa es produeix a causa de la transferència de moment.

Les forces dipolars, per exemple, es poden utilitzar per atrapar àtoms en les regions d'intensitat més gran de trampes òptiques (ja sigui en configuracions 1D o 2D) si la freqüència de la llum es sintonitza lleugerament més baixa a una de les freqüències de ressonància de l'àtom. Això és a causa del canvi en els seus nivells d'energia en el gradient.

Les forces de dispersió transfereixen moment a l'àtom en la direcció de la propagació quan es desintonitza lleugerament respecte a una freqüència atòmica de ressonància. S'obté una absorció eficient gràcies a l'efecte Doppler que actua sobre la partícula en moviment. Ja que l'emissió espontània que es produeix després de l'absorció té una emissió direccional aleatòria, tot el procés condueix a una transferència neta de moment a l'àtom, disminuint així la seva velocitat. Aquest efecte constitueix la base de les aplicacions de refredament làser d'àtoms.

## 1.6 Problemes resoltos

### Problema 1.1

*Començant amb l'equació d'ona escalar, obtenir les solucions d'ona unidimensionals i esfèriques.*

#### Solució

$$\text{Equació d'ona escalar 1D: } \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) U(z, t) = 0$$

es podria reescriure de la manera següent:

$$\left( \frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \cdot \left( \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) U(z, t) = 0$$

Si introduïm les noves variables següents



$$\begin{aligned} \eta = z - ct \\ \xi = z + ct \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} z &= \frac{1}{2}(\xi + \eta) \\ t &= \frac{1}{2c}(\xi - \eta) \end{aligned}$$

l'equació de l'ona amb les noves variables  $\frac{\partial^2 U(\eta, \xi)}{\partial \eta \partial \xi} = 0$

té la solució general

$$U(\eta, \xi) = f(\eta) + g(\xi) \rightarrow U(z, t) = f(z - ct) + g(z + ct)$$

Tractant-se d'una ona esfèrica, el laplacià per a solucions esfèricament simètriques ( $\partial/\partial\phi = \partial/\partial\theta = 0$ ) es pot expressar en coordenades esfèriques

$$\nabla^2 U(r, t) = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \left( \frac{\partial U(r, t)}{\partial r} \right) \right) = \dots = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rU(r, t))$$

l'equació d'ona

$$\begin{aligned} \nabla^2 U(r, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U(r, t)}{\partial t^2} = 0 &\rightarrow \frac{\partial^2 (rU(r, t))}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 (rU(r, t))}{\partial t^2} = 0 \\ &\rightarrow \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) (rU(r, t)) = 0 \end{aligned}$$

Es pot resoldre de la mateixa manera que per a l'ona plana:

$$\begin{aligned} \left[ \begin{aligned} \eta = r - ct \\ \xi = r + ct \end{aligned} \rightarrow \frac{\partial^2 (rU(\eta, \xi))}{\partial \eta \partial \xi} = 0 \rightarrow rU(\eta, \xi) = f(\eta) + g(\xi) \right. \\ \left. U(z, t) = \frac{f(r - ct)}{r} + \frac{g(r + ct)}{r} \right. \end{aligned}$$

### Problema 1.2

Escriviu l'equació d'una ona electromagnètica amb longitud d'ona  $\lambda = 532 \text{ nm}$  que es propaga al pla  $xz$  al llarg de la direcció que forma un angle de  $\theta = 75^\circ$  respecte de l'eix  $z$ . El camp elèctric està polaritzat al llarg de l'eix  $y$ , i la seva amplitud és  $E_0 = 1000 \text{ V/cm}$ .

### Solució

L'equació de l'ona electromagnètica plana:

$$\begin{cases} \vec{E}(\vec{r}, t) = \hat{e}E_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \\ \vec{B}(\vec{r}, t) = \hat{b}B_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \end{cases}$$



Els paràmetres coneguts de l'ona ens permeten determinar els següents paràmetres desconeguts:

$$\lambda = 500\text{nm} \rightarrow k = \frac{2\pi}{\lambda} = 1.18 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$$

$$\text{Direcció de propagació: } \hat{u} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) = (\cos 15, \cos 90, \cos 75)$$

$$\omega = \frac{2\pi c}{\lambda} = 3.54 \cdot 10^{15} \text{ rad/s}$$

$$E_o = 10^5 \text{ V/m} \rightarrow B_o = E_o / c = 10^5 / 3 \cdot 10^8$$

$$\hat{e} = (0, 1, 0) \rightarrow \hat{b} = \hat{u} \wedge \hat{e} = (-\cos 75, 0, \cos 15)$$

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \hat{j} 10^5 \cos(1.18 \cdot 10^7 (x \cdot \cos 15 \hat{i} + z \cdot \cos 75 \hat{k}) - 3.54 \cdot 10^{15} t)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = 0.33 \cdot 10^{-3} (-\cos 75 \hat{i} + \cos 15 \hat{k}) \cos(1.18 \cdot 10^7 (x \cdot \cos 15 \hat{i} + z \cdot \cos 75 \hat{k}) - 3.54 \cdot 10^{15} t)$$

### Problema 1.3

Una font puntual emet llum amb una longitud d'ona  $\lambda = 600 \text{ nm}$  i una potència total de  $100 \text{ W}$ . Escriviu l'expressió de l'ona esfèrica escalar que representa el camp elèctric a una distància de  $r = 10 \text{ m}$  de la font.

### Solució

L'equació de l'ona esfèrica electromagnètica escalar:

$$\begin{cases} E(r, t) = \frac{E_o}{r} \cos(k \cdot r - \omega t) \\ B(r, t) = \frac{B_o}{r} \cos(k \cdot r - \omega t) \end{cases}$$

La potència total de l'ona esfèrica està relacionada amb l'amplitud del camp elèctric a una distància de  $r = 1 \text{ m}$ ,  $E_o$ , específicament mitjançant l'equació

$$I = \frac{1}{2} \epsilon_o c \frac{|E_o|^2}{r^2} = \frac{P}{4\pi r^2} \rightarrow E_o = \sqrt{\frac{P}{2\pi \epsilon_o c}} = 77.46 \text{ V/m}$$

$$\lambda = 600\text{nm} \rightarrow k = \frac{2\pi}{\lambda} = 1.05 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1} \rightarrow \omega = \frac{2\pi c}{\lambda} = 3.14 \cdot 10^{15} \text{ rad/s}$$

$$\begin{cases} E(r, t) = \frac{77.46}{r} \cos(1.05 \cdot 10^7 \cdot r - 3.14 \cdot 10^{15} t) \\ B(r, t) = \frac{2.58 \cdot 10^{-7}}{r} \cos(1.05 \cdot 10^7 \cdot r - 3.14 \cdot 10^{15} t) \end{cases}$$

Per  $r = 10 \text{ m}$  el camp elèctric és  $E(10, t) = 7.746 \cos(10.5 \cdot 10^7 - 3.14 \cdot 10^{15} t)$

**Problema 1.4**

Un feix de llum corresponent a una ona plana polaritzada linealment amb longitud d'ona  $\lambda$  es propaga en una direcció arbitrària especificada pel vector unitari, expressat en coordenades esfèriques com  $\hat{u} = \cos\phi\sin\theta\hat{i} + \sin\phi\sin\theta\hat{j} + \cos\theta\hat{k}$ .

La direcció del camp elèctric roman constant durant la propagació i és perpendicular al pla que conté el raig de llum i l'eix OZ. Escriviu l'expressió general per a l'ona electromagnètica resultant.

**Solució**

Ja que la direcció del camp elèctric és perpendicular al pla que conté els vectors unitaris  $\hat{u}$  i  $\hat{k}$ , la seva direcció es pot trobar a través de:

$$\hat{e} = \frac{\hat{u} \wedge \hat{k}}{|\hat{u} \wedge \hat{k}|} = \frac{\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \cos\phi\sin\theta & \sin\phi\sin\theta & \cos\theta \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\sin\theta} = \frac{(\sin\phi\sin\theta\hat{i} - \cos\phi\sin\theta\hat{j})}{\sin\theta} = (\sin\phi\hat{i} - \cos\phi\hat{j})$$

(!) Dividim el producte vectorial pel seu mòdul, ja que en general els vectors no són perpendiculars entre ells.

La direcció del camp magnètic es pot obtenir immediatament:

$$\hat{b} = \hat{u} \wedge \hat{e} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \cos\phi\sin\theta & \sin\phi\sin\theta & \cos\theta \\ \sin\phi & -\cos\phi & 0 \end{vmatrix} = \cos\phi\cos\theta\hat{i} + \sin\phi\cos\theta\hat{j} - \sin\theta\hat{k}$$

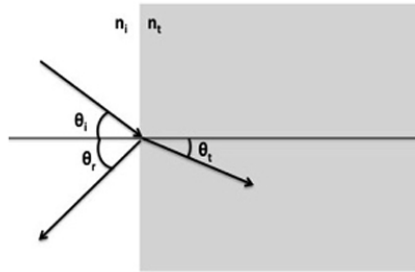
Un cop hem trobat els vectors unitaris dels estats de polarització, podem escriure els camps corresponents:

$$\begin{aligned} \vec{E}^{(+)}(\vec{r}, t) &= E_0(\sin\phi\hat{i} - \cos\phi\hat{j})\cos\left(\frac{2\pi}{l}(\cos\phi\sin\theta x + \sin\phi\sin\theta y + \cos\theta z) - \frac{2\pi ct}{l}\right) \\ \vec{B}^{(+)}(\vec{r}, t) &= \frac{E_0}{c}(\cos\phi\cos\theta\hat{i} + \sin\phi\cos\theta\hat{j} - \sin\theta\hat{k}) \\ &\quad \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{l}(\cos\phi\sin\theta x + \sin\phi\sin\theta y + \cos\theta z) - \frac{2\pi ct}{l}\right) \end{aligned}$$



### Problema 1.5

Una ona electromagnètica plana incideix en una superfície que separa dos medis d'índexs de refracció  $n_1$  i  $n_2$ , tal i com es mostra a la figura.



L'ona es propaga al pla  $xz$ , formant un angle  $\theta_i$  respecte a l'eix  $z$  amb polarització TE. Aplicant les condicions de frontera a la interfície, obtenir una expressió per als coeficients de reflexió i transmissió i determinar l'energia reflectida i transmesa a la frontera.

### Solució

El camp elèctric incident a la interfície  $\vec{E}_i^{(+)} = E_{oi}^{(+)} \hat{e}_i \cdot e^{i(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega t)}$  es separarà en 1) un feix reflectit que es propaga de nou al medi incident d'índex de refracció  $n_1$ , i 2) un feix transmès que es propaga en el medi d'índex de refracció  $n_2$ . Tots aquests feixos estan continguts en un pla comú conegut com el pla d'incidència. Les amplituds i direccions d'aquests feixos estan definides per les condicions de frontera a la interfície i depenen fortament de l'estat de polarització de l'ona incident.

Definim dues orientacions de polarització diferents: polarització TE (camp elèctric perpendicular al pla d'incidència); i polarització TM (camp magnètic perpendicular al pla d'incidència).

Els vectors d'ona corresponents es poden escriure en funció dels seus angles de propagació i l'índex de refracció, d'acord amb la figura.

$$\text{Ona incident: } \vec{k}_i = n_i k_o \left( -\sin \theta_i \hat{i} + \cos \theta_i \hat{k} \right)$$

$$\text{Ona reflectida: } \vec{k}_r = n_i k_o \left( -\sin \theta_r \hat{i} - \cos \theta_r \hat{k} \right)$$

$$\text{Ona transmesa: } \vec{k}_t = n_t k_o \left( -\sin \theta_t \hat{i} + \cos \theta_t \hat{k} \right)$$

Independentment de l'estat de polarització incident, la fase dels dipòls oscil·lants a la superfície ( $z = 0$ ) ha de ser la mateixa per a totes les ones en cada punt i instant de temps, ja que aquests dipòls es posen en moviment per l'acció del camp incident i irradia l'ona que es reflecteix al medi 1 i l'ona que es transmet al medi 2.



Això dóna lloc a les condicions següents:

$$\begin{aligned} \vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega_i t &= \vec{k}_r \cdot \vec{r} - \omega_r t = \vec{k}_t \cdot \vec{r} - \omega_t t \rightarrow \\ \omega_i &= \omega_r = \omega_t = \omega && \text{(conservació d'energia)} \\ n_i \sin \theta_i &= n_i \sin \theta_r = n_t \sin \theta_t && \text{(conservació del moment transversal)} \end{aligned}$$

Des de la segona condició, en traiem dues lleis importants (Lleis de Snell):

Llei de reflexió:  $\theta_i = \theta_r$ ,

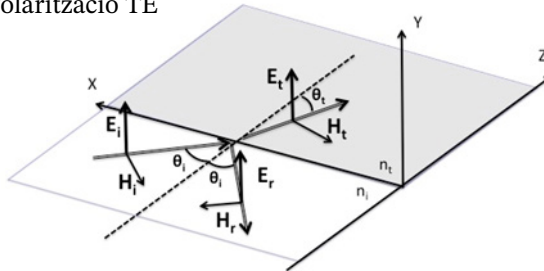
Llei de transmissió:  $n_i \sin \theta_i = n_t \sin \theta_t$

A continuació, les condicions de frontera per a cada estat de polarització s'apliquen per calcular l'amplitud dels feixos reflectits i transmesos corresponents com una funció de l'amplitud de l'ona incident.

### Modes TE

Les expressions per a les amplituds complexes del camp elèctric i la intensitat magnètica  $H = B/\mu_0$  (una magnitud que es detallarà al capítol 3) per a aquest mode de polarització es poden obtenir de la figura. El camp magnètic es calcula a partir del camp elèctric mitjançant l'equació de Maxwell [1.3]

Polarització TE



$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \wedge \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \rightarrow i\vec{k} \wedge \vec{E} = i\omega \vec{B} \\ \vec{B} &= \frac{nk_o E_o}{\omega} (\hat{u} \wedge \hat{e}) \end{aligned}$$

Utilitzant aquestes relacions, obtenim

$$\begin{aligned} \vec{E}_{oi} &= E_{oi} \hat{j}; & \vec{E}_{or} &= E_{or} \hat{j}; & \vec{E}_{ot} &= E_{ot} \hat{j} \\ \vec{H}_{oi} &= n_i \beta_i (-\cos \theta_i \hat{i} - \cos \theta_i \hat{k}); & \vec{H}_{or} &= n_i \beta_r (\cos \theta_i \hat{i} - \cos \theta_i \hat{k}); & \vec{H}_{ot} &= n_t \beta_t (-\cos \theta_t \hat{i} - \cos \theta_t \hat{k}) \end{aligned}$$

on definim  $\beta_j = \frac{k_o E_{oj}}{\mu_o \omega}$ ; and  $j = i, r, t$ .



**Condicions de frontera:** les components tangencials d'E i H són contínues a través de la frontera

$$E_{oi} + E_{or} = E_{ot}$$

$$-n_i \cos \theta_i E_{oi} + n_i \cos \theta_i E_{or} = -n_t \cos \theta_t E_{ot}$$

Definint els coeficients de reflexió ( $r$ ) i transmissió ( $t$ ) com  $r = E_{or}/E_{oi}$  and  $t = E_{ot}/E_{oi}$ , podem escriure

$$1 + r = t$$

$$1 - r = t \frac{n_t \cos \theta_t}{n_i \cos \theta_i} \rightarrow \begin{cases} r_{TE} = \frac{n_i \cos \theta_i - n_t \cos \theta_t}{n_i \cos \theta_i + n_t \cos \theta_t} \\ t_{TE} = \frac{2n_i \cos \theta_i}{n_i \cos \theta_i + n_t \cos \theta_t} \end{cases}$$

Els coeficients d'amplitud obtinguts són generalment complexos. L'energia reflectida i transmesa es pot obtenir definint la reflectància,  $R$ , i la transmitància,  $T$ , a la frontera. Quan el medi no té pèrdues, la conservació de l'energia requereix que

$$R + T = 1.$$

Per determinar aquestes quantitats, suposem que el nostre feix incident té una potència incident  $P_i$  i una àrea transversal a la direcció de propagació igual a  $S_i$ . Quan es fa incidir a un angle  $\theta_i$ , l'àrea projectada al pla de la frontera serà  $A = S_i / \cos \theta_i$ . Els feixos reflectits i transmesos tindran àrees transversals  $S_r$  i  $S_t$ , respectivament, on

$$A = S_r / \cos \theta_r = S_t / \cos \theta_t.$$

La conservació de l'energia requereix que la suma de les potències reflectides i transmeses sigui igual a la potència incident:

$$P_i = P_r + P_t \rightarrow I_i \cdot S_i = I_r \cdot S_r + I_t \cdot S_t$$

$$1 = \frac{I_r}{I_i} + \frac{I_t \cdot S_t}{I_i \cdot S_i} = R + T$$

D'aquesta expressió, podem relacionar la reflectància i la transmitància amb els coeficients de reflexió i transmissió prèviament obtinguts:

$$R = \frac{I_r}{I_i} = \frac{\frac{1}{2} \varepsilon_o n_1 c |E_r|^2}{\frac{1}{2} \varepsilon_o n_1 c |E_i|^2} = \frac{|r E_i|^2}{|E_i|^2} \rightarrow \boxed{R = |r|^2}$$

$$T = \frac{P_t}{P_i} = \frac{I_t S_t}{I_i S_i} = \frac{\frac{1}{2} \varepsilon_o n_t c |t E_i|^2 \cos \theta_t}{\frac{1}{2} \varepsilon_o n_i c |E_i|^2 \cos \theta_i} \rightarrow \boxed{T = \frac{n_t \cos \theta_t}{n_i \cos \theta_i} |t|^2}$$

**Problema 1.6**

Hem de girar la direcció de la polarització d'una ona polaritzada linealment en  $90^\circ$  utilitzant polaritzadors lineals amb pèrdues mínimes.

- a) Si tenim dos polaritzadors, descriu quina és la millor elecció per a l'orientació dels polaritzadors en relació a la polarització incident.
- b) Quina és la millor elecció si tenim tres polaritzadors?

**Solució**

a) Si l'estat final ha de tenir una polarització lineal perpendicular a l'estat incident, no podem utilitzar un sol polaritzador lineal perquè, en aquest cas, obtindríem una transmissió zero. Utilitzant dos polaritzadors, l'últim s'hauria d'orientar en la direcció de la polarització de sortida desitjada.

Suposem que l'estat inicial està polaritzat en la direcció horitzontal

$$\hat{e}_{in} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

de manera que l'estat de sortida estarà orientat en direcció vertical. Col·locant el primer polaritzador a un angle  $\theta_p$  respecte a l'horitzontal, el segon ha d'estar orientat a  $\pi/2$  rad. Podem escriure l'expressió pel camp transmès com

$$\begin{aligned} \bar{e}_{out} &= P_2 \cdot P_1 \cdot \hat{e}_{in} = \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) & \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos^2\theta_p & \cos\theta_p \sin\theta_p \\ \cos\theta_p \sin\theta_p & \sin^2\theta_p \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\bar{e}_{out} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos^2\theta_p \\ \cos\theta_p \sin\theta_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos\theta_p \sin\theta_p \end{pmatrix} = \cos\theta_p \sin\theta_p \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La intensitat de sortida es pot expressar a partir de la intensitat incident mitjançant la relació

$$I_{out} = I_{in} \cdot \bar{e}_{out} \cdot \bar{e}_{out}^* = I_{in} \cos^2\theta_p \sin^2\theta_p.$$

Per obtenir l'angle pel qual la intensitat de sortida serà màxima, la derivada ha de ser zero:



$$\frac{d(\cos^2 \theta_p \sin^2 \theta_p)}{d\theta_p} = 0 \rightarrow 2 \cos^3 \theta_p \sin \theta_p - 2 \cos \theta_p \sin^3 \theta_p = 0 \rightarrow \cos^2 \theta_p = \sin^2 \theta_p$$

$$\operatorname{tg}^2 \theta_p = 1 \rightarrow \boxed{\theta_p = \pm \frac{\pi}{4} \text{ rad}}$$

b) En el cas de tres polaritzadors, hem d'inserir dos polaritzadors en angles  $\theta_{p1}$  i  $\theta_{p2}$  arbitraris i l'últim a  $\pi/2$  rad respecte a la direcció de polarització de l'ona incident:

$$\vec{e}_{out} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos^2 \theta_{p2} & \cos \theta_{p2} \sin \theta_{p2} \\ \cos \theta_{p2} \sin \theta_{p2} & \sin^2 \theta_{p2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos^2 \theta_{p1} & \cos \theta_{p1} \sin \theta_{p1} \\ \cos \theta_{p1} \sin \theta_{p1} & \sin^2 \theta_{p1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_{out} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos^2 \theta_{p2} & \cos \theta_{p2} \sin \theta_{p2} \\ \cos \theta_{p2} \sin \theta_{p2} & \sin^2 \theta_{p2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos^2 \theta_{p1} \\ \cos \theta_{p1} \sin \theta_{p1} \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_{out} = \cos \theta_{p1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos^2 \theta_{p2} \cos \theta_{p1} + \cos \theta_{p2} \sin \theta_{p2} \sin \theta_{p1} \\ \cos \theta_{p2} \sin \theta_{p2} \cos \theta_{p1} + \sin^2 \theta_{p2} \sin \theta_{p1} \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_{out} = \cos \theta_{p1} \cos(\theta_{p2} - \theta_{p1}) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \theta_{p2} \\ \sin \theta_{p2} \end{pmatrix} = \cos \theta_{p1} \sin \theta_{p2} \cos(\theta_{p2} - \theta_{p1}) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La intensitat de sortida en aquest cas és:

$$I_T = I_{inc} \cos^2 \theta_{p1} \sin^2 \theta_{p2} \cos^2(\theta_{p2} - \theta_{p1}).$$

La condició de màxima intensitat transmesa s'obté quan les derivades parcials respecte a ambdós angles s'anul·len simultàniament:

$$\frac{\partial I_T}{\partial \theta_{p1}} = 0 \rightarrow \cos \theta_{p1} \sin(\theta_{p2} - \theta_{p1}) - \sin \theta_{p1} \cos(\theta_{p2} - \theta_{p1}) = 0 \rightarrow \sin(\theta_{p2} - 2\theta_{p1}) = 0$$

$$\frac{\partial I_T}{\partial \theta_{p2}} = 0 \rightarrow \cos \theta_{p2} \cos(\theta_{p2} - \theta_{p1}) - \sin \theta_{p2} \sin(\theta_{p2} - \theta_{p1}) = 0 \rightarrow \cos(2\theta_{p2} - \theta_{p1}) = 0$$

Ja que els angles  $\theta_{p1}$  i  $\theta_{p2}$  són més petits que  $\pi/2$ :

$$\left. \begin{array}{l} 2\theta_{p1} = \theta_{p2} \\ 2\theta_{p2} - \theta_{p1} = \pi/2 \end{array} \right\} \rightarrow 3\theta_{p1} = \pi/2$$

$$\boxed{\theta_{p1} = \frac{\pi}{6}; \quad \theta_{p2} = \frac{\pi}{3}; \quad \theta_{p3} = \frac{\pi}{2}}$$

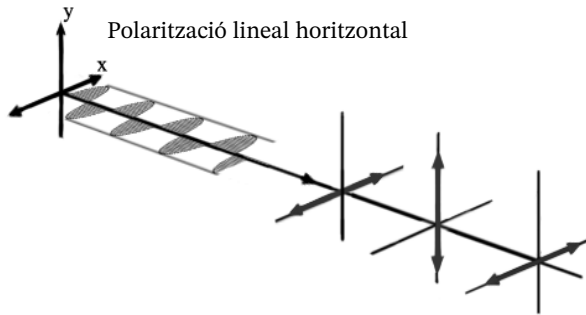


### Problema 1.7

Una ona electromagnètica, que està polaritzada linealment a l'horitzontal (com es mostra a la figura), incideix en un dispositiu format per tres polaritzadors lineals diferents, que inicialment estan preparats en la configuració següent.

a) En un moment donat, comencem a girar els primers i tercers polaritzadors simultàniament amb una velocitat angular constant  $\omega = 0.5 \text{ rad/s}$ , però en direccions oposades, mentre mantinguem el segon polaritzador fixat en la seva orientació inicial. Determineu la intensitat transmesa del dispositiu com a funció de la intensitat incident,  $I_0$ , i el temps. A continuació, calculeu el primer valor temporal per al qual la transmissió de llum és màxima i el valor d'intensitat corresponent.

b) Repetiu a) si el segon polaritzador gira ara amb una velocitat angular idèntica mentre els primers i tercers polaritzadors romanen fixats en les seves orientacions inicials.



### Solució

a) L'acció del sistema de polaritzadors sobre l'ona incident es pot expressar utilitzant la representació de vectors de Jones com a producte de matrius:

$$\vec{e}_{out} = P_3 \cdot P_2 \cdot P_1 \cdot \hat{e}_{in}$$

on el vector de Jones incident és  $\hat{e}_{in} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

Totes les matrius corresponen a polaritzadors lineals i es poden expressar com

$$P_{\theta_p} = \begin{pmatrix} \cos^2 \theta_p & \cos \theta_p \sin \theta_p \\ \cos \theta_p \sin \theta_p & \sin^2 \theta_p \end{pmatrix}$$

L'angle del segon polaritzador està fixat a  $\theta_{p2} = \pi/2$ , mentre que els angles dels primers i tercers polaritzadors varien amb el temps segons les expressions



$$\theta_{p1}(t) = \omega t \quad \text{and} \quad \theta_{p3}(t) = -\omega t$$

Mitjançant la substitució directa d'aquests valors a les matrius corresponents

$$\bar{e}_{out}(t) = \begin{pmatrix} \cos^2 \omega t & -\cos \omega t \sin \omega t \\ -\cos \omega t \sin \omega t & \sin^2 \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos^2 \omega t & \cos \omega t \sin \omega t \\ \cos \omega t \sin \omega t & \sin^2 \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{e}_{out} = -\cos(\omega t) \sin^2(\omega t) \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ -\sin(\omega t) \end{pmatrix} = -\cos(\omega t) \sin^2(\omega t) \begin{pmatrix} \cos(-\omega t) \\ \sin(-\omega t) \end{pmatrix}$$

tenim com a resultat que l'estat de polarització de sortida és lineal i gira en sentit antihorari amb velocitat angular  $\omega$ .

La intensitat transmesa és

$$I_T(t) = I_o (\cos(\omega t) \sin^2(\omega t))^2.$$

La intensitat màxima transmesa ocorrerà a primer terme

$$\frac{\partial I_T}{\partial t} = 0 \rightarrow \dots \rightarrow -\sin^2(\omega t) + 2 \cos^2(\omega t) = 0$$

$$\operatorname{tg}(\omega t) = \sqrt{2} \rightarrow t = \operatorname{atg}(\sqrt{2}) / \omega = 2 \operatorname{atg}(\sqrt{2})$$

$$t = 1'91s$$

$$I_T(1'91) = 0'148 I_o$$

b) Si el segon polaritzador gira però els altres dos romanen fixats, tenim

$$\theta_{p1} = 0; \quad \theta_{p2}(t) = \frac{\pi}{2} + \omega t; \quad \theta_{p3} = 0$$

i

$$\bar{e}_{out}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin^2 \omega t & \sin \omega t \cos \omega t \\ \sin \omega t \cos \omega t & \cos^2 \omega t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{e}_{out}(t) = \sin^2(\omega t) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow I_T = I_o \sin^4(\omega t)$$

La intensitat màxima transmesa ocorrerà a  $t = \pi s$ , i el seu valor és  $I_o$ .

**Problema 1.8**

Una ona plana amb amplitud  $E_o$  es propaga al llarg de l'eix  $z$  amb polarització lineal horitzontal.

a) Expressa aquesta ona com una superposició dels estats de polarització circular dreta i esquerra, escrivint l'expressió pel camp elèctric real com a funció de  $z$  i  $t$ .

b) L'ona entra amb incidència normal en un material òpticament actiu de longitud  $L$ . Ser òpticament actiu significa que es poden definir diferents índexs de refracció per a les polaritzacions circulars dreta i esquerra. Considerant que aquests índexs es diuen  $n_R$  i  $n_L$  respectivament, demostra que l'ona elèctrica resultant a la sortida del cristall de longitud  $L$  està polaritzada linealment i determina l'orientació d'aquest estat de polarització. (Suposeu que no hi ha reflexió a les interfícies.)

**Solució**

a) L'expressió general per a una ona plana que es propaga al llarg de l'eix  $z$  i que està polaritzada linealment horitzontalment és

$$\vec{E}^{(+)}(z,t) = \hat{e}_H E_o e^{i(kz - \omega t + \phi_x)} \quad \text{on el vector de Jones és } \hat{e}_H = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \hat{i}.$$

Els vectors de Jones per a la polarització circular dreta i esquerra són

$$\hat{e}_R = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{i} - i\hat{j}) \quad \text{i} \quad \hat{e}_L = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{i} + i\hat{j})$$

Per expressar l'ona incident com una superposició d'ones circulars:

$$\hat{e}_H = A\hat{e}_R + B\hat{e}_L \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{A}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} + \frac{B}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} \sqrt{2} = A + B \\ 0 = -A + B \end{matrix} \rightarrow A = B = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Aleshores podem escriure el camp incident com una superposició d'ones polaritzades dreta i esquerra:

$$\begin{aligned} \vec{E}^{(+)}(z,t) &= \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{e}_R + \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{e}_L \right) E_o e^{i(kz - \omega t + \phi_x)} \\ &= \frac{E_o}{2} [(\hat{i} - i\hat{j})e^{i(kz - \omega t + \phi_x)} + (\hat{i} + i\hat{j})e^{i(kz - \omega t + \phi_x)}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{E}(z,t) &= \text{Re}[\vec{E}^{(+)}(z,t)] = \frac{E_o}{2} (\cos(\beta)\hat{i} + \sin(\beta)\hat{j}) + \frac{E_o}{2} (\cos(\beta)\hat{i} - \sin(\beta)\hat{j}) \\ \text{i } \beta &= kz - \omega t + \phi_x \end{aligned}$$

b) Si aquesta ona entra en un medi on es poden definir índexs de refracció diferents per a les polaritzacions circulars dreta i esquerra, podem definir vectors d'ona de propagació per a cada polarització:



$$k_R = n_R k_o \quad \text{i} \quad k_L = n_L k_o,$$

i després escriure el camp elèctric a la sortida com

$$\vec{E}(L, t) = \frac{E_o}{2} [(\cos(\beta_R)\hat{i} + \sin(\beta_R)\hat{j}) + (\cos(\beta_L)\hat{i} - \sin(\beta_L)\hat{j})]$$

$$\vec{E}(L, t) = \frac{E_o}{2} [(\cos(\beta_R) + \cos(\beta_L))\hat{i} + (\sin(\beta_R) - \sin(\beta_L))\hat{j}]$$

$$\text{amb } \beta_R = n_R k_o L - \omega t + \phi_x \quad \text{and} \quad \beta_L = n_L k_o L - \omega t + \phi_x$$

Emprant les expressions

$$\cos(a) + \cos(b) = 2 \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \quad \text{i} \quad \sin(a) - \sin(b) = 2 \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

el camp elèctric s'expressa

$$\vec{E}(L, t) = E_o \left[ \cos(\beta_+) \cos\left(\frac{n_R - n_L}{2} k_o L\right) \hat{i} + \cos(\beta_+) \sin\left(\frac{n_R - n_L}{2} k_o L\right) \hat{j} \right]$$

$$\vec{E}(L, t) = E_o \left( \cos\left(\frac{n_R - n_L}{2} k_o L\right) \hat{i} + \sin\left(\frac{n_R - n_L}{2} k_o L\right) \hat{j} \right) \cos(\beta_+)$$

$$\text{with } \beta_+ = \frac{n_R + n_L}{2} k_o L - \omega t + \phi_x$$

D'aquesta expressió, podem veure que el camp de sortida està polaritzat linealment amb un vector de Jones:

$$\hat{e}_{out} = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{n_R - n_L}{2} k_o L\right) \\ \sin\left(\frac{n_R - n_L}{2} k_o L\right) \end{pmatrix}$$

L'angle de l'ona polaritzada linealment a la sortida del cristall és

$$\theta = \frac{n_R - n_L}{2} k_o L = \frac{(n_R - n_L)L\pi}{\lambda}$$

i depèn de la diferència d'índex i la longitud del cristall.



### Problema 1.9

A les capes més altes de l'atmosfera, mesurem la intensitat de radiació emesa pel Sol (coneguda com a constant solar) en  $I = 1.35 \text{ kW/m}^2$ .

a) Calculeu les amplituds dels camps elèctric i magnètic en aquesta regió.

b) La potència radiada pel Sol

c) La intensitat i la pressió de radiació a la superfície del Sol.

Dades: La distància mitjana entre la Terra i el Sol és de  $1.5 \cdot 10^{11} \text{ m}$ . El radi del Sol és de  $6.96 \cdot 10^8 \text{ m}$ .

### Solució

a) L'angle de la Terra des del Sol és tan petit que podem considerar la llum que arriba a la Terra com un feix paral·lel de rajos i, per tant, es pot veure com una ona plana. En aquestes condicions, els camps elèctric i magnètic estan donats per les expressions

$$I = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c |E_o|^2 \rightarrow E_o = \sqrt{\frac{2I}{\varepsilon_0 c}} = 1008.5 \text{ V/m}$$

$$B_o = \frac{E_o}{c} = 3.36 \cdot 10^{-6} \text{ T}$$

b) La potència radiada pel Sol es pot estimar suposant que el Sol emet una ona esfèrica:

$$P_{rad} = I 4\pi R^2 = 3.8 \cdot 10^{26} \text{ W}$$

c) A la superfície del Sol, la intensitat seria

$$I_{surf} = \frac{P_{rad}}{4\pi R_{Sun}^2} = 6.27 \cdot 10^7 \text{ W/m}^2$$

La pressió de radiació a la superfície del Sol seria

$$p_{rad} = \frac{I_{surf}}{c} = 0.209 \text{ N/m}^2$$

### Problema 1.10

Un làser pulsant emet un pols de 200 ns de 10 MW. Aquest pols impacta damunt d'un objecte de massa  $m = 0,1 \text{ mg}$ , suspès en un fil molt fi de 40 cm de longitud. Si l'objecte reflecteix un 60% de la radiació incident, calculeu l'angle màxim de desviació per a aquest pèndol.



**Solució**

L'energia per pols es calcula a partir de la durada del pols i la potència màxima del pols:  $E = P \cdot \tau = 2 J$ .

La transferència de moment del làser a la massa és

$$\Delta p = (1 + R) \frac{E}{c} = 1.07 \cdot 10^{-8} \text{ Kgm} / \text{s}$$

Aquesta transferència de moment indueix un canvi en la velocitat de

$$\Delta v = \frac{\Delta p}{m} = 0.107 \text{ m} / \text{s} .$$

La massa adquireix una energia cinètica, que es convertirà en energia potencial a l'angle màxim de desviació:

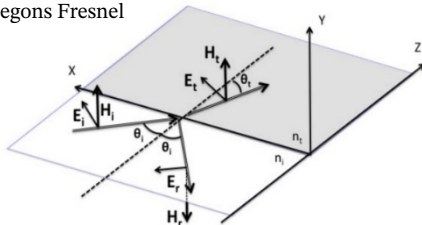
$$E_c = U \rightarrow \frac{1}{2} m \Delta v^2 = mgh \rightarrow h = \frac{\Delta v^2}{2g} = 5.8 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

$$h = l(1 - \cos \theta) \rightarrow \theta = 3.1^\circ$$

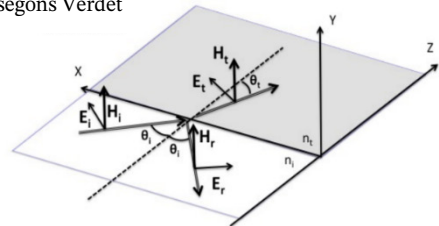
**1.7 Problemes plantejats**

**P1.1** Una ona electromagnètica plana incideix en una superfície que separa dos medis amb índexs de refracció  $n_1$  i  $n_2$ , com es mostra a la figura. L'ona es propaga al pla  $xz$ , formant un angle  $\theta$  amb respecte a l'eix  $z$  amb polarització TM. Aplicant les condicions de frontera a la interfície, obteniu una expressió per als coeficients de reflexió i transmissió, suposant el criteri de Fresnel per a les orientacions del camp en la reflexió des de la superfície. Descriu quin resultat s'obtindria si apliquéssim el criteri de Verdet.

Polarització TM segons Fresnel



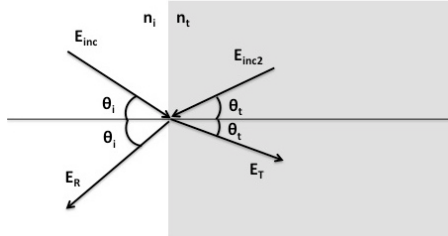
Polarització TM segons Verdet



**P1.2** Una ona electromagnètica plana incideix en la frontera que separa l'aire ( $n_i = 1$ ) i un medi amb índex de refracció  $n_t$  amb un angle d'incidència  $\theta_i$ . Els camps de cada costat es poden escriure com a superposició d'una ona incident i una ona reflectida,



com indica la figura. La polarització de les ones electromagnètiques és transversal elèctrica (mode TE), i l'angle corresponent de propagació en el medi amb índex  $n_t$  és  $\theta_t$ .



Obtingueu la matriu de dispersió que relaciona l'amplitud dels camps que incideixen en l'estructura amb els camps que surten de la frontera:

$$\begin{pmatrix} E_R \\ E_T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{inc} \\ E_{inc2} \end{pmatrix}$$

**P1.3** Donada una ona electromagnètica plana amb l'expressió

$$\vec{E} = (-2\hat{i} + 2\sqrt{3}\hat{j})\exp(-i(\sqrt{3}x + y + 6 \cdot 10^8 t))$$

Troba la direcció de la polarització, la direcció de la propagació, la velocitat de fase, l'amplitud, la freqüència i la longitud d'ona.

**P1.4** Una ona monocromàtica plana que es propaga al buit té un camp elèctric donat per l'expressió

$$\vec{E}^+(\vec{r}, t) = E_o^+ (\sin \phi \hat{x} - \cos \phi \hat{y}) \exp[i(k(\cos \phi x + \sin \phi y) - \omega t)].$$

Troba: a) el camp magnètic, b) el vector de Poynting, c) la intensitat de l'ona

**P1.5** L'estat de polarització d'una ona electromagnètica es pot escriure en notació vectorial, coneguda com a vectors de Jones, de la següent manera:

$$\hat{e} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y e^{i\delta} \end{pmatrix} \text{ on } E_x \text{ i } E_y \text{ corresponen a les projeccions del camp E al llarg de dues di-}$$

reccions ortogonals contingudes en el pla transversal a la direcció de propagació, i  $\delta = \varphi_y - \varphi_x$  és la diferència de fase relativa.

Troba l'expressió del vector de Jones per a: a) estats de polarització lineal en un angle arbitrari i b) llum polaritzada circular dreta i esquerra. A continuació, mostra com la polarització lineal es pot obtenir com la suma de dos estats de polarització circulars



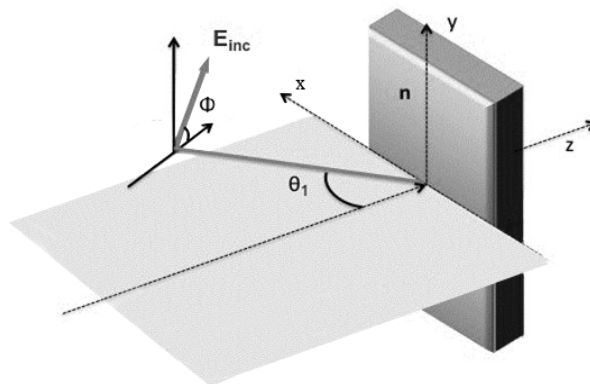
**P1.6** L'acció de qualsevol element polaritzador en l'estat de polarització de la llum incident es pot representar en forma de matriu. La matriu que caracteritza un polaritzador lineal amb el seu eix formant un angle  $\theta$  amb respecte a l'eix  $x$  es dona com a

$$P(\theta) = \begin{pmatrix} \cos^2 \theta & \cos \theta \sin \theta \\ \cos \theta \sin \theta & \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

Una ona plana està polaritzada linealment en la direcció  $Y$  i passa a través d'un polaritzador lineal orientat a un angle  $\theta_1$  amb respecte a l'eix  $x$ . L'ona de sortida del primer polaritzador es transmesa a través d'un segon polaritzador orientat a un angle  $\theta_2$  amb respecte a l'eix  $x$ . Determineu l'estat de polarització i la intensitat de l'ona transmesa resultant

**P1.7** Una ona electromagnètica plana incideix en la superfície que separa l'aire ( $n_{\text{air}} = 1$ ) i el vidre ( $n = 1,5$ ) amb un angle d'incidència  $\theta_1$ . L'estat de polarització de l'ona és lineal, formant un angle  $\phi$  amb el pla d'incidència, com es mostra a la figura.

- Escriu l'expressió per a la representació complexa del camp elèctric incident en el vidre al pla de la superfície ( $z = 0$ ).
- Aplicant les condicions de frontera adequades a la superfície, calcula l'expressió per al camp reflectit per a un valor arbitrari de l'angle d'incidència, expressat com una funció de  $\theta_1$  i  $\phi$ .
- Obtingueu el valor de la reflectivitat per als angles d'incidència particulars  $\theta_1 = 0^\circ$  i per a  $\tan(\theta_1) = n$ , i descriu l'estat de polarització resultant en cada situació.





**P1.8** La intensitat d'una ona electromagnètica plana i monocromàtica és de  $100 \text{ W/m}^2$ . Calcula:

a) L'amplitud dels camps elèctric i magnètic associats a aquesta ona.

b) La pressió de radiació.

Aquesta ona incideix perpendicularment sobre una peça de cartolina negra amb dimensions de  $20 \times 30 \text{ cm}$ , que absorbeix completament la radiació.

c) Calcula la força exercida per la pressió de radiació sobre la cartolina.

d) Repeteix els càlculs anteriors, assumint que tota la radiació es reflecteix.

**P1.9** Un làser de titani: safir emet pulsacions de  $150 \text{ fs}$  de durada amb una freqüència de  $76 \text{ MHz}$  a una longitud d'ona de  $800 \text{ nm}$ . Si la potència mitjana mesurada per un detector lent és de  $1,5 \text{ W}$ , determina la potència i l'energia d'una sola pulsació emesa pel làser. Si el punt del làser es concentra a un diàmetre de  $5\lambda$ , determina la intensitat en aquest punt.

**P1.10** L'amplitud d'una ona electromagnètica plana monocromàtica és  $E_0 = 400 \text{ V/m}$ . Calcula a) l'amplitud del seu camp magnètic, b) la seva intensitat i c) la pressió de radiació que actua sobre un objecte que reflexa el 20% de la radiació incident.

**P1.11** A la superfície de la Terra, hem mesurat la intensitat de la radiació solar com a  $0,75 \text{ kW/m}^2$ . Volem instal·lar cèl·lules solars per generar  $25 \text{ kW}$  de potència elèctrica. Si l'eficiència de les cèl·lules solars és del 30%, determina la superfície total de cèl·lules solars que necessitem muntar en la nostra instal·lació.

**P1.12** Un làser emet un feix amb una potència de  $0,9 \text{ mW}$  sobre una secció circular de  $1,2 \text{ mm}$  de diàmetre. Determina la força exercida per la radiació sobre a) una superfície negra amb absorció del 100% i b) una superfície que reflecteix el 100%.

**P1.13** Una nau espacial es mou a l'espai exterior propulsada per l'acció de la radiació electromagnètica del Sol (intensitat:  $1,4 \text{ kW/m}^2$ ), que incideix normalment sobre la seva vela perfectament reflectant de  $2.500 \text{ m}^2$  de superfície i  $7 \text{ kg}$  de massa.

a) Troba l'acceleració de la nau espacial.

b) Troba la seva velocitat després de 24 hores, partint d'una posició de repòs.

c) Negligint l'acció de la gravetat, troba el temps necessari per arribar a la Lluna des de la superfície de la Terra.

# 2

## Models bàsics de feixos òptics

### Introducció

En aquest capítol, el punt d'on partirem per construir solucions de feixos de llum més realistes es basarà en les solucions bàsiques desenvolupades en el capítol anterior, com per exemple l'ona plana i l'ona esfèrica. La finalitat d'aquest capítol no serà la de desenvolupar completament les característiques dels feixos òptics, sinó la d'introduir alguns models òptics fonamentals en el camp de la fotònica.

Una ona plana que s'estén infinitament per l'espai no és una representació adequada d'un feix òptic real, que estarà limitat necessàriament dins d'una regió finita de l'espai, en el pla transversal a la propagació del feix. Tanmateix, en algunes situacions resulta ser una aproximació de conveniència; en d'altres situacions es pot utilitzar com a simplificació per poder representar camps més complexos, tal com farem, per exemple, amb l'expansió de Fourier a l'espai recíproc. Les solucions d'ona esfèrica s'empren més sovint com a solucions asimptòtiques que estan lluny de les fonts reals, o es fan servir en problemes de dispersió. L'expansió dels camps en relació als harmònics esfèrics, per exemple, és el punt clau en el desenvolupament de moment angular.

La solució més general amb dependència espacial i temporal es diu **paquet d'ona òptic**, i es representa mitjançant qualsevol funció que satisfà les equacions d'ona  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \text{Re}[E_o(\mathbf{r}, t)e^{i\phi(\mathbf{r}, t)}]$ . No obstant això, aquests models s'usen només per estudiar situacions en què la llum està força localitzada en l'espai i el temps. Les dificultats que trobem en el tractament matemàtic d'aquestes solucions justifiquen el seu ús només en aquelles situacions en què apareixen mecanismes forts d'acoblament espai-temps. Aquests tractaments queden fora de l'abast d'aquest curs introductori. La majoria de les situacions es poden descriure de manera adequada mitjançant un enfocament molt més simple que consideri solucions factoritzades en la línia de  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = p(\mathbf{r})q(t)$ .



En el camp de la fotònica, la llum es propaga generalment en forma d'ones localitzades espacialment en alguna direcció determinada; per exemple, apuntant cap a algun detector o bé sondejant una regió limitada de l'espai. Qualsevol limitació en el perfil espacial transversal imposarà una dependència espacial a l'amplitud complexa del feix, amb la qual cosa es produeix la curvatura dels fronts d'ona i l'ampliació del perfil transversal durant la propagació. Això es regeix pel procés de **difracció**. Els efectes de la difracció modifiquen els fronts d'ona de la llum quan intentem limitar espacialment els feixos de llum, o bé quan la llum es dispersa per qualsevol objecte.

Un **feix òptic** general representa una solució de l'equació d'ona, en què la seva amplitud complexa té una dependència espacial. Els perfils d'aquest tipus de feixos es modifiquen durant la propagació. En aquest capítol, tindrem en compte els feixos òptics amb una sola freqüència temporal, coneguts com a **feixos monocromàtics**. I no serà fins més endavant que veurem la propagació amb dependència temporal.

## 2.1 Equació de Helmholtz i els feixos òptics

Al capítol anterior, hem vist que una ona plana en un medi homogeni té una amplitud constant i fronts d'ona no distorsionats, adquirint un terme de fase a mesura que es propaga. En la realitat, el medi no es pot considerar perfectament homogeni, ja que el feix interactua amb varis elements, com ara objectes o superfícies, la qual cosa modificarà els fronts d'ona i l'amplitud.

L'expressió general d'un feix òptic monocromàtic és

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \text{Re}[\vec{E}_0^{(+)}(\vec{r})e^{-i\omega t}] \quad [2.1]$$

on es considera que l'amplitud complexa depèn de les coordenades espacials.

Introduint aquesta expressió a l'equació d'ona general [1.4A], obtenim

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) - \frac{\omega^2}{c^2} \vec{E} = 0$$

Tenint en compte la relació de dispersió, la podem expressar de la manera següent

$$\boxed{\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}_0^{(+)}(\vec{r})) - k^2 \vec{E}_0^{(+)}(\vec{r}) = 0} \quad [2.2]$$

Aquesta equació s'anomena **equació de Helmholtz homogenia** i resulta ser l'equació bàsica per a l'estudi dels feixos òptics monocromàtics que es propaguen en el buit.




---

◆ **Nota**

**Raigs de llum i l'equació eikonal**

Per a feixos arbitraris, l'amplitud complexa es pot escriure de la manera següent:

$$E_o^{(+)}(\vec{r}) = E_o(\vec{r})e^{ik_o S(\vec{r})}$$

on  $S(\mathbf{r})$  correspon a la longitud de la trajectòria òptica. Les superfícies amb  $S(\mathbf{r})$  constant corresponen als fronts d'ona del feix. Podem obtenir una equació per a l'evolució dels fronts d'ona òptics inserint aquesta expressió dels camps a l'equació de Helmholtz, o bé fent servir directament les equacions de Maxwell.

Si apliquem directament aquest principi a un medi amb índex de refracció variable,  $n(\mathbf{r})$ , obtenim una equació per a  $S(\mathbf{r})$ . Pel cas límit de  $\lambda \rightarrow 0$  (és a dir,  $k_o \rightarrow \infty$ ), l'anomenarem equació eikonal:

$$\left[ \nabla \vec{S}(\vec{r}) \right]^2 = n^2(\vec{r})$$

Aquesta és l'equació bàsica per a l'òptica geomètrica i és fonamental pel concepte de raigs òptics, que, per definició, tenen un trajecte sempre perpendicular als fronts d'ona. Aquests fronts d'ona són superfícies amb la mateixa longitud de trajectòria òptica.

---

L'equació de Helmholtz també és el punt de partida per al desenvolupament de la teoria de la difracció dels feixos òptics, tal i com veurem al capítol 6.

En aquest capítol, ens centrarem en l'estudi de les propietats de propagació dels feixos amb alta direccionalitat, com ara els que produeixen els làsers, ja que aquest tipus de radiació té molta rellevància en el camp de la fotònica.

**2.2 Equació d'ona paraxial per a feixos òptics**

El problema general de la propagació del feix fora d'una regió que conté fonts òptiques es pot resoldre utilitzant l'equació de Helmholtz. Suposem que coneixem la solució d'un feix generat per una font òptica, en una regió de l'espai lluny de la font. Si volem estudiar el feix només al voltant d'una direcció específica, podríem buscar solucions més simples que s'aproximin adequadament a la solució real dins de la regió d'interès. Quan una regió d'interès està a prop d'una direcció de propagació especificada, l'anomenarem **regió paraxial** i les expressions que descriuen el feix òptic dins d'aquesta regió són les **solucions paraxials**.

Considerem que la nostra direcció d'interès és l'eix z. Una solució d'ona plana té un camp elèctric transversal a la direcció de propagació, tal i com es descriu al capítol 1. Per a un feix paraxial, el camp elèctric serà gairebé perpendicular a l'eix z i, per tant,



el vector d'ona es pot aproximar a la seva component  $z$ . En base a l'**aproximació d'ona paraxial**, fem la suposició següent:

$$\begin{aligned} \text{aproximació d'ona paraxial: } & (k_x^2 + k_y^2 \ll k_z^2) \\ k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} & \approx k_z \left(1 + \frac{k_x^2 + k_y^2}{2k_z^2}\right) \approx k_z \rightarrow \bar{k} \approx k_z \hat{k} \end{aligned}$$

Un feix paraxial s'expressa com una ona plana que es propaga al llarg d'un eix  $z$ , amb una amplitud complexa modulada en l'espai. Aquesta mena de solució també s'anomena d'ona quasi plana.

L'expressió matemàtica d'un feix paraxial és

$$\bar{E}_p^{(+)}(\vec{r}, t) = \hat{e} E_0^{(+)}(x, y, z) e^{i(kz - \omega t)} \quad [2.3]$$

Aquests feixos constitueixen la solució al problema de la propagació del feix a regions properes a l'eix  $z$ . També s'utilitzen per descriure solucions altament localitzades al llarg d'aquest eix, com en el cas d'un raig làser.

Considerant que la divergència del camp elèctric és zero, podem escriure l'equació de Helmholtz de la manera següent

$$\begin{aligned} \nabla^2 \bar{E}_p^{(+)} + k^2 \bar{E}_p^{(+)} = 0 & \rightarrow \nabla^2 (E_0^{(+)}(x, y, z) e^{i(kz - \omega t)}) + k^2 E_0^{(+)}(x, y, z) e^{i(kz - \omega t)} = 0 \\ \frac{\partial^2}{\partial z^2} (E_0^{(+)}(x, y, z) e^{i(kz - \omega t)}) + \nabla_{\perp}^2 E_0^{(+)}(x, y, z) e^{i(kz - \omega t)} + k^2 E_0^{(+)}(x, y, z) e^{i(kz - \omega t)} & = 0 \end{aligned}$$

on el Laplaciana transversal és  $\nabla_{\perp}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ .

Fent la derivada en  $z$ , podem obtenir fàcilment una equació per a l'amplitud complexa

$$\frac{\partial^2 E_0^{(+)}}{\partial z^2} + 2ik \frac{\partial E_0^{(+)}}{\partial z} + \nabla_{\perp}^2 E_0^{(+)} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial E_0^{(+)}}{\partial z} + 2ik E_0^{(+)} \right) + \nabla_{\perp}^2 E_0^{(+)} = 0 \quad [2.4A]$$

(la dependència explícita de l'amplitud complexa en  $(x, y, z)$  s'ometrà en endavant per a simplificar la notació).

En moltes situacions, aquesta equació es pot simplificar encara més si considerem l'**aproximació de l'envolupant variació lenta (SVEA, de anglès slowly varying envelope approximation)**, en què les variacions de l'amplitud del feix es consideren molt més petites que l'amplitud entre distàncies de l'ordre de la longitud d'ona.

$$\text{SVEA} \Rightarrow \frac{\Delta E_0^{(+)}}{E_0^{(+)}} \ll 1 \quad \text{per } \Delta z \approx \lambda \quad \rightarrow \quad \frac{\frac{\partial E_0^{(+)}}{\partial z} \Delta z}{E_0^{(+)}} \ll 1 \quad \text{per } \Delta z \approx \lambda$$



$$\frac{\partial E_0^{(+)}}{\partial z} \lambda \ll E_0^{(+)} \quad \rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial E_0^{(+)}}{\partial z} \ll \frac{E_0^{(+)}}{\lambda} < 2kE_0^{(+)}}$$

Dins d'aquesta aproximació, l'equació d'ona es pot simplificar per obtenir l'**equació de l'ona paraxial (PWE, de l'anglès *paraxial wave equation*)** per als feixos òptics:

$$\boxed{\frac{\partial E_0^{(+)}}{\partial z} - \frac{i}{2k} \nabla_{\perp}^2 E_0^{(+)} = 0} \quad [2.4B]$$

Aquesta és l'equació bàsica per a l'estudi de les solucions paraxials de l'equació d'ona, que descriuen les propietats dels feixos òptics a la regió paraxial.

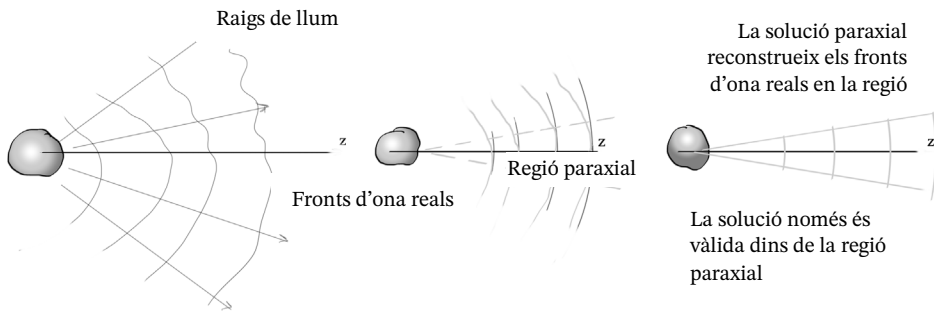


Figura 2.1 Els conceptes de solucions paraxials i de regió paraxial

## 2.3 Solucions bàsiques de l'equació d'ona paraxial

En aquesta secció, descriurem dues solucions importants de l'equació PWE utilitzades en la fòtonica. La primera és l'aproximació d'ones esfèriques de Fresnel, que és fonamental per desenvolupar la teoria escalar de la difracció en el límit de Fresnel. La segona és el feix gaussià, que té en compte les característiques bàsiques d'emissió de la majoria dels làsers.

### 2.3.1 L'aproximació d'ones esfèriques de Fresnel

Considerem l'expressió d'una ona esfèrica escalar, com es va definir al capítol 1:

$$E^{(+)} = \frac{E_0^{(+)}}{r} e^{i(kr - \omega t)} \quad \text{amb} \quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2 + z^2$$

on es defineix el radi transversal  $\rho^2 = x^2 + y^2$ .

Aquesta solució descriu feixos de llum amb fronts d'ona esfèrics que es propaguen lluny d'un focus situat a l'origen. Podem obtenir una solució paraxial que representi els fronts d'ona esfèrics a prop de l'eix  $z$  mitjançant les aproximacions següents:



$$r^2 = z^2 \left( 1 + \frac{\rho^2}{z^2} \right) \rightarrow r = z \sqrt{1 + \frac{\rho^2}{z^2}}$$

Dins la regió paraxial  $\rho \ll z \rightarrow r \approx z \left( 1 + \frac{\rho^2}{2z^2} + \dots \right) \approx z + \frac{\rho^2}{2z} + \dots$

Substituïm aquest valor aproximat de  $r$  en l'expressió de l'ona esfèrica mentre conservem el terme de primer ordre en expandir el denominador però mantenint els dos primers termes en el terme de la fase. Això és necessari perquè el terme de fase està multiplicat per  $k$ , que és un nombre gran, i per tant, la fase introduïda pel segon terme podria no ser negligible.

$$E_p^{(+)} = \frac{E_0^{(+)}}{z} e^{i(kz + \frac{k\rho^2}{2z} - \omega t)} = \frac{E_0^{(+)}}{z} e^{i\frac{k\rho^2}{2z}} e^{i(kz - \omega t)}$$

Comparant aquesta expressió amb l'equació [2.3], definim la solució de l'aproximació de Fresnel per a l'amplitud complexa com

$$E_0^{(+)}(\rho, z) = \frac{E_0^{(+)}}{z} e^{i\frac{k\rho^2}{2z}} \quad [2.5A]$$

on  $E_0^{(+)}$  és una constant. Aquesta solució representa un feix amb un front d'ona parabòlic que divergeix d'un focus situat a l'esquerra, a una distància  $z$ . Tal i com es mostra a la figura, aquesta solució és una bona aproximació dels fronts d'ona esfèrics a prop de l'eix  $z$ .

(!) Recordeu que aquestes solucions es poden utilitzar per representar l'ona esfèrica real només en la regió on l'aproximació és vàlida.

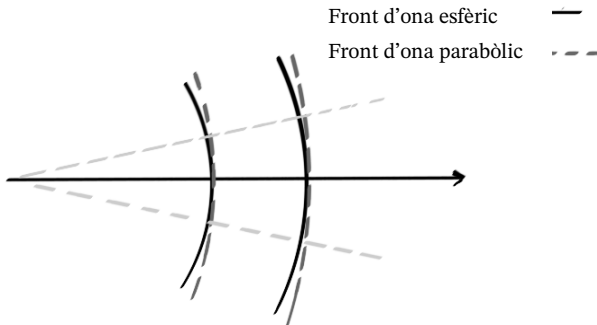


Figura 2.2 Les solucions parabòliques o de Fresnel a les equacions d'ona paraxial són aproximacions útils de l'ona esfèrica en la regió paraxial



Una solució equivalent que representa un front d'ona parabòlic que convergeix cap a un focus situat a la dreta a una distància  $z$  es pot expressar com

$$E_0^{(+)}(\rho, z) = \frac{E_0^{(+)}}{z} e^{-i \frac{k\rho^2}{2z}} \quad [2.5B]$$

Aquestes solucions s'utilitzen en les següents situacions:

1. Un feix transmès per una lent a la regió paraxial introdueix un retardament de fase que es descriu amb aquestes solucions.
2. Segons la teoria de la difracció, qualsevol feix s'estudia com una superposició d'aquestes solucions dins la regió de Fresnel, fet que s'anomena descomposició de les ones.

### 2.3.2 El feix gaussià

Una altra solució important de l'equació de l'ona paraxial es pot obtenir com una versió desplaçada de l'aproximació de Fresnel a l'ona esfèrica, que hem obtingut prèviament. Partint de l'equació de l'ona paraxial [2.4B] es fa evident que si  $E_0^{(+)}(x, y, z)$  és una solució, aleshores desplaçar aquesta solució en  $z$  per una constant donarà una altra solució vàlida  $E_0^{(+)}(x, y, z+z_0)$ . Concretament, construïm una nova solució substituint directament la variable de propagació  $z$  a l'equació [2.5A] amb la variable complexa desplaçada  $q(z) = z - iz_R$  ( $z_0 = -iz_R$ ). El significat de la constant  $z_R$ , anomenat **distància de Rayleigh**, es definirà més endavant en aquesta secció.

La solució obtinguda es coneix com a **feix gaussià**, i es pot expressar com

$$E_0^{(+)}(\rho, z) = \frac{E_0^{(+)}}{q(z)} e^{i \frac{k\rho^2}{2q(z)}} \quad [2.6]$$

La presència del terme imaginari  $q(z)$  fa que la solució es comporti de manera completament diferent durant la propagació, tal i com veurem. Per comprovar que aquesta és una solució de l'equació de l'ona paraxial, podem fer la substitució directa de [2.6] a l'equació de l'ona paraxial [2.4B].

Per tal de descriure més senzillament les propietats del feix gaussià, reescrivim l'expressió [2.6] com a  $E_0^{(+)}(\rho, z) = |E_0^{(+)}(\rho, z)| e^{i\phi(\rho, z)}$

$$\begin{aligned} E_0^{(+)}(\rho, z) &= \frac{E_0^{(+)}}{z - iz_R} e^{i \frac{k\rho^2}{2(z - iz_R)}} = \frac{E_0^{(+)}}{z^2 + z_R^2} e^{i \frac{k\rho^2(z + iz_R)}{2(z^2 + z_R^2)}} = \\ &= \frac{iE_0^{(+)}}{z^2 + z_R^2} e^{-\frac{k\rho^2 z_R}{2(z^2 + z_R^2)}} \cdot e^{i \frac{k\rho^2 z}{2(z^2 + z_R^2)}} \end{aligned}$$



A continuació, expressem el terme  $(z_R - iz)$  segons els seus mòdul i fase, i usem la identitat  $k = 2\pi/\lambda$  per obtenir

$$E_0^{(+)}(\rho, z) = \frac{iE_0^{(+)} \sqrt{z_R^2 + z^2} e^{-iatg(z/z_R)}}{(z^2 + z_R^2)} \cdot e^{-\frac{\pi z_R \rho^2}{\lambda z_R^2 (1 + \frac{z^2}{z_R^2})}} \cdot e^{i \frac{k \rho^2 z}{2z^2 (1 + \frac{z^2}{z_R^2})}}$$

Aquesta expressió es pot simplificar així

$$E_0^{(+)}(\rho, z) = \frac{iE_0^{(+)}}{\sqrt{z^2 + z_R^2}} e^{-\frac{\frac{\lambda z_R}{\pi} \rho^2 (1 + \frac{z^2}{z_R^2})}{z_R}} \cdot e^{i \frac{k \rho^2}{2z(1 + \frac{z^2}{z_R^2})}} \cdot e^{-iatg(z/z_R)}$$

I per tal de simplificar encara més aquesta expressió, definim les variables següents:

Radi del feix gaussià:  $w(z) = \sqrt{\frac{\lambda z_R}{\pi} (1 + \frac{z^2}{z_R^2})}$

A partir d'aquesta definició obtenim el radi de la cintura de feix com el radi del feix a  $z = 0$ :

$$w_0 = w(0) = \sqrt{\frac{\lambda z_R}{\pi}}$$

La distància de Rayleigh,  $z_R$ , s'obté com una funció del radi de la cintura de feix:

$$z_R = \frac{\pi w_0^2}{\lambda}$$

Radi de curvatura del front d'ona:  $R(z) = z(1 + \frac{z^2}{z_R^2})$

Desplaçament de fase de Gouy:  $\xi(z) = atg(z/z_R)$

Amb aquestes definicions, l'expressió del feix gaussià és

$$E_0^{(+)}(\rho, z) = \frac{iE_0^{(+)}}{z_R \sqrt{1 + \frac{z^2}{z_R^2}}} e^{-\frac{\rho^2}{w^2(z)}} e^{i \left( \frac{k \rho^2}{2R(z)} - \xi(z) \right)}$$

Finalment, redefinint una nova amplitud complexa com  $U_0^{(+)} = iE_0^{(+)}/z_R$ , obtenim l'expressió final del **feix gaussià** i les magnituds relacionades:



**Paràmetre q:**  $q(z) = z - iz_R$

**Radi de la cintura del feix**  $w_0$

**Distància de Rayleigh**  $z_R = \frac{\pi w_0^2}{\lambda}$

**Radi del feix:**  $w(z) = w_0 \sqrt{1 + \frac{z^2}{z_R^2}}$

**Radi de curvatura del front d'ona**  $R(z) = z \left(1 + \frac{z_R^2}{z^2}\right)$

**Desplaçament de fase de Gouy**  $\xi(z) = \text{atg}(z/z_R)$

$$E_0^{(+)}(\rho, z) = \frac{U_0^{(+)} w_0}{w(z)} e^{-\frac{\rho^2}{w^2(z)}} \cdot e^{i \left( \frac{k\rho^2}{2R(z)} - \xi(z) \right)} \quad \text{Feix gaussià [2.7]}$$

## 2.4 Propietats bàsiques dels feixos gaussians

### 2.4.1 Amplitud i intensitat

#### Amplitud

La solució del feix gaussià [2.7] correspon a la propagació al llarg de l'eix  $z$ . **La posició del pla  $z = 0$  no és arbitrària, sinó que es troba en el pla on el radi del feix arriba al seu valor mínim,  $w_0$ .** Aquest valor, juntament amb la longitud d'ona, ens permet definir els dos paràmetres més rellevants: la distància de Rayleigh,  $z_R$ ; i el paràmetre  $q$ ,  $q(z) = z - iz_R$ .

En el pla  $z = 0$ , el perfil transversal del feix en el pla  $(x, y)$  té una forma gaussiana, amb una amplitud igual a  $|U_0^{(+)}|$ . El radi del feix, també anomenat radi amb amplitud  $1/e$ , es defineix com el valor  $\rho$ , pel qual l'amplitud del camp és igual a  $|E_0^{(+)}| = |U_0^{(+)}|/e$ . En el pla  $z = 0$ , això correspon a  $\rho = w_0$ . Aquestes propietats es mostren a la figura 3.

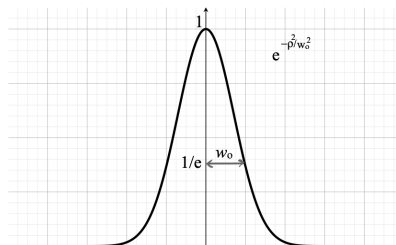


Figura 2.3 Dependència gaussiana del camp d'amplitud i determinació del radi del feix



En qualsevol altre pla  $z$ , el feix manté el mateix perfil gaussià en el pla transversal, però amb un valor del radi més gran i amb una amplitud més petita. Per tant, el feix gaussià es propaga a l'espai mantenint una forma constant, però amb un radi que augmenta durant la propagació. L'ampliació espacial transversal dels feixos òptics és una característica intrínseca de qualsevol distribució de llum localitzada transversalment, i està relacionada amb el procés físic anomenat **difracció**.

El canvi del radi del feix durant la propagació,  $w(z)$ , correspon a l'expressió definida prèviament en la derivació de l'equació [2.7]. La figura 4 representa aquesta dependència com a funció de  $z$ . A partir d'aquesta definició, podem interpretar el significat de la distància de Rayleigh com la distància recorreguda pel feix, després de la qual el seu radi augmenta en un factor de  $\sqrt{2}$ :  $w(z_R) = w_0\sqrt{2}$ .

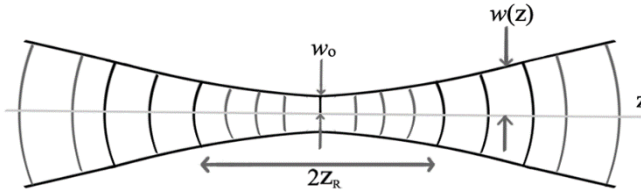


Figura 2.4 Dependència del radi del feix d'un feix gaussià amb la distància

El **paràmetre confocal**,  $b$ , d'un feix gaussià es defineix com la distància entre els plans  $z = \pm z_R$  i és la longitud dins de l'eix  $z$  per la qual es propaga el feix, mentre es manté altament localitzat en el pla transversal.

$$\text{Paràmetre confocal} \rightarrow b = 2z_R = \frac{2\pi w_0^2}{\lambda}$$

A mesura que el feix s'allunya de la cintura del feix, la dependència del seu radi amb  $z$  esdevé aproximadament lineal:

$$\text{Per } z \gg z_R \quad w(z) = w_0 \sqrt{1 + \frac{z^2}{z_R^2}} \approx w_0 \frac{z}{z_R} = \frac{\lambda}{\pi w_0} z$$

En aquesta regió d'ampliació transversal lineal, definim l'**angle de divergència**  $\theta$ . En aquest punt, cal recordar que estem estudiant solucions de feixos a l'equació de l'ona paraxial, per la qual definim els feixos òptics de la regió propera a l'eix de propagació. En aquest límit, els angles no haurien de ser molt grans. Podem definir l'angle com

$$\theta \approx \frac{w(z)}{z} = \frac{w_0}{z_R} = \frac{\lambda}{\pi w_0} \quad [2.8]$$



A partir d'aquestes definicions, podem inferir directament una de les propietats bàsiques de la propagació dels feixos gaussians: **com més petit sigui el radi de la cintura del feix,  $w_0$ , més curta serà la distància confocal i més gran serà l'angle de divergència.**

A la taula següent es mostren alguns valors de referència.

$\lambda = 500 \text{ nm}$			
$w_0$	$z_R$	$b$	$\theta$
1 mm	6.3 m	12.6 m	0.16 mrad
100 $\mu\text{m}$	6.3 cm	12.6 cm	1.6 mrad
5 $\mu\text{m}$	157 $\mu\text{m}$	314 $\mu\text{m}$	32 mrad

A mesura que localitzem transversalment el feix òptic, la difracció es fa més forta. Aquest fet té conseqüències importants en el camp de la fotònica, donat que a l'hora de fer dispositius amb dimensions més petites i compactes necessàriament haurem de superar la difracció perquè els feixos es propaguin de manera localitzada i precisa al llarg del dispositiu.

Durant la darrera dècada, s'ha proposat diverses solucions amb fibres òptiques i cristalls fotònics, donant lloc a l'aparició de noves línies de recerca en l'estudi de la fotònica.

## Intensitat

L'expressió de la intensitat del feix depèn de les condicions específiques del nostre problema, ja que la solució del feix gaussià podria representar una component del camp elèctric, el camp magnètic o quedar expressada en relació a la funció d'ona escalar. Per al cas de la funció d'ona escalar, tenim que:

$$I(\rho, z) = |U_0^{(+)}(\rho, z)|^2 = \frac{|U_0^{(+)}|^2 w_0^2}{w^2(z)} e^{-\frac{2\rho^2}{w^2(z)}} \quad [2.9]$$

$$I(\rho, z) = I_0(z) e^{-\frac{2\rho^2}{w^2(z)}}$$

on definim la **intensitat màxima** del feix gaussià com el valor de la intensitat en  $\rho=0$

$$I_0(z) = \frac{|U_0^{(+)}|^2 w_0^2}{w^2(z)} = \frac{I_0 w_0^2}{w^2(z)} = \frac{|U_0^{(+)}|^2}{1 + \frac{z^2}{z_R^2}}$$



Les unitats de  $|U_0^{(+)}|$  són  $\sqrt{W/m^2}$  en aquest cas.

Quan representem la dependència transversal de la intensitat, veiem que té una forma gaussiana amb un radi  $1/e$  en intensitat,  $W^I(z)$ , donat per

$$w^I(z) = \frac{w(z)}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad I(w^I(z), z) = I_0(z) / e$$

Per una distància transversal igual al radi del feix gaussià  $\rho = w(z)$ , la intensitat pren el valor

$$I(w(z), z) = I_0(z) / e^2$$

La dependència de la intensitat del feix amb la distància de propagació  $z$  mostra que la intensitat és màxima al pla  $z = 0$  i que disminueix a mesura que ens allunyem d'aquest pla. A una distància corresponent a la distància de Rayleigh, la intensitat màxima és la meitat del valor al pla de la cintura del feix:

$$I_0(\pm z_R) = I_0 / 2$$

A continuació, resumim les propietats de l'amplitud i la intensitat dels feixos gaussians, segons les consideracions que hem fet anteriorment.

El perfil transversal dels feixos gaussians manté la seva forma gaussiana durant la propagació.

El radi mínim, anomenat radi de la cintura del feix ( $w_0$ ) i la màxima intensitat de pic,  $I_0$ , es produeixen al pla  $z = 0$ .

A la distància concreta anomenada distància de Rayleigh,  $z_R$ ,  $w(z_R) = \sqrt{2} \cdot w_0$  i  $I_0(z_R) = I_0 / 2$ .

Lluny de la regió confocal (definida pel paràmetre confocal  $b=2z_R$ ), el feix divergeix de manera lineal amb un angle de divergència  $\theta = \lambda / (\pi w_0)$ .

#### ◆ Nota

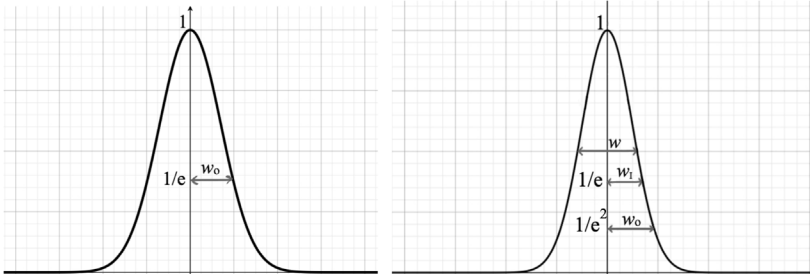
La definició del radi del feix en certa manera és arbitrària, ja que la solució gaussiana matemàtica s'estén fins a l'infinit en la direcció transversal. En els càlculs teòrics, la definició més àmpliament utilitzada és la que hem donat que correspon a  $1/e$  en amplitud ( $w_0$ ). També s'utilitza la definició  $1/e$  en intensitat ( $w^I$ ) que es va derivar prèviament. No obstant això, els resultats experimentals sovint utilitzen un diàmetre del feix anomenat amplada de mitja amplada en intensitat,  $w$ . A causa de la naturalesa arbitrària d'aquesta elecció, les expressions dels feixos gaussians que es troben a la literatura no són úniques. Per tal d'interpretar els resultats obtinguts de la



manera correcta, és essencial prestar atenció a la convenció utilitzada en cada cas específic. La relació entre les diferents definicions es pot obtenir fàcilment, i les més utilitzades són les següents:

Convencions de definició del radi de feix

$$E^{(+)} = E_0 e^{-\rho^2/w_0^2} \qquad I = I_0 e^{-2\rho^2/w_0^2} = I_0 e^{-\rho^2/w_l^2} = I_0 e^{-4\ln 2 \rho^2/w^2}$$



$$w_0 = w_l \sqrt{2} \leftrightarrow w = w_l 2\sqrt{\ln 2} = w_0 \sqrt{2 \ln 2}$$

### 2.4.2 Potència

L'energia del feix gaussià està distribuïda en el pla transversal. La potència total continguda al feix s'obté mitjançant la integració de la intensitat del feix sobre la seva àrea transversal. Com que la solució del feix gaussià té simetria rotacional al voltant de l'eix z, obtenim

$$P_{TOT} = \iint I(\rho, z) dS = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} I(z) \rho d\phi d\rho = \int_0^{\infty} I(z) 2\pi \rho d\rho$$

Després de substituir l'expressió per a I(z), tenim que

$$P_{TOT} = \int_0^{\infty} \frac{I_0 w_0^2}{w^2(z)} e^{-\frac{2\rho^2}{w^2(z)}} 2\pi \rho d\rho = -\frac{I_0 w_0^2 \pi}{2} \int_0^{\infty} \frac{4\rho}{w^2(z)} e^{-\frac{2\rho^2}{w^2(z)}} d\rho = \frac{\pi w_0^2}{2} I_0$$

Aquesta expressió ens proporciona una manera específica d'obtenir la intensitat màxima del pic del feix gaussià ( $I_0$ ) a partir de quantitats físiques directament mesurables: la potència total del feix (que es pot mesurar amb potenciòmetres) i el radi de la cintura del feix (que es pot mesurar de la manera explicada al problema 2.4 o mitjançant un perfilador de feix):

$$I_0 = \frac{2P_{TOT}}{\pi w_0^2} \qquad [2.10]$$



La relació que acabem de derivar s'obté mitjançant la integració en el pla transversal, anant de zero a l'infinit. Això és clarament una situació no realista, i descriu el fet que la funció gaussiana matemàtica té cues que s'estenen fins a l'infinit. Qualsevol feix real serà truncat per una obertura física amb un radi finit, de manera que hem de considerar com es distribueix la potència amb el radi transversal,  $\rho$ . Això es pot obtenir fàcilment amb la integració de la intensitat en una àrea finita en el pla transversal:

$$P(\rho, z) = \int_0^{\rho} I(z) 2\pi\rho d\rho = \int_0^{\rho} \frac{I_0 w_0^2}{w^2(z)} e^{-\frac{2\rho^2}{w^2(z)}} 2\pi\rho d\rho = \frac{\pi w_0^2}{2} I_0 \left[ 1 - e^{-\frac{2\rho^2}{w^2(z)}} \right]$$

$$P(\rho, z) = P_{TOT} \left[ 1 - e^{-\frac{2\rho^2}{w^2(z)}} \right]$$

D'aquesta expressió, podem explorar el valor de la potència transmesa a través de dues obertures particulars:

$$\begin{aligned} \rho = w(z) & \quad P(w(z), z) = P_{TOT} [1 - e^{-2}] = 0.86 P_{TOT} \\ \rho = 2w(z) & \quad P(2w(z), z) = P_{TOT} [1 - e^{-8}] = 0.999 P_{TOT} \end{aligned}$$

Una obertura amb un radi igual a  $2w(z)$  utilitzada al pla  $z$  transmetrà el 99,9% de la potència total del feix. Obertures més petites podrien ser utilitzades per transmetre la major part de la potència del feix. Tot i això, degut a altres consideracions relacionades amb la distorsió del feix després de la transmissió a través d'obertures finites, cal imposar un valor òptim per a les obertures que s'utilitzaran a l'experiment. Com a norma general, qualsevol obertura amb un radi més petit que  $2w(z)$  produeix distorsions en el perfil del feix i no s'hauria d'utilitzar en una configuració experimental.

### 2.4.3 Fase

L'expressió total de la solució del feix gaussià diu:

$$U(\rho, z, t) = U_0^{(+)}(\rho, z) e^{i(kz - \omega t)} = \left| U_0^{(+)} \right| e^{i\phi(\rho, z)} e^{i(kz - \omega t)}$$

$$\text{amb } \phi(\rho, z) = \frac{k\rho^2}{2R(z)} - \text{atg}\left(\frac{z}{z_R}\right)$$

i  $U_0^{(+)}$  correspon a la solució gaussiana de l'equació PWE.

El primer terme descriu els fronts d'ona parabòlics amb radi de curvatura  $R(z) = z(1 + z_R^2/z^2)$ .



Per a  $z$  positius, representen fronts d'ona que divergeixen d'una font gaussiana on el feix de cintura es situa a l'esquerra a la distància  $z$ .

Per a  $z$  negatius, aquesta mateixa solució representa els fronts d'ona que convergeixen cap a una cintura de feix situada a una distància  $z$  a la dreta del pla real.

Per a  $z = 0$ , obtenim  $R(0) = \infty$ . Això significa que els fronts d'ona són plans, com en una ona plana. Així doncs, quan el feix gaussià es troba a prop de la cintura del feix, es similar a una ona plana però amb una dimensió transversal finita.

A grans distàncies,  $z \gg z_R$ , el radi de curvatura augmenta proporcionalment a  $z$  i es converteixen en fronts d'ona esfèrics en la regió paraxial.

A  $z = z_R$ , el radi de curvatura agafa el seu valor mínim  $R(z_R) = 2z_R$ , com es pot comprovar fàcilment. En aquest punt, obtenim el màxim de corba dels fronts d'ona.

El segon terme, anomenat **fase de Gouy**, passa del valor  $-\pi/2$  quan  $z \rightarrow -\infty$  al valor  $\pi/2$  quan  $z \rightarrow \infty$ . Hi ha un desplaçament total de  $\pi$  en passar pel punt focal d'un feix gaussià.

Aquest desplaçament de fase representa un desplaçament dels fronts d'ona del feix gaussià respecte dels fronts de fase d'una ona esfèrica (o ona plana) situada a la cintura del feix. És important tenir en compte aquest factor de fase en algunes aplicacions, com la conversió no lineal mitjançant feixos focalitzats. No obstant això, en aquest curs no tindrem en compte aquests casos especials.

#### 2.4.4 Factor $M^2$

El radi de la cintura del feix i l'angle de divergència estan estretament relacionats, ja que com més petita és la cintura del feix ( $w_0$ ), més divergent és el feix que obtenim. A partir de les equacions ja obtingudes, podem comprovar fàcilment que es compleix la següent relació per als feixos gaussians:

$$\theta \cdot w_0 = \frac{\lambda}{\pi} \quad [2.11]$$

Definim el producte del diàmetre de la cintura del feix (diàmetre mínim del GB) multiplicat per l'angle total de divergència del feix a la distància llunyana:

$$2w_0 \cdot 2\theta = \frac{4\lambda}{\pi}$$

Quan generem altres tipus de solucions transversals de l'equació PWE, sempre observem un comportament similar, que està dictat per la difracció. Qualsevol feix real generat per un làser real no serà un feix gaussià exacte, que és una solució matemàtica ideal de l'equació PWE. Sempre podem mesurar o calcular el producte corresponent del diàmetre mínim ( $2W$ ) multiplicant l'angle total de divergència ( $2\Theta$ )



per qualsevol feix real, i comparar-lo amb el d'un feix gaussià ideal. Aquesta relació defineix el factor  $M^2$  del feix:

$$M^2 = \frac{2\Theta \cdot 2W}{2\theta \cdot 2w_0} = \frac{\pi}{4\lambda} [2\Theta \cdot 2W]$$

Es pot demostrar que el perfil del feix gaussià dóna el valor més petit del producte (diàmetre del feix)·(divergència total). En conseqüència, per a qualsevol feix real, trobem que  $M^2 > 1$ . Els valors de  $M^2$  poden ser tan baixos com 1,2 - 1,3 per als làsers de gas, com ara el làser d'heli-neó, o i fins a valors de  $M^2 > 100$  per alguns làsers de semiconductors.

La manera d'obtenir la mesura del radi de la cintura del feix i de l'angle de divergència d'un feix real està lluny d'ésser evident en la majoria dels casos. Les tècniques més utilitzades en fotònica són els perfiladors de feixos i la tècnica de l'aresta tallant (a l'apartat de problemes plantejats hi trobareu a petit esbós d'aquesta tècnica).

### 2.4.5 Paràmetre $q$

Com hem vist, la solució del feix gaussià es caracteritza pel paràmetre  $q$ . El coneixement d'aquest paràmetre ens permet establir completament l'evolució del feix en la regió d'interès. El paràmetre  $q$  és un nombre complex que es pot especificar en qualsevol lloc del pla  $z$  al llarg de la direcció de propagació del feix gaussià. La part imaginària és la distància de Rayleigh negativa, mentre que la part real correspon al valor de la distància de l'actual pla a la posició de la cintura del feix. Així, un valor real positiu implica que estem en un pla situat a la dreta del pla de la cintura del feix i un valor real negatiu ens indica que estem a l'esquerra del pla de la cintura del feix.

Com a exemple, prenem un feix gaussià amb distància de Rayleigh  $z_R = 1$  m.

El paràmetre  $q$  al pla  $z = 0$ , on es troba la cintura del feix, és  $q(0) = -i$ .

El paràmetre  $q$  al pla situat a una distància de  $z = 10$  metres a la dreta d'aquest pla és  $q(10) = 10 - i$ . Si tenim  $q = -2 - i$ , això significa que estem en el pla  $z = -2$  m, situat a l'esquerra de la posició de la cintura del feix.

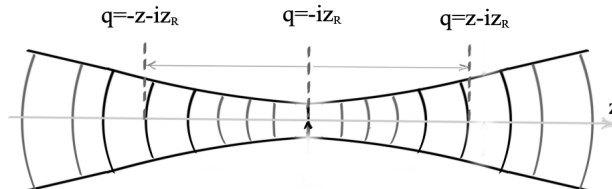


Figura 2.5 Expressió del paràmetre  $q$  en diferents plans



De vegades també podem utilitzar l'invers del paràmetre  $q$ , que també es pot relacionar amb el radi de curvatura dels fronts d'ona  $R(z)$  i amb el radi del feix  $w(z)$ . Per veure com funciona això, suposem que observem el nostre feix gaussià al pla  $z$  amb

$q(z) = z - iz_R$ . Llavors:

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{z - iz_R} = \frac{z + iz_R}{z^2 + z_R^2} = \frac{z}{z^2 + z_R^2} + i \frac{z_R}{z^2 + z_R^2}$$

Aquesta expressió es pot reescriure com

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{z \left(1 + \frac{z_R^2}{z^2}\right)} + i \frac{1}{z_R \left(1 + \frac{z^2}{z_R^2}\right)} = \frac{1}{z \left(1 + \frac{z_R^2}{z^2}\right)} + i \frac{w_0^2}{z_R w^2(z)}$$

Fent servir les definicions de l'equació [2.7], obtenim

$$\boxed{\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{R(z)} + i \frac{\lambda}{\pi w^2(z)}} \quad [2.12]$$

Així, l'invers del paràmetre  $q$  ens dona informació directa sobre els paràmetres del feix  $R$  i  $w$  en el pla desitjat.

#### Paràmetres bàsics que defineixen un feix gaussià

- 1) Direcció de propagació, definint l'eix  $z$
- 2) Posició de la cintura del feix (diàmetre mínim) al llarg de l'eix  $z$ , que localitza el pla  $z = 0$
- 3) Radi de la cintura del feix  $w_0$
- 4) Longitud d'ona
- 5) Potència total

## 2.5 L'efecte d'una lent sobre un feix gaussià

Cada sistema òptic de fòtonica utilitza lents i miralls per controlar les propietats de propagació del feix (és a dir, el seu diàmetre i la seva divergència) per tal d'adquirir les característiques desitjades. De vegades volem concentrar el feix per obtenir altes intensitats a la regió d'interès; d'altres vegades volem que un feix es propagui a través d'una distància gran i evitar que hi hagi una divergència significativa. Per comprendre com podem adaptar un feix gaussià a les nostres necessitats, en aquesta secció estudiarem l'efecte d'una lent sobre un feix gaussià.



El primer concepte que haurem de tenir en compte és que, **en un règim paraxial, un feix gaussià segueix sent gaussià després de passar per una lent. La lent modificarà el radi de la cintura del feix, la posició de la cintura del feix i la divergència del feix.**

Per a cada regió entre dues lents consecutives, podem escriure l'expressió del feix gaussià de la mateixa manera que es va desenvolupar a l'equació [2.7], on el pla  $z = 0$  correspon al pla on es troba la cintura del feix, tal i com es mostra a la figura 5.

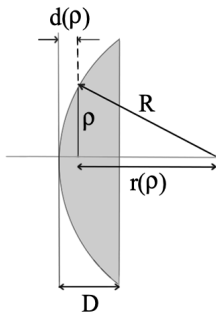
Quan un camp d'una distribució incideix en una lent, l'efecte sempre consisteix en la introducció simultània d'un factor de fase i la pèrdua d'intensitat. La magnitud de l'amplitud de camp complexa transmesa està relacionada amb el camp incident mitjançant una funció de transmissió complexa

$$E_{out}^{(+)}(\rho) = t(\rho)E_{in}^{(+)}(\rho) = |t(\rho)|e^{i\phi(\rho)}E_{in}^{(+)}(\rho)$$

Per al nostre estudi, podem simplificar-la assumint que el mòdul de la funció de transmissió és 1. Això implica que la superfície de la lent no reflecteix la llum (posem per cas, perquè té un tractament antireflexiu) i que el vidre no absorbeix la llum (és a dir que és una lent completament transparent a les longituds d'ona que ens interessin). El factor de fase de la funció de transmissió a qualsevol distància de l'eix es pot obtenir com:

$$\phi(\rho) = kL(\rho) = \frac{2\pi}{\lambda}L(\rho)$$

on  $L(\rho)$  és la longitud de la trajectòria òptica a una alçada  $\rho$  respecte de l'eix.



Per obtenir una expressió pel factor de fase, suposarem que tenim una lent plano-convexa de gruixa  $D$ , com es mostra a la figura (aquesta suposició simplifica la derivació, encara que la forma concreta de la lent no afecta el resultat final sempre que estiguem en la regió paraxial).

La trajectòria òptica es pot escriure en aquest cas com

$$L(\rho) = d(\rho) \cdot 1 + [D - d(\rho)] \cdot n = nD - d(\rho)[n - 1]$$

on  $d(\rho)$  és la densitat de l'aire a l'alçada  $\rho$  respecte de l'eix, i  $n$  és l'índex de refracció de la lent a la longitud d'ona concreta d'interès. L'avaluació de la funció  $d(\rho)$  és senzilla a partir de la figura:

$$d(\rho) = R - r(\rho) = R - \sqrt{R^2 - \rho^2}$$

Podem simplificar encara més aquesta expressió suposant que estem en la regió paraxial (on és aplicable la solució gaussiana del PWE). En aquesta regió, es compleix la condició  $\rho \ll R$ . Per tant:



$$d(\rho) = R - R\sqrt{1 - \frac{\rho^2}{R^2}} \approx R - R\left(1 - \frac{\rho^2}{2R^2} + \dots\right) \approx \frac{\rho^2}{2R}$$

Substituir aquest resultat a l'expressió de la trajectòria òptica ens dona

$$L(\rho) = nD - \frac{\rho^2(n-1)}{2R}$$

i

$$\phi(\rho) = KnD - \frac{k\rho^2(n-1)}{2R} = KnD - \frac{k\rho^2}{2f}$$

on fem servir la definició de la longitud focal d'una lent prima,  $f$ , que es defineix en òptica geomètrica com

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

$$\text{Lent plano-convexa: } R_1 = R; \quad R_2 = \infty \quad i \quad f = \frac{R}{(n-1)}$$

(Una derivació d'aquest resultat es pot trobar en qualsevol llibre d'òptica general, com ara Hecht, E. (2016). *Optics*. Pearson).

El primer terme introdueix un factor de fase constant no massa rellevant, que es pot ometre en el límit d'una lent prima quan  $D \rightarrow 0$ , donant així el resultat final:

$$\boxed{\phi(\rho) = -\frac{k\rho^2}{2f}} \quad [2.13]$$

Per entendre la importància d'aquest terme, prenem una ona plana que incideix sobre la lent amb  $E_0^{(+)} = 1$ . En aquest cas el camp transmès per la lent serà

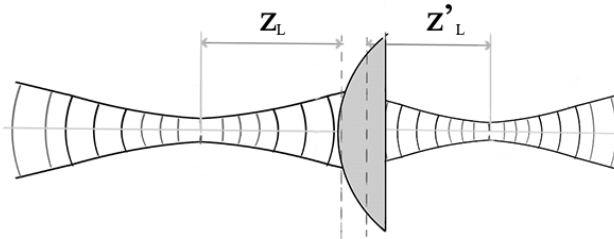
$$E_{out}^{(+)} = e^{-i\frac{k\rho^2}{2f}}$$

que, tal i com es va tractar a la secció 2.4.4, correspon a una ona parabòlica que convergeix en un punt situat a una distància  $z = f$ . Això és precisament l'efecte de qualsevol lent que actua sobre una ona plana: concentra la llum en un punt situat al pla focal. De la mateixa manera, l'acció de la lent sobre qualsevol camp que incideixi sobre ella es pot interpretar com una modificació del front d'ona incident, que es fa més convergent; o bé divergent, en el cas que la longitud focal sigui negativa.

Un cop hem obtingut el resultat principal d'aquesta secció, vegem com això afecta les propietats del feix gaussià que incideix sobre la lent. Prenem un feix gaussià que es propaga al llarg de l'eix  $z$  amb un paràmetre  $q$  que defineix el feix en aquesta regió  $q(z) = z - iz_R$ . Després de col·locar la lent de longitud focal  $f$ , el nou feix gaussià tindrà



un nou paràmetre  $q$  de  $q(z') = z' - iz'_R$ , on la variable  $z'$  ara es mesura des de la posició de la cintura del feix gaussià després de la lent.



Si la lent es col·loca a una distància  $z_L$  de la cintura del feix, el camp que incideix sobre la lent es pot escriure com

$$E_{in}^{(+)}(z_L, \rho) = \frac{E_o^{(+)} w_0}{w(z_L)} e^{-\frac{\rho^2}{w^2(z_L)}} e^{i \frac{k \rho^2}{2R(z_L)}} e^{-i \xi(z_L)} \rightarrow$$

$$I = |E_{in}^{(+)}|^2 = \frac{I_0 w_0^2}{w^2(z_L)} e^{-\frac{2\rho^2}{w^2(z_L)}} = \frac{2P_{TOT}}{\pi w^2(z_L)} e^{-\frac{2\rho^2}{w^2(z_L)}}$$

on la intensitat s'expressa com la potència total del feix. Després de la lent, el feix es modificarà segons l'equació [2.13]. A més, per a una lent prima, podem suposar que el radi del feix no es modificarà. Aquestes suposicions donen lloc a les condicions següents:

$$E_{out}^{(+)}(\rho, z'_L) = e^{-i \frac{k \rho^2}{2f}} E_{in}^{(+)}(\rho, z_L) = \sqrt{\frac{2P_{TOT}}{\pi w^2(z_L)}} e^{-\frac{\rho^2}{w^2(z_L)}} e^{i \frac{k \rho^2}{2} \left( \frac{1}{R(z_L)} - \frac{1}{f} \right)} e^{-i \xi(z_L)}$$

$$w(z_L) = w(z'_L)$$

on  $z'_L = -|z'_L|$  correspon a la distància des de la lent fins al pla on es troba la nova cintura del feix. A partir d'aquestes suposicions, podem establir una relació entre els camps a banda i banda de la lent. Es compleix que:

1/ La intensitat del feix que surt de la lent serà la mateixa que la intensitat que incideix sobre la lent, ja que  $w(z_L) = w(z'_L)$ .

2/ Podem definir el radi de curvatura del front d'ona després de la lent com

$$\frac{1}{R(z'_L)} = \frac{1}{R(z_L)} - \frac{1}{f}$$

A partir d'aquestes relacions, i juntament amb l'equació [2.12], es poden formular els efectes de la lent segons els paràmetres  $q$ :



$$\frac{1}{q_{out}} = \frac{1}{q_{in}} - \frac{1}{f} \quad \Leftrightarrow \quad q_{out} = z'_L - iz'_R = \frac{q_{in} \cdot f}{f - q_{in}} = \frac{(z_L - iz_R) \cdot f}{f - z_L + iz_R}. \quad [2.14]$$

El feix gaussià després de la lent es pot escriure en relació a la variable de propagació  $z'$ :

$$E^{(+)}(\rho, z') = \sqrt{\frac{2P_{TOT}}{\pi w^2(z')}} e^{-\frac{\rho^2}{w^2(z')}} e^{i \left( \frac{k\rho^2}{2R(z')} - \xi(z') \right)}$$

amb

$$z'_R = \frac{\pi w_0^2}{\lambda} \quad w(z') = w'_0 \sqrt{1 + \frac{z'^2}{z_R'^2}} \quad R(z') = z' \left( 1 + \frac{z'^2}{z_R'^2} \right)$$

### ► Exemple

Una lent de distància focal  $f$  es col·loca a una distància  $z_L = f$  del pla de la cintura del feix gaussià de longitud d'ona  $\lambda$  amb rang de Rayleigh  $z_R$ . Trobeu la posició de la nova cintura del feix després de la lent i el radi de la cintura del feix corresponent.

El paràmetre  $q$  incident damunt la lent és

$$q_{in} = z_L - iz_R = z_L - i \frac{\pi w_0^2}{\lambda}$$

Després de la lent, el nou paràmetre  $q$  ve donat per l'equació [2.14]:

$$q_{out} = \frac{z_L f - iz_R f}{f - z_L + iz_R} = \frac{[z_L f(f - z_L) - z_R^2 f] - i[z_L z_R f + z_R f(f - z_L)]}{(f - z_L)^2 + z_R^2}$$

$$q_{out} = z'_L - iz'_R = \frac{z_L f(f - z_L) - z_R^2 f}{(f - z_L)^2 + z_R^2} - i \frac{z_R f^2}{(f - z_L)^2 + z_R^2}$$

En aquest cas, la lent es col·loca a una distància  $z_L = f$  de la cintura del feix, i obtenim

$$q_{out} = z'_L - iz'_R = -f - i \frac{f^2}{z_R}$$

D'aquesta expressió, podem deduir directament que la nova cintura del feix es trobarà a una distància  $|z'_L| = f$  a la dreta de la lent. El nou radi de la cintura del feix s'obté directament de les expressions del paràmetre del rang de Rayleigh:

$$z'_R = \frac{f^2}{z_R} \quad \Rightarrow \quad \frac{\pi w_0^2}{\lambda} = \frac{f^2 \lambda}{\pi w_0^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{z'_L = -f \quad w'_0 = \frac{f \lambda}{\pi w_0}}$$



(!) Cal tenir en compte que aquest resultat és bastant inesperat si pensem en el context de l'òptica geomètrica, en què per un objecte col·locat al pla focal d'una lent, la seva imatge es forma a l'infinit. En el cas d'un feix gaussià, considerem la posició de la cintura del feix com un objecte i obtenim una nova cintura del feix (és a dir, una imatge) que apareix a una distància igual a la longitud focal. De fet, l'equació de la lent utilitzada en l'òptica geomètrica no és vàlida per als feixos gaussians (consulteu els problemes resolts per a una expressió alternativa).

La diferència rau bàsicament en com l'òptica geomètrica defineix un raig de llum presumint que es propaga com una ona plana. Un grup de raigs es tracta com un conjunt d'ones planes que es propaguen en direccions lleugerament diferents.

## 2.6 Solucions generals de l'equació d'ona paraxial

Les dues solucions bàsiques descrites a les seccions anteriors no són l'única manera de resoldre l'equació d'ona paraxial que ens interessin. El feix gaussià és la solució més senzilla d'entre un grup complet de solucions que es poden derivar en sistemes amb simetria rectangular (Hermite–Gauss) o cilíndrica (Laguerre–Gauss). Es fan servir àmpliament en l'òptica làser i la fotònica.

Els modes Hermite–Gauss s'obtenen com a solucions de l'equació d'ona paraxial amb simetries rectangulars. Aquestes solucions es poden trobar partint d'un enfocament separable de la forma

$$u_{nl}^{HG}(x, y, z) = u_n^{HG}(x, z) \cdot u_m^{HG}(y, z)$$

on cadascuna d'aquestes funcions compleix l'equació de l'ona paraxial en una dimensió transversal. Una solució a aquesta equació es redueix a un feix gaussià modulad per un producte de polinomis d'Hermite,  $H$  ( $n$  i  $m$  indiquen l'ordre del polinomi d'Hermite corresponent):

$$u_{n,m}^{HG}(x, y, z) = \frac{A \cdot w_0}{w(z)} e^{-\frac{\rho^2}{w^2(z)}} e^{i \left( \frac{k \rho^2}{2R(z)} - (n+m+1)\xi(z) \right)} \cdot H_n \left( \frac{\sqrt{2}x}{w(z)} \right) \cdot H_m \left( \frac{\sqrt{2}y}{w(z)} \right)$$

La figura 6 mostra alguns exemples d'aquest tipus de solució

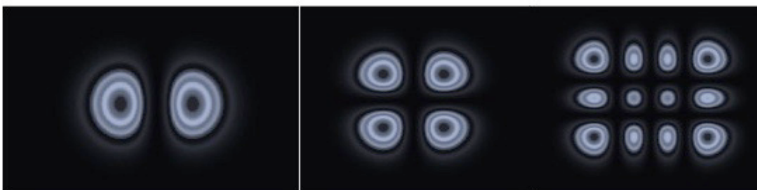


Figura 2.6 Feixos Hermite–Gauss:  $u_{1,0}^{HG}$ ;  $u_{1,1}^{HG}$  i  $u_{2,3}^{HG}$



Un altre conjunt complet de solucions són els modes Laguerre–Gauss amb simetria rotacional. Aquestes són solucions de l’equació d’ona paraxial amb coordenades cilíndriques:

$$u_{p,l}^{LG}(\rho, \phi, z) = \frac{A \cdot w_0}{w(z)} \cdot \left[ \frac{\rho}{w(z)} \right]^{|l|} e^{\frac{-\rho^2}{w^2(z)}} e^{i \left( \frac{k\rho^2}{2R(z)} - (2p+|l|+1)\xi(z) \right)} \cdot e^{il\phi} \cdot L_p^{|l|} \left( \frac{2\rho^2}{w^2(z)} \right)$$

on  $L_p^{|m|}$  són els polinomis de Laguerre generalitzats. Els perfils d’aquests modes mostren anells concèntrics la quantitat dels quals està determinada per l’índex del mode  $p$ . L’índex  $|m|$  es troba en el terme de fase azimuthal  $\exp(im\phi)$ . És on s’originen els fronts d’ona helicoidals, causant el moment angular orbital associat amb aquests feixos (feixos vòrtex). A la figura 7, s’hi mostren alguns exemples:

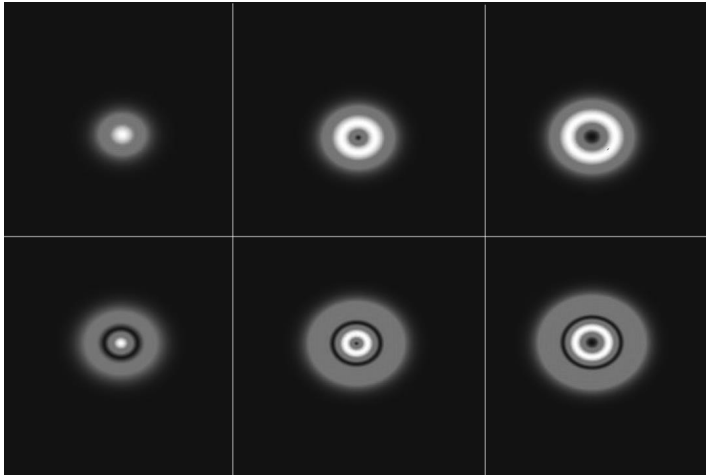


Figura 2.7 Feixos Laguerre–Gauss. Superior:  $u_{0,0}^{LG}, u_{0,1}^{LG}, u_{0,2}^{LG}$  Inferior:  $u_{1,0}^{LG}, u_{1,1}^{LG}, u_{1,2}^{LG}$

Un enfoc més general, aplicant la teoria dels sistemes lineals, permet construir altres solucions paraxials expressades em termes de la funció de transferència o la funció de resposta impulsional.

La manera més senzilla de construir la solució general és considerar la transformada de Fourier de la distribució del camp transversal per un pla donat. Prenem un perfil de feix general  $E^{(+)}(x,y,z)$  al pla  $z$  i suposem que té una transformada de Fourier bidimensional:

$$E^{(+)}(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint E^{(+)}(k_x, k_y, z) e^{i(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y \Leftrightarrow$$

$$E^{(+)}(k_x, k_y, z) = \iint E^{(+)}(x, y, z) e^{-i(k_x x + k_y y)} dx dy$$



on  $E^{(+)}(k_x, k_y, z)$  és la transformada de Fourier bidimensional de la distribució del camp transversal al pla  $z$ .

L'equació d'ona paraxial [2.4B], aplicada a aquesta distribució de camp genèrica, es pot resoldre més fàcilment a l'espai de Fourier, ja que el laplaciana transversal es pot calcular fàcilment en aquest cas, la qual cosa condueix a una equació per al camp de la transformada de Fourier

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{1}{(2\pi)^2} \iint E(k_x, k_y, z) e^{i(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y \right] - \\ & - \frac{i}{2k} \nabla_{\perp}^2 \left[ \frac{1}{(2\pi)^2} \iint E(k_x, k_y, z) e^{i(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y \right] = 0 \\ & \frac{1}{(2\pi)^2} \iint \left[ \frac{\partial E^{(+)}(k_x, k_y, z)}{\partial z} + i \frac{(k_x^2 + k_y^2)}{2k} E^{(+)}(k_x, k_y, z) \right] \cdot e^{i(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y = 0 \end{aligned}$$

Ja que aquesta relació es compleix per a qualsevol distribució de camp arbitrària, el terme entre claudàtors ha de desaparèixer, la qual cosa condueix a l'equació:

$$\frac{\partial E^{(+)}(k_x, k_y, z)}{\partial z} + i \frac{(k_x^2 + k_y^2)}{2k} E^{(+)}(k_x, k_y, z) = 0$$

que es pot resoldre fàcilment, donant

$$\boxed{E^{(+)}(k_x, k_y, z) = E^{(+)}(k_x, k_y, 0) e^{-i \frac{(k_x^2 + k_y^2)z}{2k}}} \quad [2.15]$$

En la teoria dels sistemes lineals, la funció que relaciona la transformada de Fourier del camp en el pla  $z$  amb la transformada de Fourier del camp en el pla  $z = 0$  es sol anomenar **funció de transferència**  $H(\mathbf{k}_x, \mathbf{k}_y, z)$ :

$$E^{(+)}(k_x, k_y, z) = E^{(+)}(k_x, k_y, 0) H(k_x, k_y, z) \quad \Rightarrow \quad H(k_x, k_y, z) = e^{-i \frac{(k_x^2 + k_y^2)z}{2k}}$$

La solució a l'espai real es pot obtenir realitzant la transformada de Fourier inversa:

$$E^{(+)}(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint E^{(+)}(k_x, k_y, 0) e^{-i \frac{(k_x^2 + k_y^2)z}{2k}} e^{i(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y$$

i es pot expressar en relació a la distribució del camp en  $z = 0$  reemplaçant  $E^{(+)}(k_x, k_y, 0)$  en funció de  $E^{(+)}(x, y, 0)$ :

$$E^{(+)}(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint \left[ \iint E^{(+)}(x', y', 0) e^{-i(k_x x' + k_y y')} dx' dy' \right] \cdot e^{-i \frac{(k_x^2 + k_y^2)z}{2k}} e^{i(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y$$

Intercanviant l'ordre d'integració, obtenim



$$E^{(+)}(x, y, z) = \iint \left[ \frac{1}{(2\pi)^2} \iint e^{-i\frac{(k_x^2 + k_y^2)z}{2k}} e^{i(k_x(x-x') + k_y(y-y'))} dk_x dk_y \right] E^{(+)}(x', y', 0) dx' dy'$$

$$\boxed{E^{(+)}(x, y, z) = \iint E^{(+)}(x', y', 0) h(x-x', y-y', z) dx' dy'} \quad [2.16A]$$

La solució a l'espai real en el pla  $z$  es pot escriure com una convolució de la distribució del camp en  $z = 0$  amb la **funció de resposta impulsional  $h(x, y, z)$** :

$$h(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint e^{-i\frac{(k_x^2 + k_y^2)z}{2k}} e^{i(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y \quad [2.16B]$$

Una anàlisi detinguda de l'equació [2.16B] ens mostra que la funció de transferència és, de fet, la transformada de Fourier de la funció de resposta impulsional, de manera que  $h(x, y, z)$  i  $H(k_x, k_y, z)$  constitueixen una parella transformada de Fourier.

## 2.7 Problemes resolts

### Problema 2.1

Deriveu la relació entre el radi del feix  $w$  i el diàmetre amplada màxima a mitja alçada de la intensitat del feix,  $w_{FWHM}$ . Escriviu l'expressió del rang de Rayleigh en relació amb aquest paràmetre.

### Solució

La intensitat del feix gaussià en un pla determinat en funció del radi del feix en aquest pla es pot escriure com

$$I = I_o e^{-2\rho^2/w^2}$$

D'acord amb aquesta expressió, el radi del feix  $w$  correspon al radi del perfil gaussià al nivell  $I_o/e^2$ .

El radi del feix al nivell on la intensitat arriba a la meitat del seu valor màxim es calcula prenent  $I = I_o/2$ :

$$\frac{I_o}{2} = I_o e^{-2\rho_{1/2}^2/w^2} \rightarrow \ln 2 = 2 \frac{\rho_{1/2}^2}{w^2}$$

El diàmetre que estem cercant és el doble del radi obtingut:

$$\phi_{FWHM} = 2\rho_{1/2} = 2w \sqrt{\frac{\ln 2}{2}} = w \sqrt{2 \ln 2}$$



El rang de Rayleigh del feix es pot expressar en relació al diàmetre FWHM com

$$z_R = \frac{\pi w_o^2}{\lambda} = \frac{\pi \phi_o^2}{\lambda 2 \ln 2}$$

### Problema 2.2

Obteniu l'expressió de la intensitat d'un feix gaussià en relació amb la potència total. Calculeu el diàmetre i l'àrea d'un feix amb un perfil d'intensitat circular constant (feix "top-hat") amb la mateixa intensitat màxima i potència total que el feix gaussià.

### Solució

La intensitat del feix gaussià en un pla arbitrari  $z$  és ,

$$I(\rho, z) = \frac{I_o w_o^2}{w^2(z)} e^{-2\rho^2/w^2(z)},$$

on  $I_o$  és la intensitat màxima del feix gaussià.

La potència total s'obté integrant tota l'àrea del feix:

$$P_{tot} = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} I(\rho, z) \rho d\rho d\phi = \int_0^\infty I(\rho, z) 2\pi \rho d\rho = \int_0^\infty \frac{I_o w_o^2}{w^2(z)} 2\pi \rho e^{-2\rho^2/w^2(z)} d\rho$$

$$P_{tot} = -\frac{I_o \pi w_o^2}{2} \int_0^\infty -\frac{4\rho}{w^2(z)} e^{-2\rho^2/w^2(z)} d\rho = -\frac{I_o \pi w_o^2}{2} \left[ e^{-2\rho^2/w^2(z)} \right]_0^\infty$$

$$P_{tot} = \frac{\pi w_o^2}{2} I_o$$

La intensitat del feix gaussià en relació a la potència total s'obté a partir d'aquesta expressió:

$$I(\rho, z) = \frac{2P_{tot}}{\pi w^2(z)} e^{-2\rho^2/w^2(z)}$$

El nostre feix "top-hat" té una distribució d'intensitat constant,  $I_o$ , en tot el feix igual a la intensitat màxima del feix gaussià. En aquest cas, la relació entre la potència i la intensitat és

$$P_{TH} = I_o \pi \rho_{TH}^2 = \frac{I_o \pi \phi_{TH}^2}{4}$$

on  $\rho_{TH}$  és el radi del feix i  $\phi_{TH}$  és el diàmetre del feix. Igualant la potència total dels dos feixos, obtenim



$$\frac{\pi w_o^2}{2} I_o = I_o \frac{\pi \phi_{TH}^2}{4} \rightarrow \phi_{TH} = \sqrt{2} \cdot w_o$$

L'àrea del feix “top-hat” és

$$S_{TH} = \frac{\pi \phi_{TH}^2}{4} = \frac{\pi w_o^2}{2}$$

### Problema 2.3

La llum emesa per un làser Nd:YAG a una longitud d'ona de 1.064 nm és un feix gaussià de 1 W de potència òptica i una divergència del feix de  $2\theta = 1$  mrad. Determineu:

- el radi de la cintura del feix
- la profunditat de focus (paràmetre confocal)
- la intensitat màxima i la intensitat axial als plans  $z = 1$  m i  $z = 100$  m
- el paràmetre  $q$  del feix als plans  $z = 1$  m i  $z = 100$  m

### Solució

a) El radi de la cintura del feix es pot obtenir a partir de la divergència del feix, que es coneix mitjançant l'equació [2.8]:

$$2\theta = \frac{2\lambda}{\pi w_o} \rightarrow w_o = \frac{2\lambda}{\pi(2\theta)}$$

Substituint directament els paràmetres del feix làser, obtenim  $w_o = 677,4 \mu\text{m}$ .

b) La profunditat de focus és el doble del rang de Rayleigh, que es pot calcular coneixent el radi de la cintura del feix:

$$b = 2z_R = \frac{2\pi w_o^2}{\lambda} = 2,71 \text{ m}$$

c) La intensitat màxima s'obté utilitzant la relació derivada en el problema 2 com a funció de la potència total:

$$I_o = \frac{2P_{tot}}{\pi w_o^2} = 1,387 \text{ MW/m}^2 = 138,7 \text{ W/cm}^2$$

(la unitat típica utilitzada en l'òptica làser per a la mesura de polsos làser ultracurts d'alta intensitat és el  $\text{GW/cm}^2$ ).

La intensitat axial a una distància  $z$  del pla de la cintura del feix:

$$I(0, z) = \frac{I_o w_o^2}{w^2(z)} = \frac{I_o}{1 + z^2/z_R^2} = \frac{I_o}{1 + (2z/b)^2}$$



Utilitzant els valors de la intensitat màxima i la profunditat de focus obtinguts anteriorment, obtenim el següent:

Per  $z = 1$  m, la intensitat damunt de l'eix és  $I(0,z) = 89,79 \text{ W/cm}^2$ .

I per  $z = 100$  m, obtenim  $I(0,z) = 2,54 \cdot 10^{-2} \text{ W/cm}^2$ .

d) El paràmetre  $q$  en un pla donat és  $q = z - iz_R = z - i(b/2)$ .

Al pla de la cintura del feix,  $z = 0$  i  $q = -1,355i$  m.

Per  $z = 1$  m,  $q = 1 - i = 1 - 1,355i$  m.

Per  $z = 100$  m,  $q = 100 - 1,355i$  m.

### Problema 2.4

Preneu un feix gaussià del qual en coneixem l'amplada,  $w$ , i el radi de curvatura,  $R$ , per a un pla determinat. Determineu la posició de la cintura del feix i el radi de la cintura del feix.

### Solució

El paràmetre  $q$  d'un feix gaussià es pot determinar directament si es coneixen la posició i el radi de la cintura del feix. D'altra banda, coneixent el paràmetre  $q$  es poden obtenir els valors del radi de la cintura del feix i la seva posició per a un feix donat. Emprarem aquest darrer enfocament per resoldre aquest problema, on el nostre coneixement inicial del sistema és el radi de curvatura del front d'ona i el radi del feix en un pla determinat. Com hem demostrat a la discussió prèvia a l'equació [2.12], la inversa del paràmetre  $q$  està relacionada directament amb aquests paràmetres del feix, que ja són coneguts d'entrada per a aquest problema:

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{R(z)} + i \frac{\lambda}{\pi w^2(z)}$$

Invertint aquesta expressió, obtenim directament el paràmetre  $q$ :

$$\frac{1}{q} = \frac{\pi w^2 + i\lambda R}{R\pi w^2} \rightarrow q = R\pi w^2 \cdot \frac{\pi w^2 - i\lambda R}{(\pi w^2)^2 + (\lambda R)^2} = \frac{R\pi^2 w^4 - i\lambda R^2 \pi w^2}{\pi^2 w^4 + \lambda^2 R^2}$$

En aquest cas, hem omès la dependència de  $z$  per ser més clars. Com que  $q = z - iz_R$ , igualem les parts reals i les imaginàries:

$$z = R \frac{\pi^2 w^4}{\pi^2 w^4 + \lambda^2 R^2} = \frac{R}{1 + \left(\frac{\lambda R}{\pi w^2}\right)^2}$$

$$z_R = \frac{\lambda R^2 \pi w^2}{\pi^2 w^4 + \lambda^2 R^2}$$



A partir del rang de Rayleigh, podem obtenir una expressió del radi de la cintura del feix:

$$z_R = \frac{\pi w_o^2}{\lambda} = \frac{\pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda^2 R^2 w^2}{\pi^2 w^4 + \lambda^2 R^2} = \frac{\pi}{\lambda} \cdot \frac{w^2}{\left(\frac{\pi w^2}{\lambda R}\right)^2 + 1} ; \quad w_o = \frac{w}{\sqrt{1 + \left(\frac{\pi w^2}{\lambda R}\right)^2}}$$

### Problema 2.5

Un feix gaussià incideix en una lent plano-convexa de distància focal  $f$ , que es troba en el pla de la cintura del feix. Determineu els paràmetres del feix gaussià transformat després de la lent.

### Solució

Si considerem que la lent és perfectament transparent, per efecte del feix s'introdueix un factor de fase quadràtica, induint així una curvatura del front d'ona. Com hem vist en aquest capítol, aquesta fase transforma el feix gaussià incident en un altre feix gaussià després de la lent. Les característiques del feix de sortida es poden obtenir fàcilment a partir de l'expressió:

$$\frac{1}{q_{out}} = \frac{1}{q_{in}} - \frac{1}{f}$$

on, per a una lent prima,  $q_{in}$  correspon al paràmetre  $q$  del feix just a l'entrada de la lent; i  $q_{out}$  és el paràmetre  $q$  del feix gaussià transformats a l'altura just després de la lent. D'aquesta expressió:

$$q_{out} = \frac{q_{in} \cdot f}{f - q_{in}}$$

En aquest problema, la cintura del feix incident es troba a l'altura de la lent i, per tant,  $q_{in} = -iz_R$ :

$$q_{out} = \frac{-iz_R f}{f + iz_R} = -iz_R f \frac{f - iz_R}{f^2 + z_R^2} = -\frac{z_R^2 f}{f^2 + z_R^2} - i \frac{z_R f^2}{f^2 + z_R^2}$$

Reordenant els termes:

$$q_{out} = -\frac{f}{1 + (f/z_R)^2} - i \frac{z_R}{1 + (z_R/f)^2} = -z' - iz_R'$$

El terme imaginari correspon al nou rang de Rayleigh, a partir del qual s'obté el nou radi de la cintura del feix ( $z_R' = \pi w_o'^2 / \lambda$ ):



$$w_o' = \frac{w_o}{\sqrt{1 + (\pi w_o^2 / \lambda f)^2}}$$

**En el límit d'un rang de Rayleigh que és molt més gran que la distància focal,** aquesta situació és similar a la d'una ona plana que il·lumina una lent. En aquest cas farem el nostre plantejament des del punt de vista de l'òptica geomètrica:

$$z_R \gg f \rightarrow z' = -\frac{f}{1 + \left(\frac{f}{z_R}\right)^2} \approx -f$$

La posició de la cintura del feix després de la lent es troba al pla focal posterior de la lent:

$$z_R \gg f \rightarrow w_o' = \frac{w_o}{\sqrt{1 + (\pi w_o^2 / \lambda f)^2}} \approx \frac{\lambda f}{\pi w_o}$$

En relació als diàmetres del feix, aquesta expressió esdevé

$$2w_o' = \frac{4\lambda f}{\pi 2w_o} \rightarrow D' = \frac{4\lambda f}{\pi D_o} \approx 1.2 \frac{\lambda f}{D_o}$$

Aquesta fórmula correspon al diàmetre del feix en el pla focal format al fer incidir una ona plana en un lent de distància focal  $f$  i de diàmetre  $D_o$ .

## Problema 2.6

a) Es col·loca una lent de distància focal  $f$  a una distància arbitrària,  $z$ , del pla de la cintura d'un feix gaussià. Determineu el radi del feix al pla focal posterior de la lent,  $w'(f)$ .

b) Un làser emet un feix gaussià i hem de determinar la posició del pla de la cintura del feix, que es troba a una distància  $A$  a l'interior de la gàbia del làser (mesurada des del pla de sortida del làser). Per obtenir aquest valor, fem tres mesures experimentals del radi del feix: el primer valor es mesura a una distància  $L_1$  de l'obertura del làser; un segon valor es mesura a una distància  $L_2 = L_1 + D$ , i el tercer valor es mesura al pla focal posterior d'una lent, col·locada a una distància arbitrària major que  $L_2$ . La distància focal de la lent és  $f = 50$  cm, i els resultats corresponents de les nostres mesures són:

Pla	Distància	Radi del feix
1	$L_1 = 150$ cm	$w(L_1) = 745$ $\mu$ m
2	$L_2 = L_1 + D = 250$ cm	$w(L_2) = 1.005$ $\mu$ m
3	A distància $f$ de la lent	$w'(f) = 160$ $\mu$ m



Determineu el valor d' $A$ .

### Solució

Per trobar el radi del feix al pla situat a una distància  $f$  després de la lent, propagarem el paràmetre  $q$  fins al pla desitjat, partint de la posició de la cintura del feix d'entrada.

Paràmetre  $q$  inicial:  $q_o = -iz_R$

A l'entrada de la lent, el paràmetre  $q$  serà  $q_{in} = z - iz_R$

$$q_{out} = \frac{q_{in} \cdot f}{f - q_{in}} = \frac{f(z - iz_R)}{f - z + iz_R}$$

I a la sortida de la lent, obtenim

$$\text{Al pla desitjat, el paràmetre } q \text{ esdevé } q = q_{out} + f = \frac{q_{in} \cdot f}{f - q_{in}} + f = \frac{f^2}{f - q_{in}}$$

$$\text{Invertint aquesta expressió: } \frac{1}{q} = \frac{f - q_{in}}{f^2} = \frac{f - (z - iz_R)}{f^2} = \frac{f - z}{f^2} + i \frac{z_R}{f^2}$$

podem obtenir informació sobre el radi del feix utilitzant la relació general [2.12]. De la part imaginària, obtenim

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{R} + i \frac{\lambda}{\pi w'^2} \rightarrow \frac{\lambda}{\pi w'^2} = \frac{z_R}{f^2} = \frac{\pi w_o^2}{\lambda f^2}$$

$$\text{El resultat final: } w' = \frac{\lambda f}{\pi w_o}$$

b) Per trobar el valor de  $A$ , utilitzarem la informació inclosa a la taula.

Els radis de feix a  $L_1$  i  $L_2$  es relacionen amb el rang de Rayleigh i el radi de la cintura del feix de la manera habitual:

$$z_1 = L_1 + A \rightarrow w^2(z_1) = w_o^2 \left( 1 + \frac{z_1^2}{z_R^2} \right)$$

$$z_2 = z_1 + D \rightarrow w^2(z_2) = w_o^2 \left( 1 + \frac{z_2^2}{z_R^2} \right)$$

Restant el segon del primer, obtenim

$$\frac{w^2(z_2) - w^2(z_1)}{w_o^2} = \frac{z_2^2 - z_1^2}{z_R^2} = \frac{(z_1 + D)^2 - z_1^2}{z_R^2}$$

Després de realitzar uns quants passos algebraics, obtenim una expressió de  $z_1$ :

$$z_1 = \frac{\frac{z_R^2}{w_o^2} (w^2(z_2) - w^2(z_1)) - D^2}{2D} = \frac{\frac{\pi^2 w_o^2}{\lambda^2} (w^2(z_2) - w^2(z_1)) - D^2}{2D}$$



Ara, utilitzant el resultat obtingut a a), podem expressar  $z_1$  en funció de les nostres quantitats mesurades:

$$z_1 = \frac{f^2 (w^2(z_2) - w^2(z_1))}{2Dw'^2(f)} - \frac{D}{2}$$

La substitució directa de tots els valors dona  $z_1 = L_1 + A = 1,722 \text{ m}$ .

I el resultat final és  $A = 22,2 \text{ cm}$ .

### Problema 2.7

Un feix gaussià de rang de Rayleigh  $z_R$  incideix en un sistema òptic format per dues lents de distàncies focals  $f_1$  i  $f_2 = 2f_1$ . La separació entre les lents és  $D = 2f_1$ , i la cintura del feix gaussià incident es troba a una distància  $z = f_1$  de la primera lent. Calculeu a) el valor del nou rang de Rayleigh després de la segona lent i b) la distància entre la segona lent i el pla on es trobarà la nova cintura del feix. A continuació, particularitzeu les expressions obtingudes pel cas  $f_1 = z_R$ .

### Solució

El paràmetre  $q$  just abans de la primera lent és  $q_{in1} = f_1 - iz_R$ .

I a la sortida de la primera lent: 
$$q_{out1} = \frac{f_1 \cdot q_{in1}}{f_1 - q_{in1}} = \frac{f_1^2 - iz_R f_1}{iz_R} = -f_1 - i \frac{f_1^2}{z_R}$$

Després de la propagació del feix gaussià entre les lents 1 i 2 a una distància  $D = 2f_1$ , el paràmetre  $q$  abans de la segona lent serà

$$q_{in2} = q_{out1} + D = f_1 - i \frac{f_1^2}{z_R}$$

I després de la segona lent 
$$q_{out2} = \frac{f_2 \cdot q_{in2}}{f_2 - q_{in2}} = \frac{2f_1 \cdot q_{in2}}{2f_1 - q_{in2}}$$

Després de substituir directament  $q_{in2}$  i de fer unes operacions algebraïques senzilles, obtenim l'expressió

$$q_{out2} = 2f_1 \left( \frac{1 - f_1^2/z_R^2}{1 + f_1^2/z_R^2} \right) - i \frac{4z_R}{1 + z_R^2/f_1^2}$$

A partir d'aquest resultat, la cintura del feix després de la segona lent es troba a

$$z' = -2f_1 \left( \frac{f_1^2 - z_R^2}{f_1^2 + z_R^2} \right)$$



(!) Nota: d'aquest resultat, quan  $f_1 > z_R$ ,  $z' < 0$ , la cintura del feix es troba a la dreta de la lent; però si  $f_1 < z_R$  llavors  $z' > 0$ , i per tant la cintura del feix serà virtual (situada a l'esquerra de la lent). Per tant, el feix gaussià divergeix de la segona lent.

El radi de la cintura del feix ve donat per la part imaginària de  $q_{out2}$ :

$$z'_R = \frac{4z_R}{1 + z_R^2/f_1^2} \rightarrow w_o' = \frac{2w_o}{\sqrt{1 + \left(\frac{\pi w_o^2}{\lambda f_1}\right)^2}}$$

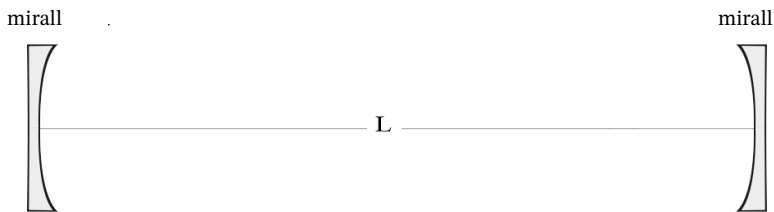
Pel cas particular de  $f_1 = z_R$ , una substitució directa ens donarà

$$z' = 0 \text{ i } w_o' = \sqrt{2}w_o$$

La nova cintura del feix es trobarà exactament a la segona lent.

### Problema 2.8

*Els feixos gaussians s'utilitzen en detectors interferomètrics d'ones gravitatòries. Cada braç de l'interferòmetre està format per dos miralls separats per una distància  $L$ . Perquè la llum ressoni dins de la cavitat, la superfície del mirall ha de coincidir amb els fronts d'ona del feix gaussià*



a) Si els miralls dels dos extrems han de ser iguals, indiqueu la posició del pla de la cintura del feix gaussià que ressona dins de la cavitat i calculeu el radi de la cintura del feix,  $w_o$ , que minimitza el valor del radi del feix als miralls. Calculeu el radi de la cintura del feix i el rang de Rayleigh si el nostre sistema té  $L = 4 \text{ km}$  i la longitud d'ona del làser és  $\lambda = 1.064 \text{ nm}$

b) Calculeu l'amplada màxima a mitja alçada (FWHM) del diàmetre en intensitat, el paràmetre  $q$  i el radi de curvatura dels fronts d'ona del feix gaussià a les posicions dels miralls.

c) Una nova generació d'interferòmetres utilitza mides de spot més grans als miralls per reduir el soroll tèrmic. En aquesta nova configuració, el radi de curvatura dels miralls es fixa a  $R = 2,076 \text{ km}$ . Trobeu el nou rang de Rayleigh, el radi de la cintura del feix i el radi del feix als miralls ( $L = 4\text{km}$ ;  $\lambda = 1.064 \text{ nm}$ )

**Solució**

a) Com que la cavitat és simètrica, el pla de la cintura del feix ha d'estar situat al mig de la cavitat i la posició dels dos miralls serà  $z = \pm L/2$ .

A continuació, hem de trobar el valor de  $w_0$  minimitzant el valor de  $w(z)$  per  $z = \pm L/2$ .

El radi del feix en el pla  $z$  es pot expressar en relació al radi de la cintura del feix:

$$w^2(z) = w_0^2 \left( 1 + \frac{z^2}{z_R^2} \right) = w_0^2 \left( 1 + \frac{z^2 \lambda^2}{\pi^2 w_0^4} \right) \xrightarrow{\text{at } z = \pm L/2} w^2(\pm L/2) = w_0^2 + \frac{L^2 \lambda^2}{4\pi^2 w_0^3}.$$

El valor de  $w_0$  minimitzant  $w(L/2)$ ,

$$\frac{d(w^2(L/2))}{dw_0} = 0 \rightarrow 2w_0 + \frac{L^2 \lambda^2}{4\pi^2} \left( -\frac{2}{w_0^3} \right) = 0$$

$$\text{ve donat per } w_0 = \sqrt{\frac{L\lambda}{2\pi}} \text{ i } z_R = \frac{\pi w_0^2}{\lambda} = \frac{L}{2}.$$

Així, la longitud total de la cavitat ha de ser igual al paràmetre confocal del feix gaussià.

Pels següents valors,  $L = 4 \text{ km}$  i  $\lambda = 1.064 \text{ nm}$ , pels quals s'obtenen

$$w_0 = 2,60 \text{ cm i } z_R = 2 \text{ km},$$

b) a la posició dels miralls, el radi del feix és

$$w(L/2) = w_0 \sqrt{1 + \frac{L^2}{4z_R^2}}$$

I utilitzant els valors obtinguts a a), obtenim  $w(L/2) = 3,67 \text{ cm}$ .

Per obtenir el diàmetre FWHM, podem utilitzar directament el resultat obtingut en el problema 1:

$$\phi_{FWHM}(L/2) = \sqrt{2 \ln 2} \cdot w(L/2) = 4,33 \text{ cm}$$

El paràmetre  $q$  del feix a la posició dels miralls:

$$q(\pm L/2) = \pm \left( \frac{L}{2} \right) - iz_R = (\pm 2.000 - i2.000) \text{ m}$$

Radi de curvatura dels fronts d'ona:

$$R(L/2) = \frac{L}{2} \left( 1 + \frac{z_R^2}{(L/2)^2} \right) = L = 4 \text{ km}$$



c) En canviar la disposició dels miralls, les propietats del feix gaussià també han de canviar per adaptar-se a la nova cavitat. En aquesta nova situació, el radi de curvatura dels miralls canvia a  $R' = 2,076 \text{ km}$ . A partir d'aquest valor, obtenim el nou rang de Rayleigh:

$$R'(L/2) = \frac{L}{2} \left( 1 + \frac{z_R'^2}{(L/2)^2} \right) \rightarrow z'_R = 389 \text{ m}$$

I el nou radi de la cintura del feix corresponent és

$$w'_o = \sqrt{\frac{\lambda z'_R}{\pi}} = 1,15 \text{ cm}$$

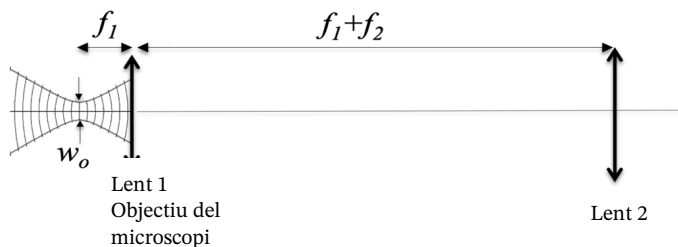
Finalment, el radi del feix a la posició dels miralls és

$$w(L/2) = w'_o \sqrt{1 + \frac{(L/2)^2}{z_R'^2}} = 6 \text{ cm}$$

### Problema 2.9

Un feix gaussià focalitzat, de longitud d'ona  $800 \text{ nm}$ , té un radi de cintura de feix de  $w_0 = 200 \mu\text{m}$ . Hem de captar la imatge del pla de la cintura de feix utilitzant una càmera CCD amb un sensor quadrat de  $5 \text{ mm}$  de grandària. Per obtenir una imatge de bona resolució, utilitzarem un sistema de magnificació.

a) La nostra primera disposició és l'arranjament (confocal) que es mostra a la figura, que utilitza un objectiu de microscopi amb una distància focal  $f_1 = 9 \text{ mm}$  i una segona lent amb una distància focal  $f_2 = 10 \text{ cm}$ .



a1) Trobeu el valor del radi de la cintura del feix gaussià després de la lent 2. Si el diàmetre del feix fa el doble que el radi del feix a  $1/e^2$  en intensitat, determineu si s'adaptarà al sensor CCD.

a2) A quina distància del pla original de la cintura del feix s'ha de col·locar el CCD?

a3) Si el radi de la cintura del feix,  $w_0$ , canvia, hem de canviar la posició del CCD per gravar la imatge de la cintura del feix magnificada?



b) En la nostra segona configuració, reemplaçem el sistema confocal per una sola lent col·locada a una distància  $f$  del pla de la cintura del feix.

b1) Trobeu el valor de la distància focal que hem de utilitzar per obtenir la mateixa magnificació al CCD que la que hem obtingut en el cas a).

b2) A quina distància del pla original de la cintura del feix s'ha de col·locar el CCD?

b3) Si el radi de la cintura del feix,  $w_0$ , canvia, hem de canviar la posició del CCD per captar la imatge de la cintura del feix magnificada?

### Solució

a1) Per obtenir el radi de la cintura del feix després de la lent 2, propagarem el feix gaussià a través del sistema òptic. Com que la cintura del feix gaussià inicial es troba al pla focal de l'objectiu de microscopi, el paràmetre  $q$  a la lent 1 és

$$q_{in1} = f_1 - iz_R, \text{ on } z_R = \frac{\pi w_0^2}{\lambda} = 15,71 \text{ cm}$$

El paràmetre  $q$  del nou feix gaussià després de l'objectiu serà

$$q_{out1} = \frac{f_1 \cdot q_{in1}}{f_1 - q_{in1}} = -f_1 - i \frac{f_1^2}{z_R}$$

Després de la propagació per una distància  $D = f_1 + f_2$ , això esdevé

$$q_{in2} = q_{out1} + D = f_2 - i \frac{f_1^2}{z_R}.$$

I, després de la lent 2:

$$q_{out2} = \frac{f_2 \cdot q_{in2}}{f_2 - q_{in2}} = -f_2 - i \frac{f_2^2 z_R}{f_1^2}$$

A partir d'aquest resultat, podem concloure:

- La nova cintura del feix després de la lent 2 es troba a una distància  $f_2$  de la lent 2, en el pla focal posterior.
- El nou rang de Rayleigh després de la lent 2:  $z'_R = \left(\frac{f_2}{f_1}\right)^2 \cdot z_R \rightarrow w'_o = \frac{f_2}{f_1} w_o = 2,22 \text{ mm}.$

La nova cintura del feix té una magnificació de  $M = f_2/f_1 = 11,1$ .

$w'_o$  correspon al radi  $(1/e)$  de l'amplitud i també al radi  $(1/e^2)$  en intensitat. Així, el diàmetre del feix a  $(1/e^2)$  en intensitat és

$$\phi_{\frac{1}{e^2}} = 2w'_o = 4,44 \text{ mm}$$

Per tant, es podrà ajustar al sensor de 5 mm.



a2) La càmera enregistraria la imatge desitjada quan la seva distància des de la cintura de feix original sigui  $D = f1 + (f1 + f2) + f2 = 218 \text{ mm}$ , en el pla focal posterior de la lent 2.

a3) A partir dels resultats de l'apartat a1), podem veure que la posició de la imatge és sempre el pla focal posterior de la lent 2, independentment de la mida de  $w_o$ . La mida de la imatge canviarà si les dimensions del feix original canvien, tot i que sempre mantindrà un factor de magnificació constant  $M$ .

b1) Reemplaçant el sistema amb una sola lent col·locada a una distància  $f$  de la cintura original del feix, obtenim:

$$q_{in} = f - iz_R \rightarrow q_{out} = \frac{f^2 - ifz_R}{iz_R} = -f - i \frac{f^2}{z_R}$$

La nova cintura del feix apareixerà al pla focal de la lent amb un rang de Rayleigh

$$z'_R = \frac{f^2}{z_R} \text{ i radi de cintura de feix } w'_o = \frac{f\lambda}{\pi w_o}$$

Si volem la mateixa magnificació que a l'apartat a), llavors  $w'_o = M \cdot w_o$  i

$$f = \frac{Mw_o^2\pi}{\lambda} = 1,74 \text{ m}$$

b2) Ara la càmera s'ha de col·locar a una distància de  $2f = 3,48 \text{ m}$  de la posició original de la cintura del feix, una distància gairebé 16 vegades més gran que a la configuració anterior.

b3) A més, si el radi de la cintura del feix gaussià canvia, la distància focal necessària de la lent també hauria de canviar, com es veu a l'apartat b1) i la posició del CCD també s'hauria de canviar en correspondència.

## 2.8 Problemes plantejats

**P2.1** Verifiqueu mitjançant una substitució directa que l'aproximació de Fresnel a una ona esfèrica és una solució de l'equació de l'ona paraxial. Trobeu un límit de validesa d'aquesta aproximació.

**P2.2** Un feix gaussià es transmet a través d'una lent prima de distància focal  $f$ . Trobeu com expressar la ubicació de la cintura del feix transmès com a funció de la ubicació de la cintura del feix incident.

**P2.3** Tenint en compte que, en una configuració de lent única, la cintura del feix correspon a la posició de l'objecte o la imatge, escriviu l'equació de la lent



corresponent i compareu-la amb la famosa fórmula de l'òptica geomètrica de la lent prima.

**P2.4** Una manera experimental de mesurar el diàmetre del feix és el mètode de la fulla de ganivet. Es col·loca una aresta molt esmolada al pla  $z$  on es vol mesurar el feix. Un detector situat damunt de l'eix del feix mesura l'energia del feix. A mesura que encarem l'aresta cap al feix, l'energia que arriba al detector disminueix. Mostreu que el radi del feix correspon al desplaçament de l'aresta entre les posicions on la intensitat del feix mesura el 16% i el 84% de la seva intensitat total.

**P2.5** Un feix gaussià amb longitud d'ona 800 nm té un rang de Rayleigh  $z_R = 1$  m. A la posició de la cintura del feix, es col·loca una lent amb una distància focal  $f_1 = 5$  cm. Una segona lent amb  $f_2 = 15$  cm es col·loca a una distància  $D = f_1 + f_2$  a la dreta de la primera lent.

- Trobeu el paràmetre  $q$  del feix gaussià al pla just després de la segona lent.
- Trobeu la posició de la cintura del feix i el radi de la cintura del feix després de la segona lent.
- Trobeu l'expressió de l'amplitud del feix gaussià després de la segona lent si la potència total del feix és  $P_{\text{tot}} = 10$  W.

**P2.6** Un feix gaussià de potència total 10 W i longitud d'ona de 500 nm té un radi de cintura de feix d'1 mm i es col·loca a 10 cm d'una lent amb una distància focal  $f = 5$  cm. Trobeu el radi del feix, el radi de la cintura i la intensitat sobre l'eix a una distància  $z = 2$  cm després de la lent.

**P2.7** Un feix gaussià de longitud d'ona  $\lambda$  té un radi de la cintura  $w_0$ . El feix es transforma mitjançant un col·limador format per dues lents disposades de la forma següent. La primera lent, amb una distància focal  $f_1$ , es col·loca a una distància  $z = f_1$  del pla de la cintura del feix gaussià inicial. Una segona lent amb una distància focal  $f_2$  es col·loca a una distància  $f_1 + f_2$  de la primera lent.

- Trobeu la posició de la cintura del feix després de la segona lent.
- Trobeu el valor del radi de la cintura del nou feix després de la segona lent.
- Calculeu el valor del paràmetre confocal del feix gaussià després de la segona lent, expressant-lo en relació amb el paràmetre confocal del feix gaussià inicial i les distàncies focals de les lents.

**P2.8** Un feix gaussià de longitud d'ona 532 nm té un rang de Rayleigh  $z_{R^0} = 10$  cm i una potència total de 10 mW. Es col·loca una lent divergent a una distància focal  $f = -5$  cm a una distància  $z = z_{R^0}$  a l'esquerra de la cintura del feix. Calculeu el radi del feix gaussià transmès i el radi de curvatura del front d'ona en el pla situat a una distància  $z = 5$  cm a la dreta de la lent. A continuació, escriviu l'expressió per a la intensitat del feix gaussià en aquest pla.

# 3

## Emissió de llum i interacció entre llum i matèria

### Introducció

En els capítols anteriors, hem estudiat les solucions bàsiques per a la propagació d'ones electromagnètiques (EM) en el buit. Ho hem fet establint l'equació bàsica que descriu la propagació de feixos òptics per la regió paraxial i algunes de les seves solucions més significatives. A continuació, encararem el problema de la presència de la matèria i com aquesta interactua amb el camp EM. En aquest capítol es tractaran dos problemes principals: 1) l'emissió de llum per dipòls radiants i 2) la interacció entre la radiació EM emesa i la matèria. Trobarem aspectes importants en aquestes dues situacions, concretament pel que fa a les propietats de la radiació òptica quan interactua amb la matèria. Encara que un tractament més rigorós requeriria com a mínim l'ús de la matriu densitat o un enfocament quàntic dels tractaments de la matèria amb la teoria de pertorbacions depenent del temps moltes de les situacions poden ser enteses de manera satisfactòria a través de l'electrodinàmica clàssica. En aquest capítol es tractaran els principals aspectes de la teoria clàssica sobre l'emissió i la interacció de la llum. Es resumiran els aspectes més rellevants sense entrar en tots els detalls de la teoria, que d'altra banda es poden trobar en diversos llibres de text sobre electrodinàmica clàssica (com ara Jackson, J.D. (1999). *Classical Electrodynamics*. John Wiley & Sons; o Oughstun, K.E. (2006). *Electromagnetic and Optical Pulse Propagation*. Springer).

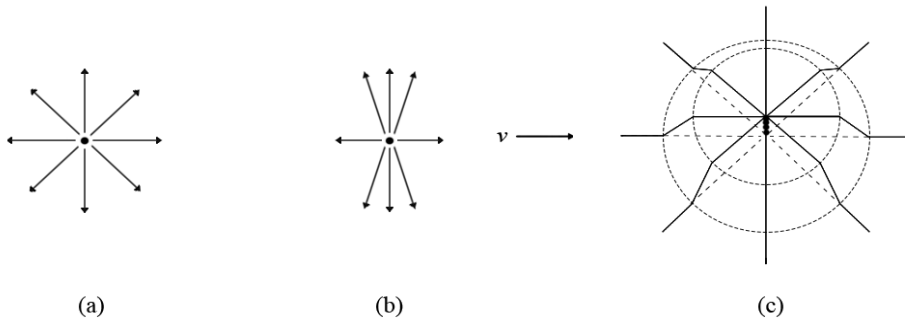
El primer aspecte important a tenir en compte a l'hora d'estudiar l'emissió de radiació EM de la matèria és que **la radiació electromagnètica és generada per càrregues accelerades**, mentre que el problema d'interacció entre llum i matèria es refereix essencialment a l'acció del camp EM radiat sobre les càrregues.

Una càrrega puntual en repòs genera un camp elèctric estàtic radial que apunta, o bé allunyant-se de (positiu), o cap a (negatiu) la càrrega. Quan la càrrega es mou a velocitat constant, observem un desplaçament de les línies en la direcció del moviment sense canvis en la curvatura (veure figura 1). L'acceleració sobtada i



l'aturada d'una càrrega puntual genera un esclat de radiació EM que es propaga des de la càrrega a velocitat  $c$  (en el buit), tal i com es descriu a la figura 1. Tingueu en compte que les línies de camp elèctric no canvien en la direcció de l'acceleració. Quan la càrrega oscil·la amb moviment harmònic, es generen ones electromagnètiques.

En el règim de baixa freqüència, podem obtenir qualsevol longitud d'ona utilitzant circuit oscil·lants que condueixen electrons amunt i avall al llarg de l'antena. A partir d'antenes individuals podem obtenir una emissió d'EM definida que s'assembla molt a una ona esfèrica o plana; i mitjançant la superposició coherent d'uns pocs oscil·ladors es pot obtenir un patró d'emissió més direccional. Tot i que les propietats bàsiques d'una ona electromagnètica són comunes a tot el rang de l'espectre EM, la forma en què es generen difereix dràsticament d'una regió a una altra, comportant així algunes peculiaritats sobre les seves característiques observades.



(a) Línia de camp elèctric per càrrega estàtica, (b) càrrega amb constants  $v \approx c$ , i (c) càrrega accelerada

A continuació es resumeixen els aspectes principals del problema de la radiació en l'espectre EM que va des de l'ultraviolat proper (UV proper), passant per la regió visible, fins a l'infraroig (IR).

- La llum es genera per oscil·lació de càrregues a nivell microscòpic, com poden ser:
  - Transicions d'electrons en àtoms, molècules i sòlids.
  - Transicions vibracionals i rotacionals en molècules i sòlids.
  - Transicions de banda en sòlids.
- L'aspecte bàsic d'aquest tipus d'emissió és la **naturalesa quàntica** dels processos:
  - Emissió de freqüència quantitzada.
  - Transicions permeses pel procés radiatiu (dipolar, quadrupolar, Raman, etc.)
  - La interacció entre les emissions espontànies i estimulades i
  - Els efectes de ressonància (emissió discreta de línia).



L'emissió de llum des de la matèria és sovint una qüestió **d'emissió de varis cossos**. En aquest sentit, s'ha d'avaluar detingudament les propietats estadístiques dels emissors. No obstant això, el tractament detallat de la coherència i les propietats estadístiques de la llum van més enllà de l'abast d'aquest curs i no es tractaran detalladament. En funció dels aspectes que considerem, tota font de llum es pot classificar segons les seves propietats d'emissió:

## A. Fonts d'emissió espontànies

### Fonts tèrmiques

Els sòlids a una temperatura determinada emeten un espectre continu de radiació electromagnètica que arriba a un màxim per una longitud d'ona determinada, en funció de la temperatura (Llei de Wien). L'energia total emesa per un cos negre és proporcional a  $T^4$ , tal i com descriu la llei de Stefan-Boltzmann. El descobriment de Max Planck de la llei que regeix l'emissió de radiació per part d'un cos negre constitueix una de les fites més importants en el naixement de la teoria quàntica.

### Fonts espectrals

A una pressió determinada, les làmpades de descàrrega de gas generen radiació en un conjunt discret de longituds d'ona, que dependran del material.

### Díodes emissors de llum

Els processos de recombinació d'electrons-forat en semiconductors (junció p-n) s'utilitzen com a fonts de llum eficients. La combinació de LEDs a les tres longituds d'ona bàsiques (vermell, blau i verd) permet generar qualsevol color, gràcies a les propietats additives de la superposició de la llum.

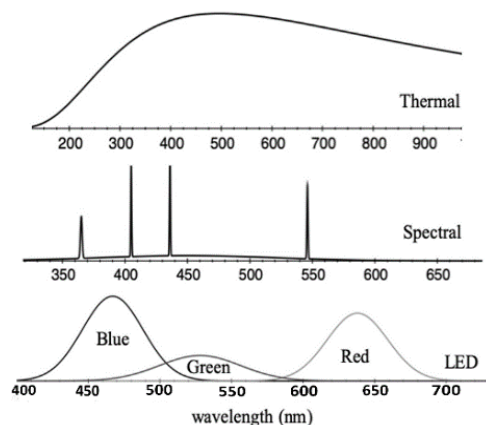


Figura 3.2 Espectre típic de fonts a) tèrmica, b) espectral i c) LED



## B. Fonts d'emissió estimulades

La possibilitat d'utilitzar emissió estimulada va donar lloc a la invenció d'una font de llum coherent, el LÀSER, les propietats del qual han fet possible una revolució en el camp de la fotònica. Es fa una breu descripció del principi de funcionament d'un làser a l'Apèndix A.

### 3.1 Emissió de llum des d'un dipol

Un estudi matemàtic de la teoria clàssica de la radiació comença amb les equacions de Maxwell [1.1], que han d'incloure la presència de càrregues i corrents. Una equació d'ona, per a medis homogenis, es podria derivar en aquest cas de la manera següent:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) &= -\frac{\partial}{\partial t} \left( \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \\ \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} &= -\mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t}\end{aligned}\quad [3.1A]$$

$$\boxed{\nabla^2 \vec{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{\nabla} \left( \frac{\rho}{\epsilon_0} \right) + \mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t}}$$

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) &= \mu_0 (\vec{\nabla} \wedge \vec{j}) + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) \\ -\nabla^2 \vec{B} &= \mu_0 (\vec{\nabla} \wedge \vec{j}) - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}\end{aligned}\quad [3.1B]$$

$$\boxed{\nabla^2 \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = -\mu_0 (\vec{\nabla} \wedge \vec{j})}$$

La solució a aquestes equacions, per una càrrega i una distribució de corrent arbitràries, és un problema molt complex. Es pot veure com l'efecte de les fonts apareix a les equacions sota operadors diferencials, indicant una relació no local entre ells i els camps. Els problemes de radiació es poden resoldre més simplement en funció dels potencials electromagnètics, que es poden derivar directament de les equacions de Maxwell:

#### Vector potencial: **A**

Com la divergència del cam magnètic és zero [1.1B], sempre es podrà expressar en termes d'una nova funció anomenada potencial vectorial, com:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}\quad [3.2A]$$



### Potencial de Coulomb: $\phi$

Substituint [3.2A] a [1.1C] obtenim

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) \quad \rightarrow \quad \vec{\nabla} \wedge \left( \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0$$

expressant així el fet que el vector de dins del claudàtor és irrotacional. Definim una nova variable escalar, el potencial de Coulomb,  $\phi$ , com

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \phi \quad \rightarrow \quad \vec{E} = -\vec{\nabla} \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad [3.2B]$$

Per problemes estacionaris, la derivada temporal desapareix. Per tant, aquesta relació es simplifica per la definició electrostàtica del potencial de Coulomb, donant lloc a les equacions de Laplace o Poisson de l'electrostàtica.

Les equacions de Maxwell es poden reescriure en termes dels potencials definits:

$$[1.1D] \rightarrow \quad \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = \mu_0 \vec{j} - \mu_0 \epsilon_0 \vec{\nabla} \frac{\partial \phi}{\partial t} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} \mathbf{0} \quad i \quad [3.3A]$$

$$\boxed{\nabla^2 \vec{A} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{j} + \vec{\nabla} \left( \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)}$$

$$[1.1A] \rightarrow \quad \vec{\nabla} \cdot \left( -\vec{\nabla} \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \rightarrow \boxed{\nabla^2 \phi + \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) = -\frac{\rho}{\epsilon_0}} \quad [3.3B]$$

Aquestes equacions associen el potencial vectorial i el potencial de Coulomb a les distribucions de càrrega i corrent. A partir de les definicions de [3.2], veiem immediatament que els camps electromagnètics són invariants per un canvi en els potencials, que ve donat per una transformació gauge:

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} \cdot f \quad i \quad \phi' = \phi - \frac{\partial f}{\partial t}$$

sent  $f$  una funció genèrica de  $r$  i  $t$ .

Així, seleccionant un gauge particular, es pot triar el valor de la divergència del potencial vectorial.

#### ◆ Nota

En electrodinàmica s'utilitzen dues transformacions gauge importants:

1) *Gauge de Coulomb*:  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$



Aquesta transformació és molt útil per a la quantització del camp EM, donant lloc a una equació dinàmica per al vector potencial, mentre que s'elimina la dependència temporal del potencial de Coulomb.

$$2) \text{ Gauge de Lorenz: } \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

El gauge de Lorenz s'utilitza per estudiar la radiació dipolar, tal i com veurem.<sup>1</sup> Un altre avantatge que presenta és que és un invariant relativista.

Selecciónant un potencial vectorial que compleixi la condició de gauge de Lorenz, podem escriure equacions desacoblades per al potencial vectorial i per al potencial de Coulomb, que tenen com a termes el corrent de densitat i la densitat de càrrega, respectivament:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}^2 \vec{A} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} &= -\mu_0 \vec{j} \\ \vec{\nabla}^2 \phi - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} &= -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \end{aligned} \quad [3.4]$$

Aquestes equacions es resolten per unes distribucions de corrent i densitat de càrrega determinades. Les solucions bàsiques a aquestes equacions s'anomenen solucions de Liénard-Wiechert i s'expressen en funció de les fonts retardades; és a dir que els potencials en un instant de temps concret,  $t$ , es defineixen en termes dels valors de les fonts en un temps anterior  $t' = t - R/c$ , on  $R = |\vec{r} - \vec{r}'|$  defineix la distància entre el punt de l'espai on es calcula el potencial i la posició de l'element d'origen:

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{r}, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}', t' = t - R/c)}{R} dV' \\ \phi(\vec{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}', t' = t - R/c)}{R} dV' \end{aligned} \quad [3.5]$$

On  $V'$  correspon al volum que inclou les distribucions de càrrega i de densitat de corrent.

Aquestes equacions s'utilitzen normalment en la teoria d'antenes per trobar les solucions radiades per a diferents configuracions. Tot i que podríem utilitzar aquestes expressions per determinar l'emissió de llum, podem adoptar un formalisme més simple tenint en compte les característiques específiques de l'emissió de radiació dels àtoms. Tal i com hem vist, la llum és emesa per les càrregues oscil·lants dels àtoms, les molècules o els sòlids, que són fonamentalment neutres (la ionització de la

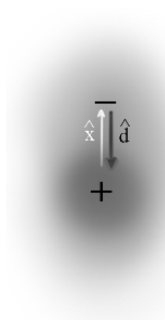
<sup>1</sup> Per més detalls, consultar el llibre dels autors Cohen-Tannoudji, C., Dupont-Roc, J. i Grynberg, G. (1989). *Photons and Atoms: Introduction to Quantum Electrodynamics*. John Wiley & Sons.



matèria normalment té lloc a altes freqüències i intensitats). L'expansió multipolar de qualsevol distribució de càrrega mostra que es pot considerar com una superposició d'una càrrega puntual (igual a la càrrega total de la distribució), un dipol elèctric, un quadrupol elèctric, o un dipol magnètic, etcètera (vegeu qualsevol llibre estàndard sobre teoria electromagnètica per a més detalls).

Per a distribucions de càrrega neutra, el terme principal és, en conseqüència, un dipol, de manera que la radiació per àtoms es pot considerar a primer ordre com una emissió d'un dipol elèctric clàssic.

### Dipol elèctric



Un dipol elèctric elemental està format per una càrrega positiva ( $q$ ) i una de negativa ( $-q$ ) de la mateixa magnitud, separades per una distància ( $x$ ). En el cas dels àtoms, podem considerar que aquesta distància es defineix per la posició relativa del centre de masses del núvol d'electrons respecte del nucli quan es distorsiona per la presència d'un camp elèctric extern. Podem definir el **moment dipolar** d'un dipol elemental d'aquesta manera

$$\vec{p} = -q \cdot \vec{x} = qx \cdot \hat{d}$$

on el vector unitari  $\hat{d}$  apunta a la càrrega positiva des de la negativa. Un núvol electrònic que oscil·la temporalment genera un dipol oscil·latori  $\vec{p}(t)$  convertint-se així en una font d'emissió de radiació EM (el moviment oscil·latori és un moviment accelerat).

Tot i que la radiació d'un dipol es podria obtenir a partir de l'equació [3.5], es pot estudiar de manera més simple a partir del **potencial de Hertz elèctric,  $\vec{\Pi}$** .

El potencial de Hertz s'obté dels potencials vectorial i de Coulomb que satisfan les relacions següents

$$\vec{A} = \mu_0 \frac{\partial \vec{\Pi}}{\partial t} \quad i \quad \phi = -\frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{\Pi}}{\epsilon_0} \quad [3.6A]$$

El potencial de Hertz satisfà l'equació d'ona

$$\vec{\nabla}^2 \vec{\Pi} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{\Pi}}{\partial t^2} = -\vec{p} \quad [3.6B]$$

En aquesta equació podem reconèixer la utilitat d'aquest plantejament, ja que **el dipol elèctric es converteix en el terme font de l'equació d'ona per al potencial de Hertz**. Per a una distribució de dipol determinada, la solució general a aquesta equació d'ona és



$$\bar{\Pi}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\bar{p}(\vec{r}', t' = t - R/c)}{R} dV' \quad [3.6C]$$

Els camps elèctrics i magnètics venen donats per

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \bar{\Pi})}{\epsilon_0} - \mu_0 \frac{\partial^2 \bar{\Pi}}{\partial t^2} \\ \vec{B} &= \mu_0 \left( \vec{\nabla} \wedge \frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial t} \right) \end{aligned} \quad [3.6D]$$

El formalisme que acabem de derivar s'utilitza a l'Apèndix B per obtenir la solució del camp radiat per un dipol elemental amb l'equació  $\bar{p}(\vec{r}, t) = p(t)\delta(\vec{r} - \vec{r}_0)\hat{d}$ .

La solució és bastant complexa i implica termes diferents que mostren diferents dependències amb la distància. Podem distingir els règims diferents següents a l'hora d'estudiar els patrons d'emissió radiats.

### 1. Camp proper: $R \ll \lambda \approx l$

En aquesta zona, hi observem el patró d'emissió a distàncies molt inferiors que les dues longituds característiques d'aquest problema: la longitud d'ona,  $\lambda$ , i la mida del dipol,  $l$ . Els únics termes significatius en aquesta regió són els que decauen com a  $(1/R^3)$ , i que corresponen a l'expressió electrostàtica d'un dipol elèctric.

### 2. Camp intermedi: $R \approx \lambda, l$

En aquesta zona, l'evolució dels camps és força complexa. No estudiarem la radiació en aquest règim, ja que per a ones òptiques ens interessa l'emissió a distàncies superiors a la longitud d'ona (típicament de l'ordre de les micres)

### 3. Camp llunyà o zona de radiació: $R \gg \lambda, l$

A l'hora d'estudiar l'emissió de llum, la que ens interessa és sobretot aquesta regió. També podem aplicar **l'aproximació dipolar**, que suposa que les dimensions del dipol són molt més petites que la longitud d'ona, de manera que el camp elèctric es pot considerar constant per les dimensions d'un sol dipol. Això es justifica perquè les dimensions atòmiques (àngstroms) són molt més petites que les longituds d'ona òptiques (micres).

En aquesta regió, els termes de la solució que decauen més ràpidament que  $(1/R)$  són negligibles a les distàncies d'observació i l'únic **terme de radiació** que sobreviu decau en  $(1/R)$ .



### Camp EM emès per un dipol elemental en l'aproximació del camp dipolar i de radiació $R \gg \lambda \gg l$

Tal i com es deriva a l'Apèndix B, el camp EM radiat per un dipol elemental s'escriu

$$\begin{cases} \vec{e}_{rad}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0 \ddot{\vec{p}}(\vec{r}_0, t') \sin \theta}{4\pi R} \hat{e} \\ \vec{b}_{rad}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0 \ddot{\vec{p}}(\vec{r}_0, t') \sin \theta}{4\pi R c} \hat{b} \end{cases} \quad [3.7A]$$

on  $R$  és la distància entre el punt d'observació i el dipol  $R = |\vec{r} - \vec{r}_0|$  i les derivades temporals del dipol s'avaluen en el temps retardat  $t' = t - R/c$ . Els vectors unitaris que defineixen l'orientació relativa dels vectors de camp elèctric i magnètic respecte de la direcció de propagació venen donats per les següents expressions:

$$\begin{aligned} \hat{e} &= [\hat{R} \wedge (\hat{R} \wedge \hat{d})] / \sin \theta = (\cos \theta \cos \phi \hat{x} + \cos \theta \sin \phi \hat{y} - \sin \theta \hat{z}) \\ \hat{b} &= (\hat{d} \wedge \hat{R}) / \sin \theta = (-\sin \phi \hat{x} + \cos \phi \hat{y}) \\ \hat{R} &= (\sin \theta \cos \phi \hat{x} + \sin \theta \sin \phi \hat{y} + \cos \theta \hat{z}) \\ \hat{d} &= \hat{z} \end{aligned} \quad [3.7B]$$

on definim un sistema de coordenades dretà centrat en la posició del dipol, amb el vector dipol dirigit al llarg de l'eix  $z$ . El camp elèctric està contingut en el pla que inclou el dipol i la direcció d'observació mentre que el camp magnètic és perpendicular a aquest pla i compleix la condició. [1.11].

La dependència angular del patró radiat, proporcional a  $\sin^2 \theta$ , ens indica que el dipol no radia en la direcció d'oscil·lació del dipol el patró d'emissió típic.

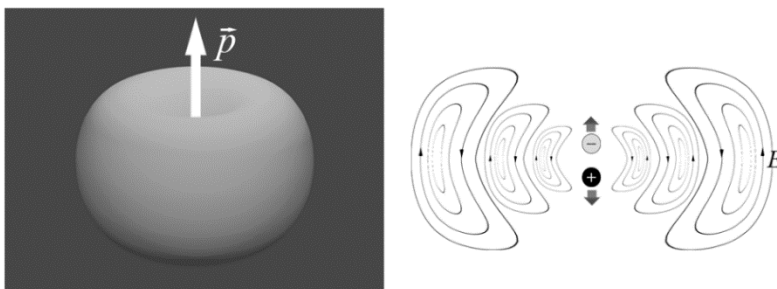


Figura 3.3 Patró d'emissió del camp EM generat per un dipol en oscil·lació

El vector de Poynting es calcula directament a partir de l'expressió dels camps:

$$\vec{S}_{rad} = \frac{\vec{e}_{rad} \wedge \vec{b}_{rad}}{\mu_0} = \frac{\mu_0 (\ddot{\vec{p}})^2 \sin^2 \theta}{16\pi^2 R^2 c} \hat{R} = \frac{(\ddot{\vec{p}})^2 \sin^2 \theta}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3 R^2} \hat{R} \quad [3.8]$$



Aquesta és una expressió general per a qualsevol dependència temporal del moment dipolar.

Una magnitud molt important de la teoria de la radiació és **la potència total radiada** per un dipol:

$$P_{rad} = \iint |\vec{S}_{rad}| ds = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 (\ddot{p})^2 \sin^2 \theta}{16\pi^2 c R^2} R^2 \sin \theta d\theta d\phi = \frac{\mu_0 (\ddot{p})^2 2\pi}{16\pi^2 c} \int_0^{\pi} \sin^3 \theta d\theta$$

on integrem el vector de Poynting en totes les direccions de l'espai i utilitzem l'element de superfície diferencial en coordenades esfèriques  $ds = R^2 \sin \theta d\theta d\phi$ . La integral de l'angle azimutal  $\theta$  es pot avaluar fàcilment:

$$\int_0^{\pi} \sin^3 \theta d\theta = \int_0^{\pi} (1 - \cos^2 \theta) \sin \theta d\theta = \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta - \int_0^{\pi} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta = \left[ -\cos \theta + \frac{\cos^3 \theta}{3} \right]_0^{\pi} = \frac{4}{3}$$

que ens duu a l'expressió següent:

**Fórmula de radiació de Larmor**

$$P_{rad} = \frac{\mu_0 (\ddot{p})^2}{6\pi c} = \frac{(\ddot{p})^2}{6\pi \epsilon_0 c^3} \quad [3.9]$$

### 3.2 Propietats de la radiació dels dipols harmònics

Com que els dipols que oscil·len amb moviment harmònic generen ones EM, podem suposar una dependència temporal explícita del moment dipolar:

$$p(t) = p_0 \cos(\omega t + \phi)$$

que s'expressa en notació complexa com

$$\rho^{(+)}(t) = \rho_0^{(+)} e^{-i\omega t} \quad i \quad p(t) = \text{Re} \left[ p^{(+)}(t) \right]$$

Utilitzant aquesta dependència temporal i recordant que el moment dipolar s'avalua en el temps retardat  $t'$ , obtenim de [3.7A]:

$$\begin{aligned} \vec{e}_{rad}^{(+)}(\vec{r}, t) &= -\frac{\mu_0 \omega^2 p_0^{(+)} \sin \theta}{4\pi R} e^{-i\omega t'} \hat{e} = -\frac{\mu_0 \omega^2 p_0^{(+)} \sin \theta}{4\pi R} e^{-i\omega(t-R/c)} \hat{e} = \\ &= -\frac{\mu_0 \omega^2 p_0^{(+)} \sin \theta}{4\pi R} e^{i(kR - \omega t)} \hat{e} \\ \vec{b}_{rad}^{(+)}(\vec{r}, t) &= -\frac{\mu_0 \omega^2 p_0^{(+)} \sin \theta}{4\pi R c} e^{i(kR - \omega t)} \hat{b} \end{aligned} \quad [3.10]$$

El vector de Poynting instantani és



$$\vec{S}(t) = \frac{\vec{e}_{rad} \wedge \vec{b}_{rad}}{\mu_0} = \frac{\mu_0 \omega^4 |p_0^{(+)}|^2 \sin^2 \theta}{16\pi^2 R^2 c} \cos^2(kR - \omega t) \hat{R}$$

cosa que permet avaluar la intensitat de l'emissió radiada (tal com hem vist al capítol 1):

$$I = \langle |\vec{S}(t)| \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} \left[ \left\langle \frac{\vec{e}^{(+)} \wedge \vec{b}^{(-)}}{\mu_0} \right\rangle \right] = \frac{\mu_0 \omega^4 |p_0^{(+)}|^2 \sin^2 \theta}{32\pi^2 R^2 c}$$

on  $\langle \dots \rangle$  denota la mitjana temporal.

Integrant la intensitat en totes les direccions de l'espai, obtenim **la potència radiada mitjana total**:

$$\langle P_{rad} \rangle = \iint Ids = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi IR^2 \sin \theta d\theta d\phi$$

Substituint  $I$  i integrant sobre l'angle azimutal, tenim

$$\langle P_{rad} \rangle = \frac{\mu_0 \omega^4 |p_0^{(+)}|^2}{12\pi c} = \frac{\omega^4 |p_0^{(+)}|^2}{12\pi \epsilon_0 c^3} \quad [3.11]$$

### 3.2.1 Emissió de llum d'àtoms i molècules individuals

Els resultats obtinguts a partir de la teoria clàssica es poden utilitzar per descriure la llum emesa per àtoms o molècules individuals a distàncies on l'aproximació dipolar i de zona de radiació és vàlida.

El model d'àtom ha anat canviant al llarg del temps a mesura que s'anava desenvolupant el coneixement de la física atòmica. Tanmateix, el model de Bohr continua sent una representació prou acurada: els electrons d'un àtom ocupen orbitals electrònics amb nivells d'energia ben definits, que es determinen en funció dels nombres quàntics bàsics  $(n, l, m, s)$ . Cada nivell d'energia es defineix per la seva energia  $E_i$  i pot estar ocupat per un sol electró, tal com estableix el principi d'exclusió de Pauli. En el marc de la mecànica quàntica, aquests nivells d'energia constitueixen els estats propis de l'àtom i tenen un valor d'energia ben definit.

Si volem modelar molècules en lloc de considerar un únic àtom aïllat, haurem d'incorporar més nivells d'energia que representin els estats de vibració i rotació de la molècula al voltant de la seva posició d'equilibri. Aquests nivells es poden modelar com a generats a partir de potencials d'oscil·lació harmònica.

L'enfocament clàssic utilitzat per modelar oscil·lacions atòmiques va ser definit per Lorentz; considera que un model d'oscil·lador clàssic pot descriure el moviment



electrònic de l'àtom o molècula sota estimulació (vegeu l'Apèndix C per a més detalls). La radiació emesa per àtoms, molècules o sòlids excitats correspon a salts entre diferents estats estacionaris del sistema, amb freqüències ben definides caracteritzades per la fórmula

$$E_i - E_f = \hbar\omega_0$$

amb la constant de Planck  $\hbar = 1.054 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} = 6.582 \cdot 10^{-16} \text{ eV} \cdot \text{s}$ , sent  $E_i$  i  $E_f$  els estats inicials i finals d'energia del sistema.

Considerem un àtom que està fent una transició caracteritzada per l'emissió de llum a freqüència  $\omega_0$ . Per avaluar la magnitud del moment dipolar segons l'enfocament de electrodinàmica clàssica, associem un dipol oscil·lant a aquesta emissió concreta:

$$\vec{p}(t) = \text{Re}[\vec{p}^{(+)}(t)] = \text{Re}[qx^{(+)}(t)\hat{d}] \quad [3.12]$$

on  $q$  és el valor absolut de la càrrega de l'electró,  $x$  és el desplaçament de la càrrega negativa respecte de la positiva i  $\hat{d}$  és un vector unitari que en qualsevol moment es dirigeix de la càrrega negativa a la positiva.

L'expressió de  $x(t)$  s'obté directament de l'equació d'oscil·lador harmònic del model de Lorentz:

$$\frac{d^2x^{(+)}}{dt^2} + \omega_0^2x^{(+)} = 0$$

que té per solució  $x^{(+)}(t) = x_0^{(+)}e^{-i\omega_0t}$ ,

creant així un moment dipolar oscil·lant:

$$\vec{p}^{(+)} = qx_0^{(+)}e^{-i\omega_0t}\hat{d} \quad [3.13]$$

#### ◆ Nota

Els àtoms presenten ressonàncies agudes tant en la seva emissió de radiació espontània com en la seva resposta estimulada als senyals aplicats, que es descriuen habitualment en aquest model mitjançant ressonàncies harmòniques simples.

La majoria dels àtoms responen principalment al camp elèctric d'un senyal aplicat més que al camp magnètic. Les transicions atòmiques més fortes solen ser del tipus conegut com a transicions de dipol elèctric (altres tipus de transicions atòmiques es classifiquen com a dipol magnètic, quadrupol elèctric o fins i tot d'ordre superior). Aquestes transicions es poden estudiar clàssicament a través del model d'oscil·lador electrònic clàssic, en què les freqüències d'oscil·lació natural es corresponen a les ressonàncies atòmiques. Amb algunes extensions senzilles, aquest model simplificat pot descriure totes les característiques significatives d'una transició quàntica atòmica real.



A partir d'aquesta expressió, podem obtenir directament els camps electromagnètics radiats substituint la segona derivada del moment dipolar a l'expressió [3.7A]:

$$\begin{aligned}\vec{e}_{rad}^{(+)} &= \frac{\mu_0 \omega_0^2 q x_O^{(+)} \sin \theta}{4\pi R} e^{-i\omega_0(t-R/c)} \hat{e} \\ \vec{b}_{rad}^{(+)} &= \frac{\mu_0 \omega_0^2 q x_O^{(+)} \sin \theta}{4\pi R c} e^{-i\omega_0(t-R/c)} \hat{b}\end{aligned}\quad [3.14]$$

Per obtenir aquesta expressió, s'avalua el moment dipolar en el temps retardat  $t' = t - R/c$  i s'omet un factor de fase de  $\pi$ , la qual cosa no afecta la direcció d'oscil·lació del dipol.

La potència radiada mitjana total s'obté fàcilment a partir de l'expressió [3.11]:

$$\langle P_{rad} \rangle = \frac{\mu_0 \omega_0^4 q^2 |x_O^{(+)}|^2}{12\pi c} \quad [3.15A]$$

En el cas d'un àtom real, tenim diverses transicions possibles entre nivells d'energia, de manera que una solució més realista hauria d'incloure aquesta possibilitat. D'aquesta manera, la potència radiada total d'un estat inicial determinat es podrà obtenir sumant totes aquestes possibles trajectòries d'emissió. Aquesta idea la podem depurar una mica si volem obtenir un acord quantitatiu entre aquesta potència radiada i la potència radiada calculada a partir de la mecànica quàntica; concretament, podem introduir un pes per a cada possible transició, anomenat factor de resistència (*strength factor*):  $f_i$  amb

$$\sum_i f_i = 1$$

La potència radiada total d'un nivell inicial determinat ve donada per l'expressió

$$\langle P_{rad}^{TOT} \rangle = \sum_i f_i \cdot \frac{\mu_0 \omega_{0i}^4 q^2 |x_{0i}^{(+)}|^2}{12\pi c} \quad [3.15B]$$

Tot i així, caldrà incloure un terme addicional al model per tal d'obtenir una bona correspondència entre aquesta descripció clàssica i el càlcul més exacte de la mecànica quàntica. Com que, en el càlcul anterior, no hi hem inclòs les pèrdues, l'emissió podria tenir lloc durant un període de temps infinit. Experimentalment, però, està ben establert que cap població electrònica es pot mantenir permanentment en un estat excitat i que l'estat excitat s'esgotarà a una velocitat de decaïment determinada, que s'anomena **velocitat de decaïment de l'emissió espontània**.

### 3.2.2 Emissió de dipols oscil·ladors harmònics amortits

Aquest mecanisme d'amortiment només es pot derivar a partir de principis bàsics utilitzant la mecànica quàntica. Haurem d'incorporar-lo en el model clàssic de manera fenomenològica. Els dos enfocaments diferents que venen a continuació es



poden establir si volem justificar, encara que no sigui de manera rigorosa, la presència d'aquest amortiment en el procés d'emissió atòmica.

### A. Velocitat de decaïment de l'energia

Suposem que un àtom ha guanyat una determinada quantitat d'energia, de manera que part de la seva població es transfereix a estats excitats. En el nostre model d'oscil·lador de Lorentz, podem definir l'energia inicial dels oscil·ladors amb freqüència  $\omega_0$  com

$$E = \frac{1}{2} m \omega_0^2 x_0^2$$

Pel que fa a aquesta energia, podem escriure la potència radiada total de la manera següent

$$\langle P_{rad} \rangle = \frac{\mu_0 q^2 \omega_0^2}{12\pi c} \omega_0^2 x_0^2 = \frac{\mu_0 q^2 \omega_0^2}{6\pi c m} E \quad [3.16]$$

En absència d'altres mecanismes de pèrdua d'energia, podem considerar que qualsevol reducció de l'energia inicial del sistema ha d'aparèixer com a energia radiada per l'àtom, donant lloc a una disminució de l'energia del dipol oscil·lant. Així, podem considerar la potència radiada total com una velocitat de pèrdua d'energia per unitat de temps:

$$\begin{aligned} \langle P_{rad} \rangle &= -\frac{dE}{dt} = \frac{\mu_0 q^2 \omega_0^2}{6\pi c m} E \\ \frac{dE}{E} &= -\frac{\mu_0 q^2 \omega_0^2}{6\pi c m} dt \quad \Rightarrow \quad \boxed{E(t) = E e^{-\gamma t}} \end{aligned}$$

on definim l'expressió clàssica del coeficient de decaïment espontani com

$$\boxed{\gamma = \frac{\mu_0 \omega_0^2 q^2}{6\pi m c} = \frac{\omega_0^2 q^2}{6\pi m \epsilon_0 c^3}} \quad [3.17]$$

#### ◆ Nota

L'emissió de radiació no és l'únic mecanisme possible per perdre població electrònica excitada d'un sistema material. Altres possibilitats serien, per exemple, la pèrdua d'energia per col·lisions amb d'altres àtoms en el que anomenem **transicions no radiatives**. En aquest cas, podrem definir el coeficient de decaïment total com

$$\gamma_{tot} = \gamma_{rad} + \gamma_{non\ rad}$$

És aquest coeficient total de decaïment el que es mesura, per exemple, en mesures de decaïment de fluorescència. Aquestes mesures són molt importants per tal de poder determinar la vida útil d'un estat excitat donat.



## B. Reacció a la radiació

Una forma alternativa d'obtenir el coeficient d'amortiment dels oscil·ladors atòmics considera que el dipol harmònic perd energia a causa de la presència d'una força de fricció fictícia que actua sobre l'àtom:

$$F_f = -bv = -\gamma mv$$

Aquesta força de fricció fictícia es pot interpretar com una conseqüència de la reacció del camp radiat sobre el propi àtom. Podem quantificar la magnitud d'aquesta pèrdua amb un argument de conservació d'energia: el treball realitzat per la força de fricció sobre l'àtom durant un període d'oscil·lació donarà lloc a una pèrdua d'energia per part de l'oscil·lador; com que la radiació és l'única manera que un àtom aïllat té per perdre energia, l'energia radiada total durant un període hauria de ser igual al treball realitzat al dipol. Aquest argument es pot plasmar en forma matemàtica:

[Treball total exercit per la força de fricció = Energia total radiada]<sub>per un període</sub>

$$\int_0^T F_f \cdot v dt = \int_0^T P_{rad} dt$$

Utilitzant [3.9]:

$$\int_0^T \gamma m \dot{x} \cdot \dot{x} dt = \int_0^T \frac{\mu_0 q^2 (\ddot{x})^2}{6\pi c} dt$$

Integrem per parts el cantó dret i obtenim

$$\gamma m \int_0^T \dot{x} \cdot \dot{x} dt = \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} \left( [\dot{x} \cdot \ddot{x}]_0^T - \int_0^T \dot{x} \cdot \ddot{\dot{x}} dt \right)$$

Tenint en compte que l'àtom està realitzant un moviment harmònic (amortit molt lentament), l'expressió entre parèntesis s'anul·la quan s'avalua entre 0 i T i la derivada de tercer ordre es pot expressar com

$$\ddot{\dot{x}} = -\omega_0^2 \dot{x}$$

Donant com a resultat final

$$\gamma \int_0^T \dot{x}^2 dt = \frac{\mu_0 q^2 \omega_0^2}{6\pi mc} \int_0^T \dot{x}^2 dt \quad \Rightarrow \quad \boxed{\gamma = \frac{\mu_0 q^2 \omega_0^2}{6\pi mc}}$$

La substitució dels valors típics de les transicions atòmiques en aquesta expressió ens dona valors de velocitat de decaïment de l'ordre de  $10^8 \text{ s}^{-1}$  (vegeu l'apartat Problemes resolts per a més detalls).

Un cop que hem obtingut una expressió per a la velocitat de decaïment de l'emissió radiativa, podem escriure una expressió explícita per a l'emissió de radiació per un



oscil·lador harmònic amortit, en què afegirem un terme addicional a l'equació del model de Lorentz per incloure l'amortiment:

$$\frac{d^2 x^{(+)}}{dt^2} + \gamma \frac{dx^{(+)}}{dt} + \omega_0^2 x^{(+)} = 0$$

La solució d'aquesta equació s'expressa de la següent manera:

$$x^{(+)}(t) = x_0^{(+)} e^{-\frac{\gamma}{2}t} e^{-i\omega t} \quad \text{amb} \quad \omega^2 = \omega_0^2 - \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2$$

i

$$p^{(+)}(t) = qx_0^{(+)} e^{-\frac{\gamma}{2}t} e^{-i\omega t} \quad [3.18]$$

Per calcular els camps de radiació i la potència total radiada, realitzem la segona derivada del moment dipolar. Tenint en compte els valors típics de la constant d'amortiment i les freqüències òptiques en l'espectre visible, fem servir l'aproximació  $\gamma \ll \omega \approx \omega_0$ :

$$\ddot{p}^{(+)} = \left(-\frac{\gamma}{2} - i\omega\right)^2 p^{(+)} \approx -\omega_0^2 p^{(+)}$$

### Emissió de radiació d'un oscil·lador harmònic amortit

$$\begin{aligned} \vec{e}_{rad}^{(+)} &= \frac{\mu_0 q x_0^{(+)} \omega_0^2 \sin \theta}{4\pi R} e^{-\frac{\gamma t}{2}} e^{i(kR - \omega_0 t)} \hat{e} \\ \vec{b}_{rad}^{(+)} &= \frac{\mu_0 q x_0^{(+)} \omega_0^2 \sin \theta}{4\pi R c} e^{-\frac{\gamma t}{2}} e^{i(kR - \omega_0 t)} \hat{b} \\ \langle P_{rad} \rangle &= \frac{\mu_0 q^2 \omega_0^4 |x_0^{(+)}|^2}{12\pi c} e^{-\gamma t} \end{aligned} \quad [3.19]$$

Aquest és el resultat principal d'aquest apartat. A continuació resumim les principals propietats de la radiació d'un oscil·lador harmònic dipolar

- Camps radiats proporcionals a  $1/R$ .
- Patró de camp d'emissió angular proporcional a  $\sin\theta$ . No s'emet radiació en la direcció de l'oscil·lació (en comparació amb la solució escalar d'una ona esfèrica, que emet en totes direccions).
- Potència radiada proporcional a la quarta potència de la freqüència (aquesta dependència és típica dels petits dipols al límit anomenat dispersió de Rayleigh, com veurem més endavant).
- En absència d'altres mecanismes de pèrdua, la potència radiada decau a una velocitat constant donada pel coeficient de decaïment de l'emissió espontània.



Si l'àtom és excitat contínuament per algun mitjà, la llum emesa consistirà generalment en un conjunt de ràfegues amortides de radiació EM amb durades típiques en el rang de les dècimes de nanosegon, tal i com es mostra esquemàticament a la figura.

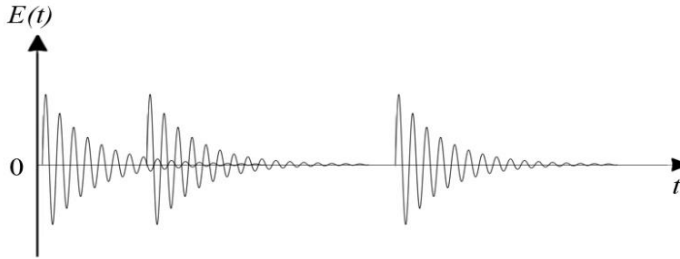


Figura 3.4 Representació esquemàtica de la llum emesa per un oscil·lador harmònic amortit

### 3.2.3 Amplada de línia natural de la radiació emesa

A l'apartat anterior, hem derivat la constant d'amortiment associada a l'emissió de llum dels dipòls oscil·lants. A part del decaïment temporal de la potència radiada, una altra conseqüència d'aquesta emissió amortida és que la llum radiada no és purament monocromàtica, sinó que té una amplada de banda finita.

L'**amplada de banda** d'un senyal és una mesura del seu contingut de freqüència. En el cas que ens ocupa, està relacionat amb la vida finita de qualsevol estat excitat. L'amplada de banda associada a una transició radiativa pura s'anomena **amplada de línia natural**.

L'amplada de banda d'un senyal temporal donat es pot determinar mitjançant la transformada de Fourier del camp temporal:

$$e(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e_{\text{rad}}(t) e^{i\omega t} dt = \frac{\mu_0 q \omega_0^2 x_0^{(+)} \sin \theta}{4\pi R} \int_0^{\infty} e^{-\frac{\gamma t}{2}} \cos(\omega_0 t) e^{i\omega t} dt$$

$$e(\omega) = \frac{\mu_0 q \omega_0^2 x_0^{(+)} \sin \theta}{8\pi R} \left[ \frac{1}{\frac{\gamma}{2} + i(\omega_0 - \omega)} + \frac{1}{\frac{\gamma}{2} - i(\omega_0 + \omega)} \right]$$

Com que les freqüències emeses són properes al valor de ressonància, el primer terme entre parèntesis és molt més gran que el segon. És costum de negligir el segon terme en el que s'anomena **aproximació d'ona rotativa**.

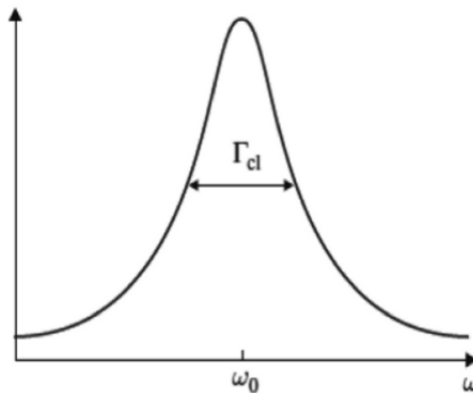
L'espectre de l'emissió radiada es defineix com a proporcional al mòdul al quadrat de la seva amplitud  $e(\omega)$ , donant:



$$I(\omega) = \frac{I_0 \omega_0^4}{\frac{\gamma^2}{4} + (\omega_0 - \omega)^2} \quad \text{with} \quad I_0 = \left( \frac{\mu_0^2 q^2 |x_0^{(+)}|^2 \sin^2 \theta}{64\pi^2 R^2} \right)$$

L'espectre associat a l'amplada de línia natural té una dependència de freqüència característica que s'expressa com un **perfil lorentzià amb una amplada màxima a mitja alçada donada per la constant d'amortiment**. Com que les constants d'amortiment típiques són de l'ordre d'uns quants GHz, podem estimar les amplades de banda relatives d'una transició purament radiativa:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} \approx \frac{10^9}{10^{15}} \approx 10^{-6}$$



### Emissió d'un conjunt d'*n* àtoms

Un tractament detallat de l'emissió d'un nombre dens d'emissors queda fora de l'àmbit d'un curs introductorí com aquest, però podem assenyalar alguns aspectes generals.

Qualsevol font real està formada per un gran nombre d'emissors, cadascun d'ells emetent de la manera descrita. La superposició de l'emissió de tots els difusors individuals dona lloc a la llum emesa per fonts naturals, que generalment es caracteritza per les següents propietats:

- Incoherència: la intensitat total és la suma d'intensitats individuals.
- No polaritzat: no hi ha relació de fase fixa entre els emissors individuals.

Mecanismes d'ampliació addicionals:

- Eixamplament de Doppler
- Eixamplament col·lisional



### 3.3 Interacció entre un àtom individual i un camp de llum incident

#### 3.3.1 Dispersió i absorció

Després d'estudiar les propietats d'emissió d'un dipol oscil·lant, considerem ara el procés que descriu la interacció d'una ona de llum amb un àtom. Aquest procés fonamental constitueix la base del mecanisme per a la interacció entre llum i matèria, que és altament rellevant en fotònica.

El punt de partida del tractament clàssic és novament el model de Lorentz, al qual ara incorporarem un terme forçant proporcionat per l'acció del camp elèctric extern sobre l'àtom.

Considerem un camp elèctric extern en forma d'ona plana amb freqüència externa  $\omega_e$ , de polarització lineal i que es propaga al llarg d'una direcció donada per l'eix  $z$ . Quan aquest camp incideix sobre un àtom (modelat com un dipol oscil·lant, d'acord amb el model de Lorentz), indueix l'oscil·lació del núvol electrònic impulsat per la força elèctrica descrita per l'equació

$$\frac{d^2 \bar{x}}{dt^2} + \gamma \frac{d\bar{x}}{dt} + \omega_0^2 \bar{x} = -\frac{q\bar{E}_{ext}}{m} \quad [3.21A]$$

Com que el moment dipolar ve donat directament per l'expressió  $\bar{p} = -q\bar{x}$ , obtenim directament una equació de l'evolució del moment dipolar:

$$\frac{d^2 p}{dt^2} + \gamma \frac{dp}{dt} + \omega_0^2 p = \frac{q^2 E_{ext}}{m} \quad [3.21B]$$

que ara és una equació per al mòdul, ja que la direcció de  $p$  és sempre paral·lela a  $E$ . L'expressió del camp extern és:

$$E_{ext}^{(+)} = E_0^{(+)} e^{-i\omega_e t} \quad [3.21C]$$

Aquest camp induirà una solució de tipus harmònic per al moment dipolar, que es pot expressar:

$$p^{(+)}(t) = p_0^{(+)} e^{-i\omega t} \quad [3.21D]$$

La solució general de l'equació de l'oscil·lador harmònic forçat consisteix en la suma d'una solució de l'equació homogènia amb una solució particular:

$$p^{(+)} = p_{Hom}^{(+)} + p_{Part}^{(+)}$$

La solució homogènia, oscil·lant a la freqüència de ressonància natural del sistema  $\omega_0$ , correspon a [3.18]. Com hem tractat anteriorment, el seu decaïment amb el temps serà de l'ordre de  $1/\gamma$ . Si ens interessa la resposta estacionària dels àtoms després



d'aquest període transitori, haurem de prendre la solució particular, que oscil·larà a la freqüència externa imposada pel camp extern.

Substituint la suposició de  $p^{(+)}$  (equació [3.21D]) i  $E^{(+)}$  (equació [3.21C]) a [3.21B] per  $\omega = \omega_e$  ens dona

$$-\omega_e^2 p_O^{(+)} - i\gamma\omega_e p_O^{(+)} + \omega_0^2 p_O^{(+)} = \frac{q^2 E_O^{(+)}}{m} \Rightarrow p_O^{(+)} = \frac{q^2 E_O^{(+)}/m}{(\omega_0^2 - \omega_e^2) - i\gamma\omega_e} \quad [3.21E]$$

L'oscil·lació dipolar corresponent a aquesta solució estacionària s'utilitza per trobar els **camp dispersats** de l'àtom únic:

$$\begin{aligned} \bar{e}_{scatt}^{(+)} &= \frac{\mu_0 \omega_e^2 \sin \theta}{4\pi R} \left[ \frac{q^2 E_O^{(+)} / m}{(\omega_e^2 - \omega_0^2) + i\gamma\omega_e} \right] e^{i(kR - \omega_e t)} \hat{u}_e \\ \bar{b}_{scatt}^{(+)} &= \frac{\mu_0 \omega_e^2 \sin \theta}{4\pi Rc} \left[ \frac{q^2 E_O^{(+)} / m}{(\omega_e^2 - \omega_0^2) + i\gamma\omega_e} \right] e^{i(kR - \omega_e t)} \hat{u}_b \end{aligned} \quad [3.22]$$

Tot i que l'expressió corresponent als camps dispersats comparteix un comportament similar amb el dels camps radiats [3.19], hi ha una diferència substancial en la seva dependència de freqüència, que és un aspecte fonamental per tal de poder diferenciar l'emissió de llum dels processos d'interacció entre llum i matèria. Els àtoms que actuen com a fonts de llum només poden emetre aquelles freqüències corresponents als salts entre els seus nivells d'energia estacionaris; aquests salts poden correspondre a nivells discrets molt ben definits (com és el cas dels àtoms) o a algunes bandes quasi contínues (com en el cas dels sòlids).

Quan els àtoms interactuen amb una ona EM externa de freqüència arbitrària, podem distingir els dos processos bàsics diferents següents.

**Absorció:** La freqüència externa correspon a l'energia que ressona amb algun salt entre els nivells d'energia estacionaris del medi. En aquest cas, l'energia EM es pot transferir de l'ona EM a la part atòmica de la població electrònica que està sent excitada. L'energia absorbida es pot reemetre en forma de radiació EM, o bé es pot transferir a la xarxa mitjançant l'excitació fonònica per convertir-se finalment en una variació de l'energia interna del material.

Per exemple, és ben sabut que si il·luminem algun gas amb una font de llum que tingui un espectre continu, observarem en la transmissió un conjunt de línies fosques corresponents precisament a les freqüències absorbides pel gas, que corresponen exactament a les freqüències emeses pel mateix gas quan és excitat per algun mitjà, com per exemple una làmpada de descàrrega.

**Dispersió:** la freqüència externa no ressona amb cap de les transicions electròniques entre nivells. En aquestes condicions, l'efecte del camp elèctric extern és encara una oscil·lació induïda dels orbitals electrònics, però en aquest cas no hi ha transferència



neta d'energia a l'àtom i no s'indueix cap transició electrònica. L'energia de l'ona EM es reemet en totes direccions (excepte en la direcció de l'oscil·lació del dipol) després d'un període de temps que és de l'ordre del coeficient de decaïment de l'emissió espontània.

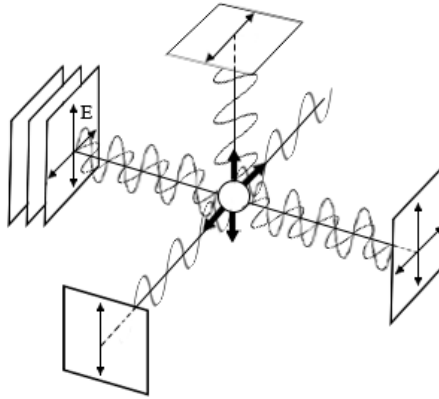


Figura 3.5 Dispersió de la llum per un dipol oscil·lant

La potència radiada total quan es produeix una dispersió es pot obtenir com és habitual:

$$\langle P_{scatt} \rangle = \frac{\mu_0 \omega_e^4 |p_o^{(+)}|^2}{12\pi c} = \frac{\mu_0 \omega_e^4}{12\pi c} \left[ \frac{q^4 |E_o^{(+)}|^2 / m^2}{(\omega_e^2 - \omega_0^2)^2 + (\gamma \omega_e)^2} \right]$$

i es pot expressar en termes d'intensitat de incident. Per una ona plana

$$I_{inc} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c |E_o^{(+)}|^2,$$

la **potència dispersa total d'un sol dipol** s'expressa

$$\langle P_{scatt} \rangle = \frac{\mu_0 q^4}{6\pi \varepsilon_0 c^2 m^2} \left[ \frac{\omega_e^4}{(\omega_e^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2 \omega_e^2} \right] \cdot I_{inc} \quad [3.23A]$$

En la teoria de la dispersió, és habitual treballar amb una magnitud relacionada coneguda com a **secció eficaç de dispersió** (amb unitats de superfície), que representa la relació entre la potència dispersa total i la intensitat incident. Aquesta magnitud defineix la resposta d'un àtom al camp incident segons l'enfocament clàssic dipolar:

$$\sigma_{scatt} = \frac{\langle P_{scatt} \rangle}{I_{inc}} = \frac{q^4}{6\pi \varepsilon_0^2 c^4 m^2} \left[ \frac{\omega_e^4}{(\omega_e^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2 \omega_e^2} \right] \quad [3.23B]$$



El comportament de la resposta atòmica depèn fortament de la freqüència. Normalment distingim els següents tres règims diferents quan comparem la freqüència externa amb la freqüència de ressonància del dipol.

### 1. Règim de dispersió de Thomson ( $\omega_e \gg \omega_0 \gg \gamma$ )

En aquest règim, la freqüència incident és superior, tant a la freqüència de ressonància, com a la velocitat de decaïment del dipol. La secció eficaç de dispersió és aproximadament constant i s'anomena secció eficaç de dispersió de Thomson:

$$(\omega_e^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2 \omega_e^2 \approx \omega_e^4 \left( 1 + \frac{\gamma^2}{\omega_e^2} \right) \approx \omega_e^4 \quad [3.24A]$$

$$\sigma_{\text{Thomson}} = \frac{q^4}{6\pi\epsilon_0^2 c^4 m^2}$$

### 2. Dispersió ressonant ( $\omega_e \approx \omega_0$ )

En aquest règim, l'efecte de la dispersió augmenta fortament i, per l'energia de ressonància, es transferix efectivament al medi en el procés d'absorció. Podem utilitzar la següent aproximació:

$$(\omega_e^2 - \omega_0^2) \approx (\omega_e - \omega_0)(\omega_e + \omega_0) \approx 2\omega_e(\omega_e - \omega_0)$$

$$\frac{\omega_e^4}{(\omega_e^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2 \omega_e^2} \approx \frac{\omega_e^4}{4\omega_e^2(\omega_e - \omega_0)^2 + \gamma^2 \omega_e^2} \approx \frac{\omega_e^2 / 4}{(\omega_e - \omega_0)^2 + (\gamma/2)^2}$$

La secció eficaç de dispersió resultant adquireix el perfil lorentzià:

$$\sigma_{\text{abs}} = \frac{q^4}{6\pi\epsilon_0^2 c^4 m^2} \left[ \frac{(\omega_e / 2)^2}{(\omega_e - \omega_0)^2 + (\gamma/2)^2} \right] \quad [3.24B]$$

### 3. Dispersió de Rayleigh ( $\omega_e, \gamma \ll \omega_0$ )

A freqüències molt per sota de la freqüència de ressonància, entrem en el domini de la dispersió de Rayleigh. En aquest règim:

$$\frac{\omega_e^4}{(\omega_e^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2 \omega_e^2} \approx \frac{\omega_e^4}{\omega_0^4}$$

Expressem la secció eficaç de dispersió de Rayleigh corresponent com a

$$\sigma_{\text{Rayleigh}} = \frac{q^4 \omega_e^4}{6\pi\epsilon_0^2 c^4 m^2 \omega_0^4} \quad [3.24C]$$



Aquest règim es caracteritza per una secció eficaç de dispersió proporcional a la quarta potència de la freqüència que, per posar un exemple és responsable del color blau del cel.

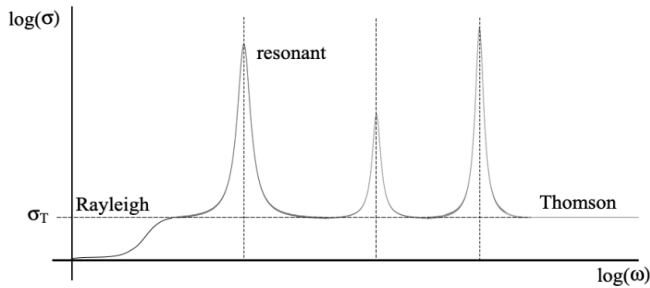


Figura 3.6 Diferents règims de la secció eficaç de dispersió

### 3.3.2 Transferència de potència des d'un camp extern

A mesura que l'energia es dispersa cap enfora de l'àtom, l'energia del camp incident disminueix. Podem calcular la transferència de potència a partir del camp elèctric a l'àtom:

$$P_{transfer} = \vec{F}_{ext} \cdot \vec{v} = -q\vec{E}_{ext} \cdot \dot{\vec{x}} = E_{ext} \cdot \dot{p} \quad [3.25]$$

Com que es tracta d'un producte bilineal dels camps, haurem d'avaluar-lo utilitzant valors reals:

$$P_{transfer} = \frac{1}{4} \left[ E_{ext}^{(+)} \cdot \dot{p}^{(+)} + E_{ext}^{(+)} \cdot \dot{p}^{(-)} + E_{ext}^{(-)} \cdot \dot{p}^{(+)} + E_{ext}^{(-)} \cdot \dot{p}^{(-)} \right]$$

Els camps òptics i el moment dipolar oscil·len a freqüències molt grans de l'ordre de  $10^{15}$  Hz; per tant, la potència instantània és un valor mitjà i no una magnitud físicament accessible. El primer i el quart termes d'aquesta expressió tenen una mitjana de zero, mentre que el segon i el tercer són complexos conjugats entre si. Així, la transferència de potència mitjana s'escriu com

$$\langle P_{transfer} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} \left[ E_{ext}^{(+)} \cdot \dot{p}^{(-)} \right] \quad [3.26]$$

De les equacions [3.21D] i [3.21E], obtenim

$$\dot{p}^{(-)} = i\omega_e \frac{q^2 E_o^{(-)} / m}{(\omega_o^2 - \omega_e^2) + i\gamma\omega_e}$$



$$\langle P_{transfer} \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[ i \frac{\omega_e q^2 |E_O|^2}{m} \left( \frac{(\omega_O^2 - \omega_e^2) - i\gamma\omega_e}{(\omega_O^2 - \omega_e^2)^2 + \gamma^2\omega_e^2} \right) \right] = \frac{q^2 |E_O|^2}{2m} \left[ \frac{\gamma\omega_e^2}{(\omega_O^2 - \omega_e^2)^2 + \gamma^2\omega_e^2} \right]$$

Això ho podem expressar en termes de la intensitat incident:

$$\langle P_{transfer} \rangle = \frac{q^2 \gamma \omega_e^2}{\varepsilon_O c m [(\omega_O^2 - \omega_e^2)^2 + \gamma^2 \omega_e^2]} I_{inc} \quad [3.27]$$

La **secció eficaç d'extinció** es defineix com la relació entre la transferència de potència i la intensitat incident:

$$\sigma_{ext} = \frac{\langle P_{transfer} \rangle}{I_{inc}} = \frac{q^2}{\varepsilon_O c m} \left[ \frac{\gamma \omega_e^2}{(\omega_O^2 - \omega_e^2)^2 + \gamma^2 \omega_e^2} \right] \quad [3.28]$$

Hem comentat diferents propietats relacionades amb la radiació de dipols simples, així com la interacció entre camps externs i dipols simples. En aquest cas, no hi ha altres mecanismes possibles perquè es produeixi cap transferència d'energia a l'entorn, de manera que l'energia total transferida al dipol hauria de radiar necessàriament cap a l'exterior. Amb aquest argument, podem veure que, per a un sol àtom, la secció eficaç de dispersió i extinció haurien de ser iguals. La comparació d'aquestes dues magnituds ofereix una manera alternativa d'obtenir una expressió per al coeficient de decaïment de l'emissió espontània. Fent l'equivalència de les equacions [3.23B] i [3.28]:

$$\frac{q^4 \omega_e^4}{6\pi \varepsilon_O^2 m^2 c^4} = \frac{q^2 \gamma \omega_e^2}{\varepsilon_O c m} \Rightarrow \gamma = \frac{q^2 \omega_e^2}{6\pi \varepsilon_O m c^3} = \frac{\mu_O q^2 \omega_e^2}{6\pi m c}$$

### 3.3.3 Interacció de la llum amb N àtoms

Considerarem breument alguns dels efectes de l'ona òptica EM que interactua amb una col·lecció d'àtoms. En aquest cas, nous mecanismes d'energia alliberada dels àtoms excitats poden comportar noves transicions no radiatives. És més, s'ha de tenir en consideració els diferents mecanismes d'eixamplament de l'amplada de línia i els efectes de camp local també podrien ser importants, entre alguns altres efectes.

Observem un feix de llum que travessa una cel·la plena d'un gas. Cadascun dels àtoms realitzarà oscil·lacions forçades (tal com s'ha explicat en els apartats anteriors) mentre que la intensitat de la radiació disminuirà al llarg de la direcció inicial de propagació. L'efecte net de la pèrdua d'intensitat de l'ona incident s'anomena extinció i es pot descriure mitjançant una secció eficaç d'extinció de la mateixa manera que l'hem derivada anteriorment en el cas d'un sol àtom. Per tal de derivar una expressió per la dependència de la intensitat de la llum en funció de la distància dins del medi, considerem una làmina prima de la cel·la, de longitud  $\Delta x$  i perpendicular a la direcció



de propagació. Si la densitat del nombre d'àtoms a la làmina és  $N$ , la pèrdua de radiació electromagnètica s'expressaria:

$$u(x + \Delta x) - u(x) \approx -NP_{transfer} \Delta t = -N\sigma_{ext} I(x) \Delta x / c$$

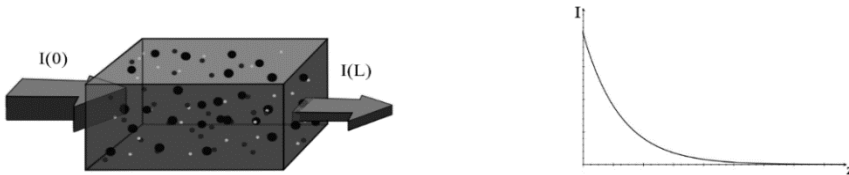
on  $\sigma_{ext}$  és el coeficient d'extinció d'un sol àtom i  $\Delta t$  és el temps que triga a travessar la làmina. Dividint per  $\Delta x$  i obtenint el límit  $\Delta x \rightarrow 0$ , n'obtenim l'equació principal:

$$\frac{du}{dx} = -\frac{N\sigma_{ext} I(x)}{c}$$

Aquesta equació es pot transformar en una equació del canvi d'intensitat reconeixent que  $I(x) = c \cdot u(x)$

$$\frac{dI}{dx} = -N\sigma_{ext} I \quad \rightarrow \quad \boxed{I(x) = I_0 e^{-\alpha_{ext} x}} \quad [3.29]$$

Aquesta relació és la **Llei de Beer-Lambert**, que defineix l'extinció d'una ona òptica amb la distància dins d'un medi material.



El coeficient d'extinció total,  $\alpha_{ext}$ , es defineix com  $N$  vegades la secció eficaç d'extinció d'un dipol sol, amb unitats de  $m^{-1}$ .

L'extinció de la llum en la direcció de propagació es deu principalment a dos processos diferents: **la dispersió i l'absorció**:

$$\alpha_{ext} = \alpha_{scat} + \alpha_{abs}$$

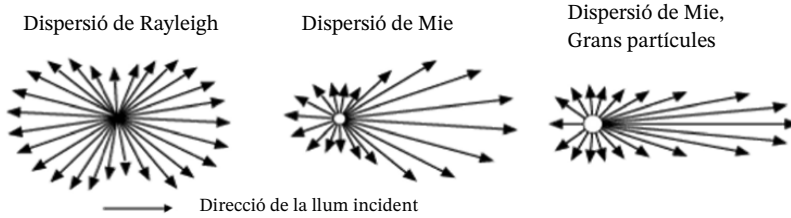
### Dispersió

El procés de dispersió correspon a l'emissió forçada de radiació de cada dipol individual, tal i com hem estudiat anteriorment, i condueix a una redistribució de la radiació incident. Distingim els següents tipus diferents de dispersió.

**Dispersió elàstica:** La freqüència de radiació emesa és igual a la freqüència de l'ona incident.

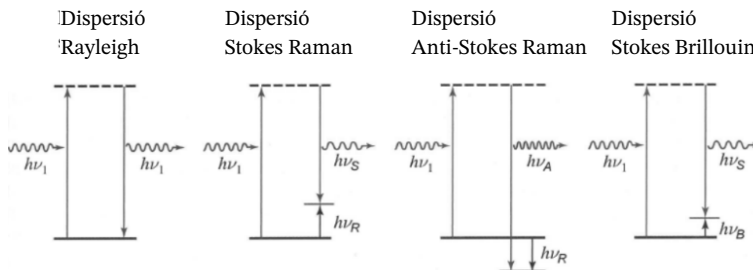
**Dispersió de Rayleigh** ( $l \ll \lambda$ ): Emissió proporcional a  $\omega^4$  i isotropa.

**Dispersió de Mie** ( $l \geq \lambda$ ): Emissió independent de la freqüència i dirigida principalment en direcció cap a endavant.



**Dispersió inelàstica:** Quan hi ha estats vibracionals o fonons presents en el medi, la freqüència de la llum dispersa pot ser diferent de la de la llum incident. Els dos tipus bàsics són la **dispersió Raman** i la **dispersió de Brillouin**.

En la dispersió Raman, la diferència d'energies entre els estats inicial i final correspon a alguna transició vibratòria del medi. L'espectroscòpia Raman és una de les tècniques més sensibles que s'utilitzen actualment en la tecnologia fotònica i té moltes aplicacions diferents. En la dispersió de Brillouin, la diferència d'energies correspon a l'excitació fonònica a la xarxa.



## Absorció

L'energia incident es transfereix als dipòls i es converteix en energia tèrmica, acústica o vibratòria interna dins del medi. L'absorció té lloc a freqüències properes a les resonàncies del medi. Les transicions de resonància típiques per als materials que són transparents en el domini visible es troben a les parts ultraviolada (resonàncies electròniques) o infraroja (vibracions i rotacions) de l'espectre.

Per als medis densos, els efectes de l'absorció i la dispersió són molt més rics i més complicats, requerint un estudi en profunditat que va més enllà de l'abast d'aquest curs introductorí. No obstant això, hi ha un aspecte particular d'aquesta interacció que val la pena de comentar. Des del punt de vista de l'electrodinàmica clàssica, una ona de llum que incideix en un medi força l'oscil·lació dels dipòls elementals del medi, que emeten llum. El camp resultant en el medi serà la suma de la radiació de totes les càrregues i del camp incident. Quan el medi és homogeni, s'aplica el **teorema d'extinció d'Ewald-Oseen**: quan una ona EM incideix en un medi



homogeni de contorn nítid, s'extingeix dins del medi mitjançant el procés d'interacció i és substituïda per una ona que es propaga pel medi a una velocitat i una direcció diferents de les de l'ona incident.

Aquest resultat impressionant permet definir una trajectòria particular per als feixos de llum en medis transparents densos. Quan el medi no és completament homogeni, les inhomogeneïtats provoquen una mica de dispersió residual i propagació rectilínia.

### 3.4 Equacions de Maxwell en medis macroscòpics

Després d'estudiar el procés de generació de llum i la interacció entre àtoms individuals i camps externs, ara encarem el problema d'una ona EM que es propaga per un medi compost per un nombre molt més gran d'àtoms. En aquest cas, cal tenir en compte les interaccions entre totes les partícules carregades presents al medi. El nombre de càrregues en una unitat de volum de matèria ( $10^{22}$ – $10^{23}$  àtoms/cm<sup>3</sup> en medis densos), fins i tot en gasos diluïts (normalment  $> 10^8$  àtoms/cm<sup>3</sup>), fa que resulti poc pràctic d'intentar seguir les interaccions individuals amb cada càrrega. El camp microscòpic total en qualsevol punt del medi és la superposició de tots els camps microscòpics generats pels àtoms en resposta al camp incident. El camp resultant mostra grans fluctuacions aleatòries d'un punt a un altre.

No obstant, quan estem interessats en els valors de camp en regions molt més grans que les mides atòmiques típiques, podem obtenir una bona representació dels camps macroscòpics resultants determinant els valors mitjans dels camps microscòpics sobre volums que haurien de ser grans per tal d'incloure un nombre prou elevat de càrregues, ja que així s'obté un camp que es comporta bé. Els valors també han de ser inferiors a la longitud d'ona perquè puguem definir una distribució efectiva del camp elèctric com una variable contínua a l'espai.

Per a ones lluminoses, els camps macroscòpics s'obtenen fent la mitjana sobre volums amb dimensions de l'ordre d'1 nm<sup>3</sup>. En aquest sentit, podem passar a les magnituds macroscòpiques que hem obtingut en el procés de fer la mitjana.

Camps macroscòpics:

$$\bar{\mathbf{E}}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} \vec{e}(\vec{r}', t) d^3 r' \quad \bar{\mathbf{B}}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} \vec{b}(\vec{r}', t) d^3 r'$$

i podem definir la densitat de càrrega macroscòpica i els corrents d'una manera similar.

Escrivim les **equacions macroscòpiques de Maxwell** per a aquestes magnituds efectives mitjanes:



$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_{macro}}{\epsilon_0} \quad [3.30A]$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad [3.30C]$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad [3.30B]$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{j}_{macro} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad [3.30D]$$

on la càrrega macroscòpica i les densitats de corrent compleixen l'equació de continuïtat que expressa la conservació de càrrega sobre un volum macroscòpic:

$$\frac{\partial \rho_{macro}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_{macro} = 0$$

La càrrega total i les densitats de corrent inclouen els efectes de les càrregues lligades i les lliures. Podem separar aquestes dues contribucions per expressar-les:

$$\begin{aligned} \rho_{macro} &= \rho_{free} + \rho_{bound} \\ \vec{j}_{macro} &= \vec{j}_{free} + \vec{j}_{bound} \end{aligned}$$

L'efecte de les càrregues lligades es pot descriure adequadament a través d'una densitat de polarització existent al medi,  $P$ :

$$\rho_{bound} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$$

Els corrents lligats poden sorgir per la variació temporal de la densitat de polarització o per l'existència de moments magnètics en el medi, donant lloc a una densitat de magnetització macroscòpica,  $M$ :

$$\vec{j}_{bound} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \vec{\nabla} \wedge \vec{M}$$

on definim

$$\vec{P} = N\vec{p} \quad \text{y} \quad \vec{M} = N\vec{m}$$

Amb  $N$  sent la densitat atòmica,  $p$  el moment dipolar atòmic i  $m$  el moment magnètic atòmic. Aquestes densitats de polarització i magnetització es creen en el medi mitjançant l'acció del camp EM extern incident.

### ◆ Nota

Encara que la separació entre càrregues lliures i lligades és d'alguna manera arbitrària i que es poden utilitzar altres enfocaments de la teoria electromagnètica, tot i això s'adopta habitualment per descriure els processos d'interacció llum-matèria.

L'efecte dels corrents generats pels electrons lliures del material, impulsats pels camps externs, s'expressa generalment en termes de conductivitat del material,  $\sigma$ :

$$\vec{j}_{free} = \sigma \vec{E}$$



Tenint en compte aquestes definicions, podem reescriure les equacions de Maxwell incloent aquestes magnituds d'aquesta manera:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{\rho_{free} - \vec{\nabla} \cdot \vec{P}}{\epsilon_0} & \vec{\nabla} \wedge \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 & \vec{\nabla} \wedge \vec{B} &= \mu_0 \sigma \vec{E} + \mu_0 \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \mu_0 \vec{\nabla} \wedge \vec{M} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\end{aligned}$$

Reagrupant alguns termes:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) &= \rho_{free} \\ \vec{\nabla} \wedge \left( \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right) &= \sigma \vec{E} + \frac{\partial (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P})}{\partial t}\end{aligned}$$

A continuació definim noves variables que descriuen la resposta de la matèria a l'excitació lumínica.

**Desplaçament elèctric:**  $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$  (C/m<sup>2</sup>)

**Intensitat magnètica:**  $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$  (A/m)

Pel que fa a les variables recentment definides, obtenim les equacions macroscòpiques de Maxwell (en absència de càrregues lliures;  $\rho_{free} = 0$ ):

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= 0 & \vec{\nabla} \wedge \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 & \vec{\nabla} \wedge \vec{H} &= \sigma \cdot \vec{E} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\end{aligned}} \quad [3.31]$$

### 3.4.1 Equacions d'ona per a medis materials

A partir de les equacions de Maxwell, ara podem derivar les equacions d'ona corresponents que descriuen la propagació dels camps elèctrics i magnètics pel medi. Com hem fet amb les equacions microscòpiques corresponents, comencem prenent l'operador rotacional de l'equació [3.30C]:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) &= -\vec{\nabla} \wedge \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \wedge \frac{\partial (\mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M})}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) &= -\mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{D}}{\partial t^2} - \mu_0 \frac{\partial (\vec{\nabla} \wedge \vec{M})}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) + \mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} &= -\mu_0 \frac{\partial \left( \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \vec{\nabla} \wedge \vec{M} \right)}{\partial t}\end{aligned}$$



D'aquesta manera s'obté una equació d'ona per al camp elèctric:

$$\boxed{\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) + \mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{j}_{bound}}{\partial t}} \quad [3.32A]$$

Comparant aquesta expressió amb l'equació d'ona al buit [1.4C], podem comentar a continuació alguns aspectes relacionats amb la presència de matèria, a part del trivial efecte de substituir el camp microscòpic pel seu valor mitjà macroscòpic.

- L'expressió  $\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{E})$  generalment no es redueix a l'operació laplaciana, ja que en virtut de resultats anteriors la divergència del camp elèctric generalment no s'esvaeix (sobretot quan es propaga en medis no homogènis o birefringents).
- La presència de conductivitat dona lloc a pèrdues de conductivitat en el medi, que s'expressen en termes de la primera derivada del camp.
- El corrent de densitat lligat actua com a font no homogènia de l'equació d'ona.

De manera anàloga, podem derivar una equació d'ona per al camp magnètic prenent l'operador rotacional de la intensitat magnètica:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{H}) &= \vec{\nabla} \wedge \sigma \vec{E} + \vec{\nabla} \wedge \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) &= \mu_0 \sigma (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial (\vec{\nabla} \wedge \vec{E})}{\partial t} + \mu_0 \vec{\nabla} \wedge \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \mu_0 \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{M}) \end{aligned}$$

L'equació d'ona del camp magnètic és

$$\boxed{\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) + \mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \mu_0 \vec{\nabla} \wedge \vec{j}_{bound}} \quad [3.32B]$$

No existeixen solucions analítiques generals per a les equacions d'ona per a corrents de densitat lligada arbitraris. Per entendre millor els mecanismes d'interacció entre llum i matèria, hem de considerar més profundament la relació entre els camps incidents del medi, la polarització generada i la densitat de magnetització.

### 3.4.2 Equacions materials

Les equacions materials defineixen la relació, no només entre el camp elèctric que actua sobre el material i la densitat de polarització generada, sinó que també entre la intensitat magnètica i la magnetització resultant del medi.

La densitat de polarització del material és generada per les oscil·lacions atòmiques degudes a l'acció impulsora del camp elèctric incident, tal com s'ha explicat anteriorment. La resposta estacionària a la radiació monocromàtica incident és una funció del camp elèctric que actua sobre el dipol. Si apliquem un sol impuls al dipol



(que, al límit, es pot suposar que és una funció d'impuls delta) en lloc d'una ona plana monocromàtica, la resposta serà una oscil·lació amb decaïment exponencial. La polarització induïda per una sola estimulació s'anomena **susceptibilitat elèctrica**. La resposta no instantània del dipol oscil·lant a un sol impuls significa que la resposta del dipol a un camp aplicat no és local en el temps.

Per a un camp elèctric arbitrari incident en el medi, la densitat de polarització resultant es pot escriure com una expansió en sèrie en termes de les potències de E:

$$\begin{aligned}
 P_i(\vec{r}, t) = & \varepsilon_0 \int_{-\infty}^t \chi_{ij}^{(1)}(\vec{r}, t-t') E_j(\vec{r}, t') dt' + \\
 & + \varepsilon_0 \int_{-\infty}^{t_1} \int_{-\infty}^{t_2} \chi_{ijk}^{(2)}(\vec{r}, t-t'_1, t-t'_2) E_j(\vec{r}, t'_1) E_k(\vec{r}, t'_2) dt'_1 dt'_2 + \dots
 \end{aligned}
 \tag{3.33A}$$

Aquí, els índexs  $i, j$  i  $k$  corresponen a les coordenades cartesianes  $x, y$  i  $z$ , i per tant es dona per fet el sumatori dels índexs repetits. Els límits d'integració van des de l'infinít negatiu fins al temps  $t$ . El límit superior reflecteix la relació causal entre  $P$  i  $E$ .

Aquesta relació es pot escriure a l'espai de freqüència fent la transformada de Fourier en el temps, donant així lloc a l'expressió

$$P_i(\vec{r}, \omega) = \varepsilon_0 \chi_{ij}^{(1)}(\vec{r}, \omega) E_j(\vec{r}, \omega) + \sum_{S,T} \varepsilon_0 \chi_{ijk}^{(2)}(\vec{r}, \omega = \omega_S + \omega_T) E_j(\vec{r}, \omega_S) E_k(\vec{r}, \omega_T) \tag{3.33B}$$

En escriure aquesta expressió, no considerem el cas més general, ja que estem assumint una resposta espacialment local. Aquesta hipòtesi s'ha de reconsiderar en les situacions en què els camps presentin variacions molt grans a distàncies curtes. Per aquestes situacions, s'ha de considerar una resposta no local. Per tal d'escurçar la notació, ometrem la dependència espacial de les expressions següents, pels casos en què s'assumeixi aquesta resposta localment espacial.

En diverses situacions reals, aquesta expressió es pot simplificar molt depenent de les característiques del camp elèctric incident o del tipus de medi.

Definim les següents situacions concretes:

### A. Resposta lineal/no lineal

Quan els camps incidents són molt intensos (comparables als camps atòmics que actuen sobre els electrons), la resposta dels dipols esdevé no lineal. Així, els termes de segon ordre i superiors poden ser significatius a l'hora de descriure el procés d'interacció entre llum i matèria. En aquest cas, descriurem el procés com a no lineal i utilitzarem l'expressió completa. Un exemple d'aquest cas pot ser quan un pols làser molt intens incideix sobre el medi amb intensitats de l'ordre de  $\text{GW}/\text{cm}^2$ . Tot i que aquest tipus d'interacció és molt important en molts estudis de fotònica reals, en aquest curs introductor no entrarem en els efectes no lineals.



Quan les intensitats del camp elèctric incident són més baixes, podem suposar una resposta lineal del sistema; la densitat de polarització corresponent esdevé:

$$P_i(t) = \varepsilon_0 \int_{-\infty}^t \chi_{ij}^{(1)}(t-t') E_j(t') dt' \quad [3.33C]$$

$$P_i(\omega) = \varepsilon_0 \chi_{ij}^{(1)}(\omega) E_j(\omega)$$

### B. Medis isòtrops i anisòtrops

El medi és isòtrop quan la densitat de polarització resultant no depèn de la direcció de propagació o de l'estat de polarització del camp elèctric incident. Exemples de medis isòtrops són els gasos, els líquids, els sòlids amorfs i els cristalls amb simetria cúbica.

En aquestes situacions, la densitat de polarització generada és paral·lela al camp elèctric incident i el caràcter tensor general de la susceptibilitat es simplifica a un escalar:

$$\vec{P}(t) = \varepsilon_0 \int_{-\infty}^t \chi^{(1)}(t-t') \vec{E}(t') dt' \quad [3.33D]$$

$$\vec{P}(\omega) = \varepsilon_0 \chi^{(1)}(\omega) \vec{E}(\omega)$$

Quan el medi és anisòtrop, la densitat de polarització ja no és paral·lela al camp elèctric incident i s'ha d'utilitzar l'expressió més general amb el tensor de susceptibilitat elèctrica. Això passa, per exemple, quan s'estudia la propagació de la llum en cristalls sense simetries cúbiques.

### C. Medis dispersius i no dispersius

La resposta del medi a qualsevol camp òptic amb una extensió finita en el temps no sempre serà instantània i, en conseqüència, s'hauria d'utilitzar la convolució quan es treballa en el domini temporal.

No obstant, en el cas d'un camp elèctric monocromàtic incident en un medi, es pot suposar que el medi no és dispersiu, és a dir, que té resposta instantània. En aquest cas, l'expressió és idèntica en el domini temporal i freqüencial:

$$P_i(t) = \varepsilon_0 \chi_{ij}^{(1)} E_j(t)$$

$$P_i(\omega) = \varepsilon_0 \chi_{ij}^1(\omega) E_j(\omega) \quad [3.33E]$$

### D. Medis homogenis i no homogenis

En un medi no homogeni, la susceptibilitat elèctrica tindrà una dependència espacial i, per tant, la densitat de polarització dependrà de la posició. La presència d'aquestes no homogeneïtats pot ser deguda a algunes impureses presents en el medi que donin lloc a la dispersió, per exemple; o bé es poden construir artificialment per tal de



modificar intencionadament les propietats òptiques del material. Aquest últim és el cas dels cristalls fotònics, on la relació de dispersió es pot alterar fortament per la presència de la periodicitat, donant lloc així a un control sense precedents sobre les propietats de propagació de la llum en els medis en què es basen molts dispositius i sensors de corrent.

En aquest curs ens centrem a estudiar la propagació en medis homogenis, ometent així la dependència espacial de la susceptibilitat elèctrica.

L'expressió de les equacions materials, doncs, s'ha de definir per cada cas d'estudi particular, deixant la seva forma més general a situacions en què no tenim coneixements previs de la naturalesa de la interacció.

El cas més simple d'interacció entre llum i matèria es produeix per a la propagació de la llum en règim lineal en un medi homogeni, no dispersiu (o utilitzant radiació monocromàtica) i isòtrop. En aquest cas, la dispersió del material s'expressa d'aquesta manera:

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi^{(1)} \vec{E} \quad [3.34A]$$

Pel que fa la magnetització del material, una **susceptibilitat magnètica** es defineix simplement mitjançant l'expressió següent:

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} \quad [3.34B]$$

No considerarem altres relacions més complexes, ja que generalment assumim en aquest curs que el nostre medi no és magnètic.

### 3.4.3 Índex de refracció

En el cas que ens ocupa, un cop hem establert l'equació material que defineix l'augment de la densitat de polarització d'un medi en resposta al camp elèctric que hi incideix, podem definir la interacció en termes de noves propietats del medi: **índex de refracció i constant dielèctrica**.

L'índex de refracció és la propietat més important per caracteritzar òpticament un medi determinat i la seva expressió depèn fortament de les propietats del material. Deduïm l'expressió per al cas de medis lineals, homogenis, no dispersius i isòtrops.

Amb aquests supòsits, les equacions materials corresponen a les expressades a [3.34A], que es poden substituir en l'equació d'ona [3.32A] per donar:

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) + \mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial (\epsilon_0 \chi^{(1)} \vec{E})}{\partial t} + \vec{\nabla} \wedge \chi_m \vec{H} \right]$$

Reordenant alguns termes i substituint l'equació per l'operador rotacional de la intensitat magnètica, tenim:



$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) + \mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \varepsilon_0 (1 + \chi^{(1)}) \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\mu_0 \chi_m \frac{\partial}{\partial t} \left[ \sigma \vec{E} + \frac{\partial(\varepsilon_0(1 + \chi^{(1)})\vec{E})}{\partial t} \right]$$

Donant com a resultat

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) + \mu_0 (1 + \chi_m) \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \varepsilon_0 (1 + \chi^{(1)}) (1 + \chi_m) \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

Per a definir noves magnituds físiques associades a un material concret utilitzem:

- **Permitivitat elèctrica relativa:**  $\varepsilon_r = 1 + \chi^{(1)}$
- **Permeabilitat magnètica relativa:**  $\mu_r = 1 + \chi_m$
- **Constant dielèctrica:**  $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r = \varepsilon_0 (1 + \chi^{(1)})$ , i
- **Permeabilitat magnètica:**  $\mu = \mu_0 \mu_r = \mu_0 (1 + \chi_m)$

Podem escriure expressions alternatives per al vector de desplaçament elèctric i el camp magnètic com:

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \varepsilon \vec{E} \\ \vec{B} &= \mu \vec{H} \end{aligned} \quad [3.35]$$

Per al cas del desplaçament elèctric, cal recordar que estem en el cas particular d'un medi lineal, isòtrop, no dispersiu i homogeni. Definim una expressió més general per al camp de desplaçament en termes del camp elèctric amb

$$D_i(t) = \int_{-\infty}^t \varepsilon_{ij}(t-t') E_j(t') dt'$$

(Les conseqüències més importants pel que fa aquesta qüestió, les explorarem al capítol 5).

Amb les noves definicions, l'equació d'ona es pot simplificar a

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) + \mu \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

Tenint en compte que un feix monocromàtic incideix sobre el medi:

$$\vec{E} = \text{Re}[\hat{e} E_0^{(+)}(\vec{r}) e^{-i\omega t}]$$

En aquest cas, les derivades temporals es poden avaluar fàcilment:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}_0^{(+)}) - i\omega \mu \sigma \vec{E}_0^{(+)} - \omega^2 \mu \varepsilon \vec{E}_0^{(+)} &= 0 \\ \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}_0^{(+)}) - \omega^2 \mu \varepsilon_0 \left[ \varepsilon_r + i \frac{\sigma}{\omega \varepsilon_0} \right] \vec{E}_0^{(+)} &= 0 \end{aligned}$$



Definint la **constant dielèctrica relativa generalitzada** per una freqüència  $\omega$ :

$$\varepsilon_{\text{eff}} = \varepsilon_r + i \frac{\sigma}{\omega \varepsilon_0} = 1 + \chi^{(1)} + i \frac{\sigma}{\omega \varepsilon_0} \quad [3.36A]$$

L'**índex de refracció** per la freqüència  $\omega$ ,  $n(\omega)$ :

$$n^2(\omega) = \mu_r \varepsilon_{\text{eff}} = \mu_r (1 + \chi^{(1)} + i \frac{\sigma}{\omega \varepsilon_0}) \quad [3.36B]$$

L'índex de refracció definit d'aquesta manera és una quantitat complexa:

$$n(\omega) = n_{\text{real}}(\omega) + i n_{\text{im}}(\omega)$$

Pel que fa a l'índex de refracció, l'equació d'ona és:

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}_0^{(+)}) - \frac{n^2(\omega)\omega^2}{c^2} \vec{E}_0^{(+)} = 0$$

La **relació de dispersió en el material** es defineix d'aquesta manera:

$$k(\omega) = \frac{n(\omega)\omega}{c} = \frac{n_{\text{real}}(\omega)\omega}{c} + i \frac{n_{\text{im}}(\omega)\omega}{c} = k_{\text{real}}(\omega) + i k_{\text{im}}(\omega) \quad [3.37]$$

que ens condueix a l'equació bàsica per estudiar la propagació de feixos en medis materials, coneguda com **equació de Helmholtz per a medis materials**:

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}_0^{(+)}) - k^2(\omega) \vec{E}_0^{(+)} = 0 \quad [3.38]$$

Comparant aquesta equació amb la obtinguda al capítol 2, podem veure que l'efecte del medi és substituir el vector d'ona al buit,  $k_0$ , pel vector d'ona del medi  $k = nk_0$ . Una conseqüència immediata d'això és que les solucions que hem trobat al capítol 2 per la propagació en el buit són també solucions per a la propagació per un medi homogeni només substituint  $k_0$  per  $k$ . Concretament, l'expressió d'ona plana en un medi esdevindrà:

$$\vec{E}^{(+)}(\vec{r}, t) = \hat{e} E_0^{(+)} e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} = \hat{e} E_0^{(+)} e^{i(n_{\text{re}} + i n_{\text{im}}) \vec{k}_0 \vec{r} - \omega t}$$

$$\vec{E}^{(+)}(\vec{r}, t) = \hat{e} E_0^{(+)} e^{-n_{\text{im}} \vec{k}_0 \vec{r}} e^{i(n_{\text{re}} \vec{k}_0 \vec{r} - \omega t)}$$

A partir d'aquesta expressió, podem descriure les conseqüències següents.

1) L'efecte de la part real de l'índex de refracció és el de canviar la velocitat de fase dels fronts d'ona a partir del seu valor en el buit,  $c$ . La velocitat de fase es pot expressar generalment com



$$v_{\text{phase}}(\omega) = \frac{\omega}{k_{\text{real}}(\omega)} = \frac{c}{n_{\text{real}}(\omega)} \quad [3.39A]$$

2) La presència del terme imaginari de l'índex de refracció donarà lloc a una amplitud exponencialment decreixent de l'ona plana dins del medi. A les freqüències per les quals el medi és transparent, aquest terme imaginari s'esvaeix i l'ona es pot propagar pel medi sense absorció. Utilitzant la llei de Beer-Lambert definida a [3.29] per a una comparació directa de la intensitat de l'ona plana, podem definir el coeficient d'extinció en termes de l'índex de refracció imaginari:

$$\alpha_{\text{ext}}(\omega) = 2n_{\text{im}}(\omega)k_o = \frac{2n_{\text{im}}(\omega)\omega}{c} \quad [3.39B]$$

Si considerem que el medi és perfectament homogeni, l'efecte de la dispersió serà el de generar l'ona que es propaga per l'interior del medi, segons el teorema d'Ewald-Ossen. Aleshores, la pèrdua d'intensitat es deurà principalment a l'efecte de l'absorció. En aquestes circumstàncies, el coeficient d'extinció serà igual al coeficient d'absorció. Per tant, utilitzarem principalment el terme coeficient d'absorció.

Com hem vist, l'índex de refracció del medi és la principal propietat que descriu el procés d'interacció entre llum i matèria. És crucial per determinar la dependència amb la freqüència per tal de justificar correctament la resposta del medi a les ones de llum de freqüència canviant. Tot i que una derivació detallada ha d'utilitzar un tractament mecànic quàntic, la dependència de freqüència correcta s'obté a partir d'un tractament clàssic simplificat basat en el model de Lorentz (vegeu l'Apèndix C per més detalls). A l'apartat següent, derivarem l'expressió de l'índex de refracció en situacions específiques.

### 3.4.4 Derivació clàssica de l'índex de refracció

La derivació clàssica de l'índex de refracció mitjançant el model d'oscil·lador de Lorentz es basa en una derivació microscòpica de la constant dielèctrica relativa generalitzada i en l'ús de l'equació [3.36B].

A partir de l'expressió

$$[n_{\text{real}} + in_{\text{im}}]^2 = \mu_r [\varepsilon_{\text{eff}}^{\text{real}} + i\varepsilon_{\text{eff}}^{\text{im}}]$$

en resulta

$$\begin{aligned} n_{\text{real}}^2 - n_{\text{im}}^2 &= \varepsilon_{\text{eff}}^{\text{real}} \\ 2n_{\text{real}}n_{\text{im}} &= \varepsilon_{\text{eff}}^{\text{im}} \end{aligned} \quad [3.40A]$$

Aleshores s'obté una expressió per a l'índex de refracció real i imaginari:



$$\begin{aligned}
 n_{real} &= \sqrt{\frac{\varepsilon_{eff}^{real} + \sqrt{(\varepsilon_{eff}^{real})^2 + (\varepsilon_{eff}^{im})^2}}{2}} \\
 n_{im} &= \sqrt{\frac{-\varepsilon_{eff}^{real} + \sqrt{(\varepsilon_{eff}^{real})^2 + (\varepsilon_{eff}^{im})^2}}{2}}
 \end{aligned}
 \tag{3.40B}$$

L'expressió particular de l'índex de refracció depèn de les propietats del material, que es reflecteixen en les relacions [3.33]. A continuació, analitzarem algunes situacions concretes.

### Índex de refracció en medis dielèctrics diluïts

En medis dielèctrics, la resposta del material es deu a les càrregues lligades i, en conseqüència, a la susceptibilitat elèctrica del material. En aquests materials no hi ha càrregues lliures, de manera que la conductivitat del material s'esvaeix i la constant dielèctrica relativa efectiva es redueix a

$$\varepsilon_{eff} = 1 + \chi^{(1)}$$

A més, si tenim en compte que el medi està diluït, com per exemple en una cel·la de gas a baixa pressió, l'índex de refracció s'apropa a 1 i podem derivar una expressió simplificada per a l'índex de refracció:

$$n^2 = \mu_r (1 + \chi^{(1)}) \rightarrow n = \sqrt{\mu_r (1 + \chi^{(1)})} \approx \sqrt{\mu_r} \left(1 + \frac{\chi^{(1)}}{2}\right)$$

Considerant un material no magnètic ( $\mu_r = 1$ ), n'obtenim

$$n_{real} \approx 1 + \frac{\chi_{real}^{(1)}}{2} \quad i \quad n_{im} = \frac{\chi_{im}^{(1)}}{2}$$

Per aconseguir l'expressió de la susceptibilitat elèctrica, comencem amb el model de Lorentz de l'oscil·lació electrònica de l'àtom. En la situació més senzilla, considerem que volem obtenir l'índex de refracció a freqüències properes a una única ressonància atòmica (aproximació a l'àtom de dos nivells). Per a un gas diluït, podem considerar que el medi és homogeni i isòtrop. L'equació de la densitat de polarització  $P = Np$  es pot obtenir directament a partir de l'equació del moment dipolar [3.21B] i multiplicant-la per  $N$ . La solució s'obté directament com a [3.21E]:

$P = Np$  es pot obtenir directament a partir de l'equació del moment dipolar [3.21B] i multiplicant-lo per  $N$ . La solució s'obté directament com a [3.21E]:

$$P(\omega) = \frac{Nq^2 / m}{(\omega_0^2 - \omega^2) - i\gamma\omega} E(\omega)$$

La susceptibilitat elèctrica s'obté directament mitjançant [3.33E]:



$$\chi^{(1)}(\omega) = \frac{P(\omega)}{\varepsilon_0 E(\omega)} = \frac{Nq^2 / \varepsilon_0 m}{(\omega_0^2 - \omega^2) - i\gamma\omega} = \frac{\omega_p^2}{(\omega_0^2 - \omega^2) - i\gamma\omega} \quad [3.41]$$

on la **frequència de plasma**,  $\omega_p$ , es defineix com  $\omega_p^2 = Nq^2 / \varepsilon_0 m$ . Separant aquesta expressió en les seves parts real i imaginària, tenim

$$\chi_{real}^{(1)} + i\chi_{im}^{(1)} = \frac{\omega_p^2(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2} + i \frac{\gamma\omega\omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}$$

A partir d'aquest resultat, finalment podem escriure l'expressió de l'índex real de refracció i el coeficient d'absorció:

$$n_{real} \approx 1 + \frac{\omega_p^2(\omega_0^2 - \omega^2)}{2[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2]} \quad \alpha = \frac{2n_{im}\omega}{c} = \frac{\gamma\omega^2\omega_p^2}{c[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2]}$$

La figura 7 mostra un gràfic d'aquestes funcions. El coeficient d'absorció és diferent de zero a les regions properes a una ressonància atòmica. El pendent de l'índex real de refracció augmenta en funció de la freqüència a la regió fora de ressonància, que s'anomena regió de dispersió normal ( $\partial n / \partial \omega > 0$ ). A freqüències properes a la ressonància, el pendent canvia de signe a la regió anomenada dispersió anòmala de l'índex de refracció ( $\partial n / \partial \omega < 0$ ).

Si volem obtenir l'índex de refracció en una regió de freqüència on hi ha més d'una ressonància, podem estendre aquest formalisme introduint més ressonàncies a l'expressió de susceptibilitat i introduint els factors de força discutits pel que fa a l'equació [3.15B]:

$$\chi^{(1)}(\omega) = \sum_i \frac{f_i \omega_p^2}{(\omega_{oi}^2 - \omega^2) - i\gamma_i \omega}$$

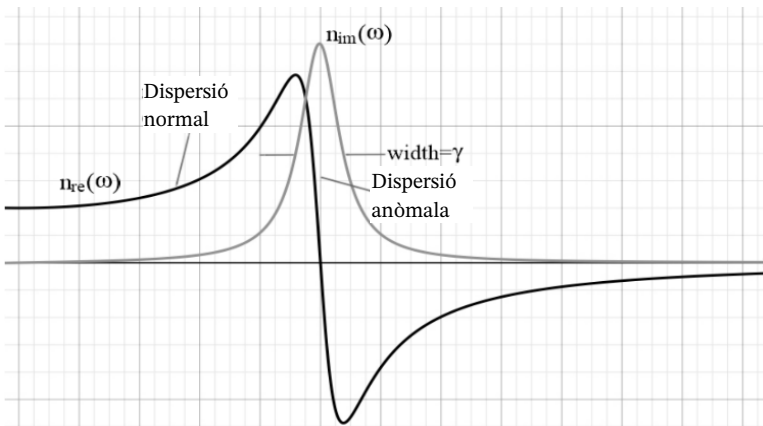


Figura 3.7 Parts reals i imaginàries de l'índex de refracció



## Índex de refracció en medis densos

Quan observem la interacció entre llum i matèria en medis dielèctrics densos (amb conductivitat zero), no podem considerar que el camp extern aplicat sigui el camp que actua sobre els àtoms del material. Segons l'electrodinàmica clàssica, l'expressió del camp local s'obté com a correcció del camp incident:

$$\vec{E}_{local} = \vec{E} + \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0}$$

En aquest cas, l'equació [3.21] canvia a

$$\begin{aligned} \frac{d^2 P}{dt^2} + \gamma \frac{dP}{dt} + \omega_0^2 P &= \frac{Nq^2}{m} E_{local} \\ (\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega)P &= \frac{Nq^2}{m} \left( E + \frac{P}{3\epsilon_0} \right) \end{aligned}$$

Utilitzant les relacions  $P = \epsilon_0 \chi^{(1)} E$ , obtenim

$$(\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega)x^{(1)} = \omega_p^2 \left( 1 + \frac{x^{(1)}}{3} \right) \quad \rightarrow \quad \frac{3x^{(1)}}{3 + x^{(1)}} = \frac{\omega_p^2}{(\omega_0^2 - \omega^2) - i\gamma\omega}$$

Emprant  $n^2 = 1 + \chi^{(1)}$ :

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{\omega_p^2}{3[(\omega_0^2 - \omega^2) - i\gamma\omega]}$$

Aquesta expressió s'anomena relació **Clausius-Mossotti** i es pot estendre directament per incloure més ressonàncies, tal i com hem fet anteriorment:

L'índex de refracció de materials s'expressa normalment en termes de la longitud d'ona en lloc de freqüència. Pel que fa la zona visible, l'índex de refracció a la zona de dispersió normal s'expressa d'aquesta manera següent, que anomenem **l'equació de Sellmeier**:

$$n_{real}^2(\lambda) = A + \frac{B\lambda^2}{\lambda^2 - C} + \frac{D}{\lambda^2 - E}$$

*Exemple:* Índex ordinari de refracció del cristall BBO:

$$n_o^2 = 2,7405 + \frac{0,0184}{\lambda^2 - 0,0179} - 0,0155\lambda^2$$



### Índex de refracció en conductors

En aquest darrer exemple, es descriu l'índex de refracció d'un conductor caracteritzat per un valor de conductivitat molt gran de  $\sigma$ . Per obtenir la resposta del medi a l'ona EM incident, haurem d'estudiar l'acció sobre els electrons de conducció. Aquest sistema es pot considerar un plasma d'electrons lliures, tal com es descriu clàssicament utilitzant el model de Drude:

$$\frac{d^2 \bar{x}}{dt^2} + \Gamma \frac{d\bar{x}}{dt} = \frac{-q\bar{E}}{m} \quad [3.42]$$

Aquest model es diferencia del model de Lorentz anteriorment considerat en dos aspectes importants. En primer lloc, el moviment de les càrregues lliures no està restringit a la proximitat d'un àtom determinat per l'acció del potencial de Coulomb, de manera que es poden moure al llarg del cristall mentre es comporten com un gas d'electrons. En segon lloc, el moviment oscil·latori dels electrons en resposta al camp electromagnètic aplicat s'amorteix i la constant d'amortiment no està relacionada amb cap resposta amortida dels orbitals electrònics sinó amb l'energia perduda a causa de les col·lisions amb la xarxa atòmica. Aquest amortiment constant també es pot expressar en termes del temps de relaxació  $\tau$  que típicament és de  $10^{-14}$  s a temperatura ambient.

$$\Gamma = 1 / \tau$$

Utilitzant aquest model, podem obtenir una expressió per a la conductivitat del medi. El moviment dels electrons dona lloc a un corrent de conducció que es pot expressar com

$$\vec{j}_c = -N_f q \vec{v} = -N_f q \dot{\bar{x}} = \sigma \vec{E}$$

on  $N_f$  és la densitat d'electrons lliures del metall. Sota camps impulsors periòdics amb freqüència externa  $\omega$ , esperem que la solució estacionària determinada corresponent al desplaçament i la velocitat dels electrons també sigui periòdica:  $\vec{v}^{(+)} = \vec{v}_0^{(+)} e^{-i\omega t}$ .

Escrivim l'equació [3.41] en termes de velocitat d'aquesta manera

$$\frac{d\vec{v}}{dt} + \Gamma \vec{v} = \frac{-q\vec{E}}{m} \rightarrow \vec{v}_0^{(+)} = \frac{-(q/m)}{\Gamma - i\omega} \vec{E}_0^{(+)}$$

obtenim una expressió per al corrent de conducció, que és

$$j_c^{(+)} = \frac{N_f q^2 / m}{\Gamma - i\omega} E_0^{(+)} = \left[ \frac{\epsilon_0 \omega_{pf}^2 \Gamma}{\omega^2 + \Gamma^2} + i \frac{\epsilon_0 \omega_{pf}^2 \omega}{\omega^2 + \Gamma^2} \right] \cdot E_0^{(+)}$$

on introduïm la freqüència de plasma per les càrregues lliures:  $\omega_{pf}^2 = N_f q^2 / \epsilon_0 m$ .

La conductivitat s'obté directament d'aquesta relació:



$$\sigma(\omega) = \left[ \frac{\varepsilon_0 \omega_{pf}^2 \Gamma}{\omega^2 + \Gamma^2} + i \frac{\varepsilon_0 \omega_{pf}^2 \omega}{\omega^2 + \Gamma^2} \right] \quad [3.43]$$

Finalment, podem determinar la contribució que fan els electrons lliures a la constant dielèctrica efectiva i a l'índex de refracció, utilitzant específicament [3.36A]

$$\varepsilon_{rc} = \frac{i\sigma}{\varepsilon_0 \omega} = -\frac{\omega_{pf}^2}{\omega^2 + \Gamma^2} + i \frac{\omega_{pf}^2 \Gamma}{\omega(\omega^2 + \Gamma^2)} = -\frac{\omega_{pf}^2 \tau^2}{1 + \omega^2 \tau^2} + i \frac{\omega_{pf}^2 \tau}{\omega(1 + \omega^2 \tau^2)}$$

En el cas dels valors de conductivitat molt grans, i suposant que les càrregues lligades tenen una contribució negligible, la constant dielèctrica efectiva ve donada per les expressions

$$\varepsilon_{eff}^{real} = 1 - \frac{\omega_{pf}^2 \tau^2}{1 + \omega^2 \tau^2} \quad i \quad \varepsilon_{eff}^{im} = \frac{\omega_{pf}^2 \tau}{\omega(1 + \omega^2 \tau^2)}$$

a partir de les quals podem obtenir l'índex de refracció.

El comportament dels conductors depèn fortament del valor de la freqüència de conducció del camp electromagnètic excitant respecte de la freqüència de plasma i el temps de relaxació. A continuació establim algunes propietats generals basades en els resultats anteriors.

a) Freqüències grans ( $\omega \gg \Gamma \rightarrow \omega\tau \gg 1$ )

En aquest règim, es compleix la condició  $\varepsilon_{eff}^{real} > \varepsilon_{eff}^{im}$  i  $\varepsilon_{eff} = 1 - \frac{\omega_{pf}^2}{\omega^2}$

La primera característica important dels conductors en aquest règim és que passen de ser altament reflectants a ser transparents quan la freqüència de conducció està, respectivament, per sota o per sobre de la freqüència de plasma dels electrons lliures. A freqüències properes a la freqüència de plasma, el vector d'ona serà

$$k = \frac{n\omega}{c} = \frac{\sqrt{\varepsilon_{eff}} \omega}{c} \approx \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_{pf}^2}}{c}$$

que esdevindrà imaginari a freqüències per sota de la freqüència de plasma, donant lloc a una ona evanescent dins del medi. Al mateix temps, la constant dielèctrica esdevé negativa en aquest règim, per la qual cosa les relacions [3.40B] ens duen a la condició  $n_{im} \gg n_{real}$ .

En aquestes condicions, la reflectivitat del conductor (per una incidència normal)

$$R = \left| \frac{n-1}{n+1} \right|^2 = \frac{(n_{real}-1)^2 + n_{im}^2}{(n_{real}+1)^2 + n_{im}^2} \approx 1$$



és propera a 1, una de les propietats característiques dels conductors.

b) Freqüències baixes ( $\omega < \Gamma \rightarrow \omega\tau < 1$ )

Aquest règim és típic de les freqüències de l'infraroig i hi domina la component imaginària de la constant dielèctrica (proporcional a la part real de la conductivitat).

$$\epsilon_{eff}^{real} \ll \epsilon_{eff}^{im} \quad i \quad \epsilon_{eff} \approx i\epsilon_{eff}^{im}$$

En aquestes condicions, la constant dielèctrica relativa efectiva [3.36A] esdevé purament imaginària:

$$\epsilon_{eff}(\omega) \approx i \frac{\sigma_{real}(\omega)}{\epsilon_0 \omega} \approx i \frac{\omega_{pf}^2 \tau}{\omega}$$

Utilitzant les expressions [3.40B], obtenim

$$n_{real} \approx n_{im} \approx \sqrt{\frac{\epsilon_{eff}^{im}}{2}} = \sqrt{\frac{\sigma_{real}}{2\epsilon_0 \omega}} = \sqrt{\frac{\omega_{pf}^2 \tau}{2\omega}}$$

El valor gran de l'índex de refracció imaginari dona lloc a un coeficient d'absorció gran en el medi. Habitualment, la radiació òptica s'absorbeix fortament en materials metàl·lics a distàncies de l'ordre de  $1/\alpha = c/2n_{im}\omega$ . Aquesta distància s'anomena profunditat de pell (*skin depth*) i ve donada per

$$\delta(\omega) = \frac{c}{2n_{im}(\omega)\omega} = \frac{c}{\sqrt{2\omega_{pf}^2 \tau \omega}}$$

amb una forta dependència de la freqüència.

El valor de la freqüència de plasma depèn de les característiques del conductor. Per exemple, metalls nobles com l'Au o l'Ag tenen freqüències de plasma a la regió UV i, en conseqüència, es tornen altament reflectants i opacs a la regió visible. A freqüències del rang visible properes a la freqüència de plasma, les seves propietats es veuen fortament afectades per les transicions entre bandes resultants de les càrregues lligades. Per descriure correctament les propietats òptiques d'aquests metalls a la regió visible, hauríem d'utilitzar la relació general [3.36B] per considerar l'acció de les contribucions tant dels electrons lligats (Lorentz) com dels lliures (Drude).

En canvi, elements com l'ITO (òxid d'estany i indi) tenen una freqüència de plasma a la regió infraroja (al voltant dels 1.200 nm), fent-los transparents a les freqüències òptiques. Aquesta propietat important afavoreix l'ús de l'ITO en diverses aplicacions que requereixen elèctrodes transparents.



### 3.5 Relacions d'energia en medis materials

La conservació de l'energia en presència de medis materials es pot descriure de la mateixa manera que s'ha descrit al capítol 1 per a les relacions energètiques en el buit. En aquest cas, apareixen termes addicionals a causa de l'energia necessària per polaritzar i magnetitzar el medi. La derivació detallada es desenvolupa en la col·lecció de problemes que donen l'equació per a la conservació d'energia:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{S} + \frac{\partial u_m}{\partial t} = -\frac{1}{2} \left[ \mu_0 \vec{H} \frac{\partial \vec{M}}{\partial t} - \mu_0 \vec{M} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \vec{E} \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} - \vec{P} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right] - \vec{j} \vec{E}$$

S'apliquen les següents definicions.

**Vector de Poynting en un medi material:**  $\vec{S} = \vec{E} \wedge \vec{H}$

**Densitat energètica del camp EM en el medi:**  $u_m = \frac{1}{2} [\vec{D} \cdot \vec{E} + \vec{B} \cdot \vec{H}]$

El terme entre claudàtors representa el treball realitzat per polaritzar i magnetitzar el medi per unitat de volum i temps.

A partir de les equacions de Maxwell i de la definició del vector de Poynting, podem obtenir l'expressió de la intensitat d'una ona plana que es propaga per un medi amb índex de refracció  $n$  (vegeu Problemes resolts):

$$I = \frac{1}{2} \epsilon_0 c n \left| E_o^{(+)} \right|^2$$

### 3.6 Problemes resolts

#### Problema 3.1

*Dos dipols puntuals, lineals i harmònics oscil·len amb una amplitud,  $p_0$ , i una freqüència,  $\omega$ , idèntiques. Tots dos se situen a l'origen del nostre sistema de referència i oscil·len al llarg de diferents orientacions. El primer dipol oscil·la al llarg de l'eix  $z$ , mentre que el segon dipol oscil·la al llarg de l'eix  $y$ . Utilitzant l'expressió general dels camps radiats d'un dipol genèric,  $\vec{p} = p_0 \hat{d}$ , aproximació dipolar elèctrica (longitud d'ona llarga) i l'aproximació de la zona de radiació, tenim*

$$\vec{e}_{rad} = \frac{\mu_0 \ddot{\vec{p}}}{4\pi R} \left[ \hat{u} \wedge (\hat{u} \wedge \hat{d}) \right]$$

$$\vec{b}_{rad} = \frac{\mu_0 \ddot{\vec{p}}}{4\pi R c} \left[ \hat{d} \wedge \hat{u} \right]$$

*Escriu l'expressió dels camps elèctrics i magnètics radiats totals i la intensitat total al llarg d'una direcció arbitrària en el pla  $xy$  (utilitza coordenades esfèriques per definir la direcció d'observació,  $\hat{u}$ ).*



### Solució

Qualsevol direcció d'observació a l'espai es pot expressar habitualment en termes de components esfèrics, com  $\hat{u} = (\cos\phi\sin\theta\hat{i} + \sin\phi\sin\theta\hat{j} + \cos\theta\hat{k})$ . En aquest problema, el nostre pla d'observació és el pla xz, per tant  $\phi = 0$  (en general, tot l'espai està totalment cobert si deixem  $\phi \in [0, 2\pi]$  and  $\theta \in [0, \pi]$ ). Amb aquesta convenció, el nostre cas hauria de prendre  $\phi = 0$  i  $\phi = \pi$  per cobrir tot el pla xz. Però en lloc de fer això, agafarem  $\phi = 0$  i deixarem  $\theta \in [0, 2\pi]$ .

Al pla xz-, la nostra direcció de propagació es defineix per  $\hat{u} = (\sin\theta\hat{i} + \cos\theta\hat{k})$

Camps del dipol 1: Per aquest dipol,  $\hat{d}_1 = \hat{k}$ , realitzar els productes vectorials ens dona:

$$\vec{e}_{rad}^1 = \frac{\mu_0 \ddot{p}}{4\pi R} [\hat{u} \wedge (\hat{u} \wedge \hat{d}_1)] = \frac{\mu_0 \ddot{p}}{4\pi R} \sin\theta (\cos\theta\hat{i} - \sin\theta\hat{k})$$

$$\vec{b}_{rad}^1 = \frac{\mu_0 \ddot{p}}{4\pi Rc} [\hat{d}_1 \wedge \hat{u}] = \frac{\mu_0 \ddot{p}}{4\pi Rc} \sin\theta \hat{j}$$

Camps del dipol 2: En aquest cas,  $\hat{d}_2 = \hat{j}$ , i

$$\vec{e}_{rad}^2 = \frac{\mu_0 \ddot{p}}{4\pi R} [\hat{u} \wedge (\hat{u} \wedge \hat{d}_2)] = \frac{\mu_0 \ddot{p}}{4\pi R} (-\hat{j})$$

$$\vec{b}_{rad}^2 = \frac{\mu_0 \ddot{p}}{4\pi Rc} [\hat{d}_2 \wedge \hat{u}] = \frac{\mu_0 \ddot{p}}{4\pi Rc} (\cos\theta\hat{i} - \sin\theta\hat{k})$$

El dipol harmònic es pot expressar com  $p^{(+)}(t') = p_o^{(+)} e^{-i\omega t'}$ , on  $t'$  és el temps retardat  $t' = t - R/c$ , i les derivades es tenen en compte respecte del temps retardat. D'aquesta manera:

$$\ddot{p} = -\omega^2 p_o^{(+)} e^{-i\omega t'} = -\omega^2 p_o^{(+)} e^{i(k\bar{R} - \omega t)}$$

Els camps radiats totals s'obtenen com la suma dels camps radiats pels dos dipols. Utilitzant els resultats anteriors, obtenim

$$\vec{e}_{tot}^{(+)} = \frac{\mu_0 \omega^2 p_o^{(+)}}{4\pi R} (-\sin\theta \cos\theta\hat{i} + \hat{j} + \sin^2\theta\hat{k}) e^{i(k\sin\theta x + k\cos\theta z - \omega t)}$$

$$\vec{b}_{tot}^{(+)} = \frac{\mu_0 \omega^2 p_o^{(+)}}{4\pi Rc} (-\cos\theta\hat{i} - \sin\theta\hat{j} + \sin\theta\hat{k}) e^{i(k\sin\theta x + k\cos\theta z - \omega t)}$$

La intensitat total ve donada per l'expressió



$$\begin{aligned}
 I_{tot} &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[ \frac{\vec{e}_{tot}^{(+)} \wedge \vec{b}_{tot}^{(-)}}{\mu_o} \right] = \frac{1}{2} \cdot \frac{\mu_o |p_o^{(+)}|^2 \omega^4}{16\pi^2 R^2 c} \left\| \begin{array}{ccc} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -\sin\theta \cos\theta & 1 & \sin^2\theta \\ -\cos\theta & -\sin\theta & \sin\theta \end{array} \right\| = \\
 &= \frac{\mu_o |p_o^{(+)}|^2 \omega^4}{32\pi^2 R^2 c} \left| (\sin\theta + \sin^3\theta)\hat{i} + (\sin^2\theta \cos\theta + \cos\theta)\hat{k} \right| = \\
 &= \frac{\mu_o |p_o^{(+)}|^2 \omega^4}{32\pi^2 R^2 c} (1 + \sin^2\theta) |\sin\theta\hat{i} + \cos\theta\hat{k}| \\
 I_{tot} &= \frac{\mu_o |p_o^{(+)}|^2 \omega^4}{32\pi^2 R^2 c} (1 + \sin^2\theta)
 \end{aligned}$$

### Solució alternativa en el sistema de coordenades esfèriques

El sistema de coordenades esfèriques utilitza els vectors unitaris  $\hat{u}_r$ ,  $\hat{u}_\phi$  i  $\hat{u}_\theta$ . Aquests s'expressen en termes de la base cartesiana com

$$\begin{aligned}
 \hat{u}_r &= \frac{\partial \vec{r} / \partial r}{|\partial \vec{r} / \partial r|} = \sin\theta \cos\phi \hat{i} + \sin\theta \sin\phi \hat{j} + \cos\theta \hat{k} \\
 \hat{u}_\phi &= \frac{\partial \vec{r} / \partial \phi}{|\partial \vec{r} / \partial \phi|} = \cos\phi \cos\theta \hat{i} + \cos\phi \sin\theta \hat{j} - \sin\theta \hat{k} \\
 \hat{u}_\theta &= \frac{\partial \vec{r} / \partial \theta}{|\partial \vec{r} / \partial \theta|} = -\sin\phi \hat{i} + \cos\phi \hat{j}
 \end{aligned}$$

amb  $\vec{r} = r(\cos\phi \sin\theta \hat{i} + \sin\phi \sin\theta \hat{j} + \cos\theta \hat{k})$ .

Invertint aquest sistema, obtenim la relació entre la base cartesiana i l'esfèrica:

$$\begin{aligned}
 \hat{i} &= \sin\theta \cos\phi \hat{u}_r - \sin\phi \hat{u}_\theta + \cos\theta \cos\phi \hat{u}_\phi & \hat{i} &= \sin\theta \hat{u}_r + \cos\theta \hat{u}_\theta \\
 \hat{j} &= \sin\theta \sin\phi \hat{u}_r + \cos\phi \hat{u}_\theta + \cos\theta \sin\phi \hat{u}_\phi & \text{En el pla } xz: \hat{j} &= \hat{u}_\phi \\
 \hat{k} &= \cos\theta \hat{u}_r - \sin\theta \hat{u}_\theta & \hat{k} &= \cos\theta \hat{u}_r - \sin\theta \hat{u}_\theta
 \end{aligned}$$

Dipol 1: Direcció d'observació  $\hat{u} = \hat{u}_r$  i direcció d'oscil·lació del dipol

$$\hat{d}_1 = \cos\theta \hat{u}_r - \sin\theta \hat{u}_\theta \rightarrow \hat{d}_1 \wedge \hat{u} = \sin\theta \hat{u}_\phi \quad i \quad \hat{u} \wedge (\hat{u} \wedge \hat{d}_1) = \sin\theta \hat{u}_\phi$$

Dipol 2: Direcció d'observació  $\hat{u} = \hat{u}_r$  i direcció d'oscil·lació del dipol  $\hat{d}_2 = \hat{u}_\phi$

$$\hat{d}_2 \wedge \hat{u} = \hat{u}_\theta \quad i \quad \hat{u} \wedge (\hat{u} \wedge \hat{d}_2) = -\hat{u}_\phi$$



Incloent aquests resultats en les expressions dels camps, els camps elèctrics i magnètics totals es poden expressar d'aquesta manera

$$\vec{e}_{tot}^{(+)} = \frac{\mu_o \omega^2 P_o^{(+)}}{4\pi R} (\hat{u}_\phi - \sin \theta \hat{u}_\theta) e^{i(kR - \omega t)}$$

$$\vec{b}_{tot}^{(+)} = \frac{\mu_o \omega^2 P_o^{(+)}}{4\pi Rc} (-\sin \theta \hat{u}_\phi - \hat{u}_\theta) e^{i(kR - \omega t)}$$

I la intensitat total com

$$I_{tot} = \frac{\mu_o \omega^4 |P_o^{(+)}|^2}{32\pi^2 R^2 c} |(1 + \sin^2 \theta) \hat{u}_r| = \frac{\mu_o \omega^4 |P_o^{(+)}|^2}{32\pi^2 R^2 c} (1 + \sin^2 \theta)$$

### Problema 3.2

Un àtom d'hidrogen emet radiació de freqüència  $\omega = 4 \cdot 10^{15}$  rad / s . Suposant que el desplaçament màxim del moment dipolar és  $x_o = 5 \cdot 10^{-11}$  m, calculeu el factor d'amortiment degut a la reacció de radiació i la potència mitjana total radiada per l'oscil·lador.

### Solució

La constant d'amortiment corresponent a l'expressió clàssica del coeficient de decaïment espontània ve donada per

$$\gamma = \frac{\mu_o q^2 \omega^2}{6\pi mc}$$

on  $m$  és la massa reduïda de l'àtom, que és amb bona aproximació la massa de l'electró, i  $q$  és la càrrega de l'electró. Substituint directament els valors del problema donen

$$\gamma = 10^{-8} s^{-1} \rightarrow \Gamma = \frac{1}{\gamma} = 10^{-8} s$$

La potència mitjana total radiada per l'oscil·lador amortit és

$$\langle p_{rad} \rangle = \frac{\mu_o \omega^4 q^2 x_o^2}{12\pi c} e^{-\gamma t} = 1.82 \cdot 10^{-12} \cdot e^{-10^8 t}$$

### Problema 3.3

Una caixa plena d'una col·lecció d'àtoms idèntics s'il·lumina per una ona EM plana que oscil·la a la freqüència  $\omega$ ,  $\vec{E}^{(+)} = \vec{E}_o^{(+)} e^{-i\omega t}$ . La interacció dels àtoms amb l'ona es pot descriure pel model de Lorentz convencional sense necessitat d'utilitzar la correcció de camp local, tot i que utilitzarem una constant d'amortiment  $\gamma_{tot}$  que inclou els



diferents mecanismes de pèrdua. La transferència de densitat de potència (mitjana) entre el camp extern i el medi es descriu per la fórmula

$$\langle P_{transfer} \rangle = \langle \vec{E} \cdot d\vec{P}/dt \rangle$$

on  $\vec{P} = -Nq\vec{x}$  és la densitat de polarització del medi i  $N$  la densitat de l'àtom. Se suposa que les condicions d'interacció són homogènies, isòtropes, no dispersives i lineals.

a) Escriu una expressió per  $\langle P_{transfer} \rangle$ , expressada en termes de susceptibilitat material,  $\chi^{(1)}$ , i la intensitat incident.

b) Utilitzant el model de Lorentz i assumint que l'única freqüència de ressonància rellevant per descriure la interacció és  $\omega_0$ , escriu una equació per a la densitat de polarització. A partir d'aquesta equació, obté una expressió per a la susceptibilitat del material  $\chi^{(1)}$ . Particularitza aquesta expressió per al cas d'una interacció gairebé ressonant, assumint que la freqüència externa és molt propera a  $\omega_0$ ,  $\omega \approx \omega_0$ .

c) Substitueix l'expressió per la susceptibilitat obtinguda en el punt b) per determinar la transferència de potència entre el camp extern i el medi en funció dels paràmetres del medi i de la intensitat incident.

### Solució

a) La densitat de polarització per a un material homogeni, isòtrop i no dispersiu en règim lineal ve donada per

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi^{(1)} \vec{E}$$

El valor mitjà de la transferència de potència ve donat pel valor mitjà del producte del camp elèctric i la derivada temporal de la densitat de polarització. Tal i com hem vist en aquest capítol, el valor mitjà del producte de dos camps reals es pot obtenir a partir de la seva representació complexa:

$$\langle P_{transfer} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} \left[ E^{(+)} \cdot \frac{dP^{(-)}}{dt} \right]$$

La representació complexa de la densitat de polarització s'obté considerant el caràcter complex de la susceptibilitat:

$$P^{(+)} = \varepsilon_0 (\chi_{real}^{(1)} + i\chi_{im}^{(1)}) E_o^{(+)} e^{-i\omega t} \rightarrow P^{(-)} = \varepsilon_0 (\chi_{real}^{(1)} - i\chi_{im}^{(1)}) E_o^{(-)} e^{i\omega t}$$

La derivada temporal és

$$\frac{dP^{(-)}}{dt} = i\omega \varepsilon_0 (\chi_{real}^{(1)} - i\chi_{im}^{(1)}) E_o^{(-)} e^{i\omega t}$$

La transferència de potència mitjana:



$$\langle P_{transfer} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} \left[ E^{(+)} \cdot \frac{dP^{(-)}}{dt} \right] = \frac{1}{2} \text{Re} \left[ \omega \varepsilon_o |E_o|^2 (\chi_{im}^{(1)} + i\chi_{real}^{(1)}) \right] = \frac{\omega \varepsilon_o \chi_{im}^{(1)} |E_o|^2}{2}$$

A partir d'aquesta expressió, veiem que la part imaginària de la susceptibilitat controla la transferència d'energia entre la llum incident i la col·lecció d'àtoms. En condicions de susceptibilitat imaginària negligible, l'energia no és absorbida pels àtoms sinó que generalment es dispersa i la part transmesa pateix un retard de fase que estarà determinat per la part real de la susceptibilitat.

Tenim una ona plana que il·lumina el medi; la seva intensitat és

$$I_{inc} = \frac{1}{2} \varepsilon_o c |E_o|^2$$

i la transferència de potència mitjana es pot reescriure com

$$\langle P_{transfer} \rangle = \frac{\omega \chi_{im}^{(1)}}{c} I_{inc}$$

b) Per trobar una expressió per a la susceptibilitat en un cas quasi-ressonant, partirem de l'equació [3.41], que hem derivat a l'apartat 3.4.4:

$$\chi^{(1)}(\omega) = \frac{\omega_p^2}{(\omega_o^2 - \omega^2) - i\gamma_{tot}\omega} \quad \text{on, } \omega_p \text{ és la freqüència de plasma } \quad \omega_p^2 = \frac{Nq^2}{\varepsilon_o m}$$

En una interacció quasi-ressonant,  $\omega_o \approx \omega$ , podem aproximar el terme en el denominador  $(\omega_o^2 - \omega^2) = (\omega_o + \omega)(\omega_o - \omega) \approx 2\omega_o(\omega_o - \omega)$ :

$$\chi^{(1)}(\omega) \approx \frac{\omega_p^2}{2\omega_o(\omega_o - \omega) - i\gamma_{tot}\omega_o} = \omega_p^2 \frac{2\omega_o(\omega_o - \omega) - i\gamma_{tot}\omega_o}{4\omega_o^2(\omega_o - \omega)^2 + \gamma_{tot}^2\omega_o^2}$$

Reescrivint aquesta expressió com

$$\chi^{(1)}(\omega) = \frac{\omega_p^2}{\gamma_{tot}} \frac{2\omega_o(\omega_o - \omega) / \gamma_{tot} + i\omega}{(2\omega_o(\omega_o - \omega) / \gamma_{tot})^2 + \omega_o^2}$$

podem veure que la part imaginària té un perfil lorentzià centrat en la freqüència de ressonància:

$$\chi_{im}^{(1)} = \frac{\omega_p^2}{\omega_o \gamma_{tot}} \frac{1}{1 + (2(\omega_o - \omega) / \gamma_{tot})^2}$$

c) Finalment, podem substituir la relació de susceptibilitat imaginària en l'expressió de la transferència de potència:



$$\langle P_{transfer} \rangle = \frac{\omega \omega_p^2}{\omega_o \gamma_{tot} c} \frac{I_{inc}}{1 + (2(\omega_o - \omega) / \gamma_{tot})^2}$$

### Problema 3.4

Una ona EM plana incideix sobre un dipol oscil·lant forçant aquest a oscil·lar. Determineu el valor mitjà de la força magnètica  $\vec{F} = -q(\dot{\vec{x}} \wedge \vec{B}_{ext})$  exercida pels camps sobre el dipol i calculeu la pressió de radiació en ressonància utilitzant l'expressió

$$P_{rad} = \frac{F}{\sigma_{ext}} \quad (\sigma_{ext} \text{ és la secció eficaç d'extinció de l'oscil·lador de dipol forçat i } q = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}).$$

### Solució

Com que la força és un producte bilineal de vectors, el valor mitjà es pot calcular en termes de la seva representació complexa:

$$\langle \vec{F} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} \left[ -q \dot{\vec{x}}^{(+)} \wedge \vec{B}_{ext}^{(-)} \right]$$

El moviment de l'electró és oposat a la direcció del camp elèctric, de manera que la direcció de la velocitat de l'electró és  $\dot{\vec{x}} = \dot{x}(-\hat{e})$ :

$$-q \dot{\vec{x}}^{(+)} \wedge \vec{B}_{ext}^{(-)} = q \dot{x}^{(+)} B_{ext}^{(-)} \left[ \hat{e} \wedge \hat{b} \right] = q \dot{x}^{(+)} B_{ext}^{(-)} \hat{u}$$

on utilitzem el caràcter transversal de l'ona plana. Com podem veure, la força s'exerceix en la direcció de propagació de l'ona.

La velocitat de l'electró es pot calcular considerant el model de Lorentz i assumint que la força elèctrica és molt més gran que la força magnètica:

$$\frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} + \gamma \frac{d\vec{x}}{dt} + \omega_o^2 \vec{x} = -\frac{q}{m} \vec{E}_{ext}$$

(càrrega de l'electró:  $-q$ ).

$$\text{Escrivint } \vec{E}_{ext} = \text{Re} \left[ \hat{e} E_o^{(+)} e^{-i\omega t} \right] \quad i \quad \vec{x} = \text{Re} \left[ (-\hat{e}) x_o^{(+)} e^{-i\omega t} \right]$$

obtenim una equació per al mòdul del desplaçament:

$$\frac{d^2 x^{(+)} }{dt^2} + \gamma \frac{dx^{(+)} }{dt} + \omega_o^2 x^{(+)} = \frac{q}{m} E_o^{(+)}$$

Amb solució



$$x^{(+)} = \frac{qE_o^{(+)} / m}{(\omega_o^2 - \omega^2) - i\gamma\omega} e^{-i\omega t}$$

la derivada temporal dona

$$\dot{x}^{(+)} = -i \frac{qE_o^{(+)} \omega}{m} \frac{(\omega_o^2 - \omega^2) + i\gamma\omega}{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2} e^{-i\omega t} = \frac{qE_o^{(+)} \omega}{m [(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2]} [\gamma\omega - i(\omega_o^2 - \omega^2)] e^{-i\omega t}$$

$$i B_{ext}^{(-)} = \frac{E_o^{(-)}}{c} e^{i\omega t}$$

La força magnètica és per tant

$$\langle \vec{F} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} [q \dot{x}^{(+)} B_{ext}^{(-)}] \hat{u} = \frac{q^2 \gamma \omega^2 |E_{ext}|^2}{2mc [(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2]} \hat{u}$$

que, pel que fa a la intensitat incident  $I_{inc} = \epsilon_o c |E_{ext}|^2 / 2$ , s'expressa

$$\langle F \rangle = \frac{q^2 \gamma \omega^2}{m \epsilon_o c^2 [(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2]} I_{inc} = \frac{\sigma_{ext} I_{inc}}{c}$$

on utilitzem l'equació [3.28], que defineix el coeficient d'extinció.

Finalment, podem calcular la pressió de radiació:

$$P_{rad} = \frac{\langle F \rangle}{\sigma_{ext}} = \frac{I_{inc}}{c}$$

Aquesta expressió és equivalent a la presentada al capítol 1.

### Problema 3.5

*Dedueix l'equació de conservació d'energia en medis macroscòpics*

#### Solució

Començant per les equacions macroscòpiques de Maxwell

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad i \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \vec{j}_{cond} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

feu el producte escalar de la primera equació per  $\vec{H}$  i de la segona per  $\vec{E}$ :

$$\vec{H} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) = -\vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{H}) = \vec{E} \cdot \vec{j}_{cond} + \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$



Utilitzant la identitat  $\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \wedge \vec{H}) = \vec{H} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{H})$ , obtenim la relació

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \wedge \vec{H}) = -\vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} - \vec{E} \cdot \vec{j}_{cond}$$

equivalent a l'equació [1.15A] en presència de matèria, on definim el següent.

Vector de Poynting:  $\vec{S} = \vec{E} \wedge \vec{H}$

Ritme de canvi de la densitat d'energia del camp elèctric:  $\frac{dw_E}{dt} = \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

Ritme de canvi de la densitat d'energia del camp magnètic:  $\frac{dw_M}{dt} = \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

Aquesta relació general es pot particularitzar de maneres diferents, depenent de com es considerin les equacions materials.

Per exemple, inserint la relació general  $\vec{B} = \mu_o \vec{H} + \mu_o \vec{M}$  i  $\vec{D} = \epsilon_o \vec{E} + \vec{P}$ , podem reescriure l'equació de conservació d'energia (vàlida per a medis isòtrops no dispersius) com

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{S} = -\frac{1}{2} \frac{\partial (\mu_o H^2 + \epsilon_o E^2)}{\partial t} - \mu_o \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{M}}{\partial t} - \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} - \vec{E} \cdot \vec{j}_{cond}$$

on el primer terme del costat dret es redueix al ritme de canvi temporal de la densitat d'energia electromagnètica en el buit, amb  $M = 0$  i  $P = 0$ . El segon i tercer termes corresponen al treball realitzat per magnetitzar i polaritzar el medi.

La mateixa equació es pot expressar de formes diferents:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{S} &= -\vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} - \vec{E} \cdot \vec{j}_{cond} = -\frac{\partial (\vec{B} \cdot \vec{H})}{\partial t} - \frac{\partial (\vec{E} \cdot \vec{D})}{\partial t} + \vec{B} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \vec{D} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \vec{E} \cdot \vec{j}_{cond} = \\ &= -\frac{1}{2} \frac{\partial (\vec{B} \cdot \vec{H} + \vec{E} \cdot \vec{D})}{\partial t} + \left( \vec{B} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial (\vec{B} \cdot \vec{H})}{\partial t} \right) + \left( \vec{D} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial (\vec{E} \cdot \vec{D})}{\partial t} \right) - \vec{E} \cdot \vec{j}_{cond} \end{aligned}$$

Definint de la densitat d'energia del camp electromagnètic en el medi com

$$w_{em} = \frac{1}{2} (\vec{B} \cdot \vec{H} + \vec{D} \cdot \vec{E})$$

i utilitzant de nou les relacions materials  $\vec{B} = \mu_o \vec{H} + \mu_o \vec{M}$  i  $\vec{D} = \epsilon_o \vec{E} + \vec{P}$ , l'equació anterior es pot escriure com

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{S} + \frac{\partial w_{em}}{\partial t} = -\frac{1}{2} \left( \vec{H} \frac{\partial \vec{M}}{\partial t} - \vec{M} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right) - \frac{1}{2} \left( \vec{E} \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} - \vec{P} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) - \vec{E} \cdot \vec{j}_{cond}$$

El primer i el segon termes de la dreta representen el treball realitzat per unitat de volum i unitat de temps per polaritzar i magnetitzar un medi en un règim no lineal



d'interacció. Aquests termes serien nuls en el cas d'una interacció lineal, donant lloc a l'equació

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{S} = -\frac{\partial w_{em}}{\partial t} - \vec{E} \cdot \vec{j}_{cond}$$

que equival a l'equació [1.16A] en el buit.

### Problema 3.6

La constant dielèctrica complexa del semiconductor tel·lurur de cadmi (CdTe) a 500 nm ve donada per  $\epsilon_r = 8.92 + i2.29$ . Calcula, per aquesta longitud d'ona:

- la velocitat de fase de la llum que es propaga pel CdTe
- el coeficient d'absorció
- la reflectivitat per una incidència normal

### Solució

a) Per obtenir la velocitat de fase, hem de calcular l'índex de refracció del material a partir dels valors de la constant dielèctrica complexa:

$$n_{real} = \sqrt{\frac{\epsilon_{real} + \sqrt{\epsilon_{real}^2 + \epsilon_{im}^2}}{2}} = 3.01 \qquad n_{im} = \sqrt{\frac{-\epsilon_{real} + \sqrt{\epsilon_{real}^2 + \epsilon_{im}^2}}{2}} = 0.38$$

Velocitat de fase:

$$v = \frac{c}{n_{real}} = 0.996 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

b) El coeficient d'absorció depèn del valor de la part imaginària de l'índex de refracció:

$$\alpha = \frac{2n_{im}\omega}{c} = \frac{4\pi n_{im}}{\lambda} = 9.5 \cdot 10^6 \text{ m}^{-1}$$

c) La reflectivitat per una incidència normal ve donada per l'expressió

$$R = \left| \frac{n-1}{n+1} \right|^2 = \frac{(n_{real}-1) + in_{im}}{(n_{real}+1) + in_{im}} \cdot \frac{(n_{real}-1) - in_{im}}{(n_{real}+1) - in_{im}} = \frac{(n_{real}-1)^2 + n_{im}^2}{(n_{real}+1)^2 + n_{im}^2}$$

Substituint directament els valors de l'índex de refracció,

$$R = 0,2579.$$

La reflectivitat del CdTe a una longitud d'ona de 500 nm i una incidència normal és  $R = 25.79\%$ .



### Problema 3.7

La part real de l'índex de refracció d'un material donat és  $n_{real} = 1,53$  a la longitud d'ona de  $590 \text{ nm}$  i absorbeix o dispersa el 98% de la llum incident a una profunditat de  $2 \mu\text{m}$ . Quina és la constant dielèctrica complexa del material a aquesta longitud d'ona?

#### Solució

La llum que es propaga en el material absorbent segueix la llei de Beer-Lambert:

$$I(z) = I_0 e^{-\alpha z}$$

A una distància de  $2 \mu\text{m}$ , absorbeix el 98% de la radiació incident, de manera que es transmetrà un 2% i  $I(L) = 0.02I_0$ :

$$0.02I_0 = I_0 e^{-\alpha L} \rightarrow \alpha = -\frac{\ln 0.02}{L} = 1956011.5 \text{ m}^{-1}$$

L'índex imaginari de refracció està directament relacionat amb el coeficient d'absorció:

$$\alpha = \frac{2n_{im}\omega}{c} = \frac{4\pi n_{im}}{\lambda} \rightarrow n_{im} = \frac{\lambda\alpha}{4\pi} = 9.18 \cdot 10^{-2}$$

La constant dielèctrica es calcula directament a partir de l'índex de refracció:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{real} &= n_{real}^2 - n_{im}^2 = 2.332 \\ \varepsilon_{im} &= 2n_{real}n_{im} = 0.28 \end{aligned}$$

### Problema 3.8

Una placa amb costats paral·lels feta de vidre òptic té un índex de refracció  $n = n_{real} + in_{im}$ . El gruix de la placa és molt més gran que la longitud de coherència de la llum que l'il·lumina, de manera que els efectes d'interferència són insignificants i podem sumar simplement les intensitats a cada interfície.

a) Calculeu la reflectivitat i la transmissió totals de la placa en presència d'absorció, expressades en termes de reflectivitat en una sola capa  $R$ .

b) Si, a més, el medi és molt absorbent, de manera que les reflexions múltiples són insignificants ( $\alpha L \gg 1$ ) determineu la transmissió i reflectància de la placa en aquesta situació.

#### Solució

La reflectivitat a la interfície dependrà de l'índex de refracció a cada costat i de l'angle d'incidència. Per exemple, la reflectivitat per una incidència normal en una superfície que separa l'aire i en un medi d'índex  $n$  ve donada per l'expressió utilitzada al problema S3.6 c). Suposem que coneixem la reflectivitat,  $R$ , de la interfície en les condicions del problema.



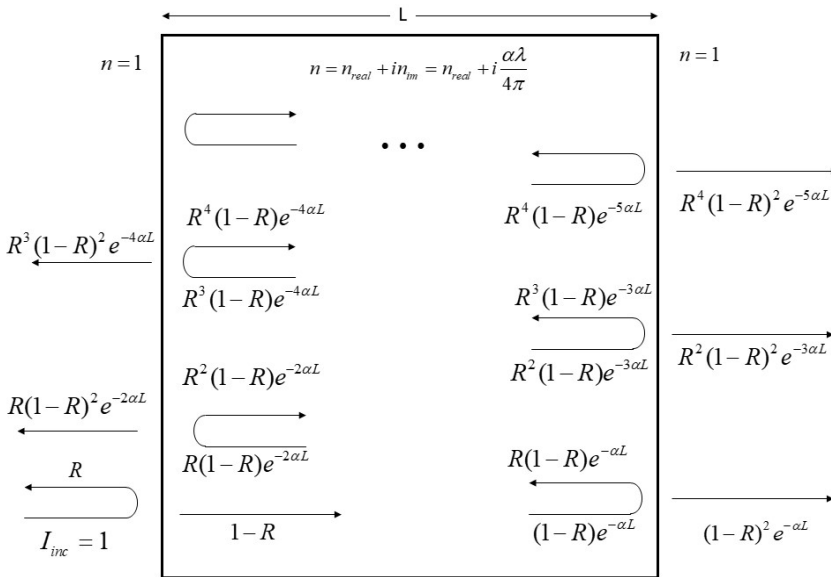
Al capítol 1, vam considerar la interacció d'una ona coherent en un medi en capes, on vàrem utilitzar la superposició de camps reflectits i transmesos juntament amb les condicions de contorn per derivar els coeficients de reflexió i transmissió.

En aquest problema, la il·luminació és incoherent, de manera que hem d'afegir les intensitats a cada interfície.

Si la intensitat incident és  $I_{inc} = 1$ , la intensitat reflectida des de la primera interfície és  $I_{R1} = R$  i la intensitat transmesa en aquesta interfície és  $I_{T1} = (1-R)$ . Com que el medi és absorbent, la intensitat a través d'una longitud del cristall compleix la llei de Beer-Lambert  $I(L) = I(0)e^{-\alpha L}$ .

a) Per calcular la reflectivitat total i la transmissió, hem de tenir en compte les múltiples reflexions del feix dins de la placa.

La figura mostra les primeres reflexions i transmissions juntament amb el valor de la intensitat a cada pas, tenint en compte que la intensitat incident és 1.



La reflectivitat total s'obté sumant tots els termes deixant la placa a l'esquerra. Inspeccionant els pocs termes que es mostren a la figura, aquesta suma es pot expressar com

$$\mathfrak{R} = I_R / I_{inc} = R + R(1-R)^2 e^{-2\alpha L} \sum_{m=0}^{\infty} R^{2m} e^{-2m\alpha L}$$

Sumant aquesta sèrie geomètrica, obtenim



$$\mathfrak{R} = R + \frac{R(1-R)^2 e^{-2\alpha L}}{1-R^2 e^{2\alpha L}}$$

De la mateixa manera, la transmissió és

$$T = I_T / I_{inc} = (1-R)^2 e^{-\alpha L} \sum_{m=0}^{\infty} R^{2m} e^{-2m\alpha L} = \frac{(1-R)^2 e^{-\alpha L}}{1-R^2 e^{-2\alpha L}}$$

En el límit d'absorció zero, es pot comprovar que la condició  $\mathfrak{R} + T = 1$  es manté.

En el cas general, aquestes expressions ens permeten obtenir la intensitat absorbida a través de la relació  $I_{abs} = I_{inc} - I_R - I_T$

b) En aquest cas, la quantitat de llum reflectida a la segona capa  $I_{R2} = RI_2 = R(1-R)e^{-\alpha L}$  s'assumeix que ja és insignificant sota el nostre plantejament.

La intensitat que transmet la placa (recordeu que només estem considerant un reflex) és

$$I_T = I_2(1-R) = (1-R)^2 e^{-\alpha L}$$

que correspon al primer terme de la sèrie que hem obtingut al punt a).

La suma de la radiació reflectida i transmesa és

$$\begin{aligned} I_R + I_T &= R + (1-R)^2 e^{-\alpha L} = R + e^{-\alpha L} - 2Re^{-\alpha L} + R^2 e^{-\alpha L} \\ &= 1 - (1-R - (1-R)e^{-\alpha L}) - (1-R)Re^{-\alpha L} \end{aligned}$$

La intensitat absorbida és igual a  $I_{abs} = (1-R)(1 - e^{-\alpha L}) = 1 - R - (1-R)Re^{-\alpha L}$

$$I_R + I_T + I_{abs} = 1 - (1-R)e^{-\alpha L} \approx 1 \text{ per } \alpha L \gg 1$$

### Problema 3.9

*La densitat de potència transferida des d'una ona plana EM externa que oscil·la a la freqüència  $\omega$  i una col·lecció d'àtoms idèntics s'han descrits per al problema S3.3. Un model més refinat, el model d'equació de velocitat, s'utilitza per descriure la interacció de la llum amb els àtoms. En l'anomenada aproximació de dos nivells, suposem que la freqüència del camp extern,  $\omega$ , és molt propera a una transició ressonant,  $\omega_b$ , en els àtoms del medi i que els canvis de població a altres nivells es poden negligir. El ritme de canvi de les poblacions dels dos nivells involucrats en la transició ens ve donada per:*

$$\frac{dN_2}{dt} = -\frac{dN_1}{dt} = W_{12}N_1 - W_{21}N_2$$

*Aquí  $W_{12}$  i  $W_{21}$  es defineixen com els ritmes d'absorció i de transició estimulada respectivament, en un sistema no degenerat  $W_{12} = W_{21}$ . Aquesta equació descriu*



*l'augment de població del nivell superior pel procés d'absorció i el seu esgotament pel procés d'emissió estimulada. Demostreu que dins d'aquest model el ritme de transició estimulada en aquest sistema es pot expressar en termes de la secció eficaç d'extinció dels àtoms individuals del medi.*

### Solució

Segons l'enfocament semi clàssic, els àtoms es descriuen per un hamiltonià atòmic amb estats propis estacionaris, caracteritzats per la seva energia  $E = \hbar\omega$  i per un conjunt de nombres quàntics. L'estat  $j$  reflecteix com n'està, de poblada, una col·lecció d'àtoms segons una densitat determinada  $N_j$ .

La densitat d'energia del medi (en el cas dels dos nivells) es pot expressar com  $u = N_1 E_1 + N_2 E_2$ . Sota la influència de l'ona EM externa, l'estat de l'àtom pot canviar mitjançant transicions entre els nivells d'energia, que conduiran a una variació temporal de les poblacions.

L'absorció de fotons a una velocitat  $W_{12}$  augmenta la densitat d'energia del medi per unitat de temps per una quantitat  $W_{12}\hbar\omega$ , mentre que l'emissió estimulada disminueix la densitat de potència en una quantitat  $W_{21}\hbar\omega$ . Per tant, la transferència de potència neta entre els dos estats induïts pel camp extern es pot expressar com

$$\langle P_{trans} \rangle = \frac{du}{dt} = W_{12}\hbar\omega N_1 - W_{21}\hbar\omega N_2 = W_{21}\hbar\omega(N_1 - N_2)$$

aquí hem utilitzat el fet que  $\frac{dN}{dt} = \frac{1}{\hbar\omega} \frac{du}{dt}$

A partir d'aquest resultat podem establir una comparació directa entre aquest resultat i l'obtingut al problema S3.4.

$$\langle P_{transfer} \rangle = \frac{\omega\omega_p^2}{\omega_o\gamma_{tot}c} \cdot \frac{I_{inc}}{1 + (2(\omega_o - \omega)/\gamma_{tot})^2} = W_{12}\hbar\omega(N_1 - N_2)$$

A partir de l'equació [3.17], podem reescriure la freqüència de plasma en termes del coeficient de decaïment de l'emissió espontània:

$$\gamma = \frac{\omega_o^2 q^2}{6\pi m \epsilon_o c^3} = \frac{\omega_o^2 \omega_p^2}{6\pi c^3 N} \rightarrow \omega_p^2 = \frac{\gamma 6\pi c^3 N}{\omega_o^2}$$

Per a l'aproximació de dos nivells, les possibilitats de transició depenen de la diferència de població, de manera que podem suposar que la variable clàssica  $N$ , corresponent a la densitat de dipols, es pot substituir per  $N=(N_1-N_2)$ .

Amb aquest canvi



$$\langle P_{transfer} \rangle = \frac{\omega 6\pi c^2 \gamma}{\omega_o^3 \gamma_{tot}} \cdot \frac{I_{inc}(N_1 - N_2)}{1 + (2(\omega_o - \omega)/\gamma_{tot})^2} = W_{12} \hbar \omega (N_1 - N_2)$$

I obtenim una expressió per a la probabilitat de transició:

$$W_{12} = \frac{6\pi c^2 \gamma}{\hbar \omega_o^3 \gamma_{tot}} \cdot \frac{I_{inc}}{1 + (2(\omega_o - \omega)/\gamma_{tot})^2}$$

Per relacionar aquesta expressió amb la secció eficaç d'extinció hem de considerar la seva dependència de freqüència en condicions quasi-ressonants. Partint d'aquest enfocament, l'equació [3.28] es transforma i dona

$$\sigma_{ext} \approx \frac{q^2 \gamma_{tot} \omega_o^2}{\epsilon_o cm} \cdot \frac{1}{(2\omega_o(\omega_o - \omega))^2 + \gamma_{tot}^2 \omega_o^2} = \frac{q^2}{\epsilon_o cm \gamma_{tot}} \cdot \frac{1}{1 + (2(\omega_o - \omega)/\gamma_{tot})^2}$$

Utilitzant de nou l'expressió de la velocitat de decaïment de l'emissió espontània,

$$\sigma_{ext} \approx \frac{\gamma 6\pi c^2}{\omega_o^2 \gamma_{tot}} \cdot \frac{1}{1 + (2(\omega_o - \omega)/\gamma_{tot})^2}$$

Aquest resultat es pot substituir en l'expressió perquè el resultat de  $W_{12}$  sigui

$$W_{12} = \sigma_{ext} \cdot \frac{I_{inc}}{\hbar \omega_o} = \sigma_{ext} \cdot \phi$$

Aquí  $\phi = I_{inc}/\hbar \omega_o$  correspon al flux incident de fotons. Aquests resultats mostren que la probabilitat d'emissió o absorció estimulada és proporcional a la secció eficaç de dispersió de l'àtom únic i al flux incident de fotons.

Per al cas dels estats energètics degenerats amb factors de degeneració  $g_1$  i  $g_2$ :

$$W_{12} = \frac{g_1}{g_2} W_{21} = \sigma_{ext} \cdot \phi$$

El ritme de canvi de la població atòmica es pot expressar, alternativament, segons els coeficients d'Einstein. El coeficient d'Einstein d'emissió estimulada,  $B_{21}$ , definit com

$$\frac{dN_1}{dt} = -\frac{dN_2}{dt} = B_{21} \cdot u \cdot N_2$$

es pot obtenir en termes del coeficient d'extinció, utilitzant la relació entre la intensitat i la densitat d'energia

$$\frac{dN_1}{dt} = W_{21} N_2 = \sigma_{ext} \phi N_2 = \sigma_{ext} \frac{I}{\hbar \omega} N_2 = \sigma_{ext} \frac{cu}{\hbar \omega} N_2 = B_{21} u N_2$$



### 3.7 Problemes plantejats

**P3.1** Un únic dipol lineal, situat a l'origen del nostre sistema de referència, amb amplitud constant,  $p_0$ , gira en el pla  $xOy$  en sentit contrari a les agulles del rellotge al voltant de l'eix  $Z$  amb una velocitat angular constant,  $\omega$ . Utilitzant l'expressió general dels camps radiats d'un dipol genèric,  $\vec{p} = p_0 \hat{d}$ , per un dipol elèctric (longitud d'ona llarga) i l'aproximació de la zona de radiació, tenim

$$\vec{e}_{rad} = \frac{\mu_0 \ddot{p}}{4\pi R} [\hat{u} \wedge (\hat{u} \wedge \hat{d})]$$

$$\vec{b}_{rad} = \frac{\mu_0 \ddot{p}}{4\pi Rc} [\hat{d} \wedge \hat{u}]$$

Escriu l'expressió dels camps elèctrics i magnètics radiats totals i la intensitat total al llarg de l'eix  $Z$ .

**P3.2** Per descriure correctament les propietats dispersives dels metalls nobles a la part visible, la funció dielèctrica ha de tenir en compte les contribucions tant dels electrons lliures com dels electrons lligats al metall. L'expressió de la constant dielèctrica inclou una contribució de tipus Drude i dos termes de dispersió ressonant de tipus Lorentz. Un model que descriu el comportament dispersiu de l'or entre 200-1200 nm s'expressa:

$$\varepsilon(\tilde{\omega}) = 1 - \frac{6.965^2}{\tilde{\omega}^2 + i0.0573\tilde{\omega}} - \frac{4.25^2}{\tilde{\omega}^2 - 3.75^2 + i1.42\tilde{\omega}} - \frac{5.5^2}{\tilde{\omega} - 5^2 + i1.42\tilde{\omega}}$$

Aquí  $\tilde{\omega} = 1/\lambda$ , on  $\lambda$  s'expressa en micres.

Representa les diferents contribucions per separat i descriu el comportament observat respecte de la situació on s'inclouen tots els termes. Descriu l'efecte de les resonàncies de tipus Lorentz en la relació de dispersió global, indicant els valors de les dues longituds d'ona ressonants dels oscil·ladors de tipus Lorentz.

**P3.3** Trobeu la relació de la potència total radiada per un oscil·lador dipolar quan emet amb les longituds d'ona  $\lambda_1 = 400$  nm i  $\lambda_2 = 700$  nm en el règim de dispersió de Rayleigh.

**P3.4** Obteniu l'equació d'ona per a la intensitat magnètica,  $H$ , a partir de les equacions macroscòpiques de Maxwell per a un medi que és homogeni, isòtrop, no dispersiu i en el règim lineal.

**P3.5** Per un medi dielèctric sense conductivitat, doneu una expressió de la part real de l'índex de refracció i el coeficient d'absorció en termes de les parts real i imaginària de la susceptibilitat elèctrica per a:



a) un medi poc absorbent que satisfà la relació  $\chi_{im} \ll 1 + \chi_{real}$

b) medis fortament absorbents, per als quals  $\chi_{im} \gg 1 + \chi_{real}$

**P3.6** Entreu a la web <http://refractiveindex.info/> i comproveu l'índex de refracció dels materials següents: BK7, metà (CH4) i or (Au). Comenta les diferències trobades.

**P3.7** Una interfície llisa i plana entre un metall amb relativa permitivitat  $\epsilon_m$  i un altre de dielèctric sense pèrdues amb permitivitat relativa  $\epsilon_d$ , poden suportar modes de superfície localitzats anomenats plasmons de superfície. La relació de dispersió per una polarització incident transversal magnètica (TM) ve donada per

$$\beta = k_0 \sqrt{\frac{\epsilon_m \epsilon_d}{\epsilon_m + \epsilon_d}}$$

Aquí  $\beta$  és el component del vector d'ona al llarg de la superfície. La freqüència del plasmó superficial correspon a una ressonància d'aquesta relació de dispersió i correspon també a un pol en l'expressió de  $\beta$ . Trobeu el valor de la freqüència del plasmó superficial en el cas d'una interfície entre un metall sense pèrdues amb freqüència de plasma  $\omega_p$  i l'aire.

**P3.8 a)** Obteniu una expressió per a la transmissió (de la llum amb incidència normal) a través d'una làmina com la descrita al problema resolt S3.8, en un medi molt absorbent. ( $\alpha L \gg 1$ ), en què podem negligir els múltiples reflexos damunt la pròpia làmina.

b) Utilitzeu la fórmula derivada del punt a) per obtenir la transmissió d'una làmina de silici de 10  $\mu\text{m}$  de gruix a la longitud d'ona de 633 nm ( $n_{\text{Si}}(633) = 3,8823 + i 0,019589$ ).

**P3.9 a)** L'absorció d'un medi òptic es pot quantificar en termes de la densitat òptica (DO), que es defineix com

$$OD = -\log_{10} \left( \frac{I(l)}{I(0)} \right)$$

Demostra que aquesta expressió és equivalent a  $OD = 0.434 \alpha L$

b) Calculeu la transmissió i la DO a través d'un conjunt de dues plaques idèntiques de GaAs de 20  $\mu\text{m}$  de gruix per a la radiació incident amb una longitud d'ona de 1.064 nm i amb incidència normal ( $n_{\text{GaAs}} = 3.4622 + i 0,014163$ ).

**P3.10** Repetiu el problema P3.7 ara prenent per cas un metall amb pèrdues  $\Gamma = 0.1 \omega_p$  (Utilitzeu les expressions pels medis conductius derivades a l'apartat 3.4.4)

### Introducció

Al capítol 3 hem establert les relacions materials entre diferents tipus de medis. La solució de l'equació d'ona per al cas dels cristalls isòtrops mostrava que les solucions d'ona plana corresponen als modes normals de propagació per aquests medis. L'efecte del medi isòtrop es reflecteix en forma de la relació de dispersió,  $k(\omega) = n(\omega)k_0$ , on l'índex de refracció és independent de la direcció de propagació:

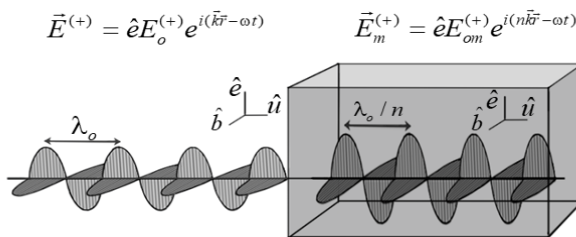


Figura 4.1 Modes de propagació dins d'un cristall

Aquestes solucions existeixen per a qualsevol direcció de propagació i estat de polarització i corresponen als modes de propagació en medis isòtrops, com ara el vidre, els gasos, els líquids i els cristalls amb simetria cúbica.

En el cas general dels sòlids cristal·lins, el medi és **anisòtrop**, i observem que les propietats òptiques depenen de la direcció de propagació a dins del cristall i de l'estat de polarització.

En els medis anisòtrops, la densitat de polarització,  $P$ , que es genera en el medi per a un determinat camp elèctric incident no és paral·lela al camp elèctric  $E$ , en conseqüència, el vector de desplaçament,  $D$ , tampoc és paral·lel a  $E$ . Això es deu al fet que l'estructura cristal·lina de la xarxa impedeix el desplaçament lliure dels electrons en totes les direccions de l'espai. L'angle entre els vectors  $D$  i  $E$  s'anomena **angle de birefringència**.



Aquest fet té algunes conseqüències immediates, que es deriven directament de les equacions de Maxwell.

1) Suposant que no hi ha càrregues lliures:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0 \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

Quan s'expressen en un espai recíproc, aquestes relacions tenen una importància geomètrica clara: el vector de desplaçament i el camp magnètic són sempre perpendiculars a la direcció de propagació del vector d'ona.

2) En materials no magnètics, la intensitat magnètica ( $H$ ) és paral·lela al camp magnètic ( $B$ ). A partir de la definició del vector de Poynting, veiem que l'energia circula en la direcció perpendicular al pla que conté  $E$  i  $H$ . Com que  $E$  no és paral·lel a  $D$ , podem arribar a la conclusió que, en medis anisòtrops, **la direcció del flux d'energia no és paral·lela a la direcció de propagació del front d'ona.**

La figura 2 resumeix l'orientació relativa i les direccions de propagació de les diferents magnituds.

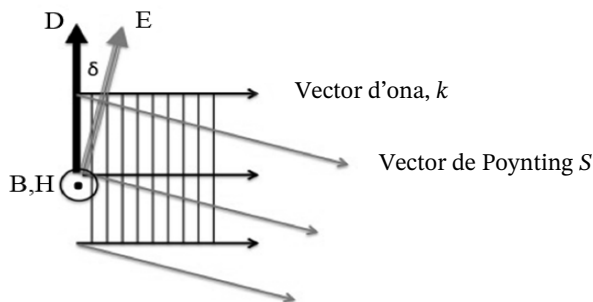


Figura 4.2 Orientació relativa i direcció de propagació d'algunes magnituds rellevants

### 4.1 Modes normals de propagació per medis birefringents

Per estudiar la propagació de la radiació òptica a través dels cristalls, comencem derivant l'equació d'ona per als medis anisòtrops, lineals, homogenis, monocromàtics, no-conductors ( $\sigma = 0$ ), i no-magnètics ( $\mu_r = 1$ ). Segons aquestes condicions, l'equació d'ona es llegeix

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) + \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{D}}{\partial t^2} = 0 \tag{4.1}$$

La relació entre  $D$  i  $E$  per a la radiació anisòtropa i monocromàtica és



$$D_i(\omega) = \varepsilon_o E_i(\omega) + \varepsilon_o \chi_{ij}^{(1)}(\omega) E_j(\omega) = \varepsilon_o (\delta_{ij} + \chi_{ij}^{(1)}(\omega)) E_j(\omega) = \varepsilon_o \varepsilon_{ij}(\omega) E_j(\omega)$$

En endavant, ometrem l'argument de la freqüència suposant que sempre estem parlant de feixos monocromàtics. El tensor dielèctric que relaciona el vector de desplaçament i el camp elèctric és

Sistema de referència genèric:                      sistema de referència cristal·logràfic,

$$\varepsilon_{ij} = \delta_{ij} + \chi_{ij}^{(1)} = \begin{pmatrix} \varepsilon'_{xx} & \varepsilon'_{xy} & \varepsilon'_{xz} \\ \varepsilon'_{yx} & \varepsilon'_{yy} & \varepsilon'_{yz} \\ \varepsilon'_{zx} & \varepsilon'_{zy} & \varepsilon'_{zz} \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix}$$

En un sistema de referència genèric, hauríem de retenir els nou components. Pel fet de triar un sistema de referència cristal·logràfic, la matriu esdevé diagonal, on l'eix  $z$  s'anomena **eix òptic**. En aquest sistema:

$$D_i = \varepsilon_o \delta_{ij} \varepsilon_{ij} E_j = \varepsilon_o \varepsilon_{ii} E_i \quad [4.2]$$

Suposant solucions d'ona plana per al camp elèctric i el vector de desplaçament:

$$\vec{E} = \hat{e} E_o^{(+)} e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} \quad \text{i} \quad \vec{D} = \hat{d} D_o^{(+)} e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}$$

i utilitzant [4.2], l'equació d'ona [4.1] s'escriu així:

$$\begin{aligned} i\vec{k} \wedge (i\vec{k} \wedge \vec{E}) - \mu_o \omega^2 \vec{D} &= 0 \\ \vec{k} \cdot (\vec{k} \cdot \vec{E}) - k^2 \vec{E} + \mu_o \varepsilon_o \omega^2 \vec{E} &= 0 \rightarrow \boxed{k_i (k_j E_j) - (k^2 - k_o^2 \varepsilon_{ii}) E_i = 0} \end{aligned} \quad [4.3]$$

Aquesta equació, que és equivalent a l'equació d'ona, és l'**equació de Fresnel**, que també es pot expressar com a matriu de la forma  $T_{ij} E_j = 0$ :

$$\begin{pmatrix} k_o^2 \varepsilon_x - k^2 + k_x^2 & k_x k_y & k_x k_z \\ k_y k_x & k_o^2 \varepsilon_y - k^2 + k_y^2 & k_y k_z \\ k_z k_x & k_z k_y & k_o^2 \varepsilon_z - k^2 + k_z^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad [4.4]$$

El sistema té una solució no trivial si  $\det(T) = 0$ . El determinant ve donat per l'expressió

$$\begin{aligned} k^2 (\varepsilon_x k_x^2 + \varepsilon_y k_y^2 + \varepsilon_z k_z^2) - k_o^2 \left[ k_x^2 (\varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_x \varepsilon_z) + k_y^2 (\varepsilon_y \varepsilon_x + \varepsilon_y \varepsilon_z) + k_z^2 (\varepsilon_z \varepsilon_x + \varepsilon_z \varepsilon_y) \right] + \\ + k_o^4 \varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z = 0 \end{aligned} \quad [4.5]$$

Les solucions a aquesta expressió corresponen als valors del vector d'ona per als diferents modes normals de propagació en el medi.



## Solucions bàsiques

Els cristalls es poden classificar en els grups següents segons la simetria de la seva estructura cristal·lina.

### A. Cristalls isòtrops

Classe cristal·lina: cúbica

Aquests cristalls es caracteritzen per un valor únic de la constant dielèctrica, independentment de la direcció de propagació  $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \varepsilon$ .

### B. Cristalls uniaxials

Classes cristal·lines: hexagonal, tetragonal, trigonal

Entre el cristalls uniaxials, podem distingir dos valors diferents de la constant dielèctrica:

- Ordinari:  $\varepsilon_{or} = \varepsilon_x = \varepsilon_y$
- Extraordinari:  $\varepsilon_e = \varepsilon_z$

El valor extraordinari correspon al valor al llarg de l'eix òptic.

### C. Cristalls biaxials

Classe cristal·lina: monoclínic, triclínic i ròmbic

En els cristalls biaxials, tots els termes de la constant dielèctrica són diferents:  $\varepsilon_x \neq \varepsilon_y \neq \varepsilon_z$ .

Ens centrarem a analitzar els modes normals de propagació de cristalls isòtrops i anisòtrops, però en aquest curs no entrarem en detall en un cas més complex com són els cristalls biaxials.

#### 4.1.1 Solucions de mode normal per a cristalls isòtrops

Per als cristalls isòtrops, tots els coeficients són iguals i l'expressió [4.5] es redueix a

$$k^2 \varepsilon k^2 - k_o^2 2\varepsilon^2 k^2 + k_o^4 \varepsilon^3 = 0$$

$$k^4 - 2\varepsilon k_o^2 k^2 + k_o^4 \varepsilon^2 = 0$$

que es pot reescriure com

$$(k^2 - \varepsilon k_o^2)^2 = 0$$

Per tant, les solucions per al vector d'ona són

$$k = \pm \sqrt{\varepsilon} k_o = \pm n k_o \quad [4.6]$$



En el cas dels medis isòtrops, sabem que el mode normal de propagació correspon a un vector d'ona uniforme amb un índex de refracció homogeni,  $n$ , que depèn de la freqüència, però que és constant en totes les direccions.

#### 4.1.2 Modes normals de propagació per a cristalls uniaxials

El determinant de l'equació de Fresnel per al cas dels cristalls uniaxials s'expressa en termes de les constants dielèctriques ordinària i extraordinària:

$$k^2(\varepsilon_{or}k_{\perp}^2 + \varepsilon_e k_z^2) - k_O^2(k_{\perp}^2 \varepsilon_{or}^2 + k_z^2 \varepsilon_{or} \varepsilon_e + k_z^2 \varepsilon_{or} \varepsilon_e) + k_O^4 \varepsilon_{or}^2 \varepsilon_e = 0$$

Si agrupem alguns termes, tenim

$$k^2(\varepsilon_{or}k_{\perp}^2 + \varepsilon_e k_z^2) - k_O^2 \varepsilon_{or} (k_{\perp}^2 \varepsilon_{or} + k_z^2 \varepsilon_e) - k_O^2 k^2 \varepsilon_{or} \varepsilon_e + k_O^4 \varepsilon_{or}^2 \varepsilon_e = 0$$

L'expressió es pot escriure de la manera següent:

$$(\varepsilon_{or}k_{\perp}^2 + \varepsilon_e k_z^2)(k^2 - \varepsilon_{or}k_O^2) - k_O^2 \varepsilon_{or} \varepsilon_e (k^2 - \varepsilon_{or}k_O^2) = 0$$

i finalment s'expressa així:

$$(k^2 - \varepsilon_{or}k_O^2)(\varepsilon_{or}k_{\perp}^2 + \varepsilon_e k_z^2 - \varepsilon_{or} \varepsilon_e k_O^2) = 0 \quad [4.7A]$$

on el vector d'ona transversal ve donat per  $k_{\perp}^2 = k_x^2 + k_y^2$ .

L'expressió [4.7A] té dues solucions diferents en funció de com cada parèntesi s'iguali a zero.

##### A. Mode ordinari de propagació, $k_{or}$

$$k_{or}^2 - \varepsilon_{or}k_O^2 = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{k_{or} = \pm \sqrt{\varepsilon_{or}} k_O} \quad [4.7B]$$

Aquesta solució, anomenada **mode ordinari de propagació**, correspon a un cas de tipus isòtrop amb un índex de refracció constant,  $n_{or}$ , donat per

$$\boxed{\text{Índex ordinari: } n_{or} = \sqrt{\varepsilon_{or}}} \quad [4.7C]$$

##### B. Mode extraordinari de propagació, $k_e$

El mode extraordinari de propagació,  $k_e$ , el trobem a partir de la relació

$$\varepsilon_{or}k_{e\perp}^2 + \varepsilon_e k_{ez}^2 - k_O^2 \varepsilon_{or} \varepsilon_e = 0$$

que es reescriu en la forma

$$\frac{k_{e\perp}^2}{\varepsilon_e} + \frac{k_{ez}^2}{\varepsilon_{or}} = k_O^2 \quad [4.8A]$$



Per tal de trobar l'expressió per a l'índex de refracció extraordinari, suposem que el vector d'ona es propaga en una direcció genèrica que s'expressa en coordenades esfèriques:

$$\vec{k}_e = k_e (\cos \phi \sin \theta \hat{i} + \sin \phi \sin \theta \hat{j} + \cos \theta \hat{k})$$

on triem l'eix  $z$  orientat al llarg de l'eix òptic.

El mòdul del vector d'ona extraordinari és  $k_e = n_e k_o$ , així que:

$$k_{e\perp}^2 = k_{ex}^2 + k_{ey}^2 = n_e^2 k_o^2 (\cos^2 \phi \sin^2 \theta + \sin^2 \phi \sin^2 \theta) = n_e^2 k_o^2 \sin^2 \theta$$

$$k_{ez}^2 = n_e^2 k_o^2 \cos^2 \theta$$

L'equació [4.8A] s'expressa de la manera següent:

$$\frac{n_e^2 \sin^2 \theta}{\epsilon_e} + \frac{n_e^2 \cos^2 \theta}{\epsilon_{or}} = 1$$

donant així la forma final a l'índex de refracció extraordinari. Contràriament al mode ordinari, l'índex de refracció extraordinari depèn de l'angle de propagació respecte de l'eix òptic:

$$n_e(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\frac{\sin^2 \theta}{\epsilon_e} + \frac{\cos^2 \theta}{\epsilon_{or}}}} \quad [4.8B]$$

Aquesta expressió té valors concrets en dos angles de propagació específics:

$$\text{At } \theta = 0^\circ \rightarrow n_e(0) = \sqrt{\epsilon_{or}} = n_{or}$$

$$\text{At } \theta = 90^\circ \rightarrow n_e(90) = \sqrt{\epsilon_e} = n_e$$

Tots els cristalls uniaxials es caracteritzen per aquests dos índex diferents, que estan definits per les constants dielèctriques ordinària i extraordinària. A partir d'aquests valors, classifiquem els cristalls uniaxials com

- Cristall uniaxial positiu: cristall amb  $n_e > n_{or}$
- Cristall uniaxial negatiu: cristall amb  $n_e < n_{or}$

I definim la birefringència del medi:  $|n_e - n_{or}|$

Per als modes ordinaris, el valor de l'índex de refracció per a les diferents direccions de propagació es pot representar com una esfera; i per als modes extraordinaris, com a un el·lipsoide de revolució al voltant de l'eix òptic.

La figura 3 mostra el gràfic dels índexs de refracció d'ambdós tipus de cristalls. Per a qualsevol direcció de propagació genèrica, definida per l'angle azimutal respecte de



l'eix òptic,  $\theta$ , les interseccions amb la circumferència i l'el·lipse ofereixen els valors dels índexs de refracció ordinari i extraordinari en aquella direcció de propagació concreta.

Els gràfics de la figura 3 corresponen a un valor concret de la longitud d'ona. Com hem vist en capítols anteriors, la dispersió del material és la que causa la dependència de la dependència dels índexs de refracció amb la longitud d'ona; per tant, l'expressió més genèrica per als índexs de refracció extraordinari i ordinari és la següent:

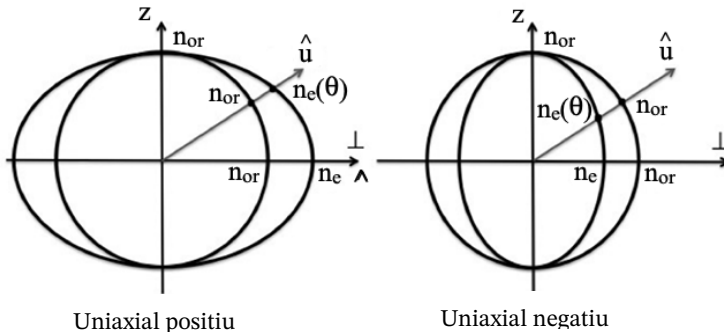


Figura 4.3 Índexs de refracció ordinari i extraordinari per als cristalls uniaxials positius i negatius

Mode ordinari:  $n_{or}(\omega) = \sqrt{\epsilon_{or}(\omega)} \quad \rightarrow \quad k_{or}(\omega) = n_{or}(\omega)k_0$

Mode extraordinari:  $n_e(\omega, \theta) = \frac{1}{\sqrt{\frac{\sin^2 \theta}{\epsilon_e(\omega)} + \frac{\cos^2 \theta}{\epsilon_{or}(\omega)}}} \quad \rightarrow \quad k_e(\omega, \theta) = n_e(\omega, \theta)k_0$

En un règim de dispersió normal, l'índex de refracció augmenta amb la freqüència, de manera que es poden representar diferents el·lipses per a diferents longituds d'ona. Per a qualsevol cristall concret, els valors dels índexs de refracció,  $n_{or}(\lambda)$  i  $n_e(\lambda)$ , es poden trobar en llibres de text d'òptica estàndard, com ara Palik, E.D. (1998). *Handbook of Optical Constants of Solids*. Academic Press.

Els models normals dels cristalls uniaxials es poden expressar respecte els índexs de refracció de la manera següent:

$$\begin{aligned}
 \text{Mode ordinari:} \quad & \vec{E}_{or}^{(+)} = \hat{e}_{or} E_{0or}^{(+)} \exp\left[i(\vec{k}_{or} \vec{r} - \omega t)\right] \\
 \text{Mode extraordinari:} \quad & \vec{E}_e^{(+)} = \hat{e}_e E_{0e}^{(+)} \exp\left[i(\vec{k}_e \vec{r} - \omega t)\right]
 \end{aligned}
 \tag{4.9}$$



## 4.2 Estat de polarització dels modes normals

Una vegada hem obtingut les expressions per a la relació de dispersió corresponent als modes extraordinari i ordinari, podrem passar a determinar les direccions de polarització de cadascun d'ells. Per fer-ho, partim de l'equació de Fresnel [4.4] a fi de trobar els valors dels autovectors corresponents.

### 4.2.1 Cas isòtrop

En el cas dels cristalls isòtrops, tenim  $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \varepsilon$  i  $k^2 = \varepsilon k_o^2$

Si substituïm en [4.4] ens dona

$$\begin{pmatrix} k_x^2 & k_x k_y & k_x k_z \\ k_y k_x & k_y^2 & k_y k_z \\ k_z k_x & k_z k_y & k_z^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

A partir d'aquesta relació obtenim:

$$k_x E_x + k_y E_y + k_z E_z = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{\vec{k} \cdot \vec{E} = 0} \quad [4.10]$$

Aquesta relació recupera el resultat ja conegut del cas isòtrop: el caràcter transversal del camp elèctric respecte de la direcció de propagació del front d'ona. Qualsevol estat de polarització es pot definir per aquesta solució, ja que l'equació de Fresnel no imposa cap restricció en aquest cas.

### 4.2.2 Cristalls uniaxials

#### 1. Mode ordinari

Aquesta solució l'obtenim prenent una direcció de propagació arbitrària dins del cristall (definida en termes de coordenades esfèriques, amb l'eix  $z$  corresponent a l'eix òptic). El vector d'ona ordinari s'escriu de la manera següent:

$$\begin{aligned} \vec{k}_{or} &= n_{or} k_o \hat{u} = \sqrt{\varepsilon_{or}} k_o (\cos \phi \sin \theta \hat{i} + \sin \phi \sin \theta \hat{j} + \cos \theta \hat{k}) = \\ &= k_{or} (\cos \phi \sin \theta \hat{i} + \sin \phi \sin \theta \hat{j} + \cos \theta \hat{k}) \end{aligned}$$

L'equació de Fresnel en aquest cas és

$$\begin{pmatrix} k_o^2 \varepsilon_{or} - k_{or}^2 + k_{orx}^2 & k_{orx} k_{ory} & k_{orx} k_{orz} \\ k_{ory} k_{orx} & k_o^2 \varepsilon_{or} - k_{or}^2 + k_{ory}^2 & k_{ory} k_{orz} \\ k_{orz} k_{orx} & k_{orz} k_{ory} & k_o^2 \varepsilon_e - k_{or}^2 + k_{orz}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{orx} \\ E_{ory} \\ E_{orz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

que dona com a resultat les tres equacions següents:



$$\cos^2 \phi \sin^2 \theta E_{orx} + \sin^2 \theta \cos \phi \sin \phi E_{ory} + \cos \phi \sin \theta \cos \theta E_{orz} = 0 \quad [1]$$

$$\sin^2 \theta \cos \phi \sin \phi E_{orx} + \sin^2 \phi \sin^2 \theta E_{ory} + \sin \phi \sin \theta \cos \theta E_{orz} = 0 \quad [2]$$

$$k_{or}^2 \cos \phi \sin \theta \cos \theta E_{orx} + k_{or}^2 \sin \phi \sin \theta \cos \theta E_{ory} + [k_o^2 (n_e^2 - n_{or}^2) + k_{or}^2 \cos^2 \theta] E_{orz} = 0 \quad [3]$$

A partir de [1], obtenim

$$E_{orx} \cos \phi + E_{ory} \sin \phi + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} E_{orz} = 0 \quad [4]$$

i [3] es pot reescriure

$$E_{orx} \cos \phi + E_{ory} \sin \phi + \frac{k_o^2 (n_e^2 - n_{or}^2)}{k_{or}^2 \sin \theta \cos \theta} E_{orz} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} E_{orz} = 0$$

Si utilitzem [4], l'equació es redueix a:

$$k_o^2 (n_e^2 - n_{or}^2) E_{orz} = 0$$

Com que, en els cristalls uniaxials,  $n_e$  és diferent de  $n_{or}$ , s'ha de complir que  $E_{orz} = 0$ .

Per tant, a partir de [4], obtenim

$$\boxed{\frac{E_{orx}}{E_{ory}} = \frac{-\sin \phi}{\cos \phi}} \quad [4.11A]$$

Llavors, el vector unitari de polarització per als modes ordinaris és

$$\boxed{\hat{e}_{or} = -\sin \phi \hat{i} + \cos \phi \hat{j}} \quad [4.11B]$$

Sent perpendicular als dos,  $\hat{u}$  i  $\hat{k}$ , a partir d'aquest resultat, podem concloure que **el mode ordinari sempre es polaritza en la direcció perpendicular al pla que conté l'eix òptic i la direcció de propagació del vector d'ona** (pla d'incidència).

## 2. Mode extraordinari

Per a aquest mode, tenim les relacions

$$\vec{k}_e(\theta) = k_o n_e(\theta) \hat{u} = k_e(\theta) (\cos \phi \sin \theta \hat{i} + \sin \phi \sin \theta \hat{j} + \cos \theta \hat{k})$$

amb

$$k_o^2 = k_e^2(\theta) \left[ \frac{\sin^2 \theta}{\epsilon_e} + \frac{\cos^2 \theta}{\epsilon_{or}} \right] \quad [4.12A]$$

L'equació de Fresnel per als modes extraordinaris fa



$$\begin{pmatrix} k_o^2 \varepsilon_{or} - k_e^2 + k_{ex} & k_{ex} k_{ey} & k_{ex} k_{ez} \\ k_{ey} k_{ex} & k_o^2 \varepsilon_{or} - k_e^2 + k_{ey}^2 & k_{ey} k_{ez} \\ k_{ez} k_{ex} & k_{ez} k_{ey} & k_o^2 \varepsilon_e - k_e^2 + k_{ez}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{ex} \\ E_{ey} \\ E_{ez} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

En aquesta expressió, substituïm l'expressió [4.12A] per obtenir les tres equacions següents:

$$\left[ k_e^2 \frac{\varepsilon_{or} \sin^2 \theta}{\varepsilon_e} + k_e^2 \cos^2 \theta - k_e^2 + k_e^2 \cos^2 \phi \sin^2 \theta \right] E_{ex} + k_e^2 \sin^2 \theta \cos \phi \sin \phi E_{ey} + k_e^2 \cos \phi \sin \theta \cos \theta E_{ez} = 0 \quad [5]$$

$$k_e^2 \sin^2 \theta \cos \phi \sin \phi E_{ex} + \left[ k_e^2 \frac{\varepsilon_{or} \sin^2 \theta}{\varepsilon_e} + k_e^2 \cos^2 \theta - k_e^2 + k_e^2 \sin^2 \phi \sin^2 \theta \right] E_{ey} + k_e^2 \sin \phi \sin \theta \cos \theta E_{ez} = 0 \quad [6]$$

$$k_e^2 \cos \phi \cos \theta \sin \theta E_{ex} + k_e^2 \cos \theta \sin \theta \sin \phi E_{ey} + \left[ k_e^2 \sin^2 \theta + k_e^2 \frac{\varepsilon_e \cos^2 \theta}{\varepsilon_{or}} - k_e^2 + k_e^2 \cos^2 \theta \right] E_{ez} = 0 \quad [7]$$

que es poden reescriure, respectivament, com

$$\left[ \frac{\varepsilon_{or} \sin^2 \theta}{\varepsilon_e} - \sin^2 \theta \sin^2 \phi \right] E_{ex} + \sin^2 \theta \cos \phi \sin \phi E_{ey} + \sin \theta \cos \phi \cos \theta E_{ez} = 0$$

$$\sin^2 \theta \cos \phi \sin \phi E_{ex} + \left[ \frac{\varepsilon_{or} \sin^2 \theta}{\varepsilon_e} - \sin^2 \theta \cos^2 \phi \right] E_{ey} + \sin \phi \sin \theta \cos \theta E_{ez} = 0$$

$$\cos \phi \cos \theta \sin \theta E_{ex} + \cos \theta \sin \theta \sin \phi E_{ey} + \frac{\varepsilon_e \cos^2 \theta}{\varepsilon_{or}} E_{ez} = 0$$

i les podem simplificar més, obtenint

$$\left[ \frac{\varepsilon_{or}}{\varepsilon_e} - \sin^2 \phi \right] E_{ex} + \cos \phi \sin \phi E_{ey} + \frac{\cos \phi \cos \theta}{\sin \theta} E_{ez} = 0 \quad [8]$$

$$\cos \phi \sin \phi E_{ex} + \left[ \frac{\varepsilon_{or}}{\varepsilon_e} - \cos^2 \phi \right] E_{ey} + \frac{\sin \phi \cos \theta}{\sin \theta} E_{ez} = 0 \quad [9]$$

$$\cos \phi E_{ex} + \sin \phi E_{ey} + \frac{\varepsilon_e \cos \theta}{\varepsilon_{or} \sin \theta} E_{ez} = 0 \quad [10]$$

Si fem l'operació [8]–[10]·cosφ, tenim

$$\left[ \frac{\varepsilon_{or}}{\varepsilon_e} - 1 \right] E_{ex} + \frac{\cos \phi \cos \theta}{\sin \theta} \left[ 1 - \frac{\varepsilon_e}{\varepsilon_{or}} \right] E_{ez} = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{E_{ex} = -\frac{\varepsilon_e \cos \phi \cos \theta}{\varepsilon_{or} \sin \theta} E_{ez}}$$

I a partir de l'operació [9]–[10]·sinφ, tenim que

$$\left[ \frac{\varepsilon_{or}}{\varepsilon_e} - 1 \right] E_{ey} + \frac{\sin \phi \cos \theta}{\sin \theta} \left[ 1 - \frac{\varepsilon_e}{\varepsilon_{or}} \right] E_{ez} = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{E_{ey} = -\frac{\varepsilon_e \sin \phi \cos \theta}{\varepsilon_{or} \sin \theta} E_{ez}}$$



A partir d'aquestes relacions, podem trobar fàcilment una expressió per a l'autovector extraordinari:

$$\vec{E}_e = \left( \frac{\cos\theta \cos\phi}{\varepsilon_{or}} \hat{i} + \frac{\cos\theta \sin\phi}{\varepsilon_{or}} \hat{j} - \frac{\sin\theta}{\varepsilon_e} \hat{k} \right)$$

$$\hat{e}_e = \frac{\vec{E}_e}{|\vec{E}_e|} = \frac{\left( \frac{\cos\theta \cos\phi}{\varepsilon_{or}} \hat{i} + \frac{\cos\theta \sin\phi}{\varepsilon_{or}} \hat{j} - \frac{\sin\theta}{\varepsilon_e} \hat{k} \right)}{\sqrt{\frac{\cos^2\theta}{\varepsilon_{or}^2} + \frac{\sin^2\theta}{\varepsilon_e^2}}}$$

Aquest vector és perpendicular a la direcció de polarització del mode ordinari. Per tant, es troba en el pla d'incidència. Podem comprovar que **el mode extraordinari es polaritza en la direcció tangent a l'el·lipse de l'índex de refracció extraordinari**.

### 4.3 Propagació dels raigs per cristalls uniaxials

En un cristall uniaxial, un raig de llum es propaga amb el vector d'ona orientat al llarg d'una direcció determinada (expressada en coordenades esfèriques, on l'eix  $z$  correspon a l'eix òptic del cristall):

$$\hat{u} = (\cos\phi \sin\theta \hat{i} + \sin\phi \sin\theta \hat{j} + \cos\theta \hat{k})$$

Podem definir un vector unitari que és perpendicular a aquesta direcció i que es troba en el pla d'incidència (el pla conté  $\hat{u}$  and  $\hat{k}$ ):

$$\hat{u}_\perp = (\cos\phi \cos\theta \hat{i} + \sin\phi \cos\theta \hat{j} - \sin\theta \hat{k})$$

A partir dels resultats que hem obtingut anteriorment, podem resumir de la manera següent els estats de polarització dels dos modes normals que es propaguen en el medi.

**Mode ordinari:** es polaritza en el pla perpendicular al pla d'incidència.

$$\hat{e}_{or} = (-\sin\phi \hat{i} + \cos\phi \hat{j})$$

**Mode extraordinari:** la direcció de polarització es troba en el pla d'incidència i és tangent a l'el·lipse d'índex de refracció extraordinari en el punt on el vector unitari  $\hat{u}$  fa intersecció amb l'el·lipse. El vector unitari extraordinari forma un angle  $\delta$  respecte del vector perpendicular  $\hat{u}_\perp$ .



$$\hat{e}_e = \frac{\left( \frac{\cos\theta \cos\phi}{\varepsilon_{or}} \hat{i} + \frac{\cos\theta \sin\phi}{\varepsilon_{or}} \hat{j} - \frac{\sin\theta}{\varepsilon_e} \hat{k} \right)}{\sqrt{\frac{\cos^2\theta}{\varepsilon_{or}^2} + \frac{\sin^2\theta}{\varepsilon_e^2}}}$$

En conseqüència, l'angle de birefringència es pot calcular a partir de la relació

$$\hat{e}_e \cdot \hat{u}_\perp = \cos\delta \quad \rightarrow \quad \cos\delta = \frac{\frac{\cos^2\theta}{\varepsilon_{or}} + \frac{\sin^2\theta}{\varepsilon_e}}{\sqrt{\frac{\cos^2\theta}{\varepsilon_{or}^2} + \frac{\sin^2\theta}{\varepsilon_e^2}}} = \frac{\varepsilon_e \cos^2\theta + \varepsilon_{or} \sin^2\theta}{\sqrt{\varepsilon_e^2 \cos^2\theta + \varepsilon_{or}^2 \sin^2\theta}}$$

### 4.3.1 Propagació de l'energia del raig

Una vegada coneixem la direcció de polarització dels modes, podem calcular la direcció de propagació dels fronts d'ona de l'energia, que estan associats al vector de Poynting. Per a les ones monocromàtiques planes, trobem la relació

$$\vec{S}_{or} = |\vec{S}_{or}| \hat{S}_{or} = \vec{E}_{or} \wedge \vec{H}_{or} = |\vec{E}_{or}| |\vec{H}_{or}| (\hat{e}_{or} \wedge \hat{h}_{or}) = |\vec{E}_{or}| |\vec{H}_{or}| (\hat{e}_{or} \wedge (\hat{u} \wedge \hat{e}_{or})) = |\vec{E}_{or}| |\vec{H}_{or}| \hat{u}$$

on  $\hat{h}_{or}$  correspon a la direcció del vector d'intensitat magnètica. Així doncs, els fronts d'ona de l'energia (perpendiculars a  $\hat{S}$ ), en aquest cas, es propaguen de forma paral·lela als fronts d'ona de fase (perpendiculars a  $\hat{u}$ ).

Per al mode extraordinari:

$$\vec{S}_e = |\vec{E}_e| |\vec{H}_e| (\hat{e}_e \wedge \hat{h}_e) = |\vec{E}_e| |\vec{H}_e| (\hat{e}_e \wedge \frac{(\hat{u} \wedge \hat{e}_e)}{\cos\delta}) = |\vec{E}_e| |\vec{H}_e| \frac{(\hat{u} - \sin\delta \hat{e}_e)}{\cos\delta} = |\vec{E}_e| |\vec{H}_e| \hat{S}_e$$

amb

$$\hat{S}_e = \frac{\hat{u} - \sin\delta \hat{e}_e}{\cos\delta}$$

on definim el vector unitari en la direcció del vector de Poynting per al mode extraordinari. Per producte escalar directe, podem comprovar que aquest vector es propaga forma un angle  $\delta$  amb la direcció de propagació del front d'ona:

$$\hat{S}_e \cdot \hat{u} = \frac{\hat{u} \cdot \hat{u} - \sin\delta \hat{e}_e \cdot \hat{u}}{\cos\delta} = \frac{1 - \sin^2\delta}{\cos\delta} = \cos\delta$$

La figura 4 resumeix tots aquests aspectes per als cristalls uniaxials negatius i positius.

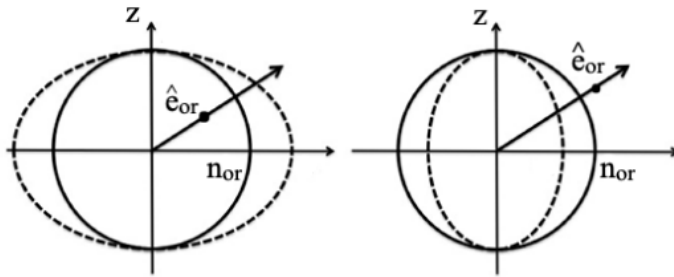


Figura 4a Direcció de polarització del mode ordinari

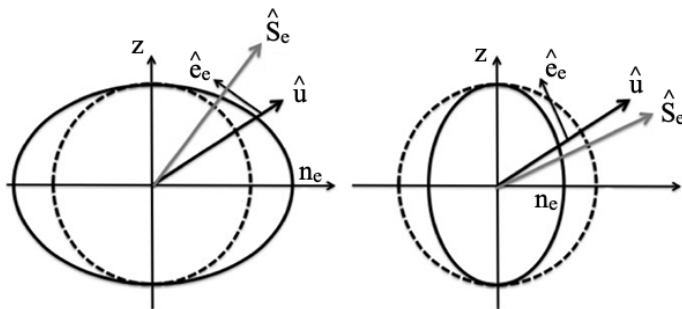


Figura 4b Direcció de polarització i vector de Poynting del mode extraordinari

Per les ones extraordinàries, ens trobem amb el resultat sorprenent que els fronts d'ona d'energia no es propaguen en paral·lel als fronts d'ona de fase, sinó que formen un angle entre ells igual a l'angle de birefringència. Això comporta una separació espacial dels modes ordinari i extraordinari a mesura que es propaguen per dins del cristall uniaxial. Aquest efecte s'anomena **separació espacial** (*spatial walk-off*).

Ens podríem preguntar quin és el mecanisme que genera les dues solucions normals quan un feix d'un medi isòtrop incideix sobre un medi uniaxial. Aquí oferim només una resposta parcial a aquesta pregunta, ja que un plantejament més elaborat ja s'escapa del propòsit d'aquest llibre.

A la interfície, la llei de Snell s'hauria d'aplicar per a cada mode per separat. Si suposem que l'índex de refracció del medi incident és 1, tenim

$$\begin{aligned} \sin \theta_i &= n_{or} \sin \theta_t \\ \sin \theta_i &= n_e(\theta_t) \sin \theta_t \end{aligned}$$

Els modes ordinari i extraordinari es generaran només si la direcció de polarització corresponent està present en el feix incident (a dins del pla d'incidència per al mode extraordinari i perpendicular al pla d'incidència per al mode ordinari).

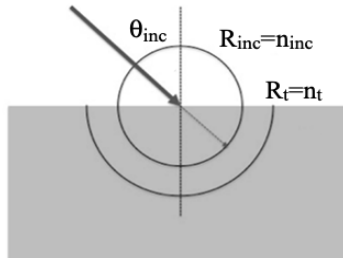


### 4.3.2 Solució gràfica

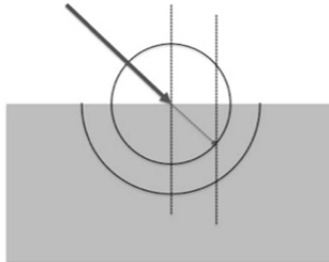
Una solució gràfica permet determinar la direcció de propagació dels modes ordinari i extraordinari generats a la superfície de separació entre un medi isòtrop i un d'anisòtrop.

El mètode general per al cas de la propagació d'isòtrop a isòtrop es resumeix de la manera següent:

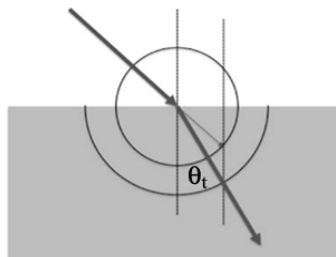
1. A partir del punt d'incidència en la superfície, dibuixem dos cercles amb radis proporcionals als índexs de refracció corresponents. Dibuixem el feix incident amb l'angle d'incidència adequat i l'allarguem fins que faci intersecció amb el cercle de l'índex  $n_{inc}$ .



2. Dibuixem una línia paral·lela a la direcció perpendicular a la superfície que passa a través del punt d'intersecció.



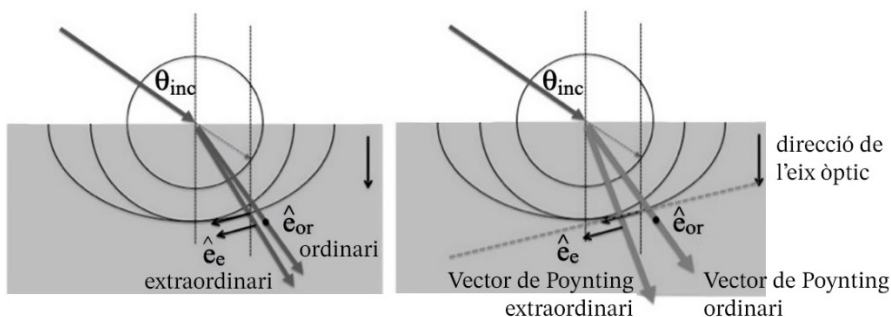
3. El feix transmès es pot dibuixar des del punt d'incidència en la superfície fins a la intersecció de la línia dibuixada en el pas 2., amb un cercle d'un radi proporcional a  $n_T$ .



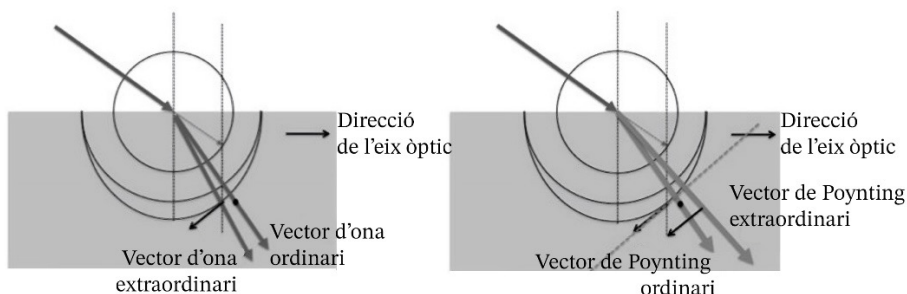
Aquest mateix procediment general es pot utilitzar per traçar els raigs generats a la superfície entre medis isòtrops i anisòtrops. En aquest cas, el cercle i l'el·lipse haurien de dibuixar-se en el medi anisòtropic. El vector d'ona i les direccions de propagació d'energia resultants dependran de com es talli la superfície respecte de l'eix òptic del cristall. Els exemples següents mostren la tendència general.

La trajectòria dels vectors d'ona extraordinari i ordinari per a un cristall uniaxial positiu es resumeix en les figures següents. També s'indica l'estat de polarització de cada mode (cal recordar que la polarització extraordinària és tangent a l'el·lipse en el punt d'intersecció).

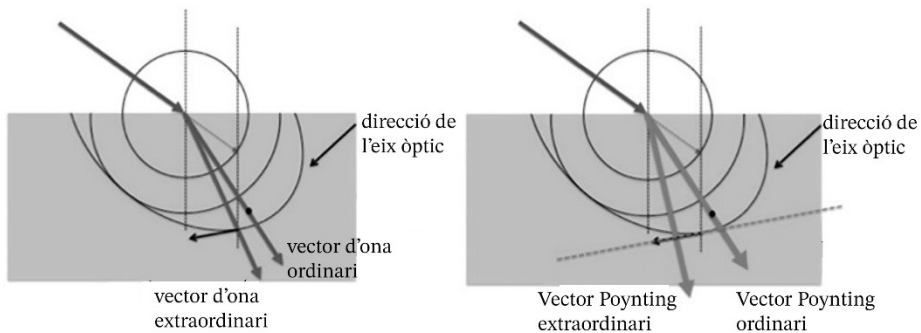
La propagació de l'energia (en la direcció del vector de Poynting) és perpendicular a la direcció de polarització del camp elèctric i no coincideix amb la direcció de propagació del vector d'ona per al mode extraordinari, com veiem a la figura.



Exemple 1. Uniaxial positiu amb l'eix òptic perpendicular a la superfície incident



Exemple 2 Uniaxial positiu amb l'eix òptic paral·lel a la superfície incident



Exemple 3 Uniaxial positiu amb una direcció arbitrària de l'eix òptic

## 4.4 Aplicacions de la propagació d'ones en cristalls uniaxials

### 4.4.1 Retardadors

Les propietats dels cristalls uniaxials que hem comentat constitueixen la base del funcionament dels retardadors. Els **retardadors** són uns dispositius que s'utilitzen per canviar l'estat de polarització d'un feix de llum polaritzat incident.

Un retardador està compost de cristalls uniaxials tallats de forma que el seu eix òptic queda paral·lel a la superfície del retardador, com podem veure en la figura 5.

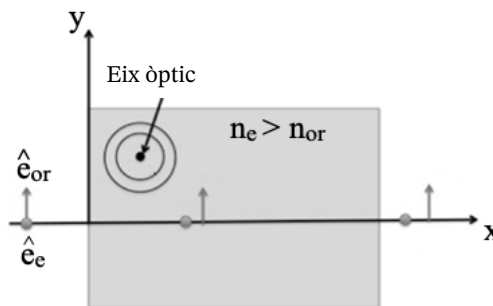


Figura 4.5 Un retardador fet a partir d'un cristall uniaxial positiu introdueix una fase relativa entre els components ordinari i extraordinari del feix incident.

En aquesta configuració, un feix que es propaga al llarg de l'eix OX i incidint en direcció normal a la superfície genera dos modes que es propaguen per dins del cristall.

- Mode ordinari: polaritzat al llarg de la direcció de l'eix OY.
- Mode extraordinari: polaritzat al llarg de la direcció de l'eix OZ.



Al mateix temps, s'han de complir les condicions següents:

- Els modes ordinari i extraordinari es propagaran de manera col·lineal en la direcció OX.
- L'índex de refracció del mode extraordinari pren el seu valor màxim,  $n_e(90^\circ) = n_e$ ; mentre que l'índex del mode ordinari és  $n_{or}$ .

Si suposem que l'ona incident té un estat de polarització arbitrari, la seva representació en el pla  $x = 0$  és

$$\vec{E}_{in}^{(+)} = \left[ E_{or} e^{i\phi_{or}} \hat{j} + E_e e^{i\phi_e} \hat{k} \right] e^{-i\omega t}$$

Aquest feix es convertirà dins del medi en dos modes mútuament ortogonals, amb cada component propagant-se amb diferents velocitats de fase:  $v_{or} = c/n_{or}$  i  $v_e = c/n_e$

A causa d'aquesta diferència en la velocitat de fase, els modes es desfasaran (retardats en la fase u respecte de l'altra) a mesura que es propaguen per dins del cristall. Si  $L$  és la longitud del cristall, el camp a la sortida és

$$\vec{E}_{out}^{(+)} = \left[ E_{or} e^{i\phi_{or}} e^{ik_{or}L} \hat{j} + E_e e^{i\phi_e} e^{ik_eL} \hat{k} \right] e^{-i\omega t}$$

que es pot reescriure de la manera següent

$$\vec{E}_{out}^{(+)} = \left[ E_{or} \hat{j} + E_e e^{i\delta} e^{i\delta_R} \hat{k} \right] e^{i(k_{or}L - \omega t + \phi_{or})}$$

on  $\delta = \phi_e - \phi_{or}$  és la diferència de fase relativa inicial i  $\delta_R = (k_e - k_{or})L$  és la fase relativa introduïda pel retardador.

Podem fer una interpretació física d'aquest resultat si tenim en compte l'estat inicial de polarització respecte de l'eix ordinari (OY). Com s'explica al capítol 1, i en relació amb aquest eix, l'estat de polarització ve donat per

$$\hat{e}_{in} = (E_{or} \hat{j} + e^{i\delta} E_e \hat{k}) = E_o (\cos\theta \hat{j} + e^{i\delta} \sin\theta \hat{k})$$

$$\text{on } E_o^2 = E_{or}^2 + E_e^2$$

La transformació del vector Jones inicial per part del retardador es pot escriure en forma de matriu de la manera següent:

$$\begin{pmatrix} e_{or}(L) \\ e_e(L) \end{pmatrix} = e^{ik_{or}L} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\delta_R} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta \\ e^{i\delta} \sin\theta \end{pmatrix} \rightarrow \boxed{\vec{e}_{out}(L) = R(\delta_R, L) \hat{e}_{in}}$$

on definim la matriu de Jones del retardador  $R(\delta_R, L)$ , que depèn del valor de la fase relativa introduïda pel retardador:

$$\delta_R = (k_e - k_{or})L = \frac{(n_e - n_{or})2\pi L}{\lambda} \quad [4.13]$$



A partir d'aquests resultats, podem concloure que, per a un determinat cristall, la longitud del retardador pot seleccionar-se per obtenir la diferència de fase desitjada entre els components ordinari i extraordinari. En conseqüència, per seleccionar l'estat de polarització de l'ona de sortida, utilitzem

$$\delta_{out} = \delta + \delta_R$$

També podem veure que l'efecte del retardador depèn de la longitud de l'ona.

En concret, trobem els dos retardadors següents que s'utilitzen molt en qualsevol sistema amb control de polarització.

### A. Làmina de mitja ona

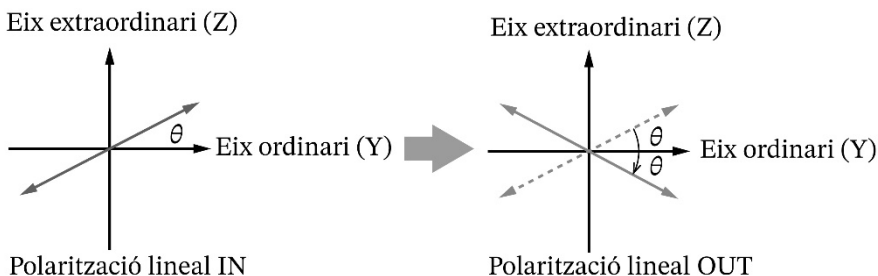
Per a una determinada longitud d'ona, se selecciona la longitud d'una làmina de mitja ona per introduir un retard relatiu  $\delta_R = \pi$ . Si substituïm això directament en l'equació [4.13] ens dona

$$\pi = \frac{|n_e - n_{or}| 2\pi L_{\lambda/2}}{\lambda} \rightarrow L_{\lambda/2} = \frac{\lambda}{2|n_e - n_{or}|}$$

L'efecte del retardador sobre una llum polaritzada linealment i sobre una llum polaritzada circular incidents s'obté directament coneixent la fase del retardador introduïda.

La polarització lineal es converteix en una llum polaritzada lineal que és girada respecte de la llum incident, amb la qual cosa canvia el seu angle de polarització de  $+\theta$  a  $-\theta$  (mesurat respecte de l'eix ordinari). Cal tenir en compte que la rotació de la polarització lineal també es pot obtenir amb polaritzadors lineals simples (lleï de Malus). No obstant, l'energia de l'ona incident no canvia quan s'utilitza una làmina de mitja ona.

En general, les làmines de mitja ona s'utilitzen quan volem fer girar l'eix de polarització d'un feix de llum; mentre que els polaritzadors lineals únics s'utilitzen quan volem modular la intensitat d'un feix de llum.



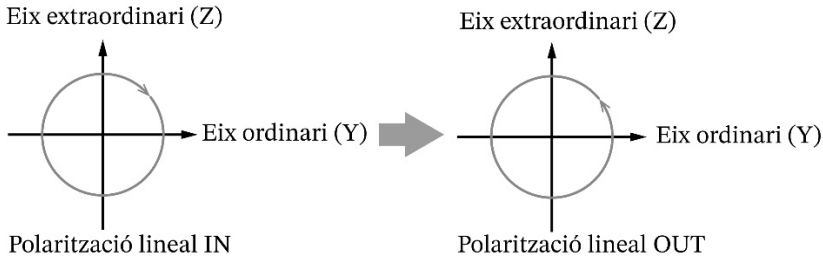


Figura 4.6 Efecte d'una làmina de mitja ona sobre un feix de llum amb polarització lineal (dalt) i circular (baix)

Quan la llum polaritzada circular incideix sobre la làmina de mitja ona, la seva direcció de rotació s'inverteix i canvia de polarització circular dreta a circular esquerra, i viceversa.

### B. Làmina de quart d'ona

Una làmina de quart d'ona introdueix una diferència de fase relativa de  $\delta_R = \pi/2$ , que correspon a un gruix del retardador de

$$\frac{\pi}{2} = \frac{|n_e - n_{or}| 2\pi L_{\lambda/4}}{\lambda} \rightarrow L_{\lambda/4} = \frac{\lambda}{4|n_e - n_{or}|}$$

Les làmines de quart d'ona s'utilitzen sovint per convertir la polarització lineal en polarització circular, i viceversa (com veurem amb més detall en la recopilació de problemes).

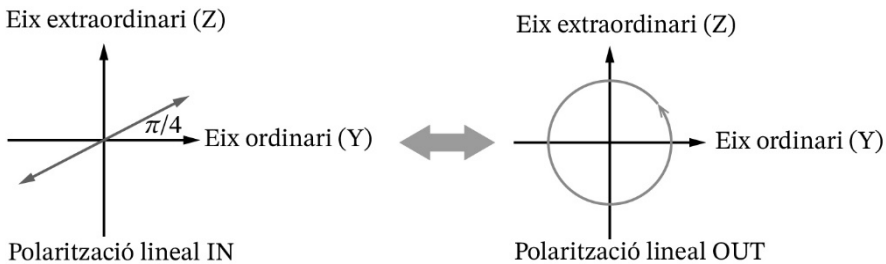


Figura 4.7 Efecte d'una làmina de quart d'ona sobre un feix de llum amb polarització lineal

### 4.4.2 Conservació de moment lineal utilitzant cristalls uniaxials

Una altra aplicació important dels cristalls uniaxials és quan els utilitzem per aconseguir la conservació del moment durant les interaccions entre ones de freqüència múltiple. Aquesta conservació de moment permet transferir energia de manera eficient entre les ones mitjançant un procés d'interacció no lineal i s'utilitza molt en la tecnologia fotònica.



La conservació de moment, també anomenada coincidència de fase, s'expressa com una relació entre els vectors d'ona de les freqüències involucrades. A continuació, presentem un exemple de les relacions de conservació de moment. En aquest exemple, suposem una propagació col·lineal de les ones (poden ocórrer situacions més complicades i el lector interessat en aprofundir em aquests temes pot consultar la secció de bibliografia recomanada).

### Exemple

La interacció efectiva entre una ona de freqüència  $\omega$  i una ona de freqüència  $2\omega$  requereix que es compleixi la condició següent:

$$2k(\omega) = k(2\omega)$$

La relació es tradueix en una condició entre índexs de refracció:

$$2n(\omega)\omega / c = n(2\omega)2\omega / c \quad \text{que porta a} \quad n(\omega) = n(2\omega)$$

Generalment aquestes condicions no es poden complir a causa de la dispersió dels materials. En l'àrea de dispersió normal, l'índex de refracció augmenta de manera monòtona amb la freqüència; de manera que no existeix la possibilitat de conservació de moment en materials isòtrops normals. No obstant això, aquestes condicions sí que es poden donar en els medis anisòtrops per a algunes direccions de propagació i per a alguns estats de polarització concrets.

Per veure com és possible això, consulteu l'exemple 1. Si dibuixem en un gràfic els índexs de refracció en freqüències  $\omega$  i  $2\omega$  utilitzant un cristall uniaxial positiu, podem veure que hi ha una direcció de propagació concreta en què l'índex extraordinari a  $\omega$  és igual a l'índex ordinari a  $2\omega$ .

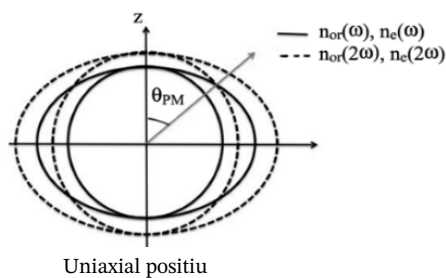


Figura 4.8 Angle de coincidència de fase per a la SHG en un cristall uniaxial positiu

En aquesta direcció concreta,  $\theta_{PM}$ , obtenim

$$n_e(\omega, \theta_{PM}) = n_{or}(2\omega)$$



A partir d'aquesta expressió de l'índex de refracció, podem obtenir la relació per l'angle amb fase coincident:

$$\frac{1}{n_e^2(\omega, \theta_{PM})} = \frac{1}{n_{or}^2(2\omega)} \rightarrow \frac{\sin^2(\theta_{PM})}{n_e^2(\omega)} + \frac{\cos^2(\theta_{PM})}{n_{or}^2(\omega)} = \frac{1}{n_{or}^2(2\omega)}.$$

Després d'escriure  $\sin^2(\theta) = 1 - \cos^2(\theta)$ , s'obté la condició d'angle de fase coincident

$$\cos^2(\theta_{PM}) = \frac{\frac{1}{n_{or}^2(2\omega)} - \frac{1}{n_e^2(\omega)}}{\frac{1}{n_{or}^2(\omega)} - \frac{1}{n_e^2(\omega)}}.$$

La condició requerida la compliran dos feixos amb freqüències  $\omega$  i  $2\omega$  i amb una polarització adequada, propagant-se en aquesta direcció concreta.

A la recopilació de problemes s'hi aportarà d'altres exemples addicionals.

## 4.5 Problemes resolts

### Problema 4.1

S'utilitza un cristall de quars per construir un retardador. L'índex de refracció com a funció de la longitud d'ona ve donat per l'expressió

$$n_{or}^2(\lambda) = 1.28604141 + \frac{1.07044083 \cdot \lambda^2}{\lambda^2 - 1.00585997 \cdot 10^{-2}} + \frac{1.10202242 \cdot \lambda^2}{\lambda^2 - 100} \quad (\lambda \text{ en microns})$$

$$n_e^2(\lambda) = 1.28851804 + \frac{1.09509924 \cdot \lambda^2}{\lambda^2 - 1.02101864 \cdot 10^{-2}} + \frac{1.15662475 \cdot \lambda^2}{\lambda^2 - 100} \quad (\lambda \text{ en microns})$$

a) Representa en un únic gràfic l'índex de refracció ordinari, l'índex de refracció extraordinari i l'índex extraordinari d'una ona que es propaga en un angle  $\theta = 30^\circ$  per dins d'un cristall amb una longitud d'ona d'entre 400–1.100 nm.

b) Calcula quin és el gruix del cristall necessari per construir una làmina de mitja ona per a una longitud d'ona de 600 nm.

c) Quina és la diferència de fase introduïda per aquest retardador en una ona plana d'una longitud d'ona de 500 nm amb una incidència normal sobre la superfície? Obtindres l'estat de polarització del feix transmès si incideix amb la polarització lineal formant  $40^\circ$  amb l'eix ordinari del retardador.

### Solució

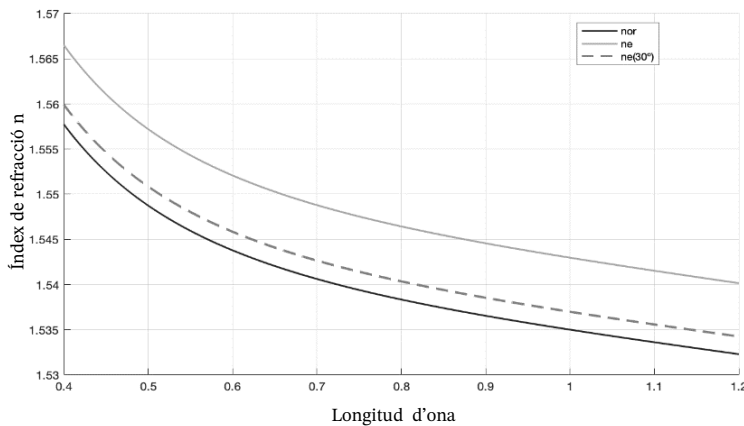
a) Els índexs de refracció ordinari i extraordinari del quars es representen a partir de l'equació de Sellmeier com una funció de la longitud d'ona. L'índex extraordinari,  $n_e$ ,



correspon al valor de l'índex de refracció del mode extraordinari quan es propaga per un pla perpendicular a l'eix òptic ( $\theta = 90^\circ$ ).

Per representar l'índex de refracció del mode extraordinari propagant-se en un angle  $\theta = 30^\circ$ , utilitzem l'expressió

$$n_e(\theta, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{(\sin \theta / n_e(\lambda))^2 + (\cos \theta / n_{or}(\lambda))^2}} \rightarrow n_e(30, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{(\sin 30 / n_e(\lambda))^2 + (\cos 30 / n_{or}(\lambda))^2}}$$



El gràfic mostra  $n_{or}$ ,  $n_e$  i  $n_e(30)$ . Com que  $n_e > n_{or}$ , sabem que el quars és un cristall uniaxial positiu.

b) Amb l'equació de Sellmeier, i per 600 nm, obtenim  $n_e(600) = 1,5529$  i  $n_{or}(600) = 1,5438$

La diferència de fase introduïda pel retardador és

$$\delta_R(\lambda) = (k_e(\lambda) - k_{or}(\lambda))L = (n_e(\lambda) - n_{or}(\lambda))k_o L = \frac{(n_e(\lambda) - n_{or}(\lambda))2\pi L}{\lambda}$$

El gruix del cristall es calcula directament a partir d'aquesta expressió. Si tenim en compte que  $\delta_R = \pi$  per a una làmina de mitja ona, tenim

$$L = \frac{\lambda}{2(n_e(\lambda) - n_{or}(\lambda))} = \frac{600 \cdot 10^{-9}}{2(1.5529 - 1.5438)} = 3.2967 \cdot 10^{-5} \text{ m} = 32.97 \text{ } \mu\text{m}$$

c) Com que la fase del retardador depèn fortament de la longitud d'ona, una làmina de mitja ona dissenyada amb una longitud d'ona específica es comportarà diferent per a una altra longitud d'ona.

Si tenim dues longituds d'ones diferents, les fases relatives introduïdes pel retardador en aquestes dues longituds d'ona són



$$\delta_R(\lambda_1) = \frac{2\pi L \Delta n_1}{\lambda_1} \text{ and } \delta_R(\lambda_2) = \frac{2\pi L \Delta n_2}{\lambda_2} \text{ where } \Delta n_i = n_e(\lambda_i) - n_{or}(\lambda_i)$$

i les seves ràtios són

$$\frac{\delta_R(\lambda_1)}{\delta_R(\lambda_2)} = \frac{\Delta n_1 \cdot \lambda_2}{\Delta n_2 \cdot \lambda_1}$$

Si tenim en compte que  $\delta_R(600) = \pi$ , el retard de fase per 500 nm es calcula a partir d'aquesta expressió i de l'equació de Sellmeier:

$$\delta_R(500) = \delta_R(600) \frac{\Delta n_{500} 600}{\Delta n_{600} 500} = 1.21\pi$$

#### Problema 4.2

Una ona òptica que es propaga al llarg de l'eix OX incideix sobre una làmina de mitja ona, l'eix ordinari de la qual està orientat en la direcció OY mentre l'eix extraordinari es mou en la direcció OZ. Troba la polarització de l'ona de sortida quan la polarització de l'ona incident sigui:

- Polaritzada linealment al llarg de l'eix ordinari
- Polaritzada linealment al llarg de l'eix extraordinari
- Polaritzada linealment formant un angle  $\theta$  amb l'eix ordinari
- Polarització circular dreta
- Polarització circular esquerra

#### Solució

L'expressió per a l'ona plana que es propaga en la direcció normal a la làmina d'ona (l'eix OX) i amb components  $E_{or}$  i  $E_e$  al llarg de les direccions ordinària i extraordinària, respectivament, és

$$\vec{E}_{in}^{(+)}(\mathbf{x}) = (E_{or}^{(+)} \hat{\mathbf{j}} + E_e^{(+)} \hat{\mathbf{k}}) e^{i(k_o x - \omega t)} = (E_{or} \hat{\mathbf{j}} + e^{i\delta_{in}} E_e \hat{\mathbf{k}}) e^{i(k_o x - \omega t + \phi_x)}$$

on  $\delta_{in} = \phi_y - \phi_x$  és la diferència de fase inicial. Definim el nostre vector Jones incident en funció d'aquestes direccions, tenint en compte que el nostre eix horitzontal es troba al llarg de la direcció ordinària de la làmina d'ona i l'eix vertical al llarg de la direcció extraordinària.

L'acció de la làmina d'ona ve donada per la matriu del retardador general amb  $\delta_R = (k_e - k_{or})L = \pi$ :



$$R_{\lambda/2} = e^{ik_{or}L} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\pi} \end{pmatrix} = e^{ik_{or}L} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

L'estat de polarització de sortida ve donat per l'acció d'aquesta matriu sobre el vector Jones incident en cadascuna d'aquestes situacions:

a) En aquest cas,  $\hat{e}_{in} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  i l'amplitud del camp d'incidència és  $E_{or}$ .

L'ona d'entrada a  $x = 0$  és  $E_{in}^{(+)}(0) = E_{or} \hat{j} e^{i(\phi_x - \omega t)}$ .

El vector Jones de sortida:  $\bar{e}_{out} = R_{\lambda/2} \cdot \hat{e}_{in} = e^{ik_{or}L} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e^{ik_{or}L} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

Com és d'esperar, quan la polarització de l'ona incident es troba al llarg de l'eix ordinarí, no hi ha retard de fase relatiu entre els components ordinarí i extraordinari. A més, l'ona de sortida manté l'estat de polarització lineal amb una fase afegida,  $k_{or}L$ , a causa del medi de gruix  $L$ .

El feix de sortida és  $E_{out}^{(+)}(L) = E_{or} \hat{j} e^{i(\phi_x + k_{or}L - \omega t)}$ .

b) En aquest cas, el vector Jones de l'ona incident és  $\hat{e}_{in} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ , amb amplitud de camp  $E_e$ .

El vector Jones de sortida:  $\bar{e}_{out} = e^{ik_{or}L} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = e^{ik_{or}L} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = e^{i(k_{or}L + \pi)} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Utilitzant la relació  $\delta_R = (k_e - k_{or})L = \pi \rightarrow k_{or}L + \pi = k_eL$ ,

Obtenim

$$\bar{e}_{out} = e^{ik_eL} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad i \quad E_{out}^{(+)}(L) = E_e \hat{k} e^{i(\phi_x + k_eL - \omega t)}$$

De manera similar al cas a), l'estat de polarització no canvia i s'afegeix una fase addicional al camp,  $k_eL$ .

c) En aquest cas, el camp elèctric incident no és paral·lel als eixos ordinarí o extraordinari, així que tenim una barreja de components ordinaris i extraordinaris a dins del retardador. Si el camp elèctric incident té una magnitud  $E_o$ , els components ordinaris i extraordinaris corresponen a les projeccions al llarg dels eixos corresponents, donant



$$E_{or} = E_o \cos \theta \quad i \quad E_e = E_o \sin \theta \quad \text{amb un vector Jones } \hat{e}_{in} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$$

$$i \quad \vec{E}_{in}^{(+)}(0) = E_o (\cos \theta \hat{j} + \sin \theta \hat{k}) e^{i(\phi_x - \omega t)}$$

$$\text{Acció del retardador: } \vec{e}_{out} = e^{ik_{or}L} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} = e^{ik_{or}L} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ -\sin \theta \end{pmatrix} = e^{ik_{or}L} \begin{pmatrix} \cos(-\theta) \\ \sin(-\theta) \end{pmatrix}$$

Escrit d'aquesta manera, veiem que l'ona de sortida està polaritzada linealment i que forma un angle de  $-\theta$  respecte de l'eix ordinari. L'acció del retardador consisteix a produir una rotació total de l'estat de polarització en un angle  $2\theta$ . La rotació es produeix sense pèrdua d'intensitat de l'ona incident.

$$\text{El camp de sortida és } E_{out}^{(+)}(L) = E_o (\cos \theta \hat{j} - \sin \theta \hat{k}) e^{i(\phi_x + k_{or}L - \omega t)}$$

$$d) \text{ En aquest cas, } \hat{e}_{in} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \quad i \quad E_{or} = E_e = E.$$

$$\text{L'acció del retardador és } \vec{e}_{out} = e^{ik_{or}L} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = e^{ik_{or}L} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

i la polarització de sortida és circular, canviant de circular dreta a circular esquerra.

e) L'últim cas és just el contrari del cas d), és a dir, el retardador canvia la polarització circular esquerra incident a la polarització circular dreta.

$$\vec{e}_{out} = e^{ik_{or}L} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = e^{ik_{or}L} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

### Problema 4.3

*Un selector de polarització circular es construeix mitjançant una combinació d'un retardador de quart d'ona seguit d'un polaritzador lineal orientat a  $45^\circ$  respecte dels eixos del retardador. Troba la matriu de polarització per a aquesta configuració i analitza la polarització transmesa per a la polarització circular esquerra i dreta incident.*

### Solució

Un selector de polarització circular és un dispositiu que transmet la llum d'una determinada direcció de rotació de la polarització circular i que bloqueja la llum amb una polarització circular en la direcció de rotació oposada. Aquest dispositiu es construeix combinant dos polaritzadors en sèrie: una làmina de quart d'ona i un polaritzador lineal orientat a  $45^\circ$ .



Com hem explicat a la secció 4.4.1, el retardador de quart d'ona actua sobre una ona polaritzada circular incident transformant-la en una ona polaritzada lineal orientada a  $+45^\circ$  o  $-45^\circ$ , en funció de la direcció de rotació. Per tant, el polaritzador lineal situat a  $45^\circ$  hauria de bloquejar la radiació per a una de les dues situacions. L'orientació del polaritzador lineal determinarà si tenim un selector de polarització circular dreta o circular esquerra.

Per comprovar que aquesta configuració funcioni, introduïm les matrius corresponents a aquests elements.

$$\text{Làmina de quart d'ona: } R_\delta = e^{i\phi_{or}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\delta} \end{pmatrix} \xrightarrow{\lambda/4} R_{\pi/2} = e^{i\phi_{or}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

$$\text{Polaritzador lineal: } P_L(\theta) = \begin{pmatrix} \cos^2 \theta & \cos \theta \sin \theta \\ \cos \theta \sin \theta & \sin^2 \theta \end{pmatrix} \rightarrow P_L(45^\circ) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

L'acció combinada s'obté a partir d'una multiplicació directa de matrius:

$$\vec{e}_{out} = P_L(45^\circ) \cdot R_{\pi/2} \cdot \hat{e}_{in} = S_R \cdot \hat{e}_{in},$$

$$\text{on } S_R = \frac{e^{i\phi_{or}}}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & i \end{pmatrix}.$$

Podem veure immediatament que, quan actua sobre els estats polaritzats circulars incidents, obtenim

$$S_R \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = \frac{e^{i\phi_{or}}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$S_R \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

i que  $S_R$  correspon al selector de polarització circular dreta.

Per obtenir la polarització circular esquerra, hem de canviar l'orientació del polaritzador lineal:

$$S_L = P_L(-45^\circ) R_{\pi/2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} e^{i\phi_{or}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = \frac{e^{i\phi_{or}}}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -1 & i \end{pmatrix}$$

que no dona, en aquest cas, cap transmissió, si la radiació incident és circular dreta; i llum polaritzada linealment a  $-45^\circ$ , si té polarització circular esquerra:

$$S_L \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad S_L \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \frac{e^{i\phi_{or}}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$



### Problema 4.4

Imagina una ona plana amb polarització arbitrària i mòdul de  $|E_o| = 1V/m$ , definit pel seu vector Jones:

$$\hat{e}_{in} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ e^{i\delta} \sin \theta \end{pmatrix}$$

Els paràmetres de Stokes són una manera alternativa d'expressar l'estat de polarització d'una ona lluminosa. Aquests paràmetres es poden calcular experimentalment mesurant la intensitat transmesa de l'ona lluminosa a través de diferents elements. Calcula la intensitat transmesa de l'ona incident a través dels elements següents:

- Polaritzador lineal a  $0^\circ$ :  $I(0)$
- Polaritzador lineal a  $90^\circ$ :  $I(90)$
- Polaritzador lineal a  $45^\circ$ :  $I(45)$
- Polaritzador lineal a  $-45^\circ$ :  $I(-45)$
- Selector de polarització circular esquerra:  $I(L)$
- Selector de polarització circular dreta:  $I(R)$

Obtingues l'expressió general per als paràmetres de Stokes definits en funció de la intensitat d'incidència,  $I_o$ , com:

$$S_1 = \frac{I(0) - I(90)}{I_o}$$

$$S_2 = \frac{I(45) - I(-45)}{I_o}$$

$$S_3 = \frac{I(L) - I(R)}{I_o}$$

### Solució

La intensitat d'incidència d'una ona plana és  $I_o = \epsilon_o c |E|^2 / 2 = \epsilon_o c / 2$ .

Transmissió a través dels diferents elements.

a) Polaritzador lineal a  $0^\circ$ :

$$\bar{e}_{out} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ e^{i\delta} \sin \theta \end{pmatrix} = \cos \theta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La intensitat transmesa:  $I(0) = \frac{1}{2} \epsilon_o c (\bar{e}_{out} \cdot \bar{e}_{out}^*) = \frac{1}{2} \epsilon_o c \cos^2 \theta$ .

b) Polaritzador lineal a  $90^\circ$ :



$$\vec{e}_{out} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ e^{i\delta} \sin \theta \end{pmatrix} = e^{i\delta} \sin \theta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$i) I(90) = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c (\vec{e}_{out} \cdot \vec{e}_{out}^*) = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c \sin^2 \theta.$$

c) Polaritzador lineal a 45°:

$$\vec{e}_{out} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ e^{i\delta} \sin \theta \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \cos \theta + e^{i\delta} \sin \theta \\ \cos \theta + e^{i\delta} \sin \theta \end{pmatrix} = \frac{\cos \theta + e^{i\delta} \sin \theta}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

La intensitat transmesa en aquest cas és

$$I(45) = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c \left( \frac{\cos \theta + e^{i\delta} \sin \theta}{\sqrt{2}} \right) \left( \frac{\cos \theta + e^{-i\delta} \sin \theta}{\sqrt{2}} \right) = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c \left( \frac{1 + 2 \cos \theta \sin \theta \cos \delta}{2} \right).$$

d) Polaritzador lineal a -45°:

$$\vec{e}_{out} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ e^{i\delta} \sin \theta \end{pmatrix} = \frac{\cos \theta - e^{i\delta} \sin \theta}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ -1 \end{bmatrix}$$

Si repetim els passos del punt c), obtenim

$$I(-45) = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c \left( \frac{1 - 2 \cos \theta \sin \theta \cos \delta}{2} \right).$$

e) Per veure l'efecte del selector circular esquerre, utilitzarem els resultats del problema anterior, Problema 4.3, per obtenir

$$\vec{e}_{out} = S_L \begin{pmatrix} \cos \theta \\ e^{i\delta} \sin \theta \end{pmatrix} = \frac{e^{i\phi_{or}} (\cos \theta - i e^{i\delta} \sin \theta)}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ -1 \end{bmatrix}$$

La intensitat transmesa s'obté després d'uns pocs passos algebraics:

$$I(L) = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c \left( \frac{\cos \theta - i e^{i\delta} \sin \theta}{\sqrt{2}} \right) \left( \frac{\cos \theta + i e^{-i\delta} \sin \theta}{\sqrt{2}} \right) = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c \left( \frac{1 + 2 \cos \theta \sin \theta \sin \delta}{2} \right).$$

f) L'efecte del selector circular dret s'obté de la mateixa manera:

$$\vec{e}_{out} = S_R \cdot \hat{e}_{in} = \frac{e^{i\phi_{or}}}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ e^{i\delta} \sin \theta \end{pmatrix} = \frac{e^{i\phi_{or}} (\cos \theta + i e^{i\delta} \sin \theta)}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

i

$$I(L) = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c \left( \frac{1 - 2 \cos \theta \sin \theta \sin \delta}{2} \right)$$



Si apliquem directament les definicions en termes dels components del vector Jones, les expressions per als paràmetres de Stokes són

$$S_1 = (I(0) - I(90)) / I_o = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \cos(2\theta)$$

$$S_2 = (I(45) - I(-45)) / I_o = 2 \cos \theta \sin \theta \cos \delta = \sin(2\theta) \cos \delta$$

$$S_3 = (I(L) - I(R)) / I_o = 2 \cos \theta \sin \theta \sin \delta = \sin(2\theta) \sin \delta$$

A partir d'aquest resultat, podem confirmar que es manté la relació  $S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = 1$ .

Així doncs, els punts que indiquen l'estat de polarització d'una ona es poden situar al llarg d'una esfera unitària (esfera de Poincaré).

### Problema 4.5

*L'estat de polarització d'un feix es defineix a partir del que anomenem sistema de referència del laboratori, que es defineix per dos eixos ortogonals fixats a la taula òptica, que s'anomenen eixos horitzontal (H) i vertical (V). L'angle  $\theta$  del vector Jones associat es defineix a partir de l'eix H. Es pot inserir un retardador en la trajectòria del feix, amb el seu eix ordinari formant un angle arbitrari respecte de l'eix horitzontal. Describeu l'efecte del retardador i troba la matriu associada a aquest cas més general.*

### Solució

L'efecte del retardador s'ha definit prèviament en termes dels components ordinaris i extraordinaris incidents sobre el retardador i, per tant, la matriu  $R_\delta$  (presentada en aquest capítol) s'expressa en el que anomenem el sistema de referència del retardador, definit per dos eixos ortogonals en les direccions dels eixos ordinari i extraordinari del retardador.

Qualsevol vector Jones de polarització incident  $\hat{e}_{in} = \begin{pmatrix} e_{or} \\ e_e \end{pmatrix}$  serà transformat pel retardador d'acord amb la regla  $\bar{e}_{out} = R_{\delta_R} \hat{e}_{in}$ .

Fins ara, hem analitzat el cas simplificat en què el sistema de referència del laboratori i el del retardador coincidien. En aquest problema, explorarem una situació més general que ocorre sovint en casos reals, en què el retardador és rotat en un angle  $\psi$  respecte del sistema de referència del laboratori.

El nostre vector de polarització inicial en el sistema de referència del laboratori es pot

escriure així:  $\bar{e}_{in}^{lab} = \begin{pmatrix} e_H \\ e_V \end{pmatrix}$

El vector en el sistema de referència del retardador es relaciona amb aquest per mitjà d'una rotació del sistema de coordenades en un angle  $\psi$  i, per tant, ho podem escriure així:



$$\hat{e}_{in}^{ret} = W(\psi)\hat{e}_{in}^{lab} \rightarrow \begin{pmatrix} e_{or} \\ e_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi \\ -\sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_H \\ e_V \end{pmatrix}$$

on  $W(\psi)$  és la matriu de rotació.

L'efecte del retardador es pot aplicar al sistema de referència del retardador, i dona

$$\bar{e}_{out}^{ret} = R_{\delta_R} \hat{e}_{in}^{ret} = R_{\delta_R} W(\psi) \hat{e}_{in}^{lab}$$

Per acabar, convertim el nostre estat de polarització de nou al sistema de referència del laboratori aplicant una rotació de  $-\psi$ :

$$\bar{e}_{out}^{lab} = W(-\psi)\bar{e}_{out}^{ret} = W(-\psi)R_{\delta_R} W(\psi)\hat{e}_{in}^{lab} = R_{\delta_R}^{\psi} \hat{e}_{in}^{lab}$$

A partir d'aquesta expressió, podem veure que el vector Jones de sortida en el sistema de referència del laboratori es pot obtenir a partir del vector Jones incident en aquest sistema de referència mitjançant una transformació unitària de la matriu del retardador:

$$R_{\delta_R}^{\psi} = W(-\psi)R_{\delta_R} W(\psi) = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi \\ \sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix} e^{ik_{or}L} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\delta_R} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi \\ -\sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix}$$

$$R_{\delta_R}^{\psi} = e^{ik_{or}L} \begin{pmatrix} \cos^2\psi + e^{i\delta_R} \sin^2\psi & \cos\psi \sin\psi(1 - e^{i\delta_R}) \\ \cos\psi \sin\psi(1 - e^{i\delta_R}) & \sin^2\psi + e^{i\delta_R} \cos^2\psi \end{pmatrix}$$

### Problema 4.6

*Pensem en una ona plana que està polaritzada linealment al llarg de l'eix vertical en el sistema de referència del laboratori. Utilitzem una làmina de mitja ona per fer rotar l'estat de polarització de l'ona. El retardador és rotat amb el seu eix ordinari formant un angle  $\psi = 30^\circ$  respecte de l'eix horitzontal. Obtingues el vector Jones de polarització després del retardador.*

### Solució

El vector Jones incident en el marc de referència del laboratori és  $\hat{e}_{in}^{lab} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Si el retardador no és rotat, aquest estat hauria de correspondre a la incidència al llarg de l'eix extraordinari. En conseqüència, no s'observarà cap canvi de polarització a la sortida, com s'ha comentat a la secció Problema 4.2 b).

Com que el retardador ha estat rotat, el seu efecte sobre l'estat de polarització del feix incident s'obté per aplicació directa del resultat del Problema 4.5:



$$\vec{e}_{out}^{lab} = R_{\pi}^{30} \hat{e}_{in}^{lab} = e^{ik_{or}L} \begin{pmatrix} \cos^2 30 - \sin^2 30 & 2 \cos 30 \sin 30 \\ 2 \cos 30 \sin 30 & \sin^2 30 - \cos^2 30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = e^{ik_{or}L} \begin{pmatrix} 2 \cos 30 \\ \sin^2 30 - \cos^2 30 \end{pmatrix}$$

Si reescrivim aquesta expressió:

$$\vec{e}_{out}^{lab} = e^{ik_{or}L} \begin{pmatrix} \sin 60 \\ -\cos 60 \end{pmatrix} = e^{ik_{or}L} \begin{pmatrix} \cos 30 \\ -\sin 30 \end{pmatrix} = e^{ik_{or}L} \begin{pmatrix} \cos(-30) \\ \sin(-30) \end{pmatrix}$$

A banda d'un terme de fase addicional, que no influirà en la intensitat, en aquest resultat podem identificar que l'ona transmesa estarà polaritzada linealment i formarà un angle de  $-30^\circ$  respecte de l'eix horitzontal. Com que l'angle respecte de l'eix era de  $90^\circ$  a l'entrada, el retardador ha fet rotar la polarització incident en  $120^\circ$ .

Això correspon al doble de l'angle que forma l'estat de polarització incident respecte de l'eix ordinari del retardador ( $60^\circ$ ), i va d'acord amb el que es descriu a la figura 6 (més amunt).

#### Problema 4.7

Una ona plana es propaga al llarg de l'eix  $z$  amb un estat de polarització caracteritzat pel vector Jones, definit pels paràmetres  $\theta = 30^\circ$  i  $\delta = \pi/6$  rad. Per transformar-la en una ona polaritzada linealment al llarg de la direcció horitzontal (eix  $x$ ), utilitzem dos retardadors col·locats en sèrie. En el primer retardador, podem seleccionar qualsevol valor de la fase  $\delta_R$  del retardador, controlant el voltatge que li apliquem al dispositiu. El seu eix ordinari està alineat al llarg de la direcció horitzontal i el voltatge aplicat a aquest retardador s'ajusta per obtenir una ona polaritzada linealment a la sortida. El segon retardador és una làmina de mitja ona, que s'utilitza per rotar l'ona polaritzada linealment després del primer retardador per obtenir l'estat de polarització lineal horitzontal desitjat a la sortida.

a) Per tal d'assolir aquest objectiu, quina fase s'hauria d'introduir al primer retardador i quina orientació hauria de tenir l'eix ordinari de la làmina de mitja ona respecte de l'eix horitzontal?

b) Per obtenir llum polaritzada circularment a la sortida, substituïm la làmina de mitja ona per un retardador diferent (mantenint el primer retardador que hem triat en el punt a). Segons el principi de funcionament dels retardadors, justifica quin tipus de retardador es necessita en aquest cas, així com l'orientació respecte de la direcció horitzontal.

#### Solució

a) El vector Jones incident  $\hat{e}_{in}^{lab} = \begin{pmatrix} \cos 30 \\ e^{i\pi/6} \sin 30 \end{pmatrix}$  correspon a la polarització el·líptica.



Acció del primer retardador: aquest retardador s'orienta amb el seu eix ordinari al llarg de la direcció horitzontal i la seva matriu ve donada per

$$R_1 = e^{i\phi_{or}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\delta_R} \end{pmatrix}$$

(prendrem  $\phi_{or} = 0$  sense perdre el caràcter general).

El feix transmès després del primer retardador és

$$\hat{e}_{out1} = R_1 \cdot \hat{e}_{in}^{lab} = \begin{pmatrix} \cos 30 \\ e^{i\delta_{out}} \sin 30 \end{pmatrix} \text{ amb } \delta_{out} = \frac{\pi}{6} + \delta_R$$

Per obtenir polaritzacions lineals, tenim dues solucions possibles:

$$\delta_{out} = 0, 2\pi, \dots \rightarrow \delta_R = \delta_{out} - \pi/6 = 11\pi/6$$

$$\delta_{out} = \pi, 3\pi, \dots \rightarrow \delta_R = \delta_{out} - \pi/6 = 5\pi/6$$

Per  $\delta_R = 11\pi/6$ , el feix transmès estarà polaritzat linealment, amb  $\theta = 30^\circ$ .

Per  $\delta_R = 5\pi/6$ , el feix transmès estarà polaritzat linealment, amb  $\theta = -30^\circ$ .

L'orientació del segon retardador la podem obtenir sense càlculs tenint en compte l'efecte de la làmina de mitja ona sobre la llum polaritzada linealment: la polarització lineal del feix transmès girarà en un angle  $2\alpha$  respecte de la polarització incident, on  $\alpha$  és l'angle de l'ona incident respecte de l'eix del retardador.

Seguint aquesta regla per obtenir la polarització lineal en direcció horitzontal, hauríem de col·locar l'eix del retardador en

$$\psi = 15^\circ \text{ per } \delta_R = 11\pi/6$$

$$\psi = -15^\circ \text{ per } \delta_R = 5\pi/6$$

Aquest resultat es pot obtenir a partir del resultat general derivat a Problema 4.5.

L'efecte d'un retardador rotat es pot expressar en termes de la matriu  $R_\pi^\psi$ . Per a la

$$\text{làmina de mitja ona, això se simplifica a } R_\pi^\psi = \begin{pmatrix} \cos 2\psi & \sin 2\psi \\ \sin 2\psi & -\cos 2\psi \end{pmatrix}$$

Per  $\delta_R = 11\pi/6$ :

$$\bar{e}_{out}^{lab} = R_\pi^\psi \cdot \hat{e}_{in}^{lab} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\psi & \sin 2\psi \\ \sin 2\psi & -\cos 2\psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos 30 \\ \sin 30 \end{pmatrix}$$

$$\cos 2\psi \cos 30 + \sin 2\psi \sin 30 = 1 \rightarrow 2\psi = 30 \rightarrow \psi = 15^\circ$$

$$\sin 2\psi \cos 30 - \cos 2\psi \sin 30 = 0 \rightarrow \text{tg } 2\psi = \text{tg } 30 \rightarrow \psi = 15^\circ$$



Per  $\delta_R = 5\pi / 6$ :

$$\vec{e}_{out}^{lab} = R_\pi^\psi \cdot \hat{e}_{in}^{lab} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\psi & \sin 2\psi \\ \sin 2\psi & -\cos 2\psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(-30) \\ \sin(-30) \end{pmatrix}$$

$$\cos 2\psi \cos 30 - \sin 2\psi \sin 30 = 1 \rightarrow 2\psi = -30 \rightarrow \psi = -15^\circ$$

$$\sin 2\psi \cos 30 + \cos 2\psi \sin 30 = 0 \rightarrow \operatorname{tg} 2\psi = -\operatorname{tg} 30 \rightarrow \psi = -15^\circ$$

b) Per a la polarització circular  $\delta_{tot} = \mp\pi / 2$  i  $\theta = 45^\circ$ , això s'aconsegueix si el retardador és una làmina de quart d'ona i si la llum polaritzada linealment incident està orientada a  $45^\circ$  respecte de l'eix ordinari.

Per  $\delta_R = 11\pi / 6$ , el feix incident està polaritzat a  $30^\circ$ , així que el retardador hauria de col·locar-se amb l'eix ordinari en un angle  $\psi = -15^\circ$  respecte de l'horitzontal.

Per  $\delta_R = 5\pi / 6$ , el feix incident està polaritzat a  $-30^\circ$  i el retardador hauria de col·locar-se amb l'eix ordinari en un angle  $\psi = -75^\circ$  respecte de l'horitzontal.

Aquest resultat el podem comprovar directament utilitzant la matriu del retardador girat

#### Problema 4.8

S'utilitza un cristall uniaxial negatiu, KDP (fosfat dideuteri de potassi), per generar un senyal de segon harmònic (SH) en la longitud d'ona  $\lambda_{SH} = 532 \text{ nm}$  a partir d'una ona fonamental a  $\lambda_f = 1.064 \text{ nm}$ . Volem calcular l'angle de fase coincident en les dues configuracions següents:

- Coincidència de fase de Tipus I: la condició de la conservació de moment que s'ha de satisfer és  $2k(1064) = k(532)$ . Troba l'única possibilitat de polarització per a ambdós feixos i troba l'angle de coincidència de fase.
- Coincidència de fase col·lineal de Tipus II: en aquesta configuració, en la longitud d'ona fonamental amb diferent polarització, dos feixos es barregen de manera col·lineal per generar radiació en la longitud d'ona SH. L'eficiència del procés ve regida per la relació de la conservació del moment  $k_{or}(1064) + k_e(\theta, 1064) = k(532)$ . Troba la polarització del feix SH i calcula l'angle de coincidència de fase.

Índex de refracció de KDP:  $nor(532) = 1,5123$ ,  $ne(532) = 1,4705$ ,  $nor(1064) = 1,4938$  i  $ne(1064) = 1,4599$ .

#### Solució

En el procés de generació d'un segon harmònic (SHG), volem transferir energia del feix fonamental al segon harmònic. Una transferència d'energia efectiva entre ones requereix que l'energia i la conservació del moment sigui simultània.



Quan s'estudia la llum en termes de fotons, la seva energia és  $E = \hbar\omega$  i la seva quantitat de moviment és  $\vec{p} = \hbar\vec{k}$ . La conservació d'energia requereix que dos fotons de la freqüència fonamental es destrueixin per tal de crear un fotó en la freqüència de segon harmònic. Això es pot escriure de la manera següent:

$$\omega_{SH} = 2\omega_{fund} \rightarrow \lambda_{SH} = \lambda_{fund} / 2.$$

La conservació del moment és una relació entre els vectors d'ona de les ones que interaccionen. En una interacció col·lineal, totes les ones es propaguen en la mateixa direcció i podem escriure una relació escalar. Aquesta condició de conservació del moment es pot satisfer de diferents maneres, però la més fàcil és la configuració de Tipus I.

### Configuració de Tipus I

Per a un procés de SHG, la configuració ve donada per la relació

$$2k_{fund} = k_{SH}$$

Aquesta relació es pot expressar en termes de l'índex de refracció en cada longitud d'ona:

$$2n_{fund} \frac{2\pi}{\lambda_{fund}} = n_{SH} \frac{2\pi}{\lambda_{SH}} = n_{SH} \frac{4\pi}{\lambda_{fund}} \rightarrow n_{fund} = n_{SH}$$

on s'ha utilitzat la relació de la conservació d'energia.

A partir d'aquesta expressió, podem veure que la conservació del moment en aquest procés requereix que l'índex de refracció de les dues longituds d'ona sigui el mateix.

Aquesta condició està prohibida en els materials isòtrops, a causa de la dispersió dels materials. Tanmateix, sí que es pot complir en materials anisòtrops sota unes condicions concretes de l'estat de polarització i de la direcció de propagació per a les ones que interaccionen a dins del cristall.

La idea global és que, per complir aquesta condició, la polarització del fonamental i del SH ha de ser diferent. A més a més, la variació de l'índex de refracció extraordinari amb angle permet, en algunes situacions, trobar un punt per satisfer la condició de conservació de moment requerida (coincidència de fase).

Com que l'índex de refracció augmenta amb la freqüència en un règim de dispersió normal, sempre passarà que

$$n_{or}(fund) < n_{or}(SH) \quad i \quad n_e(fund, \theta) < n_e(SH, \theta).$$

La figura mostra un gràfic per al cristall uniaxial negatiu genèric en dues situacions diferents.



- Si la birefringència del medi es massa petita (gràfic de l'esquerra), les corbes del fonamental i del SH no intersequen en cap angle. En aquestes condicions, el cristall no ens serveix per assolir la coincidència de fase.
- Si la birefringència del medi és massa gran (gràfic de la dreta), la corba del SH ordinari i la del fonamental extraordinari intersequen en una determinada direcció de propagació. En aquest punt, se satisfà la condició de conservació del moment.

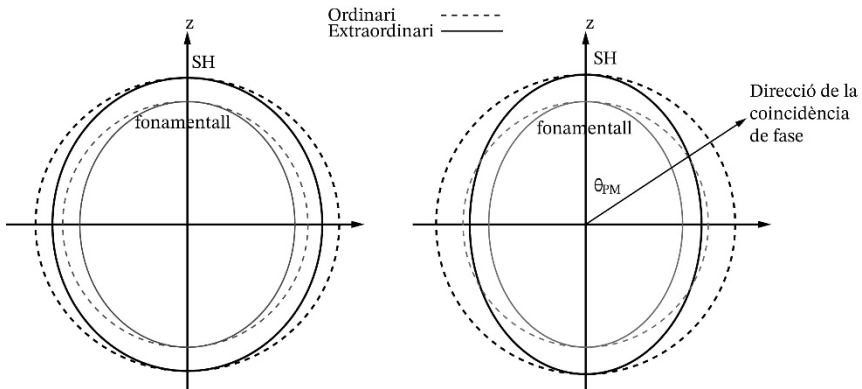


Figura 4.9 Coincidència de fase de Tipus I

A la figura, podem veure que la coincidència de fase per als cristalls uniaxials negatius serà possible si  $n_{or}(\text{fund}) > n_e(\text{SH})$ .

A partir dels valors dels índexs de refracció de KDP a 1064 nm i a 532 nm:  $n_{or}(1064) = 1,4938 > n_e(532) = 1,4705$ . En la configuració de Tipus I, aquesta condició es manté, i és possible la coincidència de fase en KDP per a l'angle de propagació que satisfà la condició:

$$n_{or}(1064) = n_e(532, \theta_{PM})$$

Si substituïm l'expressió per a l'índex de refracció extraordinari com a funció de l'angle:

$$\frac{1}{n_{or}^2(1064)} = \frac{1}{n_e^2(532, \theta_{PM})} = \frac{\sin^2 \theta_{PM}}{n_e^2(532)} + \frac{\cos^2 \theta_{PM}}{n_{or}^2(532)} = \frac{1 - \cos^2 \theta_{PM}}{n_e^2(532)} + \frac{\cos^2 \theta_{PM}}{n_{or}^2(532)}$$

$$\cos^2 \theta_{PM} = \frac{1/n_{or}^2(1064) - 1/n_e^2(532)}{1/n_{or}^2(532) - 1/n_e^2(532)} = 0.5677 \rightarrow \theta_{PM}^{Type I} = 41.1^\circ$$



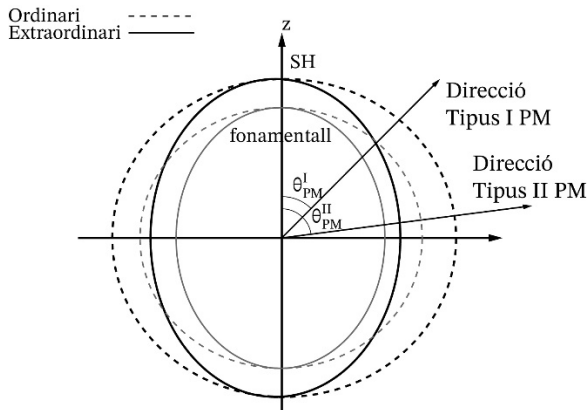
### Configuració de Tipus II

Per a la interacció col·lineal de Tipus II, tenim una barreja dels modes fonamentals ordinari i extraordinari que es propaguen de manera col·lineal. A partir de la condició de conservació del moment, podem trobar la relació entre els índexs de refracció:

$$k_{or}(1064) + k_e(1064, \theta) = k(532)$$

$$\frac{n_{or}(1064)2\pi}{1064} + \frac{n_e(1064, \theta)2\pi}{1064} = \frac{n(532)2\pi}{532} \rightarrow n(532) = \frac{n_{or}(1064) + n_e(1064, \theta)}{2}$$

L'índex de refracció de SH ha de ser el valor mitjà del seu valor ordinari i extraordinari. Per tal que es compleixi aquesta condició, la birefringència del cristall hauria de ser prou gran. Aquesta situació es mostra de manera gràfica en la figura següent:



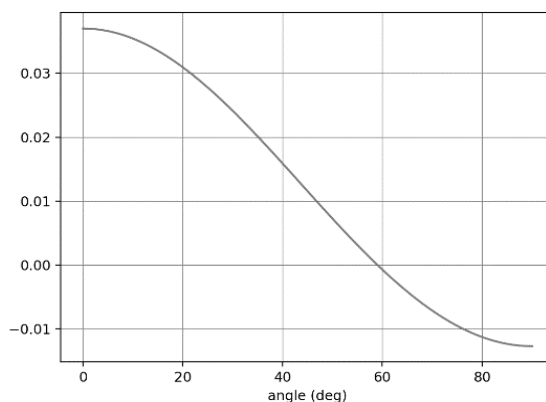
A la figura podem veure que l'índex de refracció de SH ha de ser extraordinari. En l'angle de coincidència de fase, el seu valor es troba entre els índexs ordinari i extraordinari del fonamental, així que se satisfà la condició del valor mitjà de l'índex que se'n deriva.

La condició de PM de Tipus II és  $n_e(532, \theta_{PM}^{II}) = \frac{n_{or}(1064) + n_e(1064, \theta_{PM}^{II})}{2}$

A la figura veiem que l'angle d'interacció de Tipus II sempre serà més gran que l'angle de coincidència de fase de Tipus I.

L'angle de coincidència de fase també es pot calcular de manera numèrica. El gràfic següent representa la funció  $f(\theta) = 2n_e(532, \theta) - n_{or}(1064) - n_e(1064, \theta)$  com una funció de l'angle  $\theta$ . El valor de l'angle de coincidència de fase es pot obtenir amb el gràfic, ja que

$$f(\theta_{PM}) = 0, \text{ per una coincidència de fase propera a } 60^\circ.$$



## 4.6 Problemes plantejats

**P4.1** Una ona òptica es propaga per dins d'un quars en una direcció definida pels angles  $\theta = 20^\circ$  i  $\phi = 30^\circ$ . La longitud d'ona en el buit és de 800 nm i l'amplitud del camp és de  $E = 100$  V/m. Escriu una expressió per als modes normals ordinari i extraordinari que es propaguen per aquest medi. Troba la direcció del vector de Poynting per a cadascun d'aquests modes.

**P4.2** Una ona òptica d'una longitud d'ona de 589 nm té una incidència normal sobre la superfície d'un retardador de calcita ( $n_{or} = 1,6583$ ;  $n_e = 1,4864$ ).

a) Quin és el gruix mínim del cristall que es necessita per obtenir un retard de fase relatiu entre els components ordinaris i extraordinaris de  $\pi$ ;  $\pi/4$  i  $\pi/2$ ?

b) Per a una ona d'entrada polaritzada linealment a  $\theta = 45^\circ$  respecte de l'eix ordinari, calcula l'estat de polarització a la sortida del retardador per als tres casos que es plantegen en la pregunta a).

**P4.3** Una làmina de quart d'ona està orientada de manera que el seu eix ordinari es troba damunt de l'eix OY i el seu eix extraordinari al llarg de l'eix OZ. Una ona incident es propaga al llarg de l'eix OX. Troba la polarització de l'ona de sortida quan l'estat de polarització incident sigui:

- Polarització lineal al llarg de l'eix ordinari
- Polarització lineal al llarg de l'eix extraordinari
- Polarització lineal formant un angle  $\theta$  amb l'eix ordinari
- Polarització circular dreta
- Polarització circular esquerra



**P4.4** Una ona plana amb polarització lineal incideix sobre un selector de polaritzador circular (vegeu el problema resolt Problema 4.3). Estudia l'efecte d'aquest polaritzador com a funció de l'angle de l'ona polaritzada linealment incident.

**P4.5** Construïm un selector de polarització circular tal com s'explica en el problema resolt S3. En un determinat moment, el polaritzador lineal comença a girar amb una velocitat angular constant  $\omega$ . Determina l'estat de polarització transmès per a la polarització circular dreta incident.

**P4.6** Una làmina d'ona feta a partir d'un cristall uniaxial positiu té un eix òptic paral·lel a la superfície de la làmina i perpendicular al pla d'incidència. Aquesta làmina introdueix un canvi de fase relatiu  $\delta_R = (n_e - n_{or})k_o L$  per a un feix amb una incidència normal sobre la superfície. Canviem l'angle d'incidència de zero a un valor de  $\theta_{in}$ .

a) Descriu les trajectòries del feix ordinari i extraordinari en el retardador.

b) Troba una expressió per al canvi de fase relatiu en aquest cas.

**P4.7** Els filtres espectrals amb una amplada de banda espectral molt estreta es poden obtenir mitjançant cristalls birefringents. Un filtre de Šolc es fa mitjançant un nombre enter de parells de retardadors inserits entre els polaritzadors creuats de manera que la seqüència d'orientacions de l'eix ordinari de cada parell de retardadors respecte de la direcció del polaritzador horitzontal inicial ve donat per  $[\theta, -\theta]$ . La seqüència total d'elements és  $[0^\circ, \theta, -\theta, \dots, \theta, -\theta, 90^\circ]$ .

a) Troba la matriu corresponent a un determinat parell de retardadors.

b) Troba la matriu per al filtre de Šolc amb un únic parell de retardadors.

c) Si els retardadors són làmines de mitja ona, determina la intensitat transmesa per a la radiació incident que està polaritzada linealment al llarg de l'eix horitzontal.

**P4.8** Un cristall de quars s'utilitza per generar radiació a 400 nm (segon harmònic) a partir de radiació a 800 nm (fonamental) a través del procés de generació de segon harmònic. Els índexs de refracció del cristall a aquestes longituds d'ona són  $n_{or}(400) = 1,5577$ ,  $n_e(400) = 1,5673$ ,  $n_{or}(800) = 1,5383$  i  $n_e(800) = 1,5472$ . Descriu i justifica la possibilitat d'obtenir la coincidència de fase requerida utilitzant aquest cristall.

**P4.9** Un cristall uniaxial positiu s'utilitza per obtenir la coincidència de fase en el procés de convertir la radiació d'un feix amb una longitud d'ona de 1.064 nm al seu segon harmònic a 532 nm, utilitzant una configuració de coincidència de fase col·lineal de Tipus II. En aquesta configuració, la radiació incident és una barreja de les



ones polaritzades ordinària i extraordinària a 1.064 nm. La condició de coincidència de fase és

$$k_{or}(1.064) + k_e(1.064) = k(532)$$

a) Comenta quin estat de polarització de la radiació de segon harmònic és l'única possibilitat que satisfà la condició de coincidència de fase.

b) Determina l'angle de coincidència de fase en aquesta configuració. Els índexs de refracció són  $n_{or}(1.064) = 1,535$ ,  $n_e(1064) = 1,544$ ,  $n_{or}(532) = 1,538$  i  $n_e(532) = 1,549$ .

**P4.10** Un cristall DKDP (uniaxial negatiu) genera radiació UV a  $\lambda_3 = 354,67$  nm a través del procés de generació de la freqüència suma utilitzant la superposició de la radiació a  $\lambda_1 = 1064$  nm i  $\lambda_2 = 532$  nm. Per obtenir una conversió eficient, s'han de complir les condicions següents:

Conservació de l'energia:  $\omega_1 + \omega_2 = \omega_3$

Conservació del moment:  $k_{or}(1064) + k_{or}(532) = k_e(354.67, \theta_{PM})$

Troba l'angle de coincidència de fase, tenint en compte que la interacció és col·lineal, així que tots els feixos es propaguen en la mateixa direcció.

$\lambda(\text{nm})$	$n_{or}$	$n_e$
1.064	1,4928	1,4555
532	1,5085	1,4690
354,67	1,5263	1,4841

# Propagació de polsos de llum

## Introducció

Als capítols anteriors hem tractat exclusivament amb la radiació monocromàtica. El capítol 1 aborda les solucions bàsiques de l'equació d'ona; el capítol 2 desenvolupa les solucions de feix paraxial per a la localització espacial transversal de la llum i el capítol 3 tracta el problema de l'aparició de certa dependència temporal degut a l'emissió atenuada dels emissors de dipol simple. Quan considerem la superposició d'oscil·ladors atenuats de diverses fonts (normalment al voltant de  $10^{18}$  àtoms/cm<sup>3</sup>), les fases aleatòries donen lloc a una emissió contínua de llum amb fluctuacions afegides degudes al caràcter estadístic del procés d'emissió. Aquesta és l'emissió de llum característica de les fonts naturals com ara el sol. Les fonts tèrmiques emeten en un espectre de freqüència ampli (per exemple, el Sol emet des de l'infraroig fins a l'ultraviolat), encara que la llum no s'emet en forma de pols de llum, sinó de forma contínua.

Aquesta emissió és completament oposada a la de les fonts làser modernes, que emeten polsos de radiació amb durades de l'ordre de picosegons, nanosegons o femtosegons a un ritme de repetició determinat. Aquests polsos tenen una potència molt gran i s'utilitzen àmpliament en un gran nombre d'aplicacions de la fotònica, com ara les telecomunicacions, el processament de materials o la cirurgia mèdica, entre d'altres.

En aquest capítol aprendrem la definició bàsica dels polsos de llum i com es propaguen en materials dispersius. De la mateixa manera que durant la propagació els feixos de llum pateixen una difracció, veurem que l'efecte que produeix la dispersió és un allargament temporal dels polsos.

En primer lloc, considerem com podem obtenir un pols a partir de la superposició d'ones monocromàtiques de diferents freqüències. Una ona monocromàtica representa una solució temporal infinita de l'equació d'ona. Si afegim dues ones monocromàtiques amb freqüències lleugerament diferents,  $\omega$  i  $\omega + \Delta\omega$ , obtenim un senyal modulat que mostra la modulació característica per una freqüència igual a  $\Delta\omega/2$ .



Afegint més i més freqüències amb una relació de fase ben definida entre elles, obtenim una amplitud moduladora que es fa més estreta a mesura que la banda de freqüència s'amplia. Tanmateix, el confinament de camp desapareix quan la relació de fase entre les ones és aleatòria. Aquesta dependència de fase entre les diferents freqüències és fonamental per tal de discernir entre un pols de llum (per exemple, emès per làsers ultracurts) i una font d'emissió contínua de banda ampla com és el Sol. El mecanisme responsable de fixar les fases suposa un gran avenç en el camp de la fotònica de les últimes dècades.

## 5.1 Descripció matemàtica dels polsos de llum

El camp elèctric corresponent a un pols de llum s'expressa matemàticament com una funció dependent del temps. Com hem après, la llum es propaga tot oscil·lant a freqüències molt elevades de l'ordre de  $10^{15}$  Hz. Això ens permetent d'expressar el nostre pols amb una aproximació que anomenem quasi-monocromàtica, concretament com a ona portadora a una gran freqüència òptica, modulada en el temps per una amplitud temporal:

$$\vec{E}(z,t) = \vec{E}_o^{(+)}(z,t)e^{-i\omega_0 t}$$

on  $E_o(z,t)$  representa l'amplitud complexa, que també es coneix com a **amplitud de pols temporal**, i  $\omega_0$  és la freqüència portadora.

La validesa d'aquesta aproximació es pot justificar tenint en compte el període d'una sola oscil·lació del cicle:  $T=2\pi/\omega \approx 2 \cdot 10^{-15}$  s. Aquesta expressió serà vàlida per a durades de l'amplitud de pol majors que  $T$  (en aquest capítol no tindrem en consideració la dependència transversal dels polsos de llum, ja que com més detallada sigui la dependència espai-temps, més complexitat afegirem). D'aquí en endavant suposarem que el nostre feix es pot considerar espacialment homogeni en el pla transversal.

De moment, prendrem en compte les propietats del pols de llum en el pla  $z = 0$  i ens concentrarem en les propietats bàsiques de la seva dependència temporal. Més endavant en aquest capítol, considerarem els efectes de la propagació del pols. L'expressió del pols de llum es pot escriure en relació a la seva amplitud real i fase temporal, que són  $|E_o^{(+)}(t)|$  i  $\varphi(t)$ , respectivament, en aquesta representació complexa:

$$E^{(+)}(t) = E_o^{(+)}(t)e^{-i\omega_0 t} = |E_o^{(+)}(t)|e^{i\varphi(t)}e^{-i\omega_0 t} \quad [5.1A]$$

El camp elèctric real ve donat per la part real del senyal analític, com és habitual:

$$E(t) = \text{Re}[E^{(+)}(t)] \quad [5.1B]$$

En aquest capítol passarem per alt els efectes de la polarització i, per tant, ometrem de les expressions el caràcter vectorial dels camps.



La intensitat temporal del pols és proporcional al mòdul al quadrat de l'amplitud real:

$$I(t) \propto |E_0^{(+)}|^2$$

Una forma alternativa d'escriure el pols de llum és expressant la funció d'ona escalar en funció de la intensitat:

$$U^{(+)}(t) = \sqrt{I(t)} e^{i\varphi(t)} e^{-i\omega_0 t} \quad [5.1C]$$

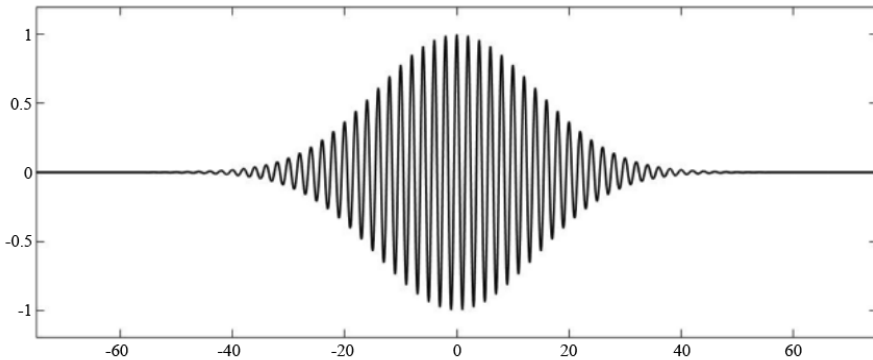


Figura 5.1 El camp elèctric d'un pols de llum mostra les ràpides oscil·lacions de la freqüència portadora modulada per l'amplitud temporal.

A l'hora de treballar amb polsos, és generalment aconsellable de treballar dins l'espai de freqüències, que es relaciona amb l'espai temporal mitjançant una transformada de Fourier. Definim la representació de freqüències del camp temporal com

$$\tilde{E}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} E(t) e^{i\omega t} dt \quad \Leftrightarrow \quad E(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad [5.2]$$

Aquestes expressions representen matemàticament el fet físic que un pols es pot obtenir com una superposició coherent de diferents freqüències. El camp elèctric que apareix en aquestes relacions correspon al camp elèctric real i, per tant, la seva transformada de Fourier,  $\tilde{E}(\omega)$ , serà complexa. La realitat del camp temporal imposa una relació entre el component negatiu i el positiu de la transformada de Fourier:

$$\tilde{E}(-\omega) = \tilde{E}(\omega)^*$$

Per tal de treballar amb representacions complexes dels camps temporals, definim la part positiva del camp espectral:

$$\tilde{E}^{(+)}(\omega) = \begin{cases} \tilde{E}(\omega) & \text{if } \omega \geq 0 \\ 0 & \text{if } \omega < 0 \end{cases}$$



La transformada de Fourier (TF) d'aquesta funció és complexa i correspon a la representació analítica del camp elèctric real. Això vol dir que les funcions  $E^{(+)}(t)$  i  $\tilde{E}^{(+)}(\omega)$  són un parell de Transformades de Fourier, TF, complexes:

$$\tilde{E}^{(+)}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} E^{(+)}(t)e^{i\omega t} dt \quad \Leftrightarrow \quad E^{(+)}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}^{(+)}(\omega)e^{-i\omega t} d\omega \quad [5.3]$$

Si per a l'expressió  $E^{(+)}(t)$  factoritzem un terme oscil·latori proporcional a la freqüència portadora, obtenim:

$$E^{(+)}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E^{(+)}(\omega)e^{-i(\omega-\omega_0)t} e^{-i\omega_0 t} d\omega = \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E^{(+)}(\omega_0 + \Omega)e^{-i\Omega t} d\Omega \right] e^{-i\omega_0 t} \quad [5.4A]$$

on definim la freqüència desplaçada  $\Omega = \omega - \omega_0$ .

Comparant les equacions [5.1A] i [5.4A], reconeixem que el terme entre claudàtors és l'amplitud complexa temporal. La transformada de Fourier de l'amplitud complexa és, per tant, la versió desplaçada de la transformada de Fourier del camp elèctric:

$$E_0^{(+)}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}^{(+)}(\Omega)e^{-i\Omega t} d\Omega \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{E}^{(+)}(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} E_0^{(+)}(t)e^{i\Omega t} dt \quad [5.4B]$$

on el terme  $\tilde{E}(\Omega)$  s'escriu d'aquesta manera simplificada, tot i que fa referència a l'amplitud complexa corresponent a la freqüència real  $\omega = \Omega + \omega_0$ .

En la majoria de casos, utilitzarem aquesta notació per referir-nos a l'evolució de l'amplitud de pols, obviant el fet que la funció analítica total s'obté multiplicant l'amplitud per l'exponencial de la freqüència portadora (de manera similar al que hem fet en la derivació de les solucions d'ones paraxials). Amb aquestes consideracions en ment, expressarem el pols de llum ja sigui en l'espai temporal com en l'espai de les freqüències.

Pols de llum en la **representació temporal**:

$$E^{(+)}(t) = |E_0^{(+)}(t)| e^{i\varphi(t)} e^{-i\omega_0 t} \Rightarrow I(t) \propto |E_0^{(+)}(t)|^2 \quad [5.5A]$$

on

- $|E_0^{(+)}(t)|$  és l'amplitud temporal de pols;
- $\varphi(t)$  és la fase temporal i
- $I(t)$  és la intensitat de pols.

El pols de llum en la **representació espectral**:



$$\boxed{\tilde{E}^{(+)}(\omega_o + \Omega) = |\tilde{E}_o^{(+)}(\Omega)| e^{i\psi(\Omega)} \Rightarrow S(\Omega) \propto |\tilde{E}_o^{(+)}(\Omega)|^2} \quad [5.5B]$$

on

- $|\tilde{E}_o^{(+)}(\Omega)|$  és l'amplitud espectral de pols;
- $\psi(\Omega)$  és la fase espectral i
- $S(\Omega)$  és l'espectre del pols.

## 5.2 Durada i amplada de banda del pols

Tal i com hem vist al capítol 2, en tractar amb feixos gaussians, no hi ha una única expressió per definir el radi del feix. De la mateixa manera, podem utilitzar diferents expressions per definir la durada del pols o l'amplada de banda de l'espectre. Si els polsos temporals tenen un perfil d'amplitud gaussià, podem definir les durades de pols  $1/e$ ,  $1/e^2$  o FWHM, tal i com hem fet amb el radi del feix òptic. Per als perfils de pols que no siguin gaussians però que tinguin un perfil suau d'un sol pols, es pot utilitzar generalment la convenció de FWHM. Per als polsos amb formes més complexes o perfils amb múltiples pics, definim la durada general del pols com la desviació estàndard:

$$\Delta t = \sqrt{\langle t^2 \rangle - \langle t \rangle^2}$$

amb

$$\langle f \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f I(t) dt}{\int_{-\infty}^{\infty} I(t) dt}$$

Es defineix una expressió equivalent per obtenir l'amplada de l'espectre que defineix el rang de freqüències presents al pols.

### 5.2.1 Producte amplada de banda-temps (TBP)

El producte amplada de banda-temps d'un pols (TBP, de “*time-bandwidth product*” en anglès) depèn de la seva fase temporal i espectral. En general, es compleix:

$$TBP = \Delta \tau \cdot \Delta \Omega \geq K \quad [5.6]$$

on  $K$  és una constant que depèn del perfil de pols concret. Aquesta és una expressió general que relaciona els parells de transformades de Fourier.



El valor mínim del TBP correspon a la situació en què les fases temporal i espectral siguin zero o constants quan totes les freqüències que formen el pols s'afegeixen en fase. El pols en aquest cas es denomina **limitat per la transformada de Fourier** i representa la durada mínima de pols que es pot assolir per a un espectre de freqüències determinat.

Pols limitat per la transformada de Fourier:  $\Delta t = K/\Delta\Omega$

Una fase espectral dependent del temps significa que els diferents components de la freqüència del pols es solapen amb certa diferència de fase relativa entre elles. Tal i com hem mostrat anteriorment, això comporta un allargament del pols.

Pols amb fase temporal o espectral no constant:  $\Delta t > K/\Delta\Omega$ .

► **Exemple 1:** TBP d'un pols gaussià limitat per la transformada de Fourier

Un pols gaussià amb durada de pols ( $1/e$ ) en amplitud  $\tau_0$  s'escriu com

$$E_0^{(+)}(t) = E_0 e^{-t^2/\tau_0^2}$$

Durada del pols:  $\Delta t = \tau_0$

Per obtenir l'amplada de banda, calculem l'amplitud espectral:

$$\tilde{E}_0^{(+)}(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} E_0^{(+)}(t) e^{i\Omega t} dt = E_0 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/\tau_0^2} e^{i\Omega t} dt$$

La integral es pot resoldre utilitzant

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-At^2} e^{-2Bt} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{A}} e^{B^2/A} \quad (\text{Re}(A) > 0)$$

Obtenim

$$\tilde{E}_0^{(+)}(\Omega) = E_0 \sqrt{\pi} \tau_0 e^{-\Omega^2 \tau_0^2 / 4} = E_0 \sqrt{\pi} \tau_0 e^{-\Omega^2 / (2/\tau_0)^2}$$

L'amplada de banda és per tant

$$\Delta\Omega = 2/\tau_0 \quad \text{i} \quad \text{TBP} = 2$$

► **Exemple 2:** TBP d'un pols gaussià amb dependència de fase temporal quadràtica

El pols en aquest cas s'expressa com

$$E_0^{(+)}(t) = E_0 e^{-\frac{t^2}{\tau_0^2}(1+i\alpha)}$$

L'amplitud espectral s'obté per transformada de Fourier directa:



$$\tilde{E}^{(+)}(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} E_0^{(+)}(t) e^{i\Omega t} dt = \frac{E_0^{(+)} \sqrt{\pi} \tau_0}{\sqrt{1+i\alpha}} e^{-\frac{\Omega^2 \tau_0^2}{4(1+i\alpha)}}$$

Separant l'amplitud i la fase en la funció exponencial, obtenim l'expressió

$$\tilde{E}_0^{(+)}(\Omega) = \frac{E_0^{(+)} \sqrt{\pi} \tau_0}{\sqrt{1+i\alpha}} e^{-\frac{\Omega^2 \tau_0^2}{4(1+\alpha^2)}} e^{i \frac{\Omega^2 \tau_0^2 \alpha}{4(1+\alpha^2)}}$$

L'amplada de banda de la freqüència s'obté directament de l'amplitud gaussiana:

$$\tilde{E}_0^{(+)}(\Omega) \propto e^{-\frac{\Omega^2}{\Delta\Omega^2}} \quad \text{with} \quad \Delta\Omega = \frac{2\sqrt{1+\alpha^2}}{\tau_0}$$

El TBP serà:

$$TBP = \Delta t \cdot \Delta\Omega = 2\sqrt{1+\alpha^2}$$

A partir d'aquest resultat, podem inferir que, per a un contingut de freqüència fix (amplada de banda de freqüència fixa), un pols amb dependència quadràtica temporal de la fase temporal resultarà en un pols més llarg, amb una durada que serà  $\sqrt{1+\alpha^2}$  vegades més llarg que un pols limitat per la transformada de Fourier amb la mateixa amplada de banda.

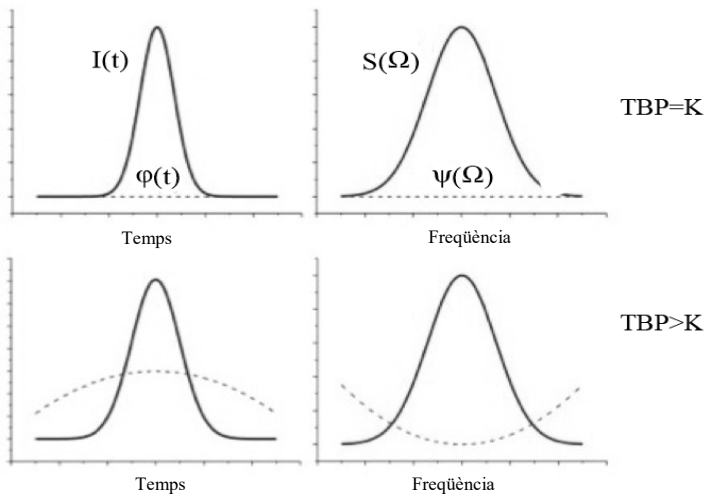


Figura 5.2 Dos polsos gaussians d'espectre idèntic i fases diferents. (Dalt) pols limitat a la transformada de Fourier. (Baix) pols amb una dependència quadràtica de la fase que condueix a polsos més llargs en el domini del temps per a un espectre donat.



### 5.3 Frequència instantània i xirp

En la secció anterior hem vist que un pols òptic es pot expressar com una ona plana temporalment modulada amb una freqüència portadora ( $\omega_0$ ). Aquesta freqüència normalment s'associa al màxim de l'espectre del pols. En aquesta secció, explorarem més de prop el paper que juga el terme de fase temporal en la distribució temporal del camp elèctric.

Les variacions ràpides de la fase temporal poden modificar la freqüència instantània a través del pols, portant a efectes de modulació de freqüència.

El pols de llum es pot expressar en termes de les seves amplitud i fase total:

$$E^{(+)}(t) = |E_o^{(+)}(t)| e^{i\varphi(t)} e^{-i\omega_0 t} = |E_o^{(+)}(t)| e^{-i(\omega_0 t - \varphi(t))} = |E_o^{(+)}(t)| e^{-i\Phi(t)}$$

La **freqüència instantània** del pols es defineix mitjançant la relació

$$\omega_{inst}(t) = \frac{d\Phi(t)}{dt} = \omega_0 - \frac{d\varphi(t)}{dt} \quad [5.8]$$

Aquesta definició ens permet veure que, quan la fase temporal de l'amplitud,  $\varphi(t)$  és constant o zero, la freqüència instantània és constant a través del pols i que correspon a la freqüència portadora. Aquest és el cas dels polsos limitats per transformada de Fourier que es mostren a la figura 1. Qualsevol dependència temporal de la fase temporal comportarà un canvi en la freqüència instantània.

Escrivint la fase temporal de forma genèrica, tenim l'expansió

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \varphi_1 t + \frac{1}{2} \varphi_2 t^2 + \frac{1}{3!} \varphi_3 t^3 + \dots$$

Utilitzant [5.8], la freqüència instantània esdevé

$$\omega_{inst}(t) = \omega_0 - \varphi_1 - \varphi_2 t - \frac{1}{2} \varphi_3 t^2 - \dots$$

Quan la freqüència instantània depèn del temps, el pols esdevé modulad en freqüència i es diu que és un pols amb **xirp**.

En el cas que  $\varphi_2 \gg \varphi_3, \varphi_4, \dots$ , la freqüència instantània varia linealment amb el temps i el pols passa a anomenar-se **pol s amb xirp lineal**. En aquest cas, definim el **coeficient de xirp C** mitjançant la relació

$$\omega_{inst}(t) = \omega_{o'} + Ct \quad [5.9]$$

on  $\omega_{o'} = \omega_0 - \varphi_1$  i  $C = -\varphi_2$ . Les dimensions de  $C$  son  $[T]^{-2}$  i es solen expressar en  $\text{fs}^{-2}$ , ja que l'efecte del xirp sobre els polsos generalment esdevé més significatiu per als que tenen durades de l'ordre de femtosegons.



Els polsos amb  $C > 0$  es diuen **polsos amb augment de xirp**, ja que la freqüència instantània augmenta amb el temps. Els polsos amb  $C < 0$  es diuen **polsos amb disminució de xirp**, ja que la freqüència instantània disminueix amb el temps.

La figura 3 mostra una representació de polsos amb augment i amb disminució de xirp. La presència de xirp en un pols indica inequívocament que el pols no està limitat per la transformada de Fourier.

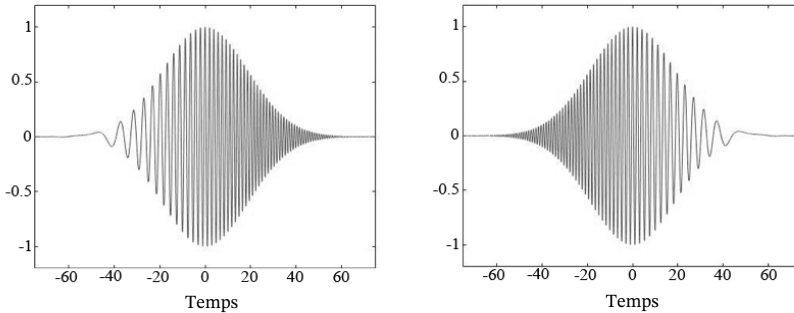


Figura 5.3 Polsos amb augment lineal de xirp (esquerra) i amb disminució (dreta)

Pel cas dels polsos gaussians, la representació matemàtica d'un pols amb xirp lineal correspon a l'expressió de l'exemple 2 (per al cas concret  $\varphi_0 = \varphi_1 = 0$ ):

$$E^{(+)}(t) = E_0 e^{-\frac{t^2}{\tau_0^2}(1+i\alpha)} e^{-i\omega_0 t}$$

Podem identificar que l'expressió correspon a un pols augment de xirp amb coeficient de xirp:

$$C = \frac{2\alpha}{\tau_0^2}$$

La variable  $\alpha$  (sense dimensions) es diu paràmetre de xirp del pols gaussià i, a continuació, veurem que els polsos de llum tenen un augment de xirp a mesura que es propaguen en medis dispersius.

## 5.4 Propagació de polsos òptics en medis dispersius

Els medis dispersius es caracteritzen per un índex de refracció  $n(\omega)$  que depèn de la freqüència. Aquesta dependència de la freqüència afecta el comportament d'un pols òptic que es propaga en tal tipus de medi. Com hem vist, qualsevol pols es pot descompondre en una sèrie de components de freqüència que, quan s'afegeixen coherentment entre ells, constitueixen el perfil del pols. Un canvi en l'índex de refracció implica un canvi en la velocitat de fase i, per tant, podem deduir que els diferents



components espectrals canviaran les seves fases relatives en la propagació. La conseqüència final d'aquest desfasament és l'aparició del xirp del pols i l'allargament del pols en el temps. Per descriure aquest fenomen, considerem un pols de llum amb amplitud inicial  $E^{+}(0,t)$ ; el nostre objectiu serà calcular l'evolució del pols al llarg de la distància de propagació  $E^{+}(z,t)$ .

El punt de partida per estudiar la propagació del pols és la relació de dispersió del medi:

$$k(\omega) = \frac{n(\omega)\omega}{c} \quad [5.10A]$$

Suposant que es tractés d'una representació quasi-monocromàtica, l'amplada de banda típica de l'amplitud de pols hauria de ser molt més petita que la freqüència de l'amplitud portadora,  $\Delta\Omega \ll \omega_0$ . En conseqüència, podríem desenvolupar la relació de dispersió al voltant de la freqüència portadora:

$$k(\omega) = k(\omega_0) + \left[ \frac{\partial k}{\partial \omega} \right]_{\omega_0} (\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2} \right]_{\omega_0} (\omega - \omega_0)^2 + \dots \quad [5.10B]$$

Expressat alternativament en termes de  $\Omega$ , tenim

$$k(\Omega) = k(0) + \left[ \frac{\partial k}{\partial \omega} \right]_{\omega_0} \Omega + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2} \right]_{\omega_0} \Omega^2 + \dots \quad [5.10C]$$

Les expressions que inclouen l'expansió amb derivades fins a segon ordre de freqüència constitueixen els anomenats models de propagació de pols d'aproximació de segon ordre.

Els termes entre parèntesis són essencials per a la teoria i es relacionen amb la **velocitat de grup** i el **coeficient de dispersió de la velocitat de grup** del pols, tal i com es descriu a continuació.

### Velocitat de grup ( $u$ )

La velocitat de grup del pols es defineix com

$$u(\omega) = \left[ \frac{\partial k}{\partial \omega} \right]^{-1} = \left[ \frac{\omega dn(\omega)/d\omega}{c} + \frac{n(\omega)}{c} \right]^{-1}$$

$$u(\omega) = \frac{c}{n(\omega) + \frac{dn(\omega)}{d\omega} \omega}$$



Com que l'índex de refracció normalment s'expressa en funció de la longitud d'ona, ens és més pràctic reescriure la velocitat de grup en termes de la longitud d'ona. Utilitzant la relació

$$\omega = 2\pi c / \lambda \Rightarrow \frac{d\omega}{d\lambda} = -\frac{2\pi c}{\lambda^2} d\lambda = -\frac{\omega}{\lambda} d\lambda \Rightarrow \omega / d\omega = -\lambda / d\lambda$$

(on  $\lambda$  es refereix a la longitud d'ona en el buit), podem escriure

$$u(\lambda) = \frac{c}{n(\lambda) - \lambda \frac{dn(\lambda)}{d\lambda}} \quad [5.11A]$$

Aquesta expressió ens permet obtenir la velocitat de grup per qualsevol longitud d'ona a partir de l'expressió del seu índex de refracció.

### Coeficient de dispersió de la velocitat de grup (g)

El coeficient de dispersió de la velocitat de grup es pot expressar respecte de la velocitat de grup:

$$g(\omega) = \left[ \frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2} \right] = \frac{\partial}{\partial \omega} \left[ \frac{1}{u(\omega)} \right] = -\frac{1}{u^2(\omega)} \frac{du(\omega)}{d\omega}$$

Aquest paràmetre relaciona el canvi en la velocitat de grup amb la freqüència. A continuació, podem distingir els següents dos règims diferents.

Dispersió de velocitat de grup normal: en aquest règim, la velocitat de grup disminueix amb la freqüència, de manera que els components de baixa freqüència viatgen més ràpidament que els d'alta freqüència

Dispersió de velocitat de grup anòmala: la velocitat de grup augmenta amb la freqüència, de manera que els components d'alta freqüència viatgen més ràpidament que els de baixa freqüència.

Per obtenir un gràfic d'aquesta funció, el millor serà repetir el que hem fet per la velocitat de grup i expressar-la novament en funció de la longitud d'ona:

$$g(\lambda) = \frac{\lambda^3}{2\pi c^2} \left[ \frac{d^2 n(\lambda)}{d\lambda^2} \right] \quad [5.11B]$$

Les unitats d'aquest coeficient són  $s^2/m$ , però sovint s'expressen en  $fs^2/mm$ .

En termes de  $u$  i  $g$ , la relació de dispersió fins al segon ordre s'escriu de la manera següent



$$k(\omega_o + \Omega) = k(\omega_o) + \frac{\Omega}{u_o} + \frac{1}{2} g_o \Omega^2$$

### Equació bàsica de propagació del pols

L'equació que defineix la propagació d'un pols de llum en un medi dispersiu s'obté a partir de l'equació d'ona general derivada al capítol 3, suposant un medi isòtrop, dispersiu, homogeni i no conductor:

$$\bar{\nabla} \wedge (\bar{\nabla} \wedge \bar{E}) + \mu_o \frac{\partial^2 \bar{D}}{\partial t^2} = 0$$

Tractant-se d'un medi dispersiu, la relació entre el camp elèctric i el desplaçament elèctric pel cas d'interacció lineal és

$$\bar{D}(\bar{r}, t) = \epsilon_o \int_{-\infty}^t \epsilon(\bar{r}, t - t') \bar{E}(t') dt'$$

Introduint aquesta expressió a l'equació d'ona i utilitzant l'expansió de la relació de dispersió al voltant de la freqüència portadora, s'obté una equació per a la propagació del pols. El tractament detallat està més enllà de l'àmbit d'aquest curs introductor (els lectors interessats poden trobar els detalls, per exemple, al llibre Diels, J.C., i Rudolph, W. (2006). “*Ultrashort Laser Pulse Phenomena, Second Edition*” (Academic Press). L'equació resultant és

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial z'} + \frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial t'} + \frac{ig}{2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} - \frac{i}{2k_o} \left[ \frac{\partial^2}{\partial z'^2} - \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} \right] \right\} E_o^{(+)}(t', z') - D = 0 \quad [5.12]$$

$$D = \frac{1}{2k_o} \sum_{m=3}^{\infty} \frac{(-i)^{m+1}}{m!} \left( \frac{\partial^m k}{\partial \omega^m} \right)_{\omega_o} \frac{\partial^m E_o^{(+)}(t', z')}{\partial t'^2}$$

on el terme  $D$  inclou termes de dispersió d'ordre superior. Quan la durada dels polsos és més gran que unes desenes de femtosegons, aquest terme es pot negligir en fer servir l'**equació de propagació de polsos amb dispersió de fins al segon ordre**. Aquesta equació s'expressa en el sistema de referència de laboratori ( $z', t'$ ), però es pot simplificar si introduïm un sistema de coordenades local ( $z, t$ ) i el marc de referència retardat, que és un sistema de referència que es mou amb el pols a velocitat de grup  $u$ . El canvi de coordenades del nou sistema es dona per

$$z = z'$$

$$t = t' - z/u$$

En condicions en què les variacions de l'amplitud de pols en distàncies de l'ordre de la longitud d'ona o en temps de l'ordre del període òptic són molt més petites que el



valor de l'amplitud mateix (aproximació de variació lenta de l'amplitud, SVEA, en l'espai i el temps), obtenim l'equació simplificada:

$$\boxed{\frac{\partial E_o^{(+)}}{\partial z} + \frac{ig}{2} \frac{\partial^2 E_o^{(+)}}{\partial t^2} = 0} \quad [5.13]$$

Aquesta és l'equació bàsica que utilitzarem per determinar l'efecte de la propagació en un perfil de pols temporal donat.

La solució general d'aquesta equació es pot obtenir més fàcilment a l'espai de freqüències. En termes dels seus components espectrals, l'amplitud del pols elèctric s'escriu com a [5.4B], on ara afegim la dependència de la variable de propagació  $z$ :

$$E_o^{(+)}(z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}^{(+)}(z, \Omega) e^{-i\Omega t} d\Omega \quad [5.14]$$

Substituint aquesta expressió a [5.13]:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\partial \tilde{E}^{(+)}}{\partial z} - \frac{ig\Omega^2}{2} \tilde{E}^{(+)} \right\} e^{-i\Omega t} d\Omega = 0$$

Aquesta relació és certa per a qualsevol amplitud arbitrària si complex

$$\frac{\partial \tilde{E}^{(+)}}{\partial z} - \frac{ig\Omega^2}{2} \tilde{E}^{(+)} = 0$$

La solució d'aquesta equació es troba fàcilment:

$$\boxed{\tilde{E}^{(+)}(z, \Omega) = \tilde{E}^{(+)}(0, \Omega) e^{\frac{ig\Omega^2 z}{2}}} \quad [5.15]$$

Escrita com a

$\tilde{E}^{(+)}(z, \Omega) = \tilde{E}^{(+)}(0, \Omega) H(z, \Omega)$ , la funció  $H(z, \Omega) = e^{ig\Omega^2 z/2}$  rep el nom de **funció de transferència de la propagació de polsos en medis dispersius**.

L'equació general en el domini del temps s'obté directament a través de [5.14].

Una inspecció detinguda de la solució ens pot donar una pista física dels efectes sobre qualsevol pols que es propaga en un medi dispersiu. Considerem un pols inicial amb una amplitud de pols arbitrària en  $z = 0$ ;  $E_o^{(+)}(0, t)$ . Per transformada de Fourier directa, obtenim l'amplitud espectral i la fase:

$$\tilde{E}^{(+)}(0, \Omega) = \left| \tilde{E}^{(+)}(0, \Omega) \right| e^{i\psi(0, \Omega)}$$

i el seu espectre  $S(0, \Omega) = \left| \tilde{E}^{(+)}(0, \Omega) \right|^2$ .



Aplicant el resultat [5.15] a aquest pols, observem immediatament les següents conseqüències:

- Degut a l'efecte de la propagació afegim un terme de fase a l'amplitud espectral inicial. Com que aquest terme de fase no canvia el valor absolut de l'amplitud complexa, **l'espectre del pols no es modifica durant la propagació**. Això significa que no s'afegeixen noves freqüències a l'espectre del pols.
- La fase espectral a la sortida serà la mateixa que a l'entrada més la que s'afegeix per l'efecte de la propagació:

$$\psi(z, \Omega) = \psi(0, \Omega) + \frac{g\Omega^2 z}{2}$$

Aquest terme de fase és proporcional a la distància propagada i al quadrat de la freqüència. Aquesta fase de freqüència quadràtica donarà lloc a una fase temporal quadràtica en el domini del temps, com s'ha vist prèviament a l'exemple 2 i, en conseqüència, esdevé un **pols amb xirp**.

En el règim de dispersió normal de la velocitat de grup,  $g > 0$  i el pols experimenta un augment de xirp durant la propagació; mentre que en el règim de dispersió anòmala de la velocitat de grup,  $g < 0$ , el pols experimenta una disminució de xirp.

- Com a conseqüència del desfasament dels diferents components espectrals, **el pols s'allarga temporalment**
- Per  $g = 0$ , el pols es propaga sense distorsions en el medi.

**La presència de dispersió de la velocitat de grup ( $g$ ) dóna lloc a un desfasament de les diferents freqüències que componen el pols. Com a conseqüència d'aquest desfasament, el pols esdevé un pols amb xirp i s'allarga durant la propagació.**

► **Exemple 3:** Propagació d'un pols gaussià inicialment limitat per la transformada de Fourier en un medi dispersiu

Considerem el pols inicial

$$E_o^{(+)}(0, t) = E_o e^{-t^2/\tau_o^2}$$

Hem calculat la seva amplitud espectral per  $z = 0$  a l'exemple 1:

$$\tilde{E}^{(+)}(0, \Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} E_o e^{-t^2/\tau_o^2} e^{i\Omega t} dt = E_o \tau_o \sqrt{\pi} e^{-\frac{\Omega^2 \tau_o^2}{4}}$$

L'amplitud espectral propagada a distància  $z$  ve donada per [5.15]:



$$\tilde{E}^{(+)}(z, \Omega) = \tilde{E}^{(+)}(0, \Omega) e^{i \frac{g \Omega^2 z}{2}} = E_0 \tau_0 \sqrt{\pi} e^{-\Omega^2 \left[ \frac{\tau_0^2}{4} - i \frac{g z}{2} \right]}$$

La solució propagada en el domini del temps es pot trobar directament:

$$E_0^{(+)}(z, t) = \frac{1}{2\pi} E_0 \tau_0 \sqrt{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\Omega^2 \left[ \frac{\tau_0^2}{4} - i \frac{g z}{2} \right]} e^{-i \Omega t} d\Omega$$

La integral es pot resoldre utilitzant [5.7]:

$$E_0^{(+)}(z, t) = \frac{E_0}{2\pi} \sqrt{\pi} \tau_0 \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\frac{\tau_0^2}{4} - i \frac{g z}{2}}} e^{-\frac{t^2}{4 \left[ \frac{\tau_0^2}{4} - i \frac{g z}{2} \right]}}$$

Reordenant el terme, obtenim

$$E_0^{(+)}(z, t) = \frac{E_0}{\sqrt{1 - i \frac{z}{L_D}}} e^{-\frac{t^2}{\tau_0^2 (1 - i \frac{z}{L_D})}}$$

on definim la longitud de dispersió de la velocitat de grup,  $L_D$ :  $L_D = \frac{\tau_0^2}{2g}$ :

Aquesta expressió es pot reescriure com

$$E_0^{(+)}(z, t) = E_0 \frac{\left(1 + \frac{z^2}{L_D^2}\right)^{1/4} e^{i \frac{\text{atg}(z/L_D)}{2}}}{\sqrt{1 + \frac{z^2}{L_D^2}}} e^{-\frac{t^2}{\tau_0^2 (1 + \frac{z^2}{L_D^2})} - i \frac{t^2 z}{\tau_0^2 L_D (1 + \frac{z^2}{L_D^2})}}$$

definint els paràmetres següents.

$$\text{Durada del pols: } \tau(z) = \tau_0 \sqrt{1 + \frac{z^2}{L_D^2}}$$

$$\text{Paràmetre de xirp: } \alpha(z) = \frac{L_D}{z \left(1 + \frac{L_D^2}{z^2}\right)}$$

$$\text{Desplaçament de fase: } \xi(z) = \text{atg}\left(\frac{z}{L_D}\right) / 2$$



El pols gaussià després d'una distància  $z$  es pot escriure com

$$E_o^{(+)}(z,t) = E_o \sqrt{\frac{\tau_o}{\tau(z)}} e^{-\frac{t^2}{\tau^2(z)}} e^{-i\left(\frac{\alpha(z)t^2}{\tau_o^2} - \xi(z)\right)}$$

Aquesta expressió és bastant semblant a la que hem obtingut pel feix òptic gaussià al capítol 2.

La solució de l'equació de propagació [5.13] es pot obtenir en el domini del temps escrivint la transformada inversa de Fourier de l'equació [5.15]:

$$E_o^{(+)}(z,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}^{(+)}(z,\Omega) e^{-i\Omega t} d\Omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}^{(+)}(0,\Omega) e^{i\frac{g\Omega^2 z}{2}} e^{-i\Omega t} d\Omega$$

L'amplitud espectral per  $z = 0$  es pot escriure en termes de l'amplitud de pols per  $z = 0$ , obtenint

$$E_o^{(+)}(z,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} E_o^{(+)}(0,t') e^{i\Omega t'} dt' \right\} e^{i\frac{g\Omega^2 z}{2}} e^{-i\Omega t} d\Omega$$

Intercanviant l'ordre d'integració, reescrivim aquesta equació en la forma

$$E_o^{(+)}(z,t) = \int_{-\infty}^{\infty} E_o^{(+)}(0,t') \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\frac{g\Omega^2 z}{2}} e^{-i\Omega(t-t')} d\Omega \right\} dt'$$

Definim la funció

$$h(t,z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\frac{g\Omega^2 z}{2}} e^{-i\Omega t} d\Omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(z,\Omega) e^{-i\Omega t} d\Omega$$

que correspon, per tant, a la **funció de resposta del pols, o propagador temporal dels polsos de llum en medis dispersius**. Com es fa evident en aquesta expressió, la funció de resposta del pols i la funció de transferència són un parell de transformades de Fourier.

$$E_o^{(+)}(z,t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-t',z) E_o^{(+)}(0,t') dt' \tag{5.16}$$

Un cop feta la integral, la funció de resposta del pols es pot expressar alternativament com

$$h(z,t) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{-igz}} e^{-i\frac{t^2}{2gz}} = \frac{e^{-it^2/(2gz)}}{\sqrt{-i2\pi gz}}$$



A partir d'aquestes expressions, podem observar l'estreta similitud entre la solució general de l'equació d'ona parabòlica per als feixos (que trobem resumida al final del Capítol 2) i la solució de l'equació de propagació de pols en l'aproximació de segon ordre de la dispersió, que hem derivat aquí. La formulació matemàtica d'aquests dos problemes és, de fet, molt semblant, i en ambdós casos l'origen físic de l'ampliació de les solucions és el resultat d'un desfasament, ja sigui de les diferents ones planes (feixos) del feix de llum, o bé dels feixos monocromàtics (polsos) que formen el pols de llum.

■

## 5.5 Problemes resolts

### Problema 5.1

L'índex de refracció de la sílice fosa ve donat per l'expressió

$$n^2(\lambda) = 1 + \frac{0.6961663 \cdot \lambda^2}{\lambda^2 - 0.0684043^2} + \frac{0.4079426 \cdot \lambda^2}{\lambda^2 - 0.1162414^2} + \frac{0.8974794 \cdot \lambda^2}{\lambda^2 - 9.896161^2}$$

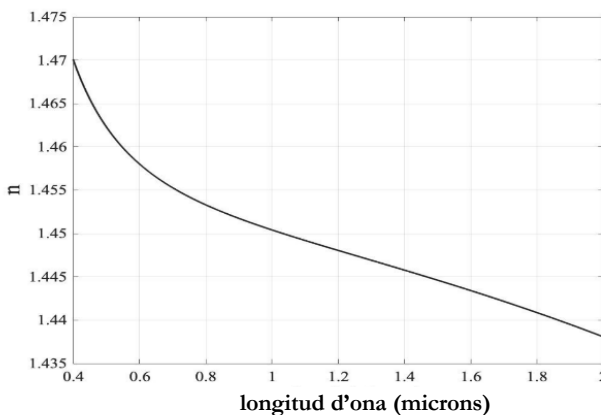
Obtingueu un gràfic de les magnituds següents en el rang de 400 nm a 2.000 nm.

- Velocitat de fase
- Velocitat de grup ( $u$ )
- Dispersió de la velocitat de grup ( $g$ )

### Solució

A partir de l'equació de Sellmeier, podem obtenir informació rellevant sobre les propietats dispersives òptiques d'un cristall determinat.

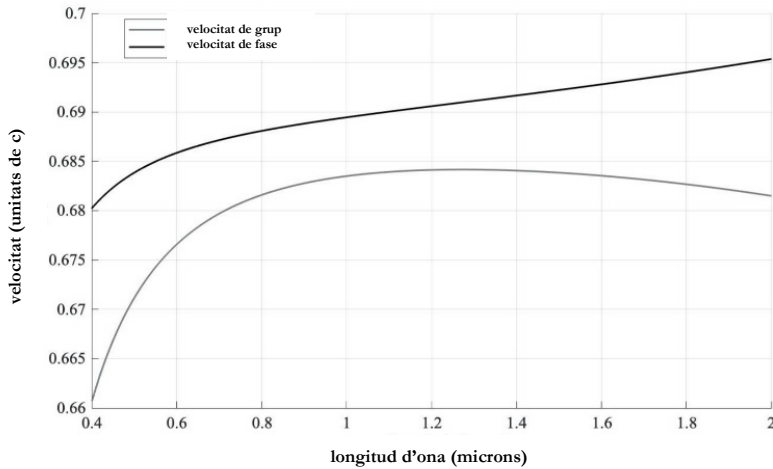
L'índex de refracció correspon a la part real d' $n$ :



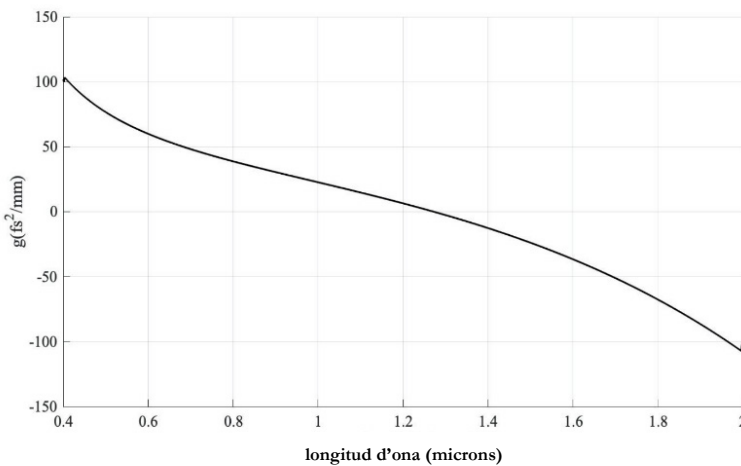


La velocitat de fase es defineix com  $v(\lambda) = c/n(\lambda)$ , mentre que la velocitat de grup es

pot calcular a partir de l'expressió  $u(\lambda) = \frac{c}{n(\lambda) - \lambda \frac{dn(\lambda)}{d\lambda}}$  :



El coeficient de dispersió de la velocitat de grup  $g(\lambda) = \frac{\lambda^3}{2\pi c^2} \left[ \frac{d^2 n(\lambda)}{d\lambda^2} \right]$  :





### Problema 5.2

Un pols òptic, amb disminució de xirp, amb amplitud temporal gaussiana i longitud d'ona central portadora  $\lambda_0 = 800 \text{ nm}$ , té un producte de la longitud de banda temporal (TBP) de valor  $\tau \Delta\Omega = 3.5$ , on  $\tau$  és la durada del pols a  $1/e$  en amplitud de l'amplitud de camp  $E_0(t)$ , i  $\Delta\Omega$  és l'amplada de banda de la freqüència corresponent a  $1/e$  de la seva transformada de Fourier  $E_0(\Omega)$ . L'amplada de banda de freqüència del pols és de  $\Delta\Omega = 3 \cdot 10^{13} \text{ rad/s}$ .

- Calculeu la durada del pols, el coeficient de xirp, el paràmetre de xirp i la freqüència instantània del pols en aquest instant de temps.
- Determineu l'amplada de banda de la freqüència de l'espectre a la FWHM i expresseu-la com una amplada de banda de longitud d'ona,  $\Delta\lambda$ .
- Expliqueu breument com es pot comprimir aquest pols i doneu el valor de la durada mínima del pols que podríem obtenir després de la compressió.

### Solució

a) La durada del pols es pot calcular directament a partir del TBP, ja que coneixem l'amplada de banda del pols:

$$\tau = \frac{TBP}{\Delta\Omega} = \frac{3.5}{3 \cdot 10^{13}} = 1.167 \cdot 10^{-13} \text{ s} = 116.7 \text{ fs}$$

Per als polsos gaussians, el TBP és igual a 2 si la durada del pols i l'amplada de banda estan definides a  $1/e$  en amplitud. Com que el valor del TBP és de 3,5, sabem que el pols és un pols amb xirp; i com que es tracta d'un disminució de xirp, el valor del paràmetre de xirp és negatiu.

A l'exemple 2 de la secció 5.2, hem derivat l'expressió per al TBP d'un pols amb xirp. A partir d'aquesta relació, podem obtenir el paràmetre de xirp:

$$TBP = 2\sqrt{1 + \alpha^2} \rightarrow |\alpha| = \sqrt{\left(\frac{TBP}{2}\right)^2 - 1} = 1.436$$

Per al nostre pols amb disminució de xirp, el paràmetre de xirp és  $\alpha = -1,436$ .

Escrivint l'expressió del nostre feix gaussià com  $E_0^{(+)}(t) = E_0 e^{-\frac{t^2(1+i\alpha)}{\tau^2}}$ , el coeficient de xirp s'obté com a

$$C = \frac{2\alpha}{\tau^2} = -2.11 \cdot 10^{-4} \text{ fs}^{-2}$$

La freqüència instantània és



$$\omega_{inst}(t) = \omega_0 + Ct = \frac{2\pi c}{\lambda} + Ct = (2.35 - 2.11 \cdot 10^{-4} t) \text{fs}^{-1}, \text{ amb } t \text{ donat en fs.}$$

b) L'espectre es pot expressar com

$$S(\Omega) = \left| \tilde{E}_o^{(+)}(\Omega) \right|^2 = E_o^2 e^{-\frac{2\Omega^2}{\Delta\Omega^2}} = S_o e^{-\frac{2\Omega^2}{\Delta\Omega^2}}$$

Per obtenir l'amplada de banda de la freqüència FWHM, busquem el valor de l'espectre amb valor  $S(\Omega_{1/2}) = S_o/2$ :

$$\frac{1}{2} = e^{-\frac{2\Omega_{1/2}^2}{\Delta\Omega^2}} \rightarrow \ln 2 = \frac{2\Omega_{1/2}^2}{\Delta\Omega^2} \rightarrow \Omega_{1/2} = \sqrt{\frac{\ln 2}{2}} \cdot \Delta\Omega$$

La FWHM és  $\Delta\Omega_{FWHM} = 2\Omega_{1/2} = \sqrt{2 \ln 2} \cdot \Delta\Omega = 3.53 \cdot 10^{13} \text{ rad / s}$ ,

que es pot expressar com una amplada de banda de longitud d'ona utilitzant la relació entre  $\Omega$  i  $\lambda$ :

$$\Omega = \frac{2\pi c}{\lambda} \rightarrow \Delta\Omega = -\frac{2\pi c}{\lambda^2} \Delta\lambda$$

$$|\Delta\lambda| = \frac{\lambda^2 \Delta\Omega}{2\pi c} = 11.98 \cdot 10^{-9} \text{ m} = 12 \text{ nm}$$

c) El fet que el TBP del pols sigui superior a 2 indica que aquest pols no està limitat per la transformada de Fourier. El pols es podria comprimir si el deixem propagar-se per un medi que compensi el xirp present en aquest pols. Com que el pols ha experimentat una disminució de xirp, necessitem un medi que introdueixi un xirp positiu (coeficient GVD positiu  $g$ ). La longitud del medi necessària per compensar el xirp inicial s'explicarà en un dels problemes següents.

La durada mínima del pols s'assolirà quan el TBP sigui igual a 2, i llavors

$$\tau_{\min} = \frac{2}{\Delta\Omega} = 66.67 \text{ fs}$$

### Problema 5.3

*Un pols gaussià amb durada de pols  $\tau$  i paràmetre de xirp  $\alpha$  es propaga en un medi amb un coeficient de dispersió de la velocitat de grup  $g$ . Determineu l'expressió de l'amplitud de pols com una funció de la distància  $z$  propagada en el medi  $i$ , a partir d'aquesta expressió, obteniu la durada del pols com una funció de  $z$ .*



## Solució

L'expressió de l'amplitud de pols gaussià per  $z = 0$  és

$$E_0^{(+)}(0, t) = E_0 e^{-\frac{t^2}{\tau^2}(1+i\alpha)}$$

Per calcular el camp propagat, utilitzarem el formalisme de la funció de transferència. Comencem calculant l'amplitud espectral del pols:

$$\tilde{E}_0^{(+)}(0, \Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} E_0 e^{-\frac{t^2}{\tau^2}(1+i\alpha)} e^{i\Omega t} dt = \frac{E_0 \tau \sqrt{\pi}}{\sqrt{1+i\alpha}} e^{-\frac{\Omega^2 \tau^2}{4(1+i\alpha)}}$$

on hem utilitzat la integral  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-Ax^2 - 2Bx} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{A}} e^{B^2/A}$  ( $\text{Re}(A) > 0$ ).

La propagació de l'amplitud espectral s'obté directament multiplicant-la per la funció de transferència:

$$\tilde{E}_0^{(+)}(z, \Omega) = \tilde{E}_0^{(+)}(0, \Omega) e^{i\frac{g\Omega^2 z}{2}} = \frac{E_0 \tau \sqrt{\pi}}{(1+i\alpha)^{1/2}} e^{-\frac{\Omega^2 \tau^2}{4(1+i\alpha)}} e^{i\frac{g\Omega^2 z}{2}}$$

La solució en l'espai real s'obté fent la transformada de Fourier:

$$E_0^{(+)}(z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}_0^{(+)}(z, \Omega) e^{-i\Omega t} d\Omega$$

Aquesta transformada de Fourier es pot avaluar utilitzant la mateixa integral d'abans. Després d'uns pocs passos algebraics, arribem al resultat final, que es pot expressar amb la forma

$$E_0^{(+)}(z, t) = E_0 \sqrt{\frac{\tau}{\tau(z)}} e^{-\frac{t^2}{\tau^2(z)}} e^{-i \left[ \frac{t^2 \alpha(z)}{\tau^2} - \frac{1}{2} \arctan \left( \frac{z/L_D}{1+\alpha z/L_D} \right) \right]}$$

on introduïm la durada del pols i el paràmetre de xirp del pols en termes de la longitud de dispersió de la velocitat de grup  $L_D = \tau^2/2g$ :

$$\tau(z) = \tau \sqrt{1 + \frac{2\alpha z}{L_D} + \frac{z^2(1+\alpha^2)}{L_D^2}} = \tau \sqrt{1 + \frac{2 \cdot \text{sign}(\alpha g) |\alpha| z}{|L_D|} + \frac{z^2(1+\alpha^2)}{L_D^2}}$$

$$\alpha(z) = \frac{\frac{z}{L_D}(1+\alpha^2) + \alpha}{1 + \frac{2\alpha z}{L_D} + \frac{z^2(1+\alpha^2)}{L_D^2}}$$

**Problema 5.4**

Començant amb l'expressió de la durada del pols d'un pols gaussià que posseeix un xirp inicial i que es propaga en un medi dispersiu amb el coeficient  $g$  de dispersió de la velocitat de grup (GVD) obtingut al problema 5.3, completeu el següent.

- Trobeu les condicions que condueixen a una compressió inicial del pols.
- Calculeu el TBP en la posició inicial.
- Trobeu la distància on la durada del pols és mínima, així com el TBP en aquell punt.

**Solució**

a) La representació del pols gaussià per  $z = 0$  s'expressa en funció de la durada inicial del pols,  $\tau_{in}$ , i el paràmetre de xirp inicial,  $\alpha$ :

$$E_o^{(+)}(0, t) = E_o e^{-\frac{t^2(1+i\alpha)}{\tau_o^2}}$$

El coeficient de xirp inicial és  $C_o = \frac{2\alpha}{\tau_{in}^2}$ .

En propagar-se en el medi dispersiu, la durada del pols, el paràmetre de xirp i el coeficient de xirp canviaran d'acord amb els resultats obtinguts al problema S5.3. El mecanisme físic que condueix a aquest procés és el desfasament dels diferents components de freqüència del pols durant la seva propagació, pel fet que tenen velocitats de propagació diferents. Això condueix a un allargament general del pols durant la propagació. No obstant, en algunes situacions, el pols es pot acurtar quan entra dins del cristall, assolint així una durada de pols mínima a una distància determinada dins del cristall. Més enllà d'aquest punt, el pols comença a augmentar la seva durada de nou.

Per analitzar les condicions que condueixen a aquest comportament, comencem amb l'expressió de la durada del pols derivada en el problema anterior:

$$\tau(z) = \tau_{in} \sqrt{1 + \frac{2\alpha z}{L_D} + \frac{z^2(1+\alpha^2)}{L_D^2}} = \tau_{in} \sqrt{1 + \frac{2 \cdot \text{sign}(\alpha g) |\alpha| z}{|L_D|} + \frac{z^2(1+\alpha^2)}{L_D^2}}$$

La longitud d'ona portadora del nostre pols dictarà si estem en el règim de GVD normal ( $g > 0$ ) o en el règim de GVD anòmal ( $g < 0$ ). A més, el xirp inicial del nostre pols,  $\alpha$ , pot ser positiu (pols amb augment de xirp) o negatiu (pols amb disminució de xirp).

Una inspecció de l'equació de la durada del pols mostra que el primer i l'últim terme seran sempre positius, cosa que conduirà a l'allargament del pols. No obstant, el segon terme pot ser positiu o negatiu, depenent del signe dels coeficients  $g$  i  $\alpha$ . Dit d'una



altra manera, l'expressió s'ha escrit en funció del signe del producte d'aquestes dues magnituds, conduint per tant a les dues situacions diferents següents.

- $\text{sign}(g \cdot \alpha) > 0$

Aquesta condició es dona quan un pols amb augment de xirp inicial es propaga en un règim de GVD normal, o bé quan un pols amb disminució de xirp inicial es propaga en un règim de GVD anòmal.

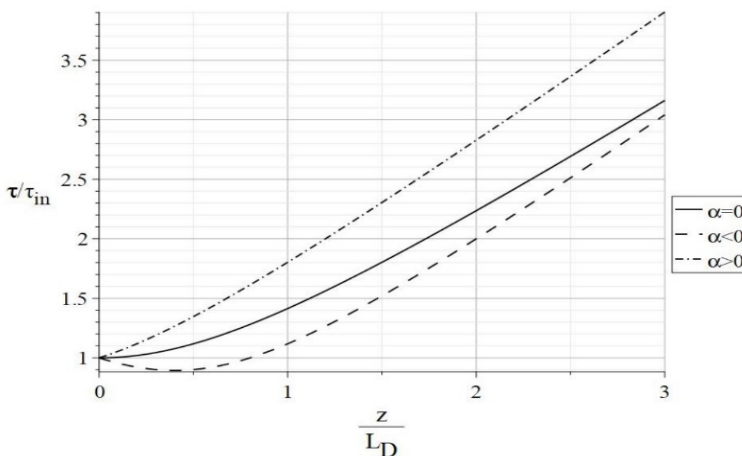
En aquesta situació, el pols augmenta la seva durada des del principi. La durada del pols augmenta més ràpidament que en el cas on el pols no té xirp inicial (pols limitat per la transformada de Fourier).

- $\text{sign}(g \cdot \alpha) < 0$

Quan es compleix aquesta condició, el segon terme esdevé negatiu i el pols comença a disminuir la seva durada quan entra al cristall. La raó d'aquest comportament és que els components de freqüència del pols, inicialment fora de fase, comencen a posar-se en fase a causa de l'efecte de la dispersió del material.

Per comprimir un pols amb augment de xirp inicial, ha de propagar-se en el règim de GVD anòmal, mentre que per a un pols amb disminució de xirp inicial passa el contrari.

La figura mostra l'evolució de la durada del pols en un medi dispersiu normal ( $g > 0$ ) per a xirp zero, positiu i negatiu.



b) Per obtenir el TBP inicial:

$$TBP_{in} = \tau_{in} \cdot \Delta\Omega$$



Hem de calcular l'amplada de banda del pols:

$$\begin{aligned}\tilde{E}_o^{(+)}(0, \Omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} E_o e^{-\frac{t^2(1+i\alpha)}{\tau_{in}^2}} e^{i\Omega t} dt = \frac{E_o \tau_{in} \sqrt{\pi}}{\sqrt{1+i\alpha}} e^{-\frac{\Omega^2 \tau_{in}^2}{4(1+i\alpha)}} = \\ &= \frac{E_o \tau_{in} \sqrt{\pi}}{(1+\alpha^2)^{1/4}} e^{-\frac{\Omega^2 \tau_{in}^2}{4(1+\alpha^2)}} e^{i \left( \frac{\Omega^2 \tau_{in}^2 \alpha}{4(1+\alpha^2)} - \frac{\arctan(\alpha)}{2} \right)}\end{aligned}$$

on usem  $\sqrt{1+i\alpha} = (1+\alpha^2)^{1/4} e^{i \frac{\arctan(\alpha)}{2}}$

A partir d'aquesta expressió, obtenim l'amplada de banda de la freqüència:

$$\Delta\Omega = \frac{2\sqrt{1+\alpha^2}}{\tau_{in}}$$

i  $TBP_{in} = 2\sqrt{1+\alpha^2}$ .

c) Per calcular la distància de compressió màxima (durada de pols mínima), assumim que estem sota les condicions inicials adequades, és a dir,  $\text{sign}(g \cdot \alpha) < 0$ , i l'equació de durada del pols és

$$\tau(z) = \tau_{in} \sqrt{1 - \frac{2|\alpha|z}{|L_D|} + \frac{z^2(1+\alpha^2)}{L_D^2}}$$

El mínim es trobarà a la posició

$$\frac{d\tau(z)}{dz} = 0 \rightarrow \frac{d(\tau^2(z) / \tau_{in}^2)}{dz} = 0$$

$$-\frac{2|\alpha|}{|L_D|} + \frac{2z_{\min}(1+\alpha^2)}{L_D^2} = 0 \rightarrow z_{\min} = \frac{|\alpha| \cdot |L_D|}{1+\alpha^2} = \frac{|\alpha| \cdot \tau_{in}^2}{2|g|(1+\alpha^2)}$$

La durada mínima del pols correspon a la durada del pols en aquesta posició dins del cristall:

$$\tau(z_{\min}) = \tau_{in} \sqrt{1 - \frac{2|\alpha|z_{\min}}{|L_D|} + \frac{z_{\min}^2(1+\alpha^2)}{L_D^2}} = \frac{\tau_{in}}{\sqrt{1+\alpha^2}}$$

El factor de compressió és



$$\eta = \frac{\tau_{\min}}{\tau_{in}} = \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}$$

$$\text{El TBP en aquest punt és } TBP_{\min} = \tau_{\min} \cdot \Delta\Omega = \frac{\tau_{in}}{\sqrt{1+\alpha^2}} \cdot \frac{2\sqrt{1+\alpha^2}}{\tau_{in}} = 2$$

Això indica que el pols en aquesta posició està limitat per la transformada de Fourier i té la mínima durada de pols possible per a l'amplada de banda donada.

És possible aconseguir una compressió addicional, per exemple, augmentant l'amplada de banda del pols. Això és possible mitjançant interaccions no lineals en el procés anomenat modulació de fase no lineal.

### Problema 5.5

L'amplitud d'un pols gaussià limitat per la transformada de Fourier amb una durada  $\tau_0$  ( $1/e$  en amplitud) ve donada per l'expressió  $E^{(+)}(t) = E_0 e^{-t^2/\tau_0^2}$ .

L'autocorrelació d'intensitat del pols es defineix com  $I_{AC}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} I(t)I(t-\tau)dt$ .

Demostreu que, per al pols donat, aquesta funció té un perfil gaussià i obteniu el valor de la seva amplada màxima a mitja alçada (FWHM).

### Solució

La intensitat del pols és proporcional al quadrat de l'amplitud de camp elèctric:

$$I(t) = I_0 e^{-\frac{2t^2}{\tau_0^2}}$$

on  $I_0$  és la intensitat màxima.

Substituint directament la intensitat en la integral d'autocorrelació, obtenim

$$I_{AC}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} I_0 e^{-\frac{2t^2}{\tau_0^2}} \cdot I_0 e^{-\frac{2(t-\tau)^2}{\tau_0^2}} dt = I_0^2 e^{-\frac{2\tau^2}{\tau_0^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{2t^2}{\tau_0^2}} e^{-\frac{2t^2}{\tau_0^2}} e^{\frac{4t\tau}{\tau_0^2}} dt = I_0^2 e^{-\frac{2\tau^2}{\tau_0^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{4t^2}{\tau_0^2}} e^{\frac{4t\tau}{\tau_0^2}} dt$$

Resolent la integral:

$$I_{AC}(\tau) = I_0^2 e^{-\frac{2\tau^2}{\tau_0^2}} \frac{\tau_0 \sqrt{\pi}}{2} e^{\frac{4\tau^2/\tau_0^4}{4/\tau_0^2}} = \frac{I_0^2 \tau_0 \sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{\tau^2}{\tau_0^2}} = I_{AC0} e^{-\frac{\tau^2}{\tau_0^2}}$$



La funció d'autocorrelació també mostra un perfil gaussià, que és  $\sqrt{2}$  vegades més ample que el perfil d'intensitat.

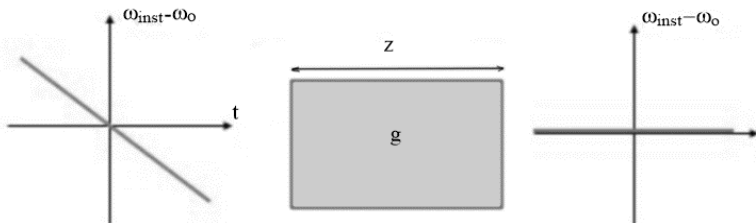
Per obtenir el FWHM, busquem el valor de  $\tau$  pel qual la correlació pren el valor  $I_{AC0}/2$ :

$$\frac{I_{AC0}}{2} = I_{AC0} e^{-\frac{\tau_{1/2}^2}{\tau_0^2}} \rightarrow \ln 2 = \frac{\tau_{1/2}^2}{\tau_0^2} \rightarrow \tau_{1/2} = \tau_0 \sqrt{\ln 2}$$

$$i \tau_{AC}^{FWHM} = 2\tau_{1/2} = 2\tau_0 \sqrt{\ln 2} .$$

### Problema 5.6

Un pols gaussià es propaga per un material dispersiu amb coeficient GVD de  $g$  a la freqüència portadora del pols. La representació mostra la freqüència instantània a l'entrada i a la sortida del cristall.



- a) Explica com serà l'aparença espacial del pols que entra al cristall.
- b) Quin és el signe del coeficient GVD en aquest material?
- c) L'amplada de banda de freqüència de l'espectre (1/e en amplitud) és  $\Delta\Omega = 7 \cdot 10^{13}$  rad/s, i la durada del pols a l'entrada del cristall és de 50 fs. Quina és la durada del pols (1/e en amplitud) a la sortida del cristall i quin és el valor del paràmetre de xirp inicial,  $\alpha$ ?

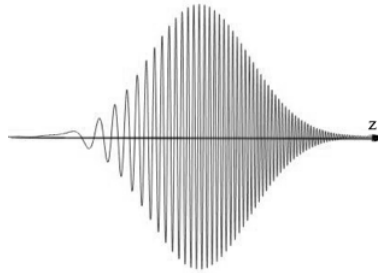
### Solució

a) Com es pot veure a les representacions, la freqüència instantània a l'entrada del cristall disminueix amb el temps. Això indica que el nostre pols inicial ha experimentat inicialment una disminució de xirp. Un pols xirp que disminueix es pot representar tant com una funció del temps, com una funció de l'espai. Donat que el temps es mesura en relació amb la ubicació del màxim, els temps negatius corresponen a la part del feix que es produeix abans del màxim i, per tant, es troba espacialment a la



part frontal del feix. Les representacions temporals i espacials estan, doncs, invertides, i cal estar sempre atents a què s'està representant a l'eix horitzontal quan s'utilitzen aquest tipus de representacions.

Un pols que ha experimentat una disminució de xirp representat a l'espai:



b) Com es pot veure en la representació, el pols incident ha experimentat una disminució de xirp. No obstant això, a la sortida, la freqüència instantània desapareix, la qual cosa indica que no té xirp. Com que el xirp inicial ha estat compensat pel material, aquest hauria d'introduir un xirp positiu. Això correspon a un GVD normal i, per tant, a  $g > 0$ .

c) El pols de sortida està limitat per la transformada de Fourier i això significa que el seu TBP té un valor ben definit. Si prenem el  $(1/e)$  com a criteri d'amplitud per mesurar la durada i l'amplada de banda del pols, obtenim

$$TBP_{out} = \tau_o \cdot \Delta\Omega = 2$$

$$\tau_o = \frac{2}{\Delta\Omega} = 28.57 \cdot 10^{-15} \text{ s} = 28.57 \text{ fs}$$

Per obtenir el paràmetre de xirp, utilitzarem el fet que el TBP a l'entrada correspon a un pols amb disminució de xirp i hauria de ser

$$TBP_{in} = \tau_{in} \cdot \Delta\Omega = 2\sqrt{1 + \alpha_{in}^2}$$

Com que el pols ha tingut una disminució de xirp, el paràmetre de xirp és negatiu, per tant

$$\alpha_{in} = -\sqrt{\frac{\tau_{in}^2 \cdot \Delta\Omega^2}{4} - 1} = -1.436$$

### Problema 5.7

Un pols de llum quadrat de durada  $\tau_o$  i longitud d'ona portadora  $\omega_o$  està representat per la funció  $E^{(+)}(t) = E_o^{(+)} e^{-i\omega_o t} = E_o \text{rect}(t/\tau_o) e^{-i\omega_o t}$ ,



$$\text{on la funció } \text{rect}(x/a) = \begin{cases} 1 & \text{per } |x| \leq a/2 \\ 0 & \text{per } |x| > a/2 \end{cases}$$

Calculeu l'espectre del pols  $S(\Omega)$  i el seu producte ample de banda-temps, TBP.

### Solució

L'amplitud espectral del pols s'obté directament a partir de l'amplitud del camp temporal:

$$\tilde{E}^{(+)}(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} E_o^{(+)}(t) e^{i\Omega t} dt = \int_{-\tau_o/2}^{\tau_o/2} E_o e^{i\Omega t} dt$$

$$\tilde{E}^{(+)}(\Omega) = \frac{E_o}{i\Omega} \left[ e^{i\frac{\Omega\tau_o}{2}} - e^{-i\frac{\Omega\tau_o}{2}} \right] = \frac{2E_o \sin\left(\frac{\tau_o\Omega}{2}\right)}{\Omega}$$

$$\tilde{E}^{(+)}(\Omega) = \tau_o E_o \frac{\sin(\tau_o\Omega/2)}{\tau_o\Omega/2} = \tau_o E_o \text{sinc}\left(\frac{\tau_o\Omega}{2}\right)$$

L'espectre és

$$S(\Omega) = |\tilde{E}(\Omega)|^2 = \tau_o^2 E_o^2 \text{sinc}^2\left(\tau_o\Omega/2\right)$$

Els zeros de la funció *sinc* es troben en  $\frac{\tau_o\Omega_m}{2} = \pm m\pi \rightarrow \Omega_m = \pm \frac{2m\pi}{\tau_o}$

Definint l'amplada de banda com la amplada total del pic central, que es defineix com la distància entre els zeros per  $\pi$  i  $-\pi$ , obtenim

$$\Delta\Omega = \Omega_1 - \Omega_{-1} = \frac{4\pi}{\tau_o}$$

Amb aquesta definició, obtenim  $TBP = \tau_o \cdot \Delta\Omega = 4\pi$

Una altra definició possible per a la amplada de banda és utilitzar el FWHM.

Com que la funció  $\text{sinc}^2(x) = 1/2$  per  $x = 0.443\pi$ , obtenim  $\Delta x_{FWHM} = 0.886\pi$

$$\text{En el nostre cas, } \Delta\Omega_{FWHM} = \frac{2 \cdot 0.886\pi}{\tau_o} = \frac{1.772\pi}{\tau_o}$$

i  $TBP = \tau_o \cdot \Delta\Omega_{FWHM} = 1.77\pi$



### Problema 5.8

Un sistema làser femtosegon emet un tren de polsos a una freqüència de repetició de  $f_{rep} = 10 \text{ KHz}$ . La potència mitjana emesa per aquest làser es mesura amb un detector lent, amb un valor de  $P_{av} = 500 \text{ mW}$ . Es pot considerar que cada pols té un perfil de feix gaussià amb una durada de pols ( $1/e$  en amplitud) de  $\tau_0 = 50 \text{ fs}$ .

a) Calcula l'energia per pols.

b) El perfil espacial del feix és de tipus top-hat, amb una distribució d'intensitat espacial constant sobre un radi  $w_0 = 1 \text{ mm}$ . Obteniu l'expressió per a la potència instantània  $P(t)$  i la potència màxima per pols.

c) Calcula la intensitat màxima dels polsos emesos per aquest làser.

### Solució

a) Per calcular l'energia per pols, considerem que la potència mitjana mesura l'energia equivalent emesa per una font contínua (CW) en 1 segon. Donat que aquesta energia ha de distribuir-se entre el nombre de polsos determinat per la freqüència de repetició, l'energia per pols s'obté per la relació:

$$E_{pulse} = \frac{P_{av}}{f_{rep}} = 50 \text{ } \mu\text{J/pulse}$$

b) Com que el feix té una dependència temporal gaussiana i una distribució espacial constant, podem escriure una expressió per a la intensitat (distribució d'energia per unitat d'àrea i temps) com una funció de la posició i el temps:

$$I(r,t) = \begin{cases} I_0 e^{-\frac{2t^2}{\tau_0^2}} & \text{for } r \leq w_0 \\ 0 & \text{for } r > w_0 \end{cases}$$

La potència instantània s'obté directament de la distribució d'intensitat:

$$P(t) = \int_0^{\infty} I(r,t) 2\pi r dr = \int_0^{w_0} I_0 e^{-\frac{2t^2}{\tau_0^2}} 2\pi r dr = I_0 \pi w_0^2 e^{-\frac{2t^2}{\tau_0^2}}$$

La potència màxima correspon al seu valor màxim:  $P_0 = \pi w_0^2 I_0$ .

c) La integració temporal de la funció de potència instantània dóna l'energia total per pols:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} P(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \pi w_0^2 I_0 e^{-\frac{2t^2}{\tau_0^2}} dt = \pi w_0^2 I_0 \frac{\tau_0 \sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}$$



on fem servir la integral gaussiana  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha t^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$ .

La intensitat màxima es pot obtenir a partir d'aquesta expressió:

$$I_o = \frac{E\sqrt{2}}{\pi^{3/2}w_o^2\tau_o} = 2.54 \cdot 10^{14} \text{ W / m}^2 = 25.4 \text{ GW / cm}^2$$

Utilitzant aquest valor, podem calcular la potència màxima per pols mitjançant la relació:  $P_o = \pi w_o^2 I_o = 0.798 \text{ GW}$ .

## 5.6 Problemes plantejats

**P5.1** Una font de làser emet polsos gaussians limitats per transformada de Fourier amb una durada de pols de 50 fs ( $1/e$  d'amplitud) a una longitud d'ona de  $\lambda = 800$  nm. Aquestes polsos es propaguen a través d'un cristall SBN de 2 cm de longitud. El coeficient GVD d'aquest cristall per 800 nm és  $g = 439 \text{ fs}^2/\text{mm}$ .

- Obtingueu l'amplada espectral  $\Delta\Omega$  i  $\Delta\lambda$  del pols que entra al cristall.
- Calculeu la durada del pols i el coeficient de xirp a la sortida del cristall.

**P5.2** Un pols gaussià, amb una durada de pols inicial  $\tau_o = 100$  fs i una longitud d'ona de 800 nm, es propaga a través de sílice fosa (*fused silica*).

- Si el pols inicialment està limitat per transformada de Fourier, trobeu la durada del pols i el coeficient de xirp  $C$  després d'una distància de  $z_1 = 5$  mm,  $z_2 = 05$  cm i  $z_3 = 5$  m.
- Obtingueu l'espectre del pols.
- Calculeu el TBP per les distàncies especificades a l'apartat a).

**P5.3** Un pols sense xirp amb longitud d'ona central de 1.550 nm i durada de 10 ps es transmet a través d'una fibra òptica de sílice fosa.

- Determineu el coeficient de dispersió de la velocitat de grup i la longitud de dispersió de la velocitat de grup (utilitzeu l'equació de Sellmeier del problema S5.1).
- Determineu la durada del pols i el paràmetre de xirp a una distància  $L = 100$  km.
- Si es vol tornar comprimir el pols fins a l'amplada original de 10 ps utilitzant una altra fibra feta d'un material amb dispersió normal i un coeficient de dispersió de la



velocitat de grup de  $g = 127,45 \text{ fs}^2/\text{mm}$ , determineu la longitud de la fibra que s'ha d'utilitzar.

**P5.4** Un pols gaussià es propaga a través d'un medi dispersiu amb xirp inicial  $\alpha$ . El signe del producte del coeficient de GVD i el xirp inicial és negatiu ( $\text{sign}(g \cdot \alpha) < 0$ ), indicant que el pols es comprimirà inicialment. Si coneixem la distància per la qual la durada del pols serà mínima i el valor de la durada de pols mínima, completeu el següent.

- Determineu el valor del coeficient de xirp del pols a l'entrada al cristall.
- Calculeu la durada de pols i l'amplada espectral a l'entrada al cristall.

**P5.5** Un pols gaussià amb una durada de pols de  $1/e$  en amplitud  $\tau_0$  i amb fase inicial zero es propaga per un medi amb coeficient de GVD  $g$ . Obtingueu l'expressió de l'amplitud temporal del pols i la intensitat a una distància  $z$  utilitzant el formalisme de la funció de resposta de pols, tal i com es defineix a l'equació [5.16].

**P5.6** El camp elèctric d'un pols gaussià limitat per transformada de Fourier es descriu per l'expressió  $E_o^{(+)}(t) = E_o e^{-\frac{t^2}{\tau_o^2}}$ .

- Expressa el camp elèctric  $E_o^{(+)}(t)$ , la intensitat  $I(t)$  i l'amplitud espectral  $\tilde{E}_o^{(+)}(\Omega)$  en termes de la durada del pols a amplada màxima i mitja alçada en intensitat  $\tau$ .
- Calculeu el TBP d'aquest pols, expressat en termes de la durada del pols a amplada màxima a mitja alçada (FWHM) i de l'amplada de banda espectral a FWHM.

**P5.7** Calculeu la durada del pols (expressada com a FWHM en intensitat) i l'amplada de banda espectral de freqüència (a FWHM), associades als polsos que tenen una amplada de banda espectral angular (a FWHM) de  $\Delta\lambda = 5nm, \Delta\lambda = 30nm$  i  $\Delta\lambda = 100nm$

**P5.8** Un sistema làser femtosegons emet un tren de polsos a una freqüència de repeticó de  $f_{rep} = 76 \text{ MHz}$ . La potència mitjana emesa per aquest làser es mesura amb un detector lent, amb un valor de  $P_{av} = 1,6 \text{ W}$ . Es pot considerar que cada pols individual té un perfil de feix gaussià amb una durada de pols ( $1/e$  en amplitud) de  $\tau_o = 110 \text{ fs}$ .

- Calculeu l'energia per pols.
- El perfil espacial del feix és gaussià, amb un radi ( $1/e$  en amplitud) de  $w_o = 1 \text{ mm}$ . Considerem que aquest radi de feix es manté constant per tota la durada del pols



(aquesta suposició implica que l'abast espacial del nostre pols al llarg de l'eix de propagació és molt més curt que la distància de Rayleigh associada a les dimensions transversals del feix gaussià). Obteniu l'expressió per a la potència instantània  $P(t)$  i la potència màxima per pols.

c) Calculeu la intensitat màxima dels polsos emesos per aquest làser.

## Fenòmens bàsics de difracció

### Introducció

Les solucions més bàsiques de l'equació d'ona, és a dir, les ones planes i les ones esfèriques, són representacions matemàtiques que rarament trobem en feixos òptics reals. Això es deu al propi caràcter multiemissor de radiació òptica de les fonts de llum reals. D'aquesta manera, els fronts d'ona òptics es modifiquen en propagar-se per medis no homogenis, o per reflexió damunt de superfícies que no són perfectament planes i reflectores, o per molts altres fenòmens. La propagació d'aquests fronts d'ona òptics per l'espai lliure els modifica encara més i d'una manera que no és trivial. Per controlar els feixos òptics en qualsevol dispositiu aplicat, és fonamental entendre com es propaga el feix a través del sistema òptic. En algunes situacions, el fet d'abordar aquesta tasca des de la perspectiva de l'òptica geomètrica pot resultar un eina eficaç per dur-la a terme. No obstant això, en la majoria de situacions, ens caldrà un tractament més rigorós. Els fronts d'ona més complexos es poden obtenir per superposició coherent d'ones monocromàtiques planes i l'estudi d'aquests fenòmens és la base de l'òptica de Fourier. En aquest capítol, considerarem amb més detall els efectes de la superposició d'ones planes monocromàtiques (i també de les ondícules, tal i com veurem), donant lloc així a solucions de feix localitzades transversalment a la direcció de propagació. L'efecte físic bàsic que provoca canvis en els fronts d'ona òptics durant la propagació s'anomena **difracció**.

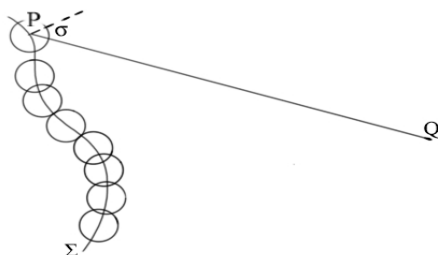
La difracció consisteix a estudiar l'evolució dels fronts d'ona òptics espacials en sistemes òptics genèrics, imposant així unes limitacions sobre la resolució final d'aquests sistemes. En aquest capítol, introduïrem els conceptes bàsics de la teoria escalar de la difracció amb les aproximacions de Fresnel i Fraunhofer.

El procés de difracció es pot estudiar des de dues perspectives diferents i per tant disposem de dues formulacions diferents, que veurem a continuació.



## 1. Equacions integrals de Kirchhoff-Rayleigh-Sommerfeld de la propagació de feixos òptics

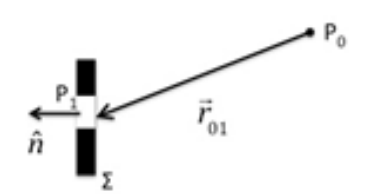
El postulat bàsic és el **principi de superposició de Fresnel**: cada punt d'un front d'ona òptic en un instant concret del temps actua com a font secundària d'un front d'ona esfèric amb la mateixa freqüència (ondícula). L'amplitud del camp òptic per qualsevol punt situat després del front d'ona serà el resultat de la superposició de totes les ondícules prèvies tenint en compte la seva amplitud i les seves fases relatives.



$$E_Q = \int_{\Sigma} E_P \frac{e^{ikR}}{R} K(\sigma) dS$$

El terme  $K(\sigma)$  s'anomena factor d'obliquïtat i té en compte la propagació per un angle determinat.

La teoria general basada en aquest principi ve donada per la teoria escalar de la difracció, elaborada per Kirchhoff, Rayleigh i Sommerfeld. El resultat principal d'aquesta teoria proporciona la perturbació òptica en un punt determinat de l'espai,  $P_0$ , que és causada per la distribució òptica en un pla anterior  $E(P_1) = U(P_1)\exp(-i\omega t)$ :



$$U(P_0) = \frac{1}{i\lambda_m} \iint_{\Sigma} U(P_1) \frac{\exp(ikr_{01})}{r_{01}} \cos(\hat{n} \cdot \hat{r}_{01}) dS \quad [6.1]$$

on  $\lambda_m$  és la longitud d'ona en el medi i les diferents direccions s'expliquen a la figura. Aquesta expressió és la formulació matemàtica del teorema de Fresnel.

## 2. Representació de l'espectre angular

Una forma alternativa d'estudiar els efectes de la difracció és la de representar l'espectre angular mitjançant l'expansió d'ona plana dels camps òptics i el concepte de freqüència espacial.



Aquest enfocament és molt similar a l'adoptat en el tractament de la propagació de polsos òptics. Per tant, és més adequat per a aquest curs. Les seccions posteriors a aquest capítol aprofundiran en la formulació d'aquests conceptes. La nostra intenció és la d'introduir els conceptes bàsics de la teoria de la difracció i de l'òptica de Fourier (podreu trobar una elaboració més detallada sobre aquest tema al llibre Goodman, J.W. (1998). *Introduction to Fourier Optics*. McGraw-Hill).

## 6.1 Representació de l'espectre angular dels feixos òptics

Tal i com hem vist al capítol 2, l'equació bàsica que regeix la propagació d'un feix òptic monocromàtic en medis isòtrops és l'equació de Helmholtz:

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge \vec{E} - k^2 \vec{E} = 0 \quad \xrightarrow{\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0} \quad \nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0 \quad [6.2]$$

Observem la propagació d'un feix òptic monocromàtic al llarg d'una direcció determinada, que considerarem com l'eix OZ. Suposant que la pertorbació lluminosa és generada per fonts situades a la regió espacial  $z < 0$ , volem determinar l'evolució del front d'ona òptic en el semiespai  $z > 0$ . En particular, determinarem la relació entre els perfils del feix per diferents plans  $z$ .

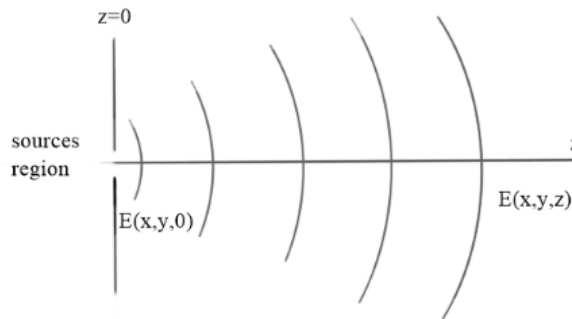


Figura 6.1 Propagació del camp per la regió  $z > 0$

La representació de l'espectre angular es basa en una descomposició de la pertorbació lluminosa en un pla  $z$  determinat en termes d'ones planes. Per trobar aquesta relació, suposem que el nostre feix òptic permet una descomposició de Fourier en 2D en el pla transversal:

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}, t) &= \hat{e} E(x, y, z) e^{-i\omega t} \\ E(x, y, z) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}(f_x, f_y, z) e^{i2\pi(f_x x + f_y y)} df_x df_y \end{aligned} \quad [6.3]$$

on  $f_x$  i  $f_y$  són les freqüències espacials associades al camp.



(!) Per tal de simplificar la notació, ometrem en aquest capítol el superíndex (+) en els camps que indiquen la representació complexa; tampoc tindrem en compte els efectes de polarització. En la resta d'aquest capítol, ens referirem només a la dependència espacial de l'amplitud  $E(x,y,z)$ , suposant que el camp total es pot expressar directament a partir d'ella com  $\vec{E}(\vec{r},t) = \hat{e}E(x,y,z)e^{-i\omega t}$

Substituint directament l'expressió [6.3] en l'equació de Helmholtz [6.2] obtenim

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{\partial^2 \tilde{E}(f_x, f_y; z)}{\partial z^2} - (2\pi)^2 (f_x^2 + f_y^2) \tilde{E}(f_x, f_y; z) + k^2 \tilde{E}(f_x, f_y; z) \right] e^{i2\pi(f_x x + f_y y)} df_x df_y = 0$$

Aquesta relació es compleix per a qualsevol distribució de camp arbitrària si el terme entre claudàtors desapareix. Escrivim aquesta relació de la següent manera

$$\frac{\partial^2 \tilde{E}(f_x, f_y, z)}{\partial z^2} + w^2 \tilde{E}(f_x, f_y, z) = 0 \quad [6.4A]$$

amb  $w^2 = k^2 - (2\pi)^2 (f_x^2 + f_y^2)$ .

El valor de  $w$  pot ser real o complex, en funció dels valors de les seves freqüències espacials:

$$w = \begin{cases} \sqrt{k^2 - (2\pi)^2 (f_x^2 + f_y^2)} & \rightarrow (f_x^2 + f_y^2) \leq \left(\frac{k}{2\pi}\right)^2 \\ i\sqrt{(2\pi)^2 (f_x^2 + f_y^2) - k^2} & \rightarrow (f_x^2 + f_y^2) > \left(\frac{k}{2\pi}\right)^2 \end{cases} \quad [6.4B]$$

La solució general de l'equació [6.4A] és

$$\tilde{E}(f_x, f_y, z) = a(f_x, f_y) e^{iwz} + b(f_x, f_y) e^{-iwz}$$

Per tal de representar solucions físiques del camp, hem de tenir en compte la geometria del nostre problema. Si busquem solucions que siguin vàlides per tot el pla semiinfinit  $z > 0$  (propagant-se cap a la dreta), aleshores  $b(f_x, f_y) = 0$  (ja que, per  $z > 0$ , el terme exponencial augmentaria exponencialment quan  $w$  es tornés imaginari). En canvi, per a solucions vàlides que es propaguen cap a l'esquerra en el pla semiinfinit  $z > 0$  (en aquest cas, hauríem de tenir en compte les fonts situades a  $z > 0$ ), necessitarem  $a(f_x, f_y) = 0$ . La solució completa correspondria a una radiació confinada entre dos plans on hi tenim una superposició de llum que es propaga en direccions oposades.



Prendrem en consideració les solucions que es propaguen en el pla semiinfinit  $z > 0$  i, per tant,  $b(f_x, f_y) = 0$ . Després d'escriure  $w$  de forma lleugerament diferent, tenim

$$w = 2\pi m \rightarrow m = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{\lambda_m^2} - (f_x^2 + f_y^2)} \rightarrow (f_x^2 + f_y^2) \leq \frac{1}{\lambda_m^2} \\ i \sqrt{(f_x^2 + f_y^2) - \frac{1}{\lambda_m^2}} \rightarrow (f_x^2 + f_y^2) > \frac{1}{\lambda_m^2} \end{cases} \quad [6.4C]$$

Obtenim una solució per al camp propagat com:

$$E(x, y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}(f_x, f_y, z) e^{i2\pi(f_x x + f_y y)} df_x df_y = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} a(f_x, f_y) e^{i2\pi m z} e^{i2\pi(f_x x + f_y y)} df_x df_y \quad [6.5]$$

L'expressió es pot invertir per obtenir, per  $z = 0$ ,

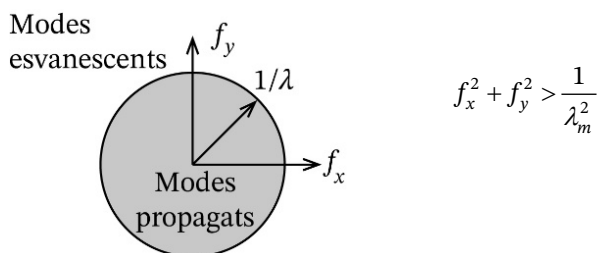
$$a(f_x, f_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E(x, y, 0) e^{-i2\pi(f_x x + f_y y)} dx dy = \tilde{E}(f_x, f_y, 0) \quad [6.6]$$

A partir d'aquesta expressió, podem veure que  $a(f_x, f_y)$  representa la transformada de Fourier 2D del camp de llum per  $z = 0$  i que, en conseqüència, inclou la informació dels components de freqüència espacial que inicialment estaven presents en el nostre feix (l'espectre angular espacial inicial del camp de llum).

Per tant, l'efecte de la propagació queda expressat en el factor exponencial  $\exp(i2\pi m z)$ . Aquest factor disminueix exponencialment per a freqüències suficientment altes quan  $(f_x^2 + f_y^2) > (1/\lambda^2)$ . Aquestes freqüències s'anomenen **modos evanescents** i no contribuiran al camp per  $z > 0$ , representant així una pèrdua en la resolució del camp de llum original durant la seva propagació per l'espai lliure.

Per tant, podem entendre la propagació de l'espai lliure dels camps òptics de llum de la següent manera.

- Qualsevol distribució del camp de llum en un pla determinat  $z = 0$  es pot descompondre en un conjunt de components de la freqüència espacial (el seu espectre angular espacial inicial),  $a(f_x, f_y)$ .
- Cada component de la freqüència espacial que es propaga evoluciona segons l'equació [6.4A], adoptant una fase  $\exp(i2\pi m z)$ , que augmenta amb la distància de propagació. Aquesta fase és diferent per a cada freqüència espacial, de manera que els diferents components es desfasaran durant la propagació, donant lloc així a un eixamplament transversal del perfil inicial, que anomenem difracció.
- Les freqüències més altes es redueixen exponencialment i no contribueixen a la formació del nou front d'ona, cosa que condueix a una pèrdua de resolució. Les freqüències evanescents són les que compleixen la relació



La conseqüència d'aquest límit és que no podem propagar per l'espai lliure els detalls de qualsevol imatge més petita que la longitud d'ona a distàncies més grans que la pròpia longitud d'ona. La propagació per l'espai lliure es comporta com un filtre pas-sabaix de freqüències espacials.

◆ **Nota**

Les tècniques de generació d'imatges a distàncies no més grans que unes poques longituds d'ona ens permeten de obtenir imatges a resolucions de pocs nanòmetres, que estan molt més enllà del límit de difracció, ja que poden captar la informació dels modes evanescents en capturar la imatge. Això constitueix la base de l'òptica de camp proper, un camp de recerca molt actiu dins de la fotònica.

La propagació del camp de llum també es pot formular com una funció de resposta a l'impulsional (o un propagador de camp) si inserim la relació [6.6] a [6.5]:

$$E(x, y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E(x', y', 0) e^{-i2\pi(f_x x' + f_y y')} dx' dy' \right\} e^{i2\pi(f_x x + f_y y + m z)} df_x df_y$$

Invertint l'ordre d'integració:

$$E(x, y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E(x', y', 0) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i2\pi m z} e^{i2\pi(f_x(x-x') + f_y(y-y'))} df_x df_y \right\} dx' dy' \tag{6.7}$$

$$E(x, y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(x-x', y-y', z) E(x', y', 0) dx' dy'$$

La **funció de resposta impulsional** de la propagació per l'espai lliure es defineix com

$$h(x, y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i2\pi m z} e^{i2\pi(f_x x + f_y y)} df_x df_y \tag{6.8}$$



### 6.1.1 La representació angular com a superposició d'ones planes

Hem formulat el problema de la difracció tenint en compte les freqüències espacials, el significat físic de les quals tractarem en una secció posterior. El mateix problema es podria abordar com una superposició d'un conjunt d'ones planes.

Preneu una ona plana amb amplitud unitària que es propaga en una direcció arbitrària; el seu vector d'ona s'indica amb un vector unitari expressat en termes dels cosinus directors:

$$\hat{u} = (\cos\alpha\hat{i} + \cos\beta\hat{j} + \cos\gamma\hat{k})$$

on  $\alpha$ ,  $\beta$  i  $\gamma$  són els angles entre  $\hat{u}$  i els eixos OX, OY i OZ, respectivament.

Com que aquest vector és unitari,  $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ .

L'ona plana es pot escriure com

$$U = e^{i\vec{k}\vec{r}} = e^{ik(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)} = e^{i2\pi\left(\frac{\cos\alpha}{\lambda_m}x + \frac{\cos\beta}{\lambda_m}y\right)} e^{i\frac{2\pi}{\lambda_m}\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta}z} \quad [6.9]$$

En identificar les freqüències espacials  $f_x$  i  $f_y$  amb

$$f_x = \cos\alpha / \lambda_m \quad i \quad f_y = \cos\beta / \lambda_m \quad [6.10]$$

l'últim terme de l'expressió es pot reescriure com

$$\frac{2\pi}{\lambda_m}\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta}z = \frac{2\pi}{\lambda_m}\sqrt{1-(\lambda_m f_x)^2 - (\lambda_m f_y)^2}z = 2\pi\sqrt{\frac{1}{\lambda_m^2} - f_x^2 - f_y^2}z = 2\pi mz$$

Amb aquestes relacions, podem interpretar l'equació [6.5] en termes d'ones planes. El camp elèctric en el pla  $z$  es pot considerar format per una superposició d'ones planes amb amplituds  $a(f_x, f_y)$ . Cada freqüència espacial es relaciona amb un angle de propagació particular a través de l'expressió [6.10].

D'acord amb això, el camp propagat a  $z$ , donat per l'equació [6.5], es pot interpretar com una superposició d'ones planes formant angles  $\alpha$  i  $\beta$  respecte dels eixos OX i OY, respectivament. Les freqüències propagades són aquelles en què  $m$  té un valor real i l'amplitud de cada ona plana és proporcional a la transformada de Fourier del camp per  $z = 0$ ,  $a(f_x, f_y)$ . L'expressió [6.5] es pot escriure en funció d'aquests angles de propagació:

$$E(x, y, z) = \iint \frac{1}{\lambda_m^2} a(\cos\alpha / \lambda_m, \cos\beta / \lambda_m) e^{i2\pi mz} e^{ik(\cos\alpha x + \cos\beta y)} d\cos\alpha d\cos\beta \quad [6.11]$$

Aquesta expressió correspon a la **representació de l'espectre angular** del camp de llum.



## 6.2 El concepte de freqüència espacial

De la mateixa manera que podem pensar que un pols òptic està format per una superposició de diferents freqüències temporals, qualsevol distribució de llum en un pla determinat es pot entendre com una superposició de diferents freqüències espacials. Una freqüència espacial  $f_x$  es pot associar a un patró amb amplitud  $\cos(2\pi f_x x)$  i, per tant, amb periodicitat espacial  $\Lambda_x = 1/f_x$ . Així, les freqüències espacials més altes s'associen a períodes més petits.

La primera qüestió que ens hem de plantejar és com relacionar aquest concepte amb la propagació d'ones planes en angles definits d'acord amb l'equació [6.10]. Podem veure aquesta correspondència de les dues maneres següents.

1. Des del primer punt de vista, podem veure com es poden obtenir diferents freqüències espacials transversals per superposició d'ones planes d'una longitud d'ona determinada  $\lambda_m$ .

Preneu dues ones planes que es propaguen pel pla  $xz$  formant angles  $+\alpha$  i  $\pi-\alpha$  respecte de l'eix  $OX$ . El camp total s'escriu com

$$E_{TOT}^{(+)} = E_o e^{i(k \cos \alpha x + \sin \alpha z)} + E_o e^{i(-k \cos \alpha x + \sin \alpha z)} = 2E_o \cos\left(2\pi \frac{\cos \alpha}{\lambda_m} x\right) e^{ik \sin \alpha z}$$

La superposició d'aquestes dues ones genera un patró periòdic de  $f_x = \cos \alpha / \lambda_m$ , que correspon a la freqüència prèviament definida. El període més petit que es pot obtenir amb aquestes ones es correspon al cas  $\alpha = 0$ , on les dues ones generen, en contrapropagar-se, un patró amb període  $f_{x \max} = 1 / \Lambda_{\min} = 1 / \lambda_m$ .

D'aquesta manera, cada freqüència espacial es pot relacionar amb un angle de propagació concret de l'ona plana.

2. Des del segon punt de vista, volem destacar el fet que un patró periòdic determinat pot generar l'emissió d'un parell d'ones planes amb angles de propagació ben definits segons la relació [6.10]. Si prenem una diapositiva amb funció de transmissió  $T = \cos(2\pi f_x x)$  que es troba il·luminada per una ona plana de longitud d'ona  $\lambda_m$ , el camp transmès consistirà en una superposició de dues ones emeses en angles  $\alpha$  i  $\pi-\alpha$ , com veurem a les properes seccions.

Qualsevol objecte amb una transmissió arbitrària es pot obtenir com a superposició de patrons de cosinus periòdics amb freqüències diferents. D'acord amb aquesta idea, el camp transmès resultant es pot entendre que s'ha format per una superposició d'ones planes. Els detalls de la figura estan relacionats amb les freqüències grans, tal com es representa esquemàticament a la fotografia següent, que mostra la imatge original i algunes imatges filtrades corresponents a freqüències baixes i altes.

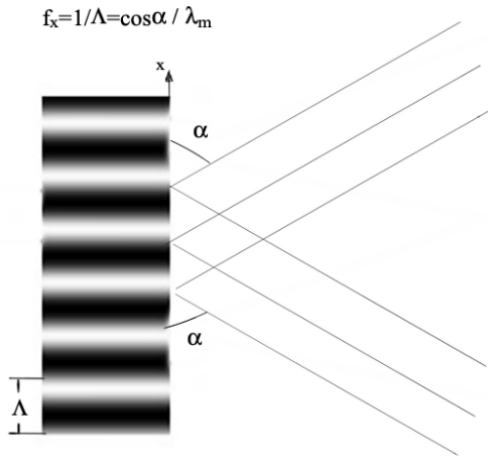


Figura 6.2 Relació entre la freqüència espacial i l'angle de propagació de l'ona plana representada

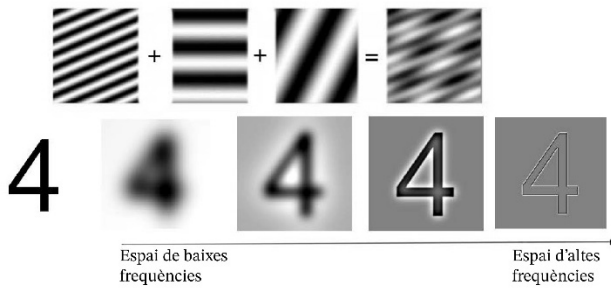


Figura 6.3 Contingut de freqüència d'una imatge

### 6.3 La connexió entre la representació de l'espectre angular i la teoria escalar de la difracció de Rayleigh-Sommerfeld

Per tal de trobar la relació entre la representació de l'espectre angular (superposició d'ones planes) i la teoria de Rayleigh-Sommerfeld (superposició d'ondícules esfèriques), comencem amb la representació de l'espectre angular d'una ona esfèrica sortint, que presentem aquí sense cap demostració:

$$\frac{e^{ikr}}{r} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i}{m} e^{i2\pi mz} e^{i2\pi(f_x x + f_y y)} df_x df_y \quad [6.12]$$

La derivació parcial respecte de  $z$  ens dona



$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{e^{ikr}}{r} \right) = -2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \int e^{i2\pi mz} e^{i2\pi(f_x x + f_y y)} df_x df_y = -2\pi h(x, y, z)$$

La funció de resposta a l'impuls es pot escriure com

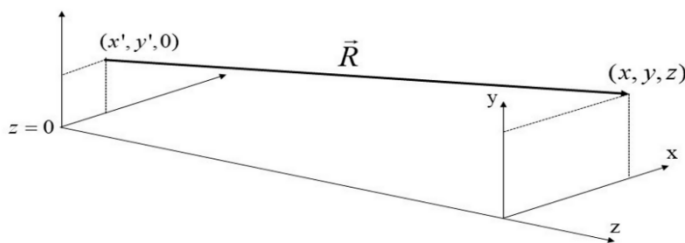
$$h(x, y, z) = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{e^{ikr}}{r} \right) = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{e^{ikr}}{r} \right] \frac{\partial r}{\partial z}$$

amb  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .

Després de derivar s'obté:

$$h(x, y, z) = -\frac{1}{2\pi} \left[ ik - \frac{1}{r} \right] \frac{z e^{ikr}}{r} \tag{6.13}$$

Per tal d'utilitzar aquesta expressió a [6.7] per obtenir  $E(x, y, z)$ , cal utilitzar la funció desplaçada  $h(x-x', y-y', z)$ , on les coordenades  $(x', y')$  corresponen a punts del pla  $z = 0$  i  $(x, y)$  a punts del pla d'observació.



amb  $R = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2}$ .

Obtenim l'expressió per a la funció de resposta impulsional:

$$h(x-x', y-y', z) = -\frac{1}{2\pi} \left[ ik - \frac{1}{R} \right] \frac{z e^{ikR}}{R}$$

Amb aquesta expressió, obtenim la relació general:

$$E(x, y, z) = \frac{-1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int E(x', y', 0) \left[ ik - \frac{1}{R} \right] \frac{z e^{ikR}}{R} dx' dy'$$

El factor entre claudàtors es simplifica quan la distància d'observació és  $R \gg \lambda$ ,

$\left[ ik - \frac{1}{R} \right] \approx ik$ , donant lloc a la **fórmula** de difracció de **Rayleigh-Sommerfeld**:



$$E(x, y, z) = \frac{1}{i\lambda} \int \int_{-\infty}^{\infty} E(x', y', 0) \frac{z}{R} \frac{e^{ikR}}{R} dx' dy' \quad [6.14]$$

Aquesta expressió correspon a la formulació matemàtica del principi de superposició de Fresnel. El camp propagat a  $z$  es pot obtenir a partir de la distribució de camps per  $z = 0$ . Aquesta formulació és vàlida en l'aproximació escalar i es pot simplificar amb subjecció a alguns supòsits que condueixen a la teoria de la difracció segons les aproximacions de Fresnel i Fraunhofer. Aquesta formulació es desenvoluparà més endavant a la secció següent.

## 6.4 Teoria de la difracció en l'aproximació de Fresnel i Fraunhofer

En aquesta secció, considerarem la difracció a partir d'una obertura finita (o esclatxa) de mida característica  $\Sigma$  i il·luminada per llum monocromàtica. La transmissió des de l'obertura, situada a  $z = 0$ , ve donada per

$$E(x', y', 0) = E_{inc}(x', y', 0) \cdot t(x', y') = E_{inc}(x', y', 0) |t(x', y')| e^{i\phi(x', y')} \quad [6.15]$$

on  $t(x', y')$  és la funció de transmitància de la pantalla (o diapositiva) i  $E_{inc}(x', y', 0)$  és el camp incident a la diapositiva, que pot representar variacions en amplitud o fase. Per a pantalles opaques, suposem que la funció de transmitància pren valors 1 quan la llum es transmet i 0 quan la pantalla l'atura.

Considerem els efectes de difracció a la regió paraxial, on es compleixen les condicions següents.

- El pla d'observació es situa a distàncies  $z > \Sigma$ .
- La regió d'observació d'interès en el pla  $z$  és propera a l'origen ( $x = 0; y = 0$ ).

En aquestes condicions,  $R$  es pot desenvolupar com

$$\begin{aligned} R &= z \sqrt{1 + \frac{(x-x')^2 + (y-y')^2}{z^2}} \approx \\ &\approx z \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{(x-x')^2 + (y-y')^2}{z^2} - \frac{1}{8} \left[ \frac{(x-x')^2 + (y-y')^2}{z^2} \right]^2 + \dots \right) \end{aligned}$$

Segons l'aproximació de Fresnel, conservem termes fins al primer ordre per a les distàncies  $R \approx z$  i fins al segon ordre per als termes de fase. La funció de resposta a l'impuls es pot simplificar en

$$h(x-x', y-y', z) = \frac{1}{i\lambda} \frac{z}{R} \frac{e^{ikR}}{R} \approx \frac{1}{i\lambda} \frac{e^{ikz}}{z} e^{ik \left[ \frac{(x-x')^2 + (y-y')^2}{2z} \right]}$$



Amb aquesta aproximació, obtenim de [6.14]:

$$E(x, y, z) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} \int_{-\infty}^{\infty} \int E(x', y', 0) e^{i\frac{k}{2z}[(x-x')^2 + (y-y')^2]} dx' dy'$$

Reescrit després de desenvolupar els termes dins dels claudàtors per donar la **fórmula de la difracció** de Fresnel, tenim

$$E(x, y, z) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{i\frac{k}{2z}(x^2 + y^2)} \int_{-\infty}^{\infty} \int E(x', y', 0) e^{i\frac{k}{2z}(x'^2 + y'^2)} e^{-i\frac{k}{z}(xx' + yy')} dx' dy' \quad [6.16]$$

Aquesta és l'equació bàsica per obtenir el front d'ona propagat pel pla  $z$  d'una distribució de camp determinada per  $z = 0$  en l'aproximació de Fresnel, que s'utilitza àmpliament en òptica física. A la figura 4 es mostra un exemple de propagació de camp, on una ona plana uniforme il·lumina una pantalla amb una esclatxa d'amplada  $w$ . A distàncies properes a l'obertura, el perfil del camp canvia fortament durant la propagació. Això s'anomena regió de **camp proper**. A distàncies més grans, el pols difractat adquireix una forma de perfil constant i la seva dimensió augmenta linealment durant la propagació. Aquesta regió s'anomena **camp llunyà** o **regió Fraunhofer**.

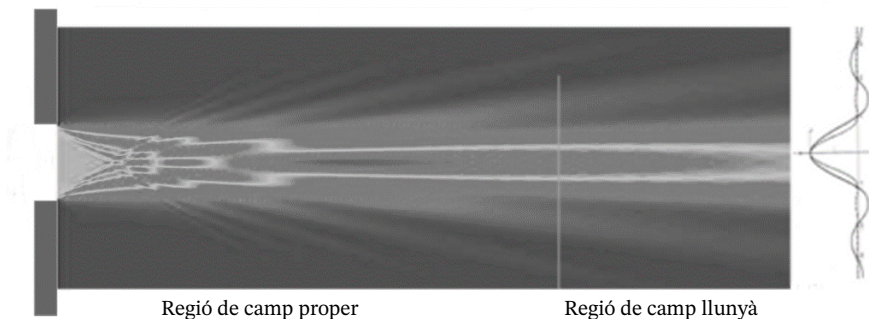


Figura 6.4 Difracció a partir d'una obertura rectangular

El patró de difracció en la regió de camp llunyà (o Fraunhofer) s'obté a partir de la fórmula de difracció de Fresnel quan s'imposa una condició addicional.

Regió Fraunhofer:  $z \gg \frac{k(x'^2 + y'^2)_{\max}}{2}$ ,

on  $(x'^2 + y'^2)_{\max}$  es refereix a l'extensió màxima de la distribució de camp inicial al pla  $z = 0$ .

En aquesta regió, el factor exponencial  $e^{i\frac{k}{2z}(x'^2 + y'^2)}$  de [6.16] es pot aproximar per 1 i es simplifica en la **fórmula de difracció de Fraunhofer**:



$$E(x, y, z) = \frac{e^{ikz} e^{i\frac{k(x^2+y^2)}{2z}}}{i\lambda z} \int_{-\infty}^{\infty} \int E(x', y', 0) e^{-i\frac{2\pi}{\lambda z}(xx'+yy')} dx' dy'$$

$$E(x, y, z) = \frac{e^{i(kz + \frac{k(x^2+y^2)}{2z})}}{i\lambda z} \tilde{E}(f_x, f_y, 0) \Big|_{f_x = \frac{x}{\lambda z}; f_y = \frac{y}{\lambda z}}$$
[6.17]

El patró de difracció a la regió Fraunhofer és proporcional a la distribució de la transformada de Fourier al pla d'obertura ( $z = 0$ ), on les freqüències espacials corresponen a la transformació  $f_x = x/\lambda z$  i  $f_y = y/\lambda z$ . Aquesta transformació significa que caldria calcular la transformada de Fourier i després substituir les corresponents freqüències espacials  $f_x$  i  $f_y$  per aquestes transformacions per tal d'obtenir el camp en funció de  $(x, y, z)$ .

► **Exemple 1:** Difracció per una obertura rectangular de dimensions  $L_x \times L_y$

Considereu una obertura rectangular de dimensions  $L_x$  i  $L_y$  il·luminada per una ona plana uniforme. La transmitància al pla  $z = 0$  es pot escriure com

$$E(x', y', 0) = \text{rect}\left(\frac{x'}{L_x}\right) \cdot \text{rect}\left(\frac{y'}{L_y}\right)$$

amb

$$\text{rect}\left(\frac{x}{L_x}\right) = \begin{cases} 1 & |x| \leq \frac{L_x}{2} \\ 0 & |x| > \frac{L_x}{2} \end{cases}$$

Per obtenir el patró de difracció de Fraunhofer [6.17], calclem la transformada de Fourier:

$$\begin{aligned} \tilde{E}(f_x, f_y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int \text{rect}\left(\frac{x'}{L_x}\right) \text{rect}\left(\frac{y'}{L_y}\right) e^{-i2\pi(f_x x' + f_y y')} dx' dy' = \\ &= \int_{-L_x/2}^{L_x/2} e^{-i2\pi f_x x'} dx' \int_{-L_y/2}^{L_y/2} e^{-i2\pi f_y y'} dy' \end{aligned}$$

Avaluació de les integrals:

$$\tilde{E}(f_x, f_y) = \frac{(e^{-i\pi f_x L_x} - e^{i\pi f_x L_x})}{-i2\pi f_x} \cdot \frac{(e^{-i\pi f_y L_y} - e^{i\pi f_y L_y})}{-i2\pi f_y} = \frac{\sin(\pi f_x L_x)}{\pi f_x} \cdot \frac{\sin(\pi f_y L_y)}{\pi f_y}$$

$$\tilde{E}(f_x, f_y) = L_x L_y \text{sinc}(\pi f_x x) \text{sinc}(\pi f_y y) \quad \text{with } \text{sinc}(a) = \sin(a) / a$$

El patró de difracció de Fraunhofer:



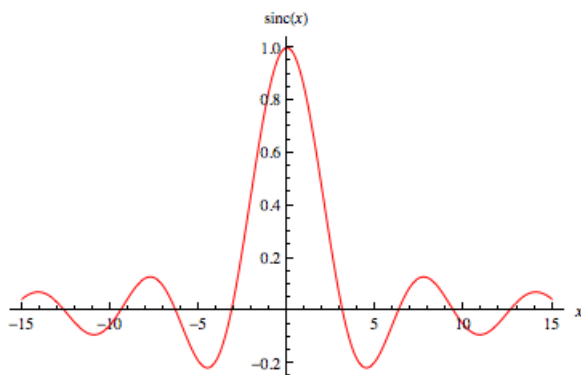
$$E(x, y, z) = \frac{e^{ikz(1 + \frac{x^2 + y^2}{2z^2})}}{i\lambda z} L_x L_y \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi L_x x}{\lambda z}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi L_y y}{\lambda z}\right)$$

i el patró d'intensitat

$$I(x, y, z) = I_o \frac{L_x^2 L_y^2}{\lambda^2 z^2} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\pi L_x x}{\lambda z}\right) \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\pi L_y y}{\lambda z}\right)$$

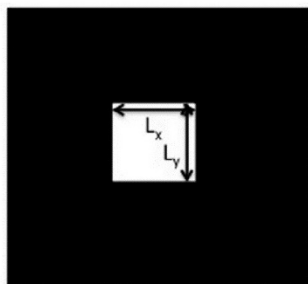
on  $I_o = (1/2)\epsilon_0 c n$  per les ones planes que il·luminen la diapositiva.

La funció  $\operatorname{sinc}(a)$  té valors zero a les posicions  $a = \pm m\pi$  amb  $m = 1, 2, 3, \dots$ , i el seu valor màxim es produeix a  $a = 0$

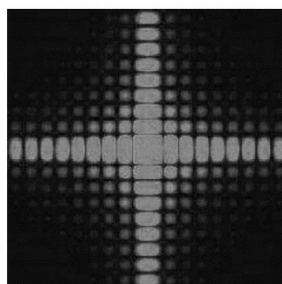


El patró d'intensitat mostra zeros a les posicions

$$x_{\text{zeros}} = m \frac{\lambda z}{L_x} \quad y_{\text{zeros}} = m \frac{\lambda z}{L_y}$$



Objecte



Patró de difracció de Fraunhofer

Figura 6.5 Patró de difracció d'una obertura rectangular



► **Exemple 2:** Difracció d'una xarxa d'amplitud sinusoidal

Per aquest exemple prenem una obertura rectangular amb una transmitància d'amplitud sinusoidal il·luminada per una ona plana. El camp al pla  $z = 0$  és

$$E(x', y', 0) = \left[ \frac{1}{2} + \frac{m}{2} \cos(2\pi f_0 x') \right] \text{rect} \frac{x'}{L_x} \text{rect} \frac{y'}{L_y}$$

que es pot escriure com el producte de dues funcions:

$$E(x', y', 0) = T(x') \cdot P(x', y')$$

on la funció  $P$  defineix la mida global de l'objecte i s'anomena funció de pupil·la. La transformada de Fourier d'aquest objecte ve donada per la convolució de les transformades de Fourier:

$$\tilde{E}(f_x, f_y) = [\tilde{T}(f_x) \otimes \tilde{P}(f_x, f_y)]$$

on

$$\tilde{T}(f_x) = \frac{1}{2} \delta(f_x) + \frac{m}{4} \delta(f_x - f_0) + \frac{m}{4} \delta(f_x + f_0)$$

$$\tilde{P}(f_x, f_y) = L_x L_y \text{sinc}(\pi f_x L_x) \text{sinc}(\pi f_y L_y)$$

Quan realitzem la convolució, obtenim la transformada de Fourier per a aquest cas:

$$\tilde{E}(f_x, f_y, 0) = \frac{L_x L_y}{2} \text{sinc}(\pi f_y L_y) \left[ \text{sinc}(\pi f_x L_x) + \frac{m}{2} \text{sinc}(\pi(f_x - f_0)L_x) + \frac{m}{2} \text{sinc}(\pi(f_x + f_0)L_x) \right]$$

També obtenim el patró de difracció de Fraunhofer:

$$E(x, y, z) = \frac{e^{ikz(1 + \frac{x^2 + y^2}{2z^2})}}{i\lambda z} \cdot \frac{L_x L_y}{2} \text{sinc}\left(\frac{\pi L_y y}{\lambda z}\right) \cdot \left\{ \text{sinc}\left(\frac{\pi L_x x}{\lambda z}\right) + \frac{m}{2} \text{sinc}\left[\frac{\pi L_x}{\lambda z}(x - f_0 \lambda z)\right] + \frac{m}{2} \text{sinc}\left[\frac{\pi L_x}{\lambda z}(x + f_0 \lambda z)\right] \right\}$$

Si la funció original es defineix sense la funció de pupil·la (amb extensió infinita), el patró de difracció de Fraunhofer mostra tres funcions delta per  $x = 0$  i  $x = \pm f_0 \lambda z$ . Aquest resultat sembla no ser físic, a causa del comportament singular d'una funció delta. No obstant això, es pot veure que quan es considera la funció de pupil·la, el patró de difracció de la funció de pupil·la apareix a la posició de les funcions delta.

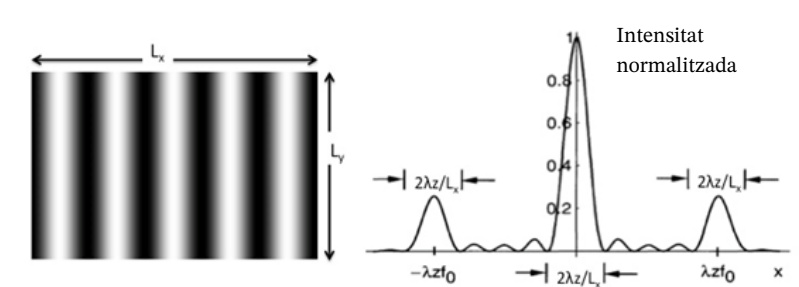


Figura 6.6 Patró de difracció d'una xarxa d'amplitud sinusoidal

## 6.5 Transformades de Fourier per lents: introducció al processament d'imatges

La fórmula de difracció de Fresnel s'aplica sempre que vulguem trobar el camp propagat a una distància determinada si es coneix el camp per  $z = 0$ , incloent la propagació a través de diferents elements òptics ara com lents o obertures. Un resultat molt important s'obté quan estudiem la propagació del camp transmès per una esclatxa de transmitància  $T(x',y')$  que està il·luminada per llum monocromàtica coherent.

Si considerem la nostra lent situada a una distància  $d'$  del pla de l'objecte ( $z = 0$ ), la distribució de camp en el pla focal posterior de la lent s'obté de la manera següent (de la qual veurem una derivació detallada a l'apèndix F del final del llibre).

$$E(x, y, d' + f) = A e^{i \frac{k}{2f} (1 - \frac{d'}{f})(x^2 + y^2)} \tilde{E}(f_x, f_y) \Big|_{f_x = x/\lambda f; f_y = y/\lambda f}$$

A partir d'aquesta expressió, veiem que **la transformada de Fourier d'un objecte es situa a la seva distància focal posterior**. A més, si l'objecte es situa a la distància focal frontal, els factors de fase s'anul·len i el camp en el pla focal és

$$E(x', y', f + f) = A \tilde{E}(f_x, f_y, 0) \Big|_{f_x = x'/\lambda f; f_y = y'/\lambda f} \tag{6.18}$$

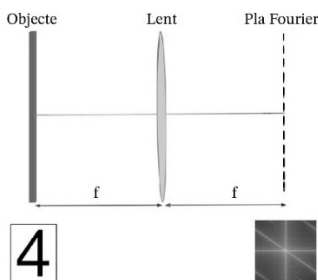


Figura 6.7 Transformada de Fourier per una lent



Aquesta propietat de les lents es pot utilitzar de moltes maneres diferents per manipular o extreure informació d'una imatge determinada introduint canvis en el seu espectre òptic.

### 6.5.1 Exemples bàsics de processament del senyal: el correlador $4f$

El correlador  $4f$  constitueix el sistema de processament de senyals més bàsic i consisteix en un conjunt de dues lents d'idèntica distància focal,  $f$ , separades per una distància de  $2f$ . El pla d'entrada es troba a una distància  $f$  a l'esquerra de la primera lent i el pla de sortida està a una distància  $f$  a la dreta de la segona lent. Podem imaginar el funcionament d'aquest sistema de la següent manera. La primera lent realitza la transformada òptica de Fourier de l'objecte situat al pla d'entrada. El pla de Fourier està situat a una distància  $f$  de la primera lent. La segona lent realitza la transformada òptica de Fourier del camp situat al pla de Fourier, que es situarà en el pla de la imatge.

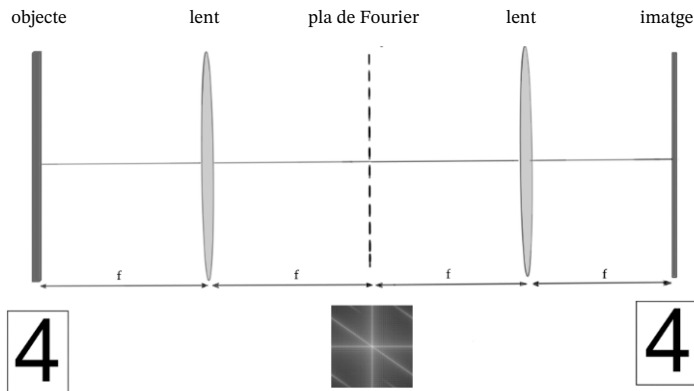


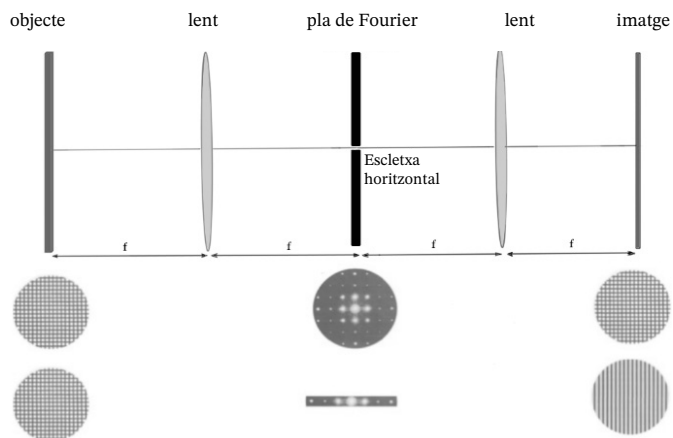
Figura 6.8 Correlador  $4f$

Actuant sobre l'espectre espacial situat en el pla de Fourier, podem modificar l'aspecte de la imatge que surt del sistema.

A continuació es mostren alguns exemples bàsics de processament de senyals.

#### 1. Filtratge espacial

Si eliminem part de l'espectre de freqüències de l'objecte col·locant unes màscares o obstacles en el pla de Fourier, la imatge reconstruïda pot manipular-se com es mostra a la figura.



El filtratge espacial és una tècnica d'ús molt estès per a l'obtenció de feixos òptics d'alta qualitat espacial. El feix làser propagat a través de sistemes òptics adquireix modulacions d'alta freqüència a causa de la presència de pols o mitjançant la difracció a través de petits obstacles, adquirint així un aspecte granular que s'anomena pigallat (*speckle*). Per a moltes aplicacions, és desitjable un feix espacial uniforme, per al qual es pot netejar el feix col·locant un diafragma circular amb el diàmetre adequat al centre del pla de Fourier del correlador  $4f$ . El diafragma bloqueja les altes freqüències, i el feix reconstruït sembla molt més homogeni, com es veu a la figura.

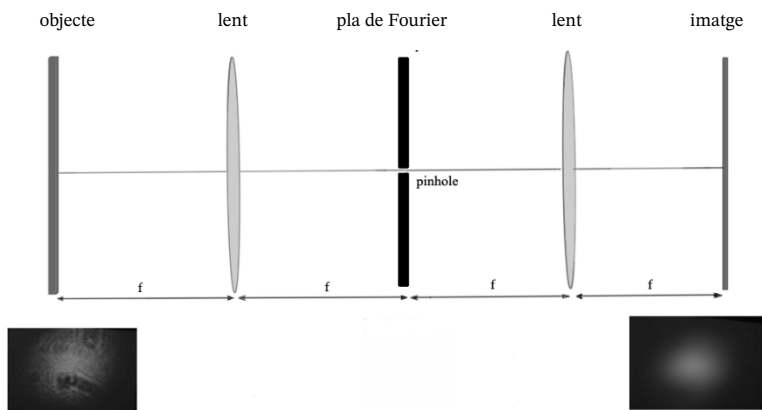


Figura 6.9 Filtratge espacial

## 2. Millora de les característiques de la imatge: microscòpia de contrast de fase

Molts objectes altament transparents tenen una funció de transmissió per a la qual l'amplitud és gairebé constant, introduint principalment variacions de fase en el camp incident. Quan aquests objectes s'observen a través d'un microscopi el contrast



és molt baix i difícilment es poden veure perquè la llum incident sobre ells es transmet principalment sense variació i una quantitat de llum molt petita es difracta a causa de les variacions de fase. Zernike va resoldre aquest problema, que prèviament impedia l'observació microscòpica dels microorganismes.

Prenem un objecte altament transparent amb una funció de transmitància que es pot expressar com  $t(x,y) = e^{i\phi(x,y)} \approx 1 + i\phi(x,y)$ .

La intensitat transmesa per l'objecte és, per tant, gairebé constant si les variacions de fase són petites:  $I \approx 1 + \phi^2(x,y) + \dots \approx 1$  i la imatge resultant mostra molt poc contrast.

La tècnica de Zernike transforma les variacions de fase en variacions d'intensitat aprofitant el concepte de processament d'imatges. En el pla de Fourier, aquest tipus d'objectes té un senyal fort a la freqüència zero i components febles a altres freqüències, donats per

$$\tilde{E}(f_x, f_y) = \delta(f_x, f_y) + FT(i\phi)$$

on  $FT$  significa transformada de Fourier. Col·locant un retardador de fase amb  $\delta = \pm\pi/2$  a la posició de freqüència zero, el camp resultant al pla de Fourier és

$$\tilde{E}_T(f_x, f_y) = i\delta(f_x, f_y) + FT(i\phi)$$

Que, després de la propagació al pla de la imatge, resulta en

$$E_{out}(x, y) = i + i\phi(x, y) \Rightarrow I_{out}(x, y) = 1 + 2\phi(x, y) + \phi^2(x, y)$$

El terme lineal que apareix a la intensitat de la imatge augmenta considerablement el contrast final de la imatge.

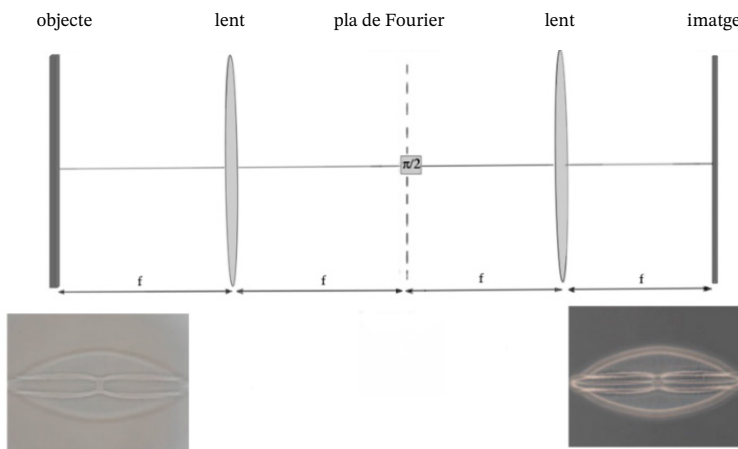


Figura 6.10 microscòpia de contrast de fases



### 3. Síntesi espectral

Col·locant màscares de transmitància al pla de Fourier, és possible realitzar tota una sèrie d'operacions sobre l'objecte de la forma:

$$I(x, y) = K \left| \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E(x', y') \cdot m(x - x', y - y') dx' dy' \right|^2 \quad [6.19]$$

on  $I(x, y)$  és la distribució d'intensitat en el pla de la imatge,  $K$  és una constant complexa,  $E(x', y')$  és la distribució de camp en el pla de l'objecte i la funció  $m(x, y)$  té en compte l'efecte de la màscara.

El principi de funcionament d'aquest procés, anomenat **síntesi espectral**, és més fàcil d'observar en el pla de Fourier.

La distribució de camp de l'objecte en el pla de Fourier ve donada per

$$K_o \tilde{E}(x / \lambda_m f, y / \lambda_m f)$$

En aquest pla també col·loquem la nostra màscara, la transmitància de la qual és proporcional a la transformada de Fourier de la funció màscara  $m(x, y)$ :

$$K_m \tilde{m}(x / \lambda_m f, y / \lambda_m f)$$

A la sortida del pla de Fourier, la distribució de camp és el producte d'aquests dos camps:

$$\tilde{E}_{\text{Fourier plane}}(x, y) = K_o K_m \tilde{E}(x / \lambda_m f, y / \lambda_m f) \tilde{m}(x / \lambda_m f, y / \lambda_m f)$$

L'efecte de la segona lent sobre aquesta distribució de camp dona com a resultat la intensitat donada per [6.19] en el pla de la imatge.

Amb aquesta idea bàsica, es poden fer diferents operacions sobre l'objecte mitjançant l'ús de la màscara adequada. Aquestes màscares es van implementar per primera vegada mitjançant l'enregistrament directe en plaques fotogràfiques (filtres de Vander Lugt) i en realitat es poden realitzar mitjançant la inserció de moduladors espacials de llum en el pla de Fourier o fins i tot directament mitjançant l'ús de màscares generades per ordinador i processament digital.

Un exemple concret d'aquestes tècniques és el reconeixement d'objectes. Si la màscara és la transformada de Fourier d'un objecte donat, aleshores l'equació [6.19] correspon a la funció de correlació creuada. Si l'objecte incident coincideix amb el que s'ha utilitzat per generar la màscara, obtenim un pic al pla de la imatge.

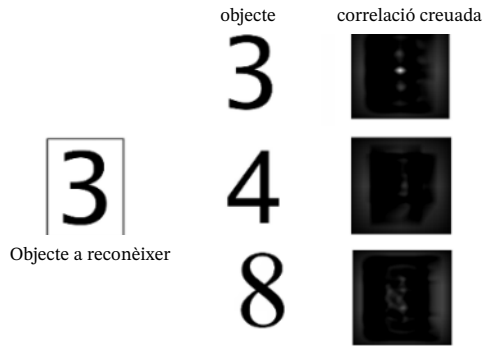


Figura 6.11 Reconeixement numèric mitjançant operació de correlació creuada

## 6.6 Límit de resolució en sistemes òptics

En les seccions prèvies a aquesta no s'ha tingut en compte la limitació de la mida de cap obertura en sistemes òptics i en aquest curs tampoc es tractarà en detall. L'efecte de l'obertura finita s'introdueix mitjançant l'ús de funcions de pupil·la.

La funció de transmitància de l'objecte es multiplica així per la funció de pupil·la i el patró de difracció corresponent en l'aproximació de Fraunhofer vindrà donat per la convolució de les transformades de Fourier de l'objecte i la funció de pupil·la:

$$E_o(x, y) = E(x, y)P(x, y)$$

Patró de difracció de Fraunhofer:  $\tilde{E}_o(x, y) = K\tilde{E}(f_x, f_y) \otimes \tilde{P}(f_x, f_y) \Big|_{f_x = x/\lambda_m z; f_y = y/\lambda_m z}$

Considerem l'exemple més simple d'una ona plana il·limitada amb una transformada de Fourier determinada per una funció delta, és a dir, un sol punt en el pla de Fourier. Quan una obertura circular de radi  $R$  bloqueja l'ona plana, el patró de difracció canvia des d'un sol punt per mostrar el patró de difracció d'una obertura circular que consisteix en una funció de Bessel (veure l'apèndix E) amb un diàmetre de disc central d' $1,22 \lambda_m f/R$ , que es sol anomenar funció d'Airy.

A l'exemple 2 d'aquest capítol, i com també s'ha explicat anteriorment a la secció 4, la funció de transmitància amb perfil sinusoidal mostra un patró de difracció de Fraunhofer format per tres funcions delta col·locades a  $x = 0$  i  $x = \pm \lambda_m z f_o$ . Quan s'afegeix la funció de pupil·la, el resultat és que la FT de la funció de pupil·la es convoluciona amb la de l'objecte i, per tant, cada funció delta és substituïda per la FT de la funció de pupil·la.

Aquest és un cas general en els sistemes òptics, on les pupil·les i els diaframes dels diferents elements donen lloc a patrons de difracció en els camps propagats, que difuminen les imatges i, per tant, causen una pèrdua de resolució. Intentem avaluar la



separació mínima entre dues fonts puntuals a una distància  $z$  d'un sistema d'imatges de diàmetre  $D$  de manera que aquestes fonts es puguin resoldre en el pla de la imatge. El criteri de resolució de dos punts establert per Lord Rayleigh s'ha utilitzat com a factor de qualitat en sistemes òptics amb fonts incoherents, particularment en aplicacions astronòmiques. El criteri de Rayleigh afirma que aquests objectes es resolent bé amb el sistema limitat per la difracció quan el centre del disc d'Airy generat per una font cau sobre el primer zero del disc d'Airy generat per la segona. Per tant, la separació mínima resoluble de les imatges geomètriques és

$$s = \frac{0.61\lambda_m z}{R} = \frac{1.22\lambda_m z}{D}$$

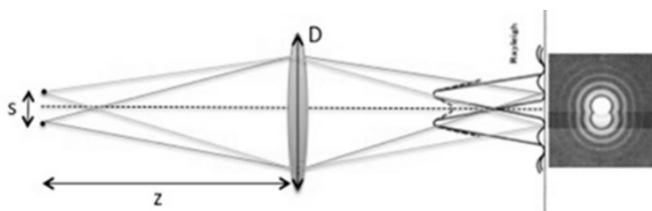


Figura 6.12 Criteri de Rayleigh separació mínima distingible entre dues fonts puntuals fotografiades per una lent de diàmetre  $D$

## 6.7 Difracció a partir d'una matriu d'elements periòdics

Per tal de definir les característiques bàsiques del patró de difracció de Fraunhofer en matrius d'elements periòdics, considereu les següents funcions i operacions bàsiques.

**La funció comb** correspon a un conjunt de funcions delta separades a intervals regulars:

$$\text{comb}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - n)$$

Per representar un conjunt de funcions delta separades per una distància  $a$ , fem servir la funció comb escalada:

$$\text{comb}(x/a) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\frac{x}{a} - n\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\frac{x - na}{a}\right)$$

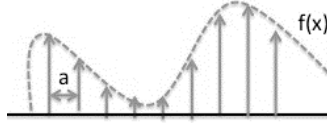
La transformada de Fourier d'una funció comb és també una funció comb:

$$FT[\text{comb}(x/a)] = a \cdot \text{comb}(f_x a)$$

1. El **mostreig** és una operació que proporciona el valor d'una funció determinada en un interval d'espai regular dins del període  $a$  (valor de la funció a les posicions  $x = na$ ):

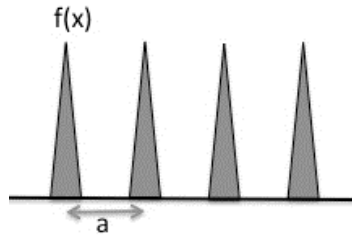


$$S(f(x), a) = \frac{1}{a} f(x) \text{comb}(x/a) = \frac{1}{a} f(x) \sum_n \delta\left(\frac{x-na}{a}\right) = \sum_n f(na)$$



2. La **repetició** dona una repetició periòdica d'una funció particular (que anomenarem funció de cel·la unitària) per les posicions  $x = na$ :

$$C(f(x), a) = \frac{1}{a} (f(x) \otimes \text{comb}(x/a)) = \sum_n f(x - na)$$



Qualsevol matriu periòdica 2D d'elements de cel·les unitàries es pot escriure de la manera següent:

$$A(x, y) = \left[ g(x, y) \otimes \frac{1}{ab} \text{comb}\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}\right) \right] \cdot P(x, y)$$

on  $g(x, y)$  és la funció de la cel·la unitària,  $a, b$  són els períodes en les direccions  $x$  i  $y$ , i  $P(x, y)$  és la funció de pupil·la, que correspon a la forma i mida total de la matriu.

El patró de difracció de Fraunhofer d'aquest objecte serà proporcional a la seva transformada de Fourier:

$$E(x, y, z) \propto \left[ \tilde{g}(f_x, f_y) \cdot \text{comb}(af_x, bf_y) \right] \otimes \tilde{P}(f_x, f_y) \Big|_{f_x=x/\lambda_m z; f_y=y/\lambda_m z}$$

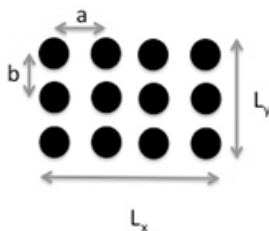
El patró de difracció consisteix en una matriu 2D d'elements periòdics amb les següents característiques.

- La periodicitat de la matriu és  $\lambda_m z/a$  i  $\lambda_m z/b$  a les direccions  $x$  i  $y$ , respectivament.
- L'element repetit és la transformada de Fourier de la funció de pupil·la.
- La intensitat de cada element és proporcional al valor de la transformada de Fourier de la funció de cel·la unitària en aquest punt concret.



- **Exemple:** El patró que es mostra a la figura està format per un conjunt d'obertures circulars de radi  $r_0$  que formen un patró rectangular de períodes espacials  $a$  i  $b$  en les direccions  $x$  i  $y$ , respectivament. La funció de pupil·la és un rectangle de mides  $L_x$  i  $L_y$ . Aquesta matriu periòdica es pot representar com

$$E(x, y, 0) = \left[ \text{circ}(r / r_0) \otimes \frac{1}{ab} \text{comb}\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}\right) \right] \text{rect}\left(\frac{x}{L_x}\right) \text{rect}\left(\frac{y}{L_y}\right)$$



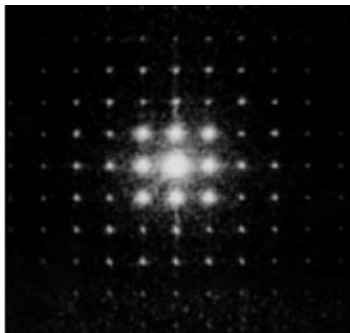
El patró de difracció de Fraunhofer:

$$E(x, y, z) = \frac{e^{ikz} e^{\frac{k}{2z}(x^2+y^2)}}{i\lambda_m z} \left[ r_0^2 \frac{J_1(2\pi r r_0 / \lambda_m z)}{r r_0 / \lambda_m z} \cdot \text{comb}(a f_x, b f_y) \right] \otimes \\ \otimes L_x L_y \text{sinc}(\pi f_x L_x) \text{sinc}(\pi f_y L_y) \Big|_{f_x=x/\lambda_m z; f_y=y/\lambda_m z}$$

que es pot escriure com

$$E(x, y, z) = K \frac{J_1(2\pi r r_0 / \lambda_m z)}{r r_0 / \lambda_m z} \cdot \sum_n \text{sinc}\left(\pi\left(\frac{x}{\lambda_m z} - \frac{n}{a}\right)L_x\right) \sum_m \text{sinc}\left(\pi\left(\frac{y}{\lambda_m z} - \frac{m}{b}\right)L_y\right) = \\ K \frac{J_1(2\pi r r_0 / \lambda_m z)}{r r_0 / \lambda_m z} \sum_n \text{sinc}\left(\frac{\pi L_x}{\lambda_m z} \left(x - \frac{\lambda_m z n}{a}\right)\right) \sum_m \text{sinc}\left(\frac{\pi L_y}{\lambda_m z} \left(y - \frac{\lambda_m z m}{b}\right)\right)$$

on  $K$  inclou totes les constants. El patró de difracció es mostra a la figura següent.





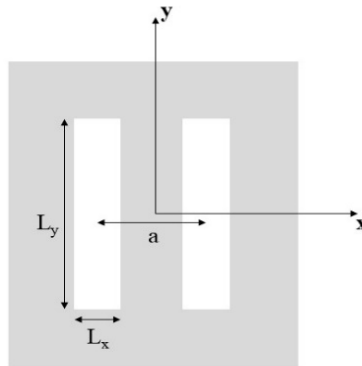
## 6.8 Problemes resolts

### Problema 6.1

Calculeu el patró de difracció de Fraunhofer d'una pantalla amb doble esclatxa il·luminada per una ona plana monocromàtica amb amplitud  $E_0 = 1 \text{ V/m}$ .

### Solució

El sistema de doble esclatxa esquematitzat a la figura està il·luminat per una ona plana amb intensitat uniforme.



La distribució de camp en el pla de l'objecte ve donada pel producte de l'ona il·luminadora i la funció de transmissió. En el nostre sistema de coordenades escollit, s'expressa com

$$E_{in}(x', y', 0) = 1 \cdot t(x', y') = \left[ \text{rect}\left(\frac{x' - a/2}{L_x}\right) + \text{rect}\left(\frac{x' + a/2}{L_x}\right) \right] \cdot \text{rect}\left(\frac{y'}{L_y}\right)$$

Per calcular el patró de difracció de Fraunhofer, hem de calcular la transformada de Fourier d'aquesta distribució:

$$\tilde{E}(f_x, f_y, 0) = \left[ L_x \text{sinc}(\pi L_x f_x) e^{-i2\pi a f_x / 2} + L_x \text{sinc}(\pi L_x f_x) e^{i2\pi a f_x / 2} \right] L_y \text{sinc}(\pi L_y f_y)$$

on utilitzem la propietat de desplaçament de la transformada de Fourier (veure l'apèndix D).

Aquesta expressió es pot reescriure com

$$\tilde{E}(f_x, f_y, 0) = L_x L_y \text{sinc}(\pi L_x f_x) \text{sinc}(\pi L_y f_y) 2 \cos(\pi a f_x) \text{ utilitzat}$$

El patró de difracció de Fraunhofer a una distància  $z$  és



$$E(x, y, z) = \frac{e^{ik\left(\frac{z^2+x^2+y^2}{2z}\right)}}{i\lambda z} \left[ \tilde{E}(f_x, f_y, 0) \right]_{\substack{f_x=x/\lambda z \\ f_y=y/\lambda z}}$$

$$E(x, y, z) = \frac{e^{ik\left(\frac{z^2+x^2+y^2}{2z}\right)}}{i\lambda z} 2L_x L_y \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi L_x x}{\lambda z}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi L_y y}{\lambda z}\right) \cos\left(\frac{\pi a x}{\lambda z}\right)$$

La intensitat del patró de difracció:

$$I(x, y, z) = \left(\frac{1}{2} \varepsilon_0 c\right) \frac{4L_x^2 L_y^2}{\lambda^2 z^2} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\pi L_x x}{\lambda z}\right) \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\pi L_y y}{\lambda z}\right) \cos^2\left(\frac{\pi a x}{\lambda z}\right)$$

La distribució de la intensitat al llarg de l'eix  $x$  és

$$I(x, 0, z) = \left(\frac{1}{2} \varepsilon_0 c\right) \frac{4L_x^2 L_y^2}{\lambda^2 z^2} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\pi L_x x}{\lambda z}\right) \cos^2\left(\frac{\pi a x}{\lambda z}\right)$$

Els zeros de la funció *sinc* apareixen a les posicions  $s$  i la separació entre mínims és

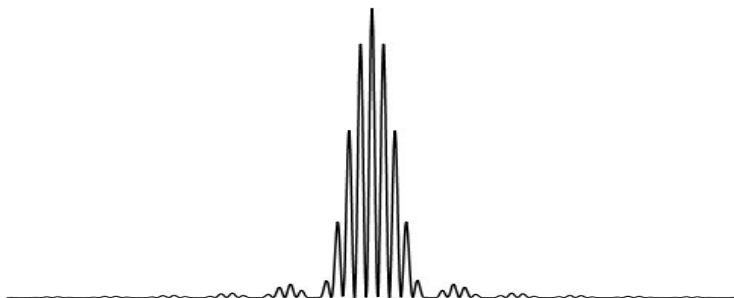
$$\Delta x_{zero} = \frac{\lambda z}{L_x}.$$

Mentre que els zeros de la funció *cos* apareixen a  $x_{zero} = \pm \frac{(2m+1)\lambda z}{2a}$  i la separació

entre mínims és  $\Delta x_{zero} = \frac{\lambda z}{a}$ .

Com que  $a > L_x$  la distribució d'intensitat mostra la funció oscil·ladora  $\cos^2\left(\frac{\pi a x}{\lambda z}\right)$

modulada per la funció  $\operatorname{sinc}^2\left(\frac{\pi L_x x}{\lambda z}\right)$ .



Distribució de la intensitat de la doble escletxa

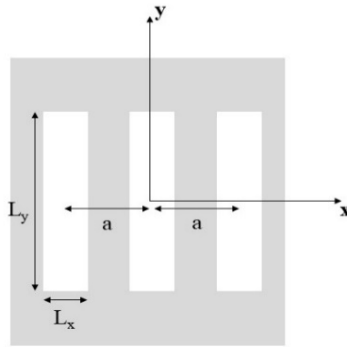


La funció periòdica  $\cos^2(\pi ax/\lambda z)$  correspon al patró d'interferència de la doble es-cletxa i seria el patró d'intensitat en el cas límit d'es-cletxes infinitament estretes. La mida finita de l'es-cletxa produeix el patró de modulació, que és responsable de la forta disminució del patró d'intensitat a distàncies axials del centre  $|x| > \lambda z/L_x$ .

### Problema 6.2

Calculeu el patró de difracció de Fraunhofer d'una pantalla amb tres es-cletxes d'am-plada  $L_x$  i alçada  $L_y \gg L_x$ , separades per una distància  $D$  entre els seus centres i il·lu-minades per una ona plana monocromàtica amb amplitud  $E_0 = 1 \text{ V/m}$ .

### Solució



La distribució de camp en el pla  $z = 0$  ve donada per la funció de transmitància, ja que està il·luminada per una ona plana uniforme d'amplitud unitària:

$$E(x', y', 0) = \left[ \text{rect}\left(\frac{x'}{L_x}\right) + \text{rect}\left(\frac{x'-a}{L_x}\right) + \text{rect}\left(\frac{x'+a}{L_x}\right) \right] \text{rect}\left(\frac{y'}{L_y}\right)$$

La transformada de Fourier és

$$\begin{aligned} \tilde{E}(f_x, f_y, 0) &= L_x L_y \text{sinc}(\pi f_x L_x) \text{sinc}(\pi f_y L_y) \left[ 1 + e^{-i2\pi a f_x} + e^{i2\pi a f_x} \right] = \\ &= L_x L_y \text{sinc}(\pi f_x L_x) \text{sinc}(\pi f_y L_y) (1 + 2 \cos(2\pi a f_x)) \end{aligned}$$

La funció  $1 + 2 \cos(x)$  es pot reescriure en la forma

$$\begin{aligned} 1 + 2 \cos(x) &= 1 + 2(2 \cos^2(x/2) - 1) = 4 \cos^2(x/2) - 1 = 3 - 4 \sin^2(x/2) \\ &= \frac{3 \sin(x/2) - 4 \sin^3(x/2)}{\sin(x/2)} = \frac{\sin(3x/2)}{\sin(x/2)} \end{aligned}$$



donant

$$\tilde{E}(f_x, f_y, 0) = L_x L_y \operatorname{sinc}(\pi f_x L_x) \operatorname{sinc}(\pi f_y L_y) \frac{\sin(3\pi a f_x)}{\sin(\pi a f_x)}$$

El patró de difracció de Fraunhofer:

$$E(x, y, z) = \frac{e^{ik\left(z + \frac{x^2 + y^2}{2z}\right)}}{i\lambda z} \left[ \tilde{E}(f_x, f_y, 0) \right]_{\substack{f_x = x/\lambda z \\ f_y = y/\lambda z}}$$

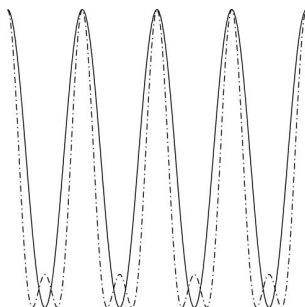
Substituint la transformada de Fourier

$$E(x, y, z) = \frac{e^{ik\left(z + \frac{x^2 + y^2}{2z}\right)}}{i\lambda z} L_x L_y \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi L_x x}{\lambda z}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi L_y y}{\lambda z}\right) \frac{\sin(3\pi ax/\lambda z)}{\sin(\pi ax/\lambda z)}$$

Obtenim la distribució de la intensitat del patró de distribució de Fraunhofer

$$I(x, y, z) = \left( \frac{1}{2} \varepsilon_0 c \right) \frac{L_x^2 L_y^2}{\lambda^2 z^2} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\pi L_x x}{\lambda z}\right) \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\pi L_y y}{\lambda z}\right) \left[ \frac{\sin(3\pi ax/\lambda z)}{\sin(\pi ax/\lambda z)} \right]^2$$

En comparar aquest resultat amb l'obtingut en el problema anterior, observem que la funció moduladora és la mateixa. Això es deu al fet que les dimensions i la forma de cada esclatxa són idèntiques. La transformada de Fourier de l'esclatxa (cel·la unitària) dona el patró de modulació, mentre que les oscil·lacions ràpides de la intensitat es generen per la distribució periòdica de les esclatxes a la matriu, és a dir, el nombre d'esclatxes i la separació entre elles. Si la separació és la mateixa, les posicions màximes seran les mateixes, tal i com podem observar comparant les funcions normalitzades  $\cos^2(\pi ax/\lambda z)$  (línia contínua) i  $(\sin(3\pi ax/\lambda z)/3\sin(\pi ax/\lambda z))^2$  (línia discontinua).



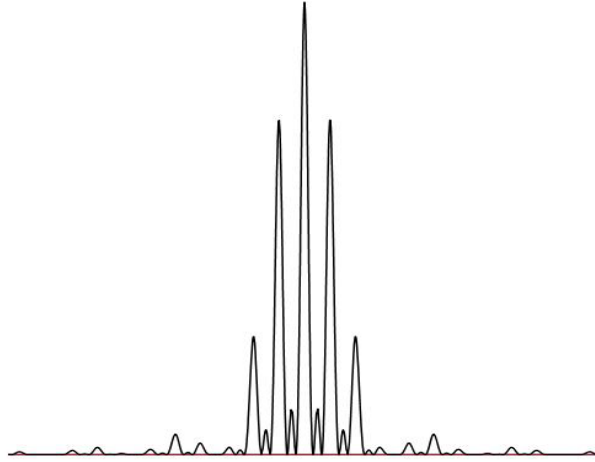
L'increment del nombre d'esclatxes redueix l'amplada dels màxims. A mesura que augmenta el nombre d'esclatxes, els pics esdevenen cada vegada més i més estrets.



La intensitat del patró de difracció de Fraunhofer a l'eix

$$I(x, 0, z) = \left( \frac{1}{2} \varepsilon_0 c \right) \frac{L_x^2 L_y^2}{\lambda^2 z^2} \operatorname{sinc}^2 \left( \frac{\pi L_x x}{\lambda z} \right) \left[ \frac{\sin(3\pi a x / \lambda z)}{\sin(\pi a x / \lambda z)} \right]^2$$

es mostra a la figura següent.



Patró de difracció per 3 esclatxes

### Problema 6.3

Calculeu el patró de difracció de Fraunhofer d'una pantalla rectangular de costats  $L_x$  i  $L_y$ , il·luminada per una ona plana monocromàtica d'amplitud unitària.

### Solució

Contràriament als problemes anteriors, on la llum es transmet per les obertures rectangulars, en aquest problema tenim una pantalla opaca de forma rectangular que bloqueja el camí de la llum.

La funció de transmitància ara s'escriurà com  $t(x', y', 0) = 1 - \operatorname{rect}(x'/L_x) \operatorname{rect}(y'/L_y)$ .

Com que l'ona il·luminadora és uniforme amb amplitud unitària, la distribució de camp és igual a aquesta funció de transmitància. Per calcular el patró de difracció de Fraunhofer, calculem la transformada de Fourier:

$$\tilde{E}(f_x, f_y, 0) = \delta(f_x, f_y) - L_x L_y \operatorname{sinc}(\pi L_x f_x) \operatorname{sinc}(\pi L_y f_y)$$

I el patró de difracció de Fraunhofer:



$$E(x, y, z) = \frac{e^{ik\left(\frac{z + \sqrt{z^2 + x^2 + y^2}}{2z}\right)}}{i\lambda z} \left( \delta\left(\frac{x}{\lambda z}, \frac{y}{\lambda z}\right) + e^{i\pi L_x L_y} \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi L_x x}{\lambda z}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi L_y y}{\lambda z}\right) \right)$$

Aquest patró de difracció és molt similar al patró de difracció d'una obertura rectangular, que correspon a l'obertura complementària, excepte per la presència d'un punt fort a l'eix i un factor de fase addicional.

Es tracta d'un resultat genèric conegut com a principi de Babinet, en el qual el patró de difracció d'un cos opac és idèntic al d'un forat de la mateixa mida i forma, excepte per la intensitat global del feix cap endavant.

### Problema 6.4

La llum blanca incideix en una xarxa de difracció amb freqüència espacial  $f = 800$  línies/cm.

a) En quin angle apareixerà la llum vermella si té una longitud d'ona de 620 nm en el segon ordre de difracció?

b) Si la xarxa de difracció és rectangular amb dimensions  $L_x$  i  $L_y < L_\infty$ , expliqueu qualitativament l'aspecte del seu patró de difracció.

### Solució

a) El patró de difracció d'una xarxa de difracció correspon a un cas particular de difracció per objectes periòdics.

En aquest cas senzill, no considerem ni la forma de l'escletxa ni la mida de l'obertura finita i la xarxa es modela simplement com una funció comb de l'espaiat adequat. També considerem obertures infinitament llargues al llarg de la direcció vertical, de manera que no considerarem la dependència d' $y$  en aquest problema.

L'espaiat entre línies és  $a = 1/f = 0,00125$  cm = 12,5  $\mu$ m.

Suposant una il·luminació uniforme, la distribució de camp fora de la xarxa és

$$E(x', 0) = \frac{1}{a} \operatorname{comb}\left(\frac{x'}{a}\right) = \frac{1}{a} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\frac{x'}{a} - n\right) = \frac{1}{a} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\frac{x' - na}{a}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x' - na).$$

La transformada de Fourier dona

$$\tilde{E}(f_x, 0) = \operatorname{comb}(af_x).$$

El patró de difracció de Fraunhofer:



$$E(x,z) = \frac{e^{ik\left(z+\frac{x^2}{2z}\right)}}{i\lambda z} \text{comb}\left(\frac{ax}{\lambda z}\right) = \frac{e^{ik\left(z+\frac{x^2}{2z}\right)}}{i\lambda z} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta\left(\frac{a}{\lambda z}\left(x - \frac{m\lambda z}{a}\right)\right) =$$

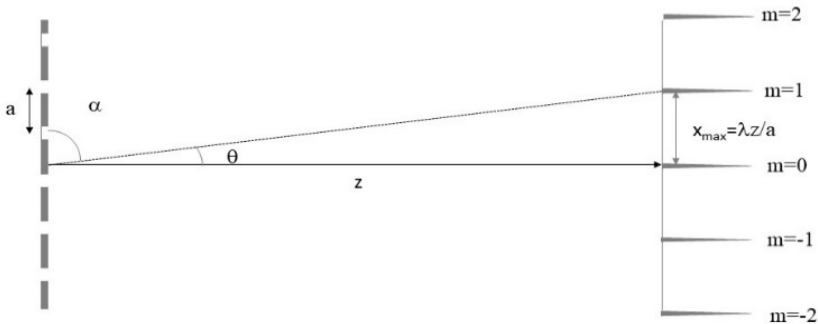
$$= \frac{e^{ik\left(z+\frac{x^2}{2z}\right)}}{ia} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta\left(x - \frac{m\lambda z}{a}\right)$$

El patró de difracció apareixerà al llarg de l'eix  $x$  com un conjunt de màxims situats a les posicions  $x_{\max} = \pm m \frac{\lambda z}{a}$ , on  $m = 0, 1, 2, \dots$  és l'ordre de difracció.

L'angle de propagació d'aquests màxims es pot calcular, suposant que el pla d'observació sigui  $z > a$ :

$$\sin \theta_m \approx \frac{x_m}{z} = m \frac{\lambda}{a} = m\lambda f$$

Pel que fa a l'angle  $\alpha$  respecte de l'eix  $x$ :  $\cos \alpha_1 = \lambda f \rightarrow f = \cos \alpha_1 / \lambda$ , d'acord amb les notes de la secció 6.2.



Difracció d'una xarxa de difracció infinita

En el nostre cas, la longitud d'ona 620 nm en el segon ordre de difracció apareix a l'angle

$$\sin \theta_2 = 2\lambda f = 0.0992 \rightarrow \theta_2 = 5.69^\circ$$

b) En un cas més realista, la xarxa de difracció té una obertura finita. L'efecte d'incloure l'obertura al patró de difracció és que les funcions delta es substitueixen pel patró de difracció de l'obertura. El patró de difracció comptaria amb una distribució periòdica de patrons d'intensitat de la forma



$$I \propto \text{sinc}^2\left(\frac{\pi L_x x}{\lambda z}\right) \text{sinc}^2\left(\frac{\pi L_y y}{\lambda z}\right)$$

A més, la forma particular de cada esclatxa individual també introduiria una modulació del patró d'intensitat global proporcional al patró de difracció de la funció de forma d'esclatxa.

### Problema 6.5

Una ona plana de llum amb unitat d'amplitud i longitud d'ona  $\lambda = 446 \text{ nm}$  incideix normalment en una esclatxa d'amplada  $L_x = 1 \text{ mm}$  i alçada  $L_y = 3 \text{ mm}$ . Es munta una lent a una distància  $f$  darrere de l'esclatxa ( $f$  és la distància focal de la lent) i es col·loca una pantalla en el seu pla focal posterior a una distància  $f = 100 \text{ cm}$  després de la lent. La mida de la lent és prou gran com per poder negligir els efectes de l'obertura finita imposada pel diàmetre de la lent.

- Trobeu el patró de difracció en el pla focal de la lent.
- A quina distància  $x$  (en cm) del centre del patró de difracció de l'esclatxa apareix el quart mínim al llarg de l'eix  $x$ ?
- Canviant la longitud d'ona, observem que el tercer mínim del patró de difracció apareix ara a la posició trobada a l'apartat b). Quina és la nova longitud d'ona?

### Solució

a) El sistema està muntat en una configuració f-f. La propagació de Fresnel dels fronts d'ona en aquesta configuració mostra que, en el pla focal de la lent, tenim el patró de difracció de Fraunhofer de l'objecte amb un terme de fase afegit, que s'anul·la per  $d = d' = f$  (veure l'apèndix F per més detalls).

Així, fer servir aquesta configuració ens dona una manera d'obtenir el patró de difracció de Fraunhofer en un pla fix: el pla focal posterior de la lent.

El patró de difracció de l'esclatxa s'escriu com

$$E(x, y, f) = \frac{1}{i\lambda f} \left[ \tilde{E}(f_x, f_y, 0) \right]_{\substack{f_x = x/\lambda f \\ f_y = y/\lambda f}} = \frac{L_x L_y}{i\lambda f} \text{sinc}\left(\frac{\pi L_x x}{\lambda f}\right) \text{sinc}\left(\frac{\pi L_y y}{\lambda f}\right)$$

El que podem veure a la pantalla és el patró d'intensitat:

$$I(x, y, f) = \left(\frac{1}{2} \varepsilon_0 c\right) \frac{L_x^2 L_y^2}{\lambda^2 f^2} \text{sinc}^2\left(\frac{\pi L_x x}{\lambda f}\right) \text{sinc}^2\left(\frac{\pi L_y y}{\lambda f}\right)$$



b) Els mínims del patró d'intensitat al llarg de l'eix  $x$  es produeixen als zeros de la funció sinc al quadrat:

$$\frac{\pi L_x x_m}{\lambda f} = \pm m\pi \text{ per } m = 1, 2, \dots$$

El quart mínim apareix a  $x_4 = \frac{4\lambda f}{L_x} = 1.78 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 1.78 \text{ mm}$

c) En canviar la longitud d'ona que il·lumina l'esclatxa, la posició dels mínims canviarà segons la fórmula donada:

$$x'_m = \pm m \frac{\lambda' f}{L_x}$$

Les condicions del problema fan necessari que  $x_4 = x'_3$ :

$$\frac{4\lambda f}{L_x} = \frac{3\lambda' f}{L_x} \rightarrow \lambda' = \frac{4\lambda}{3} = 594.67 \text{ nm}$$

### Problema 6.6

Escriviu les expressions de la funció de transferència obtingudes mitjançant l'equació d'ona paraxial per a feixos i la representació de l'espectre angular. Comenteu les semblances i diferències entre aquestes dues funcions de transferència i mostreu el limit en què ambdues expressions són coincidents.

### Solució

La funció de transferència,  $H(f_x, f_y, z)$ , relaciona els components de freqüència del camp en diferents posicions dels sistemes lineals:

$$\tilde{E}(f_x, f_y, z) = \tilde{E}(f_x, f_y, 0) \cdot H(f_x, f_y, z)$$

La funció de transferència associada a l'equació d'ona paraxial per a feixos:

$$\frac{\partial E_o^{(+)}}{\partial z} - \frac{i}{2k} \nabla_{\perp}^2 E_o^{(+)} = 0$$

Això ja es va deduir al capítol 2 (eq. [2.15]):

$$\tilde{E}_o^{(+)}(f_x, f_y, z) = \tilde{E}^{(+)}(f_x, f_y, 0) \cdot e^{-i \frac{(k_x^2 + k_y^2)z}{2k}} = \tilde{E}^{(+)}(f_x, f_y, 0) \cdot e^{-i\lambda\pi(f_x^2 + f_y^2)z}$$

El camp total propagat a distància  $z$  en l'aproximació paraxial ve donat per



$$\tilde{E}^{(+)}(f_x, f_y, z) = e^{ikz} \tilde{E}_o^{(+)}(f_x, f_y, z) = \tilde{E}_o^{(+)}(f_x, f_y, 0) \cdot e^{i(kz - \lambda\pi(f_x^2 + f_y^2)z)}$$

Quan considerem la representació de l'espectre angular, començant amb l'equació de Helmholtz podem obtenir directament la funció de transferència mitjançant l'equació [6.5]:

$$\tilde{E}^{(+)}(f_x, f_y, z) = \tilde{E}^{(+)}(f_x, f_y, 0) e^{i2\pi m z} = \tilde{E}^{(+)}(f_x, f_y, 0) e^{i2\pi z \sqrt{\frac{1}{\lambda^2} - (f_x^2 + f_y^2)}}$$

La funció de transferència en l'aproximació de l'ona paraxial és sempre un terme de fase pura, mentre que la representació de l'espectre angular també conté termes evanescents per a freqüències prou grans que compleixen la relació  $(f_x^2 + f_y^2) > \frac{1}{\lambda^2}$

Aquests camps evanescents es propaguen al llarg de la superfície de l'objecte i, per tant, no compleixen el criteri de paraxialitat de propagació proper a l'eix de propagació. A la regió paraxial, les freqüències espacials implicades haurien de ser petites, donant lloc a un factor de fase pur en la funció de transferència.

A més, la condició complerta per les freqüències espacials relacionades amb els angles de propagació en la relació paraxial és  $(f_x^2 + f_y^2) \ll \frac{1}{\lambda^2}$  i podem escriure

$$\sqrt{\frac{1}{\lambda^2} - (f_x^2 + f_y^2)} = \frac{1}{\lambda} \sqrt{1 - \lambda^2 (f_x^2 + f_y^2)} \approx \frac{1}{\lambda} \left( 1 - \frac{\lambda^2 (f_x^2 + f_y^2)}{2} \right)$$

Amb aquesta aproximació, obtenim

$$\tilde{E}^{(+)}(f_x, f_y, z) = \tilde{E}^{(+)}(f_x, f_y, 0) \cdot e^{i(kz - \lambda\pi(f_x^2 + f_y^2)z)}$$

que coincideix amb l'expressió obtinguda segons l'aproximació de l'ona paraxial. Una conclusió particular d'aquest límit és que l'aproximació paraxial no es pot utilitzar per estudiar la propagació de distribucions de camp que contenen components de freqüència molt grans de l'ordre o propers a  $1/\lambda$ .

### Problema 6.7

*En un filtratge espacial que utilitza una configuració de correlador 4f, volem eliminar les altes freqüències del nostre feix òptic corresponents als valors superiors a  $1/(25\lambda)$ . Les lents utilitzades en el nostre dispositiu són objectius de microscopi de X20 amb distància focal  $f=8\text{mm}$ . Trobeu la posició en el pla de Fourier on es situarà cada freqüència espacial i el radi de l'obertura que hem d'utilitzar per filtrar el nostre feix.*



### Solució

En una configuració de correlador  $4f$ , el patró de difracció de Fraunhofer es situa al pla focal posterior de la lent transformadora, que en aquest cas és l'objectiu del microscopi.

Suposant que la nostra distribució inicial de camp és  $E^{(+)}(x', y', 0)$  i negligint els efectes de les obertures finites dels objectius en el pla de Fourier, obtindrem una distribució de camp donada per l'expressió

$$\tilde{E}^{(+)}(x, y, f) = A \cdot \left[ \tilde{E}(f_x, f_y, 0) \right]_{\substack{f_x = x/\lambda f \\ f_y = y/\lambda f}}$$

El factor d'escala ens permet relacionar cada punt del pla focal amb una freqüència espacial determinada:

$$x = f_x \lambda f \quad i \quad y = f_y \lambda f$$

A una distància determinada:  $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \lambda f \sqrt{f_x^2 + f_y^2}$

Les freqüències espacials  $f_x = f_y = 1/(25\lambda)$  es situaran ó apareixeran llavors en el pla de Fourier a

$$r = \frac{\lambda f \sqrt{2}}{25\lambda} = \frac{\sqrt{2}}{25} f = 0.45 \text{ mm} = 450 \mu\text{m}$$

Per eliminar les altes freqüències, tal i com es desitja, s'ha de col·locar un diafragma de 450 micres al pla focal de la lent. Es modificarà el camp propagat després del diafragma, ja que faltaran les freqüències altes. En el cas de tenir una distribució inicial de camp consistent en un feix gaussià amb fortes modulacions d'alta freqüència, aquesta tècnica ens permet "netejar" el feix, eliminant les altes freqüències i obtenint un feix gaussià molt més homogeni a la sortida.

### Problema 6.8

*Dues lents de diàmetre  $D_1$  i  $D_2$  i igual distància focal,  $f$ , s'utilitzen per obtenir imatges de dos punts col·locats a una distància molt gran. Suposant que la llum procedent de cadascun dels objectes es pot aproximar mitjançant una ona plana en arribar a la lent, determineu quina és la separació angular mínima que es pot mesurar en cada cas.*

### Solució

Una lent amb diàmetre infinit hauria d'enfocar una ona plana perfecta en un únic punt del pla de Fourier si totes les aberracions es poden corregir perfectament. Fins i tot en el cas de les lents amb aberracions perfectament corregides, el diàmetre finit



de la lent imposaria una condició limitant a la resolució dels objectes llunyans, a causa del patró de difracció induït per la funció de pupil·la de la lent.

Una ona plana que il·lumina una lent de diàmetre  $D$  perfectament corregida donarà un patró de difracció en el pla focal corresponent a la funció d'Airy (veure l'apèndix E):

$$I(r, f) \propto \left[ \frac{J_1(\pi Dr / \lambda f)}{Dr / 2\lambda z} \right]^2$$

El diàmetre del punt central seria  $\phi = \frac{1.22\lambda f}{D}$

Aplicant el criteri de Rayleigh, la mínima separació resoluble entre les imatges,  $s$ , correspondria a la meitat d'aquest diàmetre. Així, el màxim del patró de difracció d'un dels objectes coincideix amb el primer zero del patró de difracció de l'altre:

$$s = \frac{\phi}{2} = \frac{1.22\lambda f}{D}$$

Donada aquesta distància, la mínima separació angular resoluble entre els objectes distants és

$$\theta_{\min} \approx \frac{s}{f} = \frac{1.22\lambda}{D}$$

Utilitzant aquesta relació, la separació angular mínima resoluble mitjançant lents de diferents diàmetres serà

$$\frac{\theta_{\min 1}}{\theta_{\min 2}} = \frac{D_2}{D_1} \rightarrow \theta_{\min 1} = \frac{D_2}{D_1} \theta_{\min 2}$$

## 6.9 Problemes plantejats

**P6.1** Un objecte unidimensional és il·luminat per radiació de longitud d'ona  $\lambda_0$ . L'objecte té elements periòdics de períodes espacials en la direcció  $x$ :  $\Delta x = \lambda_0/5$ . Determineu l'amplitud dels components de Fourier de l'amplitud de camp per a aquesta freqüència particular per  $z = \lambda_0$ .

**P6.2** Un objecte bidimensional, il·luminat amb radiació monocromàtica de longitud d'ona  $\lambda_0$ , té una periodicitat que dona freqüències espacials màximes de  $f_x = 0,5/\lambda_0$  en la direcció  $x$ . Trobeu el rang de components de freqüència en la direcció  $y$  per als quals els components de Fourier corresponents  $\tilde{E}(0,5/\lambda_0, f_y, z)$ , corresponen a modes de propagació.

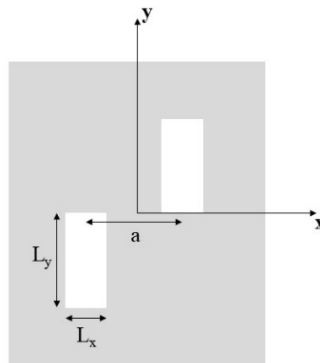


**P6.3** Comenteu la regió de validesa de l'aproximació de Fresnel, que és la regió al llarg del pla transversal per a la qual la contribució dels termes de tercer ordre i ordre superior en l'expansió binomial de  $R$  produeixen canvis de fase molt inferiors a 1 rad quan s'introdueixen a la fórmula de Rayleigh–Sommerfeld (equació [6.14]).

**P6.4** Una esclatxa d'alçada  $L_y=0,3\text{mm}$  i amplada  $L_x=0,1\text{mm}$  és il·luminada per radiació de longitud d'ona  $\lambda_0=462\text{nm}$ . El pla d'observació es situa a una distància de  $D=2\text{m}$ . Determineu si el patró de difracció resultant compleix la condició d'estar a la regió de difracció de Fraunhofer (camp llunyà). Calculeu el patró de difracció de Fraunhofer i determineu l'amplada angular del màxim d'intensitat central en la direcció  $x$ .

**P6.5** Una pantalla opaca té dues esclatxes de  $0,10\text{ mm}$  d'amplada i  $0,5\text{ mm}$  d'altura, separades per una distància (entre centres) de  $0,25\text{ mm}$  i il·luminades per una ona plana monocromàtica de  $532\text{ nm}$  de longitud d'ona. El pla d'observació es situa a una distància de  $D=5\text{m}$ . Determineu el patró de difracció de Fraunhofer i calculeu quantes franges il·luminades apareixeran dins del pic central de difracció.

**P6.6** Trobeu el patró de difracció de Fraunhofer de la distribució en dues esclatxes (que es mostra a la figura) quan està il·luminada per una ona plana d'amplitud constant unitària.



**P6.7** El diàmetre d'un telescopi d'observatori és de  $5\text{ m}$ .

a) Determineu el límit de resolució angular per les longituds d'ona de  $400\text{ nm}$ ,  $500\text{ nm}$  i  $600\text{ nm}$ .

b) Quina és la distància mínima entre dos objectes col·locats a la superfície de la lluna que pot resoldre aquest telescopi per les longituds d'ona donades?



**P6.8** Una llum blanca incideix en una xarxa de difracció amb 1.000 línies/cm. En quin angle apareixerà la llum vermella si té una longitud d'ona de 650 nm en el primer ordre de difracció?

**P6.9** La llum que emet una làmpada de sodi té dues components espectrals per les longituds d'ona 589,5923 nm i 589,9953 nm. Si fem servir una xarxa de difracció amb 10.000 línies/cm.

a) Quina serà la separació entre aquestes dues línies en una pantalla col·locada a una distància d'1 m de la xarxa?

b) Suposant que l'obertura està total i homogèniament il·luminada, quina és l'obertura mínima necessària per resoldre aquestes dues línies a aquesta distància (tenint en compte que estem en el règim de difracció de Fraunhofer)?

**P6.10** Un conjunt de forats circulars amb radi  $R$  es situa al llarg d'una línia horitzontal, amb els seus centres separats per una distància fixa  $D$ . Tota la cadena lineal de forats té una longitud total  $L$  i està il·luminada per una ona plana monocromàtica uniforme. Expliqueu qualitativament l'aspecte general del patró de difracció de Fraunhofer corresponent.

**P6.11** Calculeu el patró de difracció de Fraunhofer d'una pantalla amb  $N$  esclatxes d'amplada  $L_x$  i alçada  $L_y \gg L_x$ , separada per una distància  $D$  entre els seus centres i il·luminada per una ona plana monocromàtica amb amplitud  $E_0 = 1V/m$ .

**P6.12** Una xarxa de difracció consisteix generalment en una certa distribució periòdica de la funció de transmitància amb un període determinat. Considereu els tres tipus diferents de esclatxes següents que suposem que s'estenen infinitament en les direccions  $x$  i  $y$ , amb una distribució periòdica 1D al llarg de l'eix  $x$ .

- Xarxa de difracció amb transmitància:  $t(x) = \frac{1}{2} \left[ 1 + m \cdot \cos \left( \frac{2\pi x}{a} \right) \right]$ .
- Xarxa de difracció amb obertures d'amplada negligible (tipus delta), separades per una distància  $a$ .
- Xarxa de difracció amb obertures rectangulars d'amplada  $L_x$ , separades per una distància  $a$ .

Si considerem que cadascuna d'aquestes obertures està il·luminada per una ona plana uniforme d'intensitat constant, calculeu els seus patrons corresponents de difracció de Fraunhofer.

Comenteu qualitativament com es modificaria el patró de difracció de cadascuna d'aquestes estructures en considerar una obertura circular de radi  $R \gg a$  que limiti la mida efectiva de les nostres reixetes.

## A. El làser

La teoria del làser, que és un acrònim de l'anglès de *light amplification by stimulated emission of radiation*, amplificació de llum per emissió estimulada de radiació, va ser formulada per Bàssov i Prókhorov a Rússia, i Townes i Schawlow als Estats Units.

La primera màquina làser va ser construïda per Maimann el 1960 utilitzant un cristall de rubí. El làser és una extensió natural del màser, que es va utilitzar com a font d'radiació infraroja. Des de la invenció d'aquesta font, el camp de la fotònica i les seves aplicacions han crescut considerablement. El làser és un equivalent òptic a un amplificador electrònic amb retroalimentació que consta d'un medi d'amplificació i un ressonador.

La recerca sobre la radiació tèrmica de finals del segle XIX constitueix el primer pas cap a la comprensió dels sistemes atòmics. Bohr postulà el següent. 1) Els àtoms poden existir en estats estacionaris caracteritzats per un conjunt discret de valors d'energia possibles,  $E_1, E_2, \dots$ . En aquests estats, els àtoms ni emeten ni absorbeixen energia. 2) La radiació emesa o absorbida per l'àtom correspon a la radiació monocromàtica de freqüència

$$E_j - E_i = \hbar\omega_{ij}$$

on  $\hbar$  és la constant de Planck i  $E_i, E_j$  són nivells genèrics d'energia atòmica on  $E_j > E_i$ . Els àtoms emeten i absorbeixen energia en quantitats discretes, que reben el nom de  *fotons*.

A l'article "On the quantum theory of radiation" ("Sobre la teoria quàntica de la radiació"), Einstein parla sobre la interacció dels àtoms amb la radiació tèrmica i postula els processos bàsics de la interacció llum-matèria. Suposem que un gas format per una col·lecció d'àtoms idèntics, en què cada àtom té un parell de nivells d'energia  $E_1$  i  $E_2$  que satisfan la condició  $E_2 - E_1 = \hbar\omega$ . Les transicions que conserven energia es poden produir entre els nivells 1 i 2: els àtoms emeten o absorbeixen fotons amb freqüència  $\omega$ , fent possible aquest salt entre els nivells 1 i 2. En presència de llum amb



una densitat d'energia  $u(\omega)$  determinada, les probabilitats d'absorció i emissió de fotons es defineixen de la manera següent.

**a) Emissió espontània:** Un àtom al nivell 2 té una probabilitat finita de decaure espontàniament al nivell 1, emetent un fotó amb energia  $\hbar\omega$  en una direcció arbitrària. La probabilitat per unitat de temps que aquest procés es doni és de

$$P_{sp} = A_{21}$$

**b) Absorció estimulada:** L'àtom absorbeix un fotó de freqüència  $\omega$  i fa un salt del nivell 1 al nivell 2. La probabilitat per unitat de temps que aquest procés s'indueixi per radiació és

$$P_{abs} = B_{12}u(\omega)$$

**c) Emissió estimulada:** La presència de radiació a la freqüència  $\omega$  indueix o estimula una transició del nivell 2 al nivell 1 a un ritme proporcional a la densitat d'energia radiant. El fotó emès s'emeta en el mateix estat que el fotó incident que estimula la transició. La probabilitat d'emissió estimulada per unitat de temps és

$$P_{st} = B_{21}u(\omega)$$

Els coeficients d'Einstein  $A$ ,  $B_{12}$  i  $B_{21}$  depenen de les propietats dels dos estats atòmics.

L'efecte d'aquests processos bàsics en les poblacions dels nivells atòmics es pot estudiar sota la suposició que el nombre total d'àtoms és prou gran com perquè els processos d'absorció i emissió individuals produeixin una dependència temporal suau de les poblacions, el ritme de canvi de les quals es pot definir a través de les equacions de canvi (*rate equations*):

$$\frac{dN_1}{dt} = -\frac{dN_2}{dt} = N_2 A_{21} + B_{21}u(\omega)N_2 - B_{12}u(\omega)N_1$$

on estem donant per fet que les transicions tenen lloc només entre els nivells 1 i 2.

Per a una col·lecció d'àtoms en equilibri amb la radiació tèrmica, el ritme de canvi net ha de ser zero, i obtenim

$$u(\omega) = \frac{A_{21}/B_{21}}{(B_{12}/B_{21})(N_1/N_2) - 1} = \frac{A_{21}/B_{21}}{(B_{12}/B_{21})e^{\hbar\omega/kT} - 1}$$

on les poblacions dels nivells en estat d'equilibri tèrmic compleixen la distribució de Boltzmann:

$$N_1/N_2 = e^{(E_2 - E_1)/kT} = e^{\hbar\omega/kT},$$

on  $k$  és la constant de Boltzmann.



Prenent el límit d'aquesta expressió per  $T \rightarrow \infty$ , obtenim que  $B_{12} = B_{21}$  (aquesta relació es compleix per als nivells de població no degenerats). Per al cas dels nivells degenerats amb degeneracions  $g_1$  i  $g_2$ , es compleix la relació més general  $g_1 B_{12} = g_2 B_{21}$ .

En el límit  $\hbar\omega \ll kT$  ( $\omega \rightarrow 0$ ), la densitat d'energia ha de correspondre amb la fórmula clàssica de Rayleigh-Jeans:

$$u(\omega, T) = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} kT$$

D'això es dedueix la relació entre el ritme d'emissió espontània i estimulada:

$$\frac{A_{21}}{B_{21}} = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3}$$

Aquesta relació explica les dificultats a l'hora de construir una font de llum basada en l'emissió estimulada. La dependència de la freqüència proporcional a  $\omega^3$  estableix que, a mesura que la freqüència augmenta, és més difícil aconseguir una situació en què l'emissió estimulada prevalgui sobre el ritme d'emissió espontània. Tot i que aquesta relació s'ha derivat en condicions de radiació tèrmica, resulta ser una relació general entre aquests coeficients.

Posant totes aquestes relacions juntes, obtenim l'expressió

$$u(\omega, T) = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}$$

que correspon a la llei de radiació de Planck.

Per fabricar un làser, no fem servir la radiació isotròpica lligada a la radiació tèrmica, sinó una radiació direccional que amplificarem per emissió estimulada.

Per calcular el ritme d'amplificació aconseguit en el medi actiu (cristall, líquid o gas) d'àrea transversal  $S$ , suposarem que aquest està il·luminat per una ona plana. El volum contingut en una làmina de gruix  $dz$  és  $dV = S \cdot dz$  i, essent  $N$  el nombre d'àtoms per unitat de volum, podrem expressar el nombre d'àtoms del volum  $dV$  com a  $dN = N \cdot dV$ . D'aquesta quantitat, una fracció  $dN_i = N_i dV$ , poblaria el nivell  $i = 1, 2$  i  $N = N_1 + N_2$ . Segons el model d'Einstein, la potència total de radiació de l'element de volum del medi determinat és igual a

$$dP = dP_{21}^{sp} + dP_{21}^{st} - dP_{12}^{abs} = A_{21} \hbar\omega dN_2 + B_{21} \hbar\omega u(\omega) dN_2 - B_{12} \hbar\omega u(\omega) dN_1$$

La intensitat espectral  $I(\omega)$  es relaciona amb la densitat d'energia espectral de la manera següent:



$$dI(\omega) = \frac{dE(\omega)}{Sdt} = \frac{dE(\omega) \cdot dz}{dV \cdot dt} = u(\omega) \cdot c$$

i la intensitat total d'una font d'amplada de banda espectral (considerada estreta)  $\Delta\omega$  vé donada per  $I = I(\omega)\Delta\omega = cu(\omega)\Delta\omega$ . L'increment d'intensitat de la llum en la làmina  $dz$  és

$$dI = \frac{dP}{S} = \frac{dP}{dV} dz = \left[ A_{21}N_2 + B(N_2 - N_1) \frac{I}{c\Delta\omega} \right] \hbar\omega dz$$

on utilitzem la relació entre l'absorció i els coeficients estimulats. Si la intensitat s'amplifica de manera que es pugui ignorar el terme d'emissió espontània, obtindrem

$$dI = GI dz \rightarrow I(z) = I_0 e^{Gz}$$

on  $G$  és el coeficient de guany  $G = B(N_2 - N_1)\hbar\omega / c\Delta\omega$ .

Aquesta expressió mostra que l'amplificació de la llum només es produeix per  $N_2 > N_1$ . Aquesta condició, coneguda com *inversió de població*, és una condició necessària per aconseguir l'emissió làser. En condicions normals de radiació tèrmica, la població dels nivells d'energia més baixos és sempre més gran, de manera que el medi, en lloc d'amplificar-la, absorbeix la radiació incident.

Per tant, el primer requisit d'un làser és aconseguir la inversió de població. Això normalment s'aconsegueix il·luminant el medi actiu amb llum (bombeig òptic) mitjançant descàrregues elèctriques, corrents elèctrics o bé reaccions químiques.

Mitjançant un ressonador extern, es torna a injectar al medi la intensitat amplificada, aconseguint millorar el procés d'emissió estimulada fins al punt d'aconseguir una emissió de radiació estable. L'emissió làser requereix que el guany en el medi estigui per damunt de les pèrdues. Si prenem un sistema simple amb una longitud de cavitat  $L$  en què les pèrdues només són causades pels miralls de sortida del ressonador, amb valors de reflexió  $R_1$  i  $R_2$ , la condició de làser s'assoleix quan es compleixen les següents condicions.

Condició d'amplitud:  $R_1 R_2 e^{GL} \geq 1$

Condició de fase:  $L = n\lambda/2$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$

Resumint, un làser requereix un medi actiu en què s'aconsegueixi la inversió de població mitjançant el mecanisme de bombeig. La inversió de població produeix una gran quantitat de fotons a través d'un procés d'emissió estimulada que els emet en el mateix estat quàntic (direcció i fase), i els ressonadors externs produeixen una retroalimentació, que permet que el guany superi les pèrdues, obtenint així una emissió estable.

Cada tipus de làser es diferenciarà segons el medi de guany que utilitzin, la configuració de la cavitat implementada i l'esquema de bombeig.



Les característiques bàsiques de la radiació làser d'ona contínua (CW) són les següents:

- Alta monocromia: les amplades de banda relatives de l'ordre de  $\Delta\nu/\nu \sim 10^9$  són típiques per als làsers d'ona contínua; en sistemes estabilitzats es poden obtenir valors molt més grans.
- Alta direccionalitat: l'emissió làser de forces làsers s'apropa a un feix gaussià.
- Alta coherència espacial i temporal: possibilitat d'obtenir fenòmens d'interferència.

Moltes de les aplicacions actuals de la fotònica requereixen l'ús de fonts d'alta intensitat o amb polsos de durada ultracurta. Podem fer que els làsers emetin polsos a través d'un mecanisme de bloqueig de fase. Mitjançant aquestes i altres tècniques com l'amplificació de polsos amb xirp, en molts laboratoris podrem fer servir habitualment làsers que emeten polsos tan curts com uns pocs femtosegons o potències de TW/cm<sup>2</sup>. A la bibliografia, els lectors interessats hi podran trobar una sèrie de referències específiques que cobreixen àmpliament la teoria dels làsers.

## B. Radiació clàssica de dipols elementals

### Dipol elemental

Un dipol elèctric elemental està format per dues partícules carregades de manera oposada, separades a una distància petita. Donada la posició de la partícula carregada negativament respecte a la partícula carregada positivament ( $\vec{x}$ ), el moment dipolar elemental es defineix com  $\vec{p} = -q\vec{x} = p\hat{d}$ .



En electrodinàmica clàssica, l'emissió de radiació electromagnètica d'un dipol elemental s'obté a partir de les equacions de Maxwell a nivell microscòpic:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{e}(\vec{r}, t) = \frac{\rho(\vec{r}, t)}{\epsilon_0} \quad (1) \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{e}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial \vec{b}(\vec{r}, t)}{\partial t} \quad (3)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{b}(\vec{r}, t) = 0 \quad (2) \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{b}(\vec{r}, t) = \mu_0 \vec{j}(\vec{r}, t) + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{e}(\vec{r}, t)}{\partial t} \quad (4)$$

(!) A partir d'aquest punt no tindrem en compte la dependència espacial i temporal dels camps a les expressions.



## Potencials

D'acord amb les equacions (1) i (2), els camps elèctric i magnètic sempre es poden expressar en relació les següents funcions addicionals, que anomenem potencials electromagnètics

$$\text{Potencial vectorial } \vec{a} : \quad \vec{b} = \vec{\nabla} \wedge \vec{a} \quad (5)$$

$$\text{Potencial escalar} : \quad \vec{e} = -\vec{\nabla} \phi - \frac{\partial \vec{a}}{\partial t} \quad (6)$$

Substituint aquests potencials a les equacions de Maxwell (3) i (4), obtenim les equacions de moviment pels potencials:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi + \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \cdot \vec{a}) &= \frac{-\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla^2 \vec{a} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{a}}{\partial t^2} - \vec{\nabla} [\vec{\nabla} \cdot \vec{a} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial t}] &= -\mu_0 \vec{j} \end{aligned}$$

Els potencials electromagnètics no són únics, ja que podem utilitzar un parell de potencials determinat per definir un nou parell de potencials vàlids mitjançant la substitució

$$\begin{aligned} \vec{a}' &= \vec{a} + \vec{\nabla} \psi \\ \phi' &= \phi - \frac{\partial \psi}{\partial t} \end{aligned}$$

Cada selecció d'un  $(a, \phi)$  constitueix una transformació gauge.

Les transformacions més comunes són les següents.

$$\text{Gauge de Coulomb: } \vec{\nabla} \cdot \vec{a} = 0$$

$$\text{Gauge de Lorenz: } \vec{\nabla} \cdot \vec{a} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$$

En el gauge de Lorenz, les equacions de moviment dels potencials es poden escriure com

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} &= \frac{-\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla^2 \vec{a} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{a}}{\partial t^2} &= -\mu_0 \vec{j} \end{aligned}$$

Les solucions generals d'aquestes equacions s'expressen en funció dels potencials retardats:



$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}', t - R/c)}{R} d^3r' \quad \vec{a}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}', t - R/c)}{R} d^3r'$$

$$R = |\vec{r} - \vec{r}'|$$

Els problemes de radiació clàssica es poden resoldre amb aquestes equacions. A partir d'una distribució donada, es calculen els potencials i s'obté el camp electromagnètic resultant a partir de les equacions (5) i (6).

### Potencial de vector de Hertz

Podem obtenir la radiació dels dipols de manera alternativa a partir d'un nou potencial: el potencial de Hertz.

En les equacions dels potencials, els termes de partida els proporcionen les càrregues elementals i les densitats de corrent. Aquestes es posen sempre en relació a l'equació de continuïtat:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Per a un moment dipolar elèctric,  $\vec{p}$ , podem expressar les relacions corresponents com

$$\rho = -\vec{\nabla} \cdot \vec{p} \quad \text{and} \quad \vec{j} = \frac{\partial \vec{p}}{\partial t}$$

Definint un nou potencial ( $\vec{\Pi}$ ) a través de les relacions

$$\vec{a} = \mu_0 \frac{\partial \vec{\Pi}}{\partial t} \quad \text{i} \quad \phi = -\frac{\nabla \vec{\Pi}}{\epsilon_0}$$

obtenim una equació de moviment del nou potencial:

$$\nabla^2 \vec{\Pi} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{\Pi}}{\partial t^2} = -\vec{p} \quad \text{que té com a solució} \rightarrow \vec{\Pi}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\vec{p}(\vec{r}', t - R/c)}{R} d^3r'$$

Un cop s'ha trobat la solució per al potencial vectorial de Hertz, els vectors de camp elèctric i magnètic resultants s'obtenen com a

$$\vec{e}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\epsilon_0} \vec{\nabla}[\vec{\nabla} \cdot \vec{\Pi}(\vec{r}, t)] - \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{\Pi}(\vec{r}, t)}{\partial t^2}$$

$$\vec{b}(\vec{r}, t) = \mu_0 \left[ \vec{\nabla} \wedge \frac{\partial \vec{\Pi}(\vec{r}, t)}{\partial t} \right]$$

**Exemple: camp electromagnètic d'un dipol de Hertz elemental**

Prenem un dipol elèctric lineal elemental a la posició  $r_o$  oscil·lant al llarg d'una direcció fixa amb un moment dipolar corresponent expressat per la relació

$$\vec{p}(\vec{r}, t) = p(t) \delta(\vec{r} - \vec{r}_o) \hat{d}$$

La solució del potencial de Hertz associat a aquest moment dipolar és

$$\vec{\Pi}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi R} p(t - R/c) \hat{d} \quad R = |\vec{r} - \vec{r}_o|$$

Els camps elèctric i magnètic corresponents s'obtenen mitjançant la substitució directa a les expressions mostrades anteriorment:

$$\vec{e} = \frac{1}{\epsilon_o} \vec{\nabla}[\vec{\nabla} \cdot \vec{\Pi}] - \mu_o \frac{\partial^2 \vec{\Pi}}{\partial t^2}$$

$$\vec{e} = \frac{1}{\epsilon_o} \vec{\nabla}[\vec{\nabla} \cdot (\frac{p\hat{d}}{4\pi R})] - \mu_o \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\frac{p\hat{d}}{4\pi R})$$

(!) Simplificarem les expressions ometent la dependència  $(t - R/c)$  de  $p$

$$\vec{e} = \frac{1}{\epsilon_o} \vec{\nabla} \left[ \frac{(\vec{\nabla} p) \hat{d}}{4\pi R} + \frac{p \hat{d}}{4\pi} \vec{\nabla} \left( \frac{1}{R} \right) \right] - \mu_o \frac{\ddot{p} \hat{d}}{4\pi R}$$

(!) Tenim en compte que  $\hat{d}$  es constant i que  $\ddot{p}$  és una segona derivada temporal **avaluada en el temps retardat**.

Per avaluar aquestes expressions, fem servir les equivalències matemàtiques

$$\vec{\nabla} p(t - R/c) = \frac{\partial p}{\partial t} \left( \frac{-\vec{\nabla} R}{c} \right) = -\frac{\dot{p} \vec{R}}{cR} \quad i \quad \vec{\nabla} \left( \frac{1}{R} \right) = -\frac{\vec{R}}{R^3}$$

aleshores

$$\vec{e} = \frac{1}{4\pi \epsilon_o} \vec{\nabla} \left[ -\frac{\dot{p} \vec{R} \hat{d}}{cR^2} - \frac{p \hat{d} \vec{R}}{R^3} \right] - \mu_o \frac{\ddot{p} \hat{d}}{4\pi R} = \frac{-1}{4\pi \epsilon_o} \left[ \frac{(\vec{\nabla} \dot{p}) \hat{d} \vec{R}}{cR^2} + \frac{\dot{p} \vec{\nabla}(\hat{d} \vec{R})}{cR^2} + \frac{\dot{p} \hat{d} \vec{R}}{c} \vec{\nabla} \left( \frac{1}{R^2} \right) \right]$$

$$+ \frac{(\vec{\nabla} p) \hat{d} \vec{R}}{R^3} + \frac{p \vec{\nabla}(\hat{d} \vec{R})}{R^3} + p \hat{d} \vec{R} \vec{\nabla} \left( \frac{1}{R^3} \right) \Big] - \mu_o \frac{\ddot{p} \hat{d}}{4\pi R}$$

Ara, considerarem que

$$\vec{\nabla}(\hat{d} \vec{R}) = \hat{d} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{R}) + \vec{R} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \hat{d}) + (\hat{d} \vec{\nabla}) \vec{R} + (\vec{R} \vec{\nabla}) \hat{d} =$$

$$= (\hat{d} \vec{\nabla}) \vec{R} = (d_x \frac{\partial}{\partial x} + d_y \frac{\partial}{\partial y} + d_z \frac{\partial}{\partial z}) \vec{R} = \hat{d}$$



per obtenir

$$\begin{aligned}\bar{e} &= \frac{-1}{4\pi\epsilon_0} \left[ -\frac{\ddot{p}\bar{R}(\hat{d}\bar{R})}{c^2 R^3} + \frac{\dot{p}\hat{d}}{cR^2} + \frac{\dot{p}\hat{d}\bar{R}}{c} \left( \frac{-2\bar{R}}{R^4} \right) - \frac{\dot{p}\bar{R}(\hat{d}\bar{R})}{cR^4} + \frac{p\hat{d}}{R^3} + p\hat{d}\bar{R} \left( \frac{-3\bar{R}}{R^5} \right) \right] - \mu_0 \frac{\ddot{p}\hat{d}}{4\pi R} \\ \bar{e} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \left( \frac{\ddot{p}}{c^2 R^3} + \frac{3\dot{p}}{cR^4} + \frac{3p}{R^5} \right) \bar{R}(\hat{d}\bar{R}) - \left( \frac{p}{R^3} + \frac{\dot{p}}{cR^2} \right) \hat{d} \right] - \mu_0 \frac{\ddot{p}\hat{d}}{4\pi R} \\ \bar{e} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \left( \frac{\ddot{p}}{c^2 R} + \frac{3\dot{p}}{cR^2} + \frac{3p}{R^3} \right) \hat{R}(\hat{d}\hat{R}) - \left( \frac{p}{R^3} + \frac{\dot{p}}{cR^2} + \frac{\ddot{p}}{c^2 R} \right) \hat{d} \right]\end{aligned}$$

El camp magnètic resultant es calcula a partir de l'expressió

$$\begin{aligned}\bar{b}(\bar{r}, t) &= \mu_0 \left[ \bar{\nabla} \wedge \frac{\partial \bar{\Pi}(\bar{r}, t)}{\partial t} \right] \\ \bar{b} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \bar{\nabla} \wedge \frac{\dot{p}\hat{d}}{R} \right) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{\dot{p}}{R} \bar{\nabla} \wedge \hat{d} + \bar{\nabla} \left( \frac{\dot{p}}{R} \right) \wedge \hat{d} \right) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left( (\bar{\nabla}\dot{p}) \frac{1}{R} \wedge \hat{d} + \dot{p} \bar{\nabla} \left( \frac{1}{R} \right) \wedge \hat{d} \right) \\ \bar{b} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{-\dot{p}(\bar{R} \wedge \hat{d})}{cR^2} - \frac{\dot{p}(\bar{R} \wedge \hat{d})}{R^3} \right) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{\dot{p}}{cR} + \frac{\dot{p}}{R^2} \right) (\hat{d} \wedge \hat{R})\end{aligned}$$

Resumint, el camp electromagnètic d'un dipol de Hertz és

$$\boxed{\begin{aligned}\bar{e} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \left( \frac{\ddot{p}}{c^2 R} + \frac{3\dot{p}}{cR^2} + \frac{3p}{R^3} \right) \hat{R}(\hat{d}\hat{R}) - \left( \frac{p}{R^3} + \frac{\dot{p}}{cR^2} + \frac{\ddot{p}}{c^2 R} \right) \hat{d} \right] \\ \bar{b} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{\dot{p}}{cR} + \frac{\dot{p}}{R^2} \right) (\hat{d} \wedge \hat{R})\end{aligned}} \quad \hat{R} = \frac{\bar{R}}{R}$$

En la zona de radiació (per a la qual  $l \ll \lambda \ll R$ ), els únics termes que fan una contribució significativa són aquells que són proporcionals a  $(1/R)$ . En aquesta zona, podem escriure els camps de radiació com

$$\boxed{\begin{aligned}\bar{e}_{rad} &= \frac{\mu_0 \ddot{p}}{4\pi R} [\hat{R}(\hat{d}\hat{R}) - \hat{d}] = \frac{\mu_0 \ddot{p}}{4\pi R} (\hat{R} \wedge (\hat{R} \wedge \hat{d})) \\ \bar{b}_{rad} &= \frac{\mu_0 \dot{p}}{4\pi cR} (\hat{d} \wedge \hat{R})\end{aligned}}$$

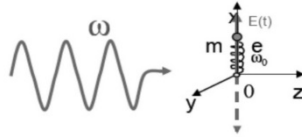
Aquest camp es pot escriure en funció de les direccions unitàries dels camps elèctric i magnètic:

$$\boxed{\begin{aligned}\bar{e}_{rad} &= \frac{\mu_0 \ddot{p} \sin \theta}{4\pi R} \hat{e} \\ \bar{b}_{rad} &= \frac{\mu_0 \dot{p} \sin \theta}{4\pi cR} \hat{b}\end{aligned}} \quad \begin{aligned}\hat{e} &= (\cos \theta \cos \phi \hat{x} + \cos \theta \sin \phi \hat{y} - \sin \theta \hat{z}) \\ \hat{b} &= (-\sin \phi \hat{x} + \cos \phi \hat{y}) \\ \hat{R} &= (\sin \theta \cos \phi \hat{x} + \sin \theta \sin \phi \hat{y} + \cos \theta \hat{z}) \\ \hat{d} &= \hat{z}\end{aligned}$$



### C. Model de Lorentz d'oscil·lació de l'electró

En el model de Lorentz d'oscil·lació de l'electró s'estudia l'acció d'un camp elèctric incident sobre un àtom prenent en compte el moviment oscil·latori impulsat del núvol electrònic, la qual cosa dóna lloc a un moment dipolar i un vector de polarització donats:



Les suposicions bàsiques d'aquest model són les següents.

- L'electró es mou respecte a la seva posició d'equilibri amb un potencial  $U(x)$ , que es pot expandir en una sèrie de Taylor:

$$U(x) = U(0) + x \left( \frac{dU}{dx} \right)_{x=0} + \frac{1}{2} x^2 \left( \frac{d^2U}{dx^2} \right)_{x=0} + \frac{1}{3!} x^3 \left( \frac{d^3U}{dx^3} \right)_{x=0} + \dots$$

- El moviment de l'electró és amortit per l'efecte de les pèrdues de radiació, que s'inclouen fenomenològicament en el model a través d'un terme de fricció:

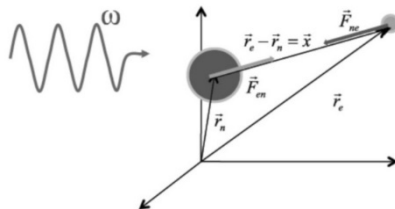
$$\vec{F}_{fr} = -b \frac{d\vec{x}(t)}{dt}$$

- El moviment de l'electró és impulsat externament pel camp elèctric (un model més refinat també inclou el terme de força magnètica, que és molt més petit que l'efecte del camp elèctric sota l'aproximació dipolar elèctrica; la inclusió del camp magnètic introdueix una resposta no lineal):

$$\vec{F}_{ext} = -q \cdot \vec{E}$$

(!)  $q$  és la carrega del protó,  $q = 1,602 \times 10^{19} \text{ C}$

Per obtenir les equacions bàsiques que regeixen el moviment electrònic, partim del següent model de la interacció d'un sistema (electró-protó) amb un camp elèctric incident:





Centre de masses:  $\vec{R} = \frac{m_e \vec{r}_e + m_n \vec{r}_n}{m_e + m_n}$

Posició relativa de l'electró respecte al nucli (protó):  $\vec{x} = \vec{r}_e - \vec{r}_n$ .

Equacions de moviment sota l'acció del camp aplicat:

$$\begin{aligned} m_n \frac{d^2 \vec{r}_n}{dt^2} &= q \vec{E}(\vec{r}_n, t) + \vec{F}_{en}(\vec{x}) \\ m_e \frac{d^2 \vec{r}_e}{dt^2} &= -q \vec{E}(\vec{r}_e, t) + \vec{F}_{ne}(\vec{x}) \end{aligned}$$

on  $\vec{F}_{en}(\vec{x}) = -\vec{F}_{ne}(\vec{x})$  és la força de Coulomb entre l'electró i el protó.

En termes del centre de masses i la posició relativa de l'electró, aquestes equacions es poden escriure com a

$$\begin{aligned} M \frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} &= -q \left[ \vec{E}(\vec{R} + m_n \vec{x} / M, t) - \vec{E}(\vec{R} - m_e \vec{x} / M, t) \right] \\ m \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} &= -q \left[ \frac{m_n}{M} \vec{E}(\vec{R} + m_n \vec{x} / M, t) + \frac{m_e}{M} \vec{E}(\vec{R} - m_e \vec{x} / M, t) \right] + \vec{F}_{ne}(\vec{x}) \end{aligned}$$

on  $M$  és la massa total  $M = m_n + m_e$ , i  $m$  és la massa reduïda del sistema  $m = m_e m_n / M \approx m_e$ .

En el domini òptic, la variació de l'amplitud del camp sobre distàncies molt més petites que la longitud d'ona es pot considerar molt petita (dimensions atòmiques i moleculars típiques). Podem expandir el camp elèctric com una sèrie de Taylor respecte de la posició del centre de masses:

$$\begin{aligned} M \frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} &\approx -q \vec{x} \cdot \nabla \vec{E}(\vec{R}, t) = \vec{\varphi} \cdot \nabla \vec{E}(\vec{R}, t) \\ m \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} &\approx -q \vec{E}(\vec{R}, t) + \vec{F}_{ne}(\vec{x}) + \frac{m_n - m_e}{M} \vec{\varphi} \cdot \nabla \vec{E}(\vec{R}, t) \end{aligned}$$

En l'aproximació del dipol elèctric, el camp és constant per tota dimensió de l'àtom, donant-nos el terme  $\vec{\varphi} \cdot \nabla \vec{E}(\vec{R}, t) \approx 0$ . Partint d'aquesta suposició, el camp elèctric no altera el centre de masses i l'equació de moviment de la posició de l'electró es simplifica a

$$m \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = -q \vec{E}(\vec{R}, t) + \vec{F}_{ne}(\vec{x})$$

Quan l'electró és pertorbat per l'acció del camp elèctric extern, l'efecte de la força interna (interacció de Coulomb) entre l'electró i el nucli es pot assumir que l'electró



respon al camp extern com si estigués lligat al seu nucli per un potencial harmònic  $U(x)$  que ja hem definit més amunt. Així doncs:

$$\vec{F}_{ne}(\vec{x}) = -\vec{\nabla}U(x) = -x \left( \frac{d^2U}{dx^2} \right)_{x_0} - \frac{1}{2}x^2 \left( \frac{d^3U}{dx^3} \right)_{x_0} + \dots$$

Quan el camp elèctric extern és prou feble, la interacció és lineal i només és rellevant el primer terme. Per camps més forts, l'electró està sotmès a interaccions no lineals i haurem d'incloure més termes. Com que les derivades s'avaluen al voltant de la posició d'equilibri del moviment no pertorbat de l'electró, que correspon a un punt d'equilibri estable, la segona derivada és positiva i la escrivim com a

$$\left( \frac{d^2U}{dx^2} \right)_{x_0} = m\omega_o^2$$

Tal i com hem vist anteriorment, el moviment de l'electró es veu amortit per l'efecte de les pèrdues de radiació, que s'inclouen fenomenològicament en aquest model clàssic a través d'un terme de fricció. Tenint tot això en compte, obtenim l'expressió final del model de Lorentz en l'aproximació del dipol elèctric

$$m \frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = -q\vec{E}(\vec{R}, t) - m\omega_o^2\vec{x} - b \frac{d\vec{x}}{dt}$$

Això sovint s'escriu en la forma

$$\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} + \gamma \frac{d\vec{x}}{dt} + \omega_o^2\vec{x} = \frac{-q\vec{E}(\vec{R}, t)}{m}$$

amb  $\gamma = b/m$

## D. Propietats bàsiques de les transformades de Fourier

Podem expressar una funció complexa determinada  $E(t)$  com una superposició en base a funcions complexes exponencials:

$$E(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}(\omega) \exp(-i\omega t) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}(f) \exp(-i2\pi ft) df$$

La funció  $E(\omega)$  correspon al pes per cada freqüència i és la transformada de Fourier de  $E(t)$ , amb una variable que és la freqüència  $\omega$  (rad/s) o  $f$  (Hz). La relació entre  $E(t)$  i  $E(\omega)$  es pot invertir per tal d'obtenir

$$\begin{aligned} \tilde{E}(\omega) &= FT[E(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} E(t) \exp(i\omega t) dt \\ E(t) &= FT^{-1}[\tilde{E}(\omega)] \end{aligned}$$

### Propietats bàsiques

- **Linealitat:** Donades dues funcions complexes  $G(t)$  i  $H(t)$  i dos escalars  $a, b$ , llavors

$$FT[aG(t) + bH(t)] = aFT[G(t)] + bFT[H(t)] = a\tilde{G}(\omega) + b\tilde{H}(\omega)$$

- **Similaritat:**  $FT[G(at)] = \frac{1}{|a|} \tilde{G}\left(\frac{\omega}{a}\right)$

- **Desplaçament temporal/freqüencial:**  $FT[G(t - a)] = \tilde{G}(\omega) \exp(i\omega a)$   
 $FT^{-1}[\tilde{G}(\omega - b)] = G(t) \exp(-ibt)$

- **Teorema de Parseval:**  $\int_{-\infty}^{\infty} |G(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{G}(\omega)|^2 d\omega$

- **Teorema de convolució:**

$$FT[G(t) * H(t)] = FT[G(t)]FT[H(t)] = \tilde{G}(\omega)\tilde{H}(\omega)$$

on el símbol \* es refereix a l'operació de convolució

$$G(t) * H(t) = \int G(t')H(t - t')dt'$$

- **Teorema de la integral de Fourier:**

$$FT[FT^{-1}[\tilde{G}(\omega)]] = FT[G(t)] = \tilde{G}(\omega)$$

$$FT^{-1}[FT[G(t)]] = FT^{-1}[\tilde{G}(\omega)] = G(t)$$

### Parelles bàsiques de Transformades de Fourier

$G(t)$	$G(\omega)$
$\cos(\omega_0 t)$	$\frac{1}{2}[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$
$rect(t) = \begin{cases} 1 \rightarrow  t  \leq 1/2 \\ 0 \rightarrow  t  > 1/2 \end{cases}$	$\text{sinc}(\omega/2) = \frac{\sin(\omega/2)}{\omega/2}$
$\exp(-t^2)$	$\sqrt{\pi} \exp(-\omega^2/4)$

Una integral útil que es relaciona amb les funcions gaussianes:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-Ax^2} e^{-2Bx} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{A}} \exp\left(\frac{B^2}{A}\right); \quad \text{Re}(A) > 0$$



## E. Patró de difracció d'una obertura circular

El patró de difracció d'una obertura circular es pot trobar a partir d'aquesta expressió general

$$E(x, y, z) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{\frac{ikr^2}{2z}} \left[ \tilde{E}(f_x, f_y, 0) \right]_{\substack{f_x = \lambda x/z \\ f_y = \lambda y/z}}$$

La funció de transmitància d'una obertura circular de radi  $r_o$  és

$$\text{circ}(r / r_o) = \begin{cases} 1 \rightarrow r \leq r_o \\ 0 \rightarrow r > r_o \end{cases}$$

Així, la distribució de camp si l'obertura és il·luminada per una ona plana uniforme és  $E(x, y, 0) = A \text{circ}(r / r_o)$ .

Calculem primer la transformada de Fourier de l'obertura circular:

$$\tilde{E}(f_x, f_y, 0) = \iint A \text{circ}(r / r_o) e^{-i2\pi(f_x x + f_y y)} dx dy$$

Per resoldre aquesta integral, és millor fer servir coordenades polars:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta & f_x &= f_r \cos \phi \\ y &= r \sin \theta & f_y &= f_r \sin \phi \end{aligned}$$

$$\tilde{E}(f_r, 0) = \iint A \text{circ}(r / r_o) e^{-i2\pi f_r (\cos \theta \cos \phi + \sin \theta \sin \phi)} r d\theta dr$$

$$\tilde{E}(f_r, 0) = \int_0^{\infty} A \text{circ}(r / r_o) r dr \int_0^{2\pi} e^{-i2\pi f_r (\cos \theta \cos \phi + \sin \theta \sin \phi)} d\theta$$

La solució de la segona integral inclou la funció de Bessel d'ordre zero:

$$\int_0^{2\pi} e^{-i2\pi f_r \cos(\theta - \phi)} d\theta = 2\pi J_0(2\pi f_r)$$

Introduint aquesta solució, tenim que

$$\tilde{E}(f_r, 0) = \int_0^{r_o} A r 2\pi J_0(2\pi f_r) dr$$

Això es resol aplicant el següent canvi de variables:

$$x = 2\pi f_r \rightarrow r = \frac{x}{2\pi f_r} \rightarrow dr = \frac{dx}{2\pi f_r}$$

$$\tilde{E}(f_r, 0) = \int_0^{2\pi r_0 f_r} A \frac{x}{f_r} J_0(x) \frac{dx}{2\pi f_r} = \frac{A}{2\pi f_r^2} \int_0^{x_0=2\pi r_0 f_r} x J_0(x) dx = \frac{A r_0}{f_r} J_1(2\pi r_0 f_r)$$

on hem fet servir la següent solució a partir de funcions de Bessel de primer ordre:

$$\int_0^{x_0} x J_0(x) dx = x_0 J_1(x_0)$$

Així, el patró de difracció de Fraunhofer de l'obertura circular s'expressa com

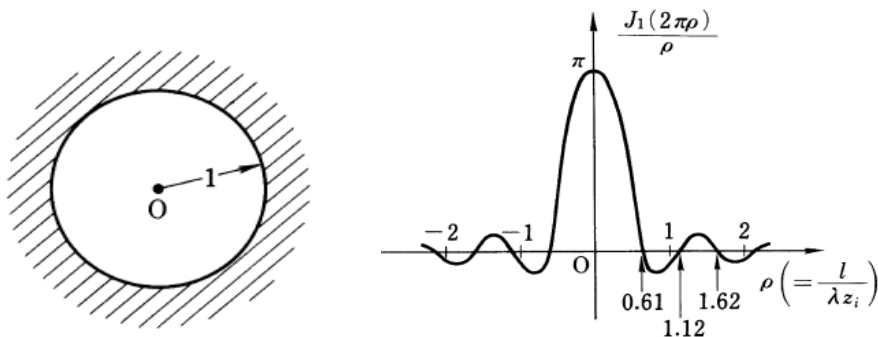
$$E(x, y, z) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{\frac{ikr^2}{2z}} \left[ \tilde{E}(f_x, f_y, 0) \right]_{\substack{f_x = \lambda x/z \\ f_y = \lambda y/z}} = \frac{A e^{ikz}}{i\lambda z} e^{\frac{ikr^2}{2z}} \left[ \frac{r_0}{f_r} J_1(2\pi r_0 f_r) \right]_{f_r = r/\lambda z}$$

$$E(x, y, z) = \frac{A e^{ikz}}{i\lambda z} e^{\frac{ikr^2}{2z}} r_0 \frac{J_1(2\pi r_0 r / \lambda z)}{r r_0 / \lambda z}$$

El patró de difracció és proporcional a la funció d'Airy:  $\frac{J_1(2\pi x)}{x}$

Aquesta funció té els primers zeros a  $x = \pm 0.61 \rightarrow r = \pm \frac{0.61 \lambda z}{r_0}$

D'aquesta manera, el patró de difracció d'una obertura circular de radi  $r_0$  és una funció d'Airy, amb un diàmetre entre zeros de  $\phi = 2r = \frac{1.22 \lambda z}{r_0}$ .



Patró de difracció d'una obertura circular



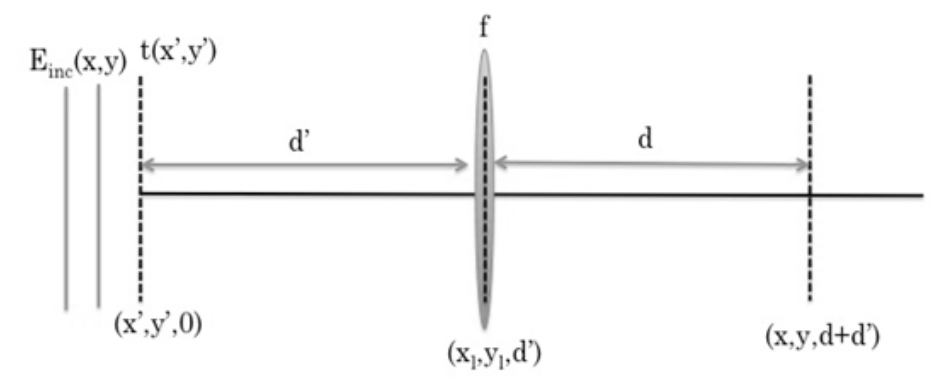
## F. Transformades de Fourier mitjançant lents

En aquest apèndix, mostrarem que podem obtenir una implementació òptica de la transformada de Fourier mitjançant lents individuals i aplicant la fórmula de difracció de Fresnel.

Prenem la propagació d'una distribució de camp general que està generada per un objecte amb una funció de transmitància arbitrària il·luminada per un camp incident:

$$E(x', y') = E_{inc}(x', y', 0) \cdot t(x', y')$$

L'objecte se situa a una distància  $d'$  a l'esquerra d'una lent de distància focal  $f$ , i volem determinar el camp resultant a una distància  $d$  a la dreta de la lent.



Després de la propagació del camp inicial per una distància  $d'$ , la distribució de camp just abans de la lent s'obté mitjançant la fórmula de difracció de Fresnel:

$$E(x_l, y_l, d') = \frac{e^{ikd'} e^{\frac{k}{2d'}(x_l^2 + y_l^2)}}{i\lambda_m d'} \int_{-\infty}^{\infty} \int E(x', y', 0) e^{i\frac{k}{2d'}(x'^2 + y'^2)} e^{-i\frac{2\pi}{\lambda_m d'}(x'x_l + y'y_l)} dx' dy'$$

on  $(x_l, y_l)$  corresponen als punts del pla just abans de la lent. La lent introdueix una dependència quadràtica de fase en el feix òptic, com ja hem vist al capítol 2 (aquest resultat es va derivar a l'aproximació paraxial, que també es compleix en les condicions de Fresnel). Si suposem que la lent no introdueix variacions d'intensitat (no hi ha reflexió ni absorció), la transmitància per part de la lent és

$$t(x_l, y_l) = e^{ikD} e^{-i\frac{k}{2f}(x_l^2 + y_l^2)}, \text{ sent } D \text{ el gruix de la lent.}$$

El camp a la sortida de la lent és

$$E_{out}(x_l, y_l, d') = E(x_l, y_l, d') \cdot t(x_l, y_l) \cdot P(x_l, y_l)$$



on  $P(x_l, y_l)$  és la funció pupil·la de la lent i té en compte la mida finita de l'obertura. Si suposem que la lent és prou gran, l'efecte d'aquesta pupil·la es pot ignorar, de manera que  $P = 1$ .

Aplicant de nou la fórmula de Fresnel, el camp que surt de la lent a una distància  $d$  serà

$$E(x, y, d + d') = \frac{e^{ikd} e^{i\frac{k}{2d}(x^2+y^2)}}{i\lambda_m d} \int \int_{-\infty}^{\infty} E_{out}(x_l, y_l, d') e^{i\frac{k}{2d}(x_l^2+y_l^2)} e^{-i\frac{2\pi}{\lambda_m d}(x_l x + y_l y)} dx_l dy_l$$

Utilitzant les expressions anteriors, el camp es pot escriure en base al camp inicial:

$$E(x, y, d + d') = \frac{e^{ikD} e^{ik(d'+d)} e^{i\frac{k}{2d}(x^2+y^2)}}{-\lambda_m^2 dd'} \int \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int \int_{-\infty}^{\infty} E(x', y', 0) e^{i\frac{k}{2d'}(x'^2+y'^2)} e^{-i\frac{2\pi}{\lambda_m d'}(x'x_l + y'y_l)} dx' dy' \right\} e^{i\frac{k}{2}\left[\frac{1}{d} + \frac{1}{d'} - \frac{1}{f}\right](x_l^2 + y_l^2)} e^{-i\frac{2\pi}{\lambda_m d}(x_l x + y_l y)} dx_l dy_l$$

Definim  $\frac{1}{w} = \frac{1}{d'} + \frac{1}{d} - \frac{1}{f}$  i canviem l'ordre d'integració per obtenir

$$E(x, y, d + d') = \frac{e^{ikD} e^{ik(d'+d)} e^{i\frac{k}{2d}(x^2+y^2)}}{-\lambda_m^2 d' d} \int \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\frac{k}{2w}(x_l^2+y_l^2)} e^{-i\frac{2\pi}{\lambda_m}\left[\frac{x'}{d'} + \frac{x}{d}\right]x_l + \left[\frac{y'}{d'} + \frac{y}{d}\right]y_l} dx_l dy_l \right\} \cdot E(x', y', 0) e^{i\frac{k}{2d'}(x'^2+y'^2)}$$

La integral entre claudàtors és del tipus  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-Ax^2} e^{-2Bx} dx$ , i es pot avaluar fàcilment com vam fer en capítols anteriors:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\frac{k}{2w}x_l^2} e^{-i\frac{2\pi}{\lambda_m}\left(\frac{x'}{d'} + \frac{x}{d}\right)x_l} dx_l \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\frac{k}{2w}y_l^2} e^{-i\frac{2\pi}{\lambda_m}\left(\frac{y'}{d'} + \frac{y}{d}\right)y_l} dy_l = i\lambda_m w e^{-i\frac{kw}{2}\left[\left(\frac{x'}{d'} + \frac{x}{d}\right)^2 + \left(\frac{y'}{d'} + \frac{y}{d}\right)^2\right]}$$

Expandint els claudàtors i reordenant els termes, obtenim l'expressió

$$E(x, y, d + d') = \frac{w}{i\lambda_m dd'} e^{ik(D+d+d')} e^{i\frac{k}{2d}\left(1 - \frac{w}{d}\right)(x^2+y^2)} \cdot \int \int_{-\infty}^{\infty} E(x', y', 0) e^{i\frac{k}{2d'}\left(1 - \frac{w}{d'}\right)(x'^2+y'^2)} e^{-i2\pi(f_x x' + f_y y')} dx' dy' \Big|_{f_x = \frac{xw}{\lambda_m dd'}, f_y = \frac{yw}{\lambda_m dd'}}$$

Aquest és un resultat general que relaciona els camps per  $z = 0$  i  $z = d + d'$ . Quan el pla d'observació després de la lent és el pla focal de la lent (és a dir, quan  $d = f$ ), obtenim el resultat clau



$$d = f \rightarrow w = d'$$

$$E(x, y, d + d') = \frac{w e^{ik(D+d'+d)}}{i\lambda_m d' d} e^{i\frac{k}{2f}(1-\frac{d'}{f})(x^2+y^2)}$$

$$\cdot \int_{-\infty}^{\infty} \int E(x', y', 0) e^{-i2\pi(f_x x' + f_y y')} dx' dy' \Big|_{f_x = \frac{x}{\lambda_m f}; f_y = \frac{y}{\lambda_m f}}$$

**El camp al pla focal d'una lent correspon a la transformada de Fourier del camp incident, que s'avalua a  $f_x = x/\lambda_m f$ ;  $f_y = y/\lambda_m f$  i es multiplica per un factor de fase quadràtic.**

En el cas particular de  $d = d' = f$ , el factor quadràtic s'anul·la i obtenim

$$\boxed{E(x, y, f + f) = A \tilde{E}(f_x, f_y, 0) \Big|_{f_x = x/\lambda_m f; f_y = y/\lambda_m f}} \quad A = \frac{w e^{ik(D+d'+d)}}{i\lambda_m d' d}$$



